VEKTORGEOMETRI

Christian Gottlieb

Matematiska institutionen
Stockholms universitet
2:a upplagan 2001
2014

Förord

Detta kompendium har sedan några år använts i utbildningen av grundskolelärare i matematik vid Stockholms universitet. Förhoppningsvis kan denna obetydligt reviderade andra upplaga komma till användning också inom den nya lärarutbildningen. Tanken är att läsaren i stor utsträckning skall kunna arbeta självständigt med texten. Till läsarens hjälp med detta finns sex stycken separata arbetsblad. Arbetsbladen innehåller läsanvisningar och förståndsfrågor till texten. Avsikten med dessa är att stimulera den studerande att läsa med eftertanke och med tonvikt på begreppsförståelse. Avsikten är också att träna den studerandes förmåga att uttrycka sig i tal och skrift samt att diskutera matematik.

December 2001

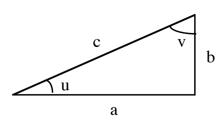
Christian Gottlieb

INNEHÅLL

1. Trigonometri

Detta kapitel inleds med de mest elementära grunderna i trigonometri och avslutas med cosinussatsen. Det är viktigt för förståelsen av senare avsnitt att du tränar upp en viss färdighet i trigonometri. Det kan därför vara klokt att ofta återvända till texten och övningarna i detta kapitel.

Vi repeterar först begreppen sinus, cosinus och tangens med hjälp av nedanstående rätvinkliga triangel, där u är en vinkel mellan 0 och 90 grader.



Med beteckningar enligt figuren definierar vi: $\sin u = \frac{b}{c}$, $\cos u = \frac{a}{c}$ och $\tan u = \frac{b}{a}$. Vi har alltså $\tan u = \sin u / \cos u$. Innan du går vidare bör du rita en egen rätvinklig triangel med samma vinklar u och v som i min men med sidorna a', b' och c'. Med din triangel som utgångspunkt får du andra uttryck för $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$. Övertyga dig om att de nya uttrycken ger samma värden som mina d.v.s. att $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ helt är bestämda av vinkeln u.

I figuren har jag också markerat vinkeln v. Uttryck på egen hand $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ i sidorna a, b, c. Lös därefter följande uppgifter.

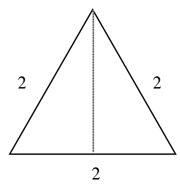
Övning 1. Visa att $\sin(90° - u) = \cos u$ och $\cos(90° - u) = \sin u$.

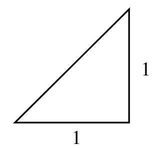
Övning 2. Härled en formel för $\tan(90° - u)$.

Övning 3. Visa den ”trigonometriska ettan” $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, (där $\cos^2 u = (\cos u)^2$ och $\sin^2 u = (\sin u)^2$).

Sambanden i dessa övningar är mycket användbara och innebär inte någon ”utantill-belastning”. Har du övat dig att härleda dessa samband och förstå dem är de s.a.s. omedelbara ur figurerna ovan. Än så länge har vi inte visat dessa formler för $u \geq 90°$ — vi har inte ens definierat begreppen för sådana vinklar. Men det kommer strax.

I allmänhet kan vi inte förenkla uttryck som $\sin u$, men man bör lära sig några fall där $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ blir rationella tal (eller går att uttrycka lätt med ett rottecken). Betrakta följande två figurer, en liksidig triangel med en höjd inritad och en likbent rätvinklig triangel.





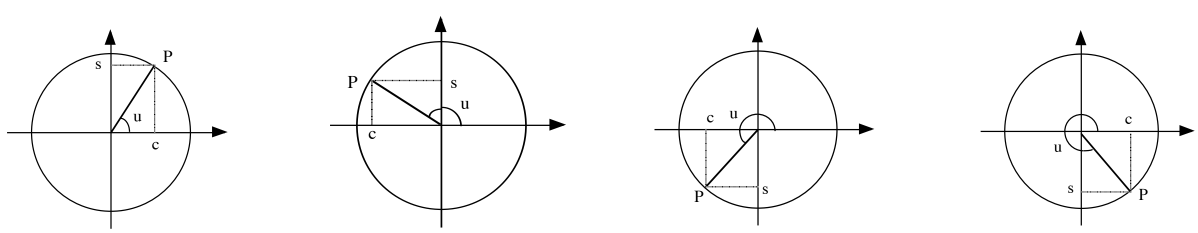
Börja med att beräkna höjden i den liksidiga triangeln och hypotenusan i den rätvinkliga. Lös sedan följande uppgift.

Övning 4. Beräkna $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ för $u = 30°, 45°$ resp. $60°$.

Om du delar den liksidiga triangeln längs med höjden får du två ”halva liksidiga trianglar”. Det går bra (och är ofta en fördel) att arbeta med en halv liksidig triangel, som du snart kommer att märka.

Variera vinkeln u i vår första figur (men behåll c oförändrad). Undersök hur $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ varierar när u ökar resp. minskar. Vad händer när u är nära $0°$ eller nära $90°$? Föreslå värden på $\cos 0°$, $\sin 0°$, $\cos 90°$ och $\sin 90°$.

Begreppen sinus, cosinus och tangens för trubbiga vinklar inför vi bekvämast med hjälp av den välbekanta enhetscirkeln, som har radie 1 och medelpunkt i origo i ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem.



Betrakta först figuren längst till vänster. Här är $0° < u < 90°$. Eftersom cirkelns radie är 1 är cosinus och sinus helt enkelt basen respektive höjden i den rätvinkliga triangel vi ritat. Dessa tal kan avläsas på axlarna (x- resp. y-axeln) vid c resp. s. Vi kan också uttrycka detta så, att punkten P har koordinaterna $(\cos u, \sin u)$.

Detta använder vi som en allmän definition: Till varje vinkel u hör en punkt P på enhetscirkeln. Denna punkt har koordinaterna (c, s), se figurerna för några exempel. *Vi definierar* $\cos u = c$ och $\sin u = s$.

Övning 5. Låt u öka från $0°$ till $360°$ (och P röra sig längs enhetscirkeln). Avgör för vilka värden på u som $\cos u$ är positivt resp. negativt.

Övning 6. Genomför samma övning för $\sin u$.

Övning 7. Tänk igenom varför trigonometriska ettan (se Övning 3) gäller för alla u.

Tangens definierar vi på följande sätt: $\tan u = \sin u / \cos u$, men här måste vi förutsätta att u är sådan att $\cos u \neq 0$. För övriga värden på u, d.v.s. då $\cos u = 0$, är $\tan u$ odefinierat.

Tänk igenom för vilka u mellan $0°$ och $360°$ som $\tan u$ inte är definierat och vilka lägen på enhetscirkeln detta motsvarar!

I vissa fall kan vi förenkla $\cos u$, $\sin u$ eller $\tan u$ genom att använda lämpliga (halva) liksidiga trianglar eller likbenta rätvinkliga trianglar. Gör Övning 4 en gång till och sedan följande uppgift.

Övning 8. Beräkna $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ för $u = 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°$.

Man kan tänka sig att $u > 360°$ eller $u < 0°$ också, men det ger oss inte några nya lägen på enhetscirkeln. Så svarar t.ex. $-120°$, $240°$ och $600°$ alla mot samma punkt. Talen -120, 240 och 600 är lika "modulo 360". Rita figur.

Vi skall nu utöka den repertoar av formler, som vi påbörjade i Övning 1–3.

Övning 9. Finn med hjälp av enhetscirkeln samband mellan $\cos u$ och $\cos(-u)$ samt mellan $\sin u$ och $\sin(-u)$.

Övning 10. Markera i enhetscirkeln en vinkel u och vinkeln $u + 180°$. Finn samband mellan $\cos u$, $\sin u$, $\cos(u + 180°)$, $\sin(u + 180°)$.

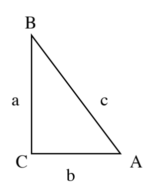
Övning 11. Markera i enhetscirkeln en vinkel u och vinkeln $u + 90°$. Finn samband mellan $\cos u$, $\sin u$, $\cos(u + 90°)$, $\sin(u + 90°)$.

Övning 12. Visa att formlerna i Övning 1 gäller även för $u > 90°$. (Ledning: Det kan vara svårt att rita här. En möjlighet är att kombinera formlerna i Övning 9 – 11.)

Jag betonar igen att det är svårt att klara sig utan dessa grundläggande enkla samband, samt att det inte är fråga om en utantillkunskap. Det handlar om att öva upp förmågan att "ta fram" formlerna ur figurerna när de behövs. Du kommer snart att finna att det går fortare, är mer lärorikt och roligare än att leta efter formlerna i en formelsamling. Det finns många andra trigonometriska formler (för $\sin(u + v)$, $\cos 3u$ etc.) som är betydligt knepigare att härleda. I sådana fall kan en liten formelsamling onekligen vara till hjälp.

Vi skall avsluta detta med en användbar sats, cosinussatsen, som vi kommer att återkomma till i samband med vektorer.

Vi påminner först om Pythagoras sats: i den rätvinkliga triangeln gäller $c^2 = a^2 + b^2$:

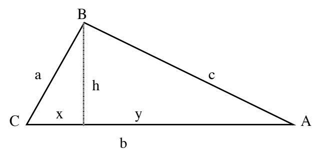


Antag nu att a och b är som i figuren, men att vinkeln C inte är rät. Blir då sidan c större eller mindre? Eller hur blir det? Tänk en stund på detta innan du går vidare till nästa sats.

Cosinussatsen. *Låt a, b, c vara sidorna som står mot hörnen A, B, C i en triangel $\triangle ABC$. Då gäller*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Bevis. (se dock Övning 13 – 14) Vi använder beteckningar enligt följande figur.



Vi får $x = a\cos C$ och alltså $y = b - a\cos C$. Vidare är $h = a\sin C$. Pythagoras sats ger nu $c^2 = h^2 + y^2 = a^2\sin^2 C + (b - a\cos C)^2 = a^2\sin^2 C + b^2 + a^2\cos^2 C - 2ab\cos C = a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, vilket skulle bevisas. Lägg märke till att vi här använde trigonometriska ettan (se Övning 3).

Övning 13. Försök upprepa beviset på egen hand. Tänk sedan efter om beviset är fullständigt eller om det finns någon ”hake”.

Övning 14. Figuren (och resonemanget) förutsätter att $C < 90°$. Rita en figur, och genomför beviset, för fallet $C > 90°$.

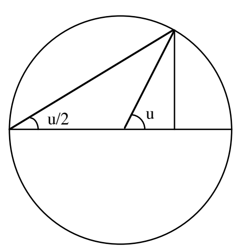
Övning 15. Två sidor i en triangel är 3 resp. 6 och mellanliggande vinkel är 150°. Beräkna den tredje sidan.

Övning 16. I triangeln $\triangle ABC$ är $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ och $|AC| = 6$. Beräkna $\cos A$, $\cos B$ och $\cos C$.

Till slut några extra, mindre rutinartade, övningar.

Övning 17. Låt $0° < u < 90°$ och låt P vara motsvarande punkt på enhetscirkeln. Drag tangenten till enhetscirkeln i punkten P och låt Q vara tangentens skärningspunkt med x-axeln. Visa att $\tan u = |PQ|$. Hur blir det om u istället är trubbig?

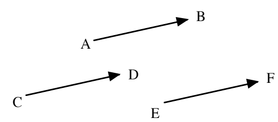
Övning 18. Härled formler för $\sin\frac{u}{2}$, $\cos\frac{u}{2}$ med hjälp av figuren. Eventuellt kan du ha nytta av sambandet $\sin^2 u = (1 - \cos u)(1 + \cos u)$ (som du lätt visar) till att förenkla formeln så långt möjligt.



Övning 19. Använd formlerna i Övning 18 till att beräkna $\sin 15°$ och $\cos 15°$.

2. Elementär vektorgeometri

Inledning.



Figuren visar tre *riktade sträckor*: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ och $\overrightarrow{EF}$. Varje sträcka, i planet eller rummet, kan riktas på två olika sätt och svarar alltså mot två riktade sträckor. Sträckan AB t.ex. kan riktas som $\overrightarrow{AB}$ eller $\overrightarrow{BA}$. Observera att alltså $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ (de är motsatt riktade) men att $AB = BA$ (det är fråga om samma sträcka).

Som du ser är de riktade sträckorna i figuren lika långa, $|AB| = |CD| = |EF|$, och dessutom *lika riktade* (inte bara parallella). Vi skall uttrycka det så att de riktade sträckorna är *ekvivalenta*. Ekvivalenta riktade sträckor är alltså lika långa och lika riktade. Däremot kan de vara placerade på olika ställen (i planet eller i rummet). Komplettera själv figuren med ytterligare riktade sträckor som är ekvivalenta med de givna.

Att de riktade sträckorna är ekvivalenta skall vi också uttrycka med orden att de *"representerar samma vektor"*. Därmed har vi nästan (inte riktigt) *definierat* begreppet vektor. För att förstå detta bättre ger vi först ett analogt exempel.

Betrakta mängderna $\{a, b, c\}$, $\{\text{Uppsala}, \text{Stockholm}, \text{Lund}\}$, {tumme, pekfinger, lillfinger} (illustrera gärna med en figur). Vad har mängderna gemensamt? Jo, åtminstone det att de innehåller lika många element eller m.a.o. att de *representerar samma tal*, nämligen talet 3. Har vi därmed definierat begreppet tal? Du kan försöka pressa din lärare på vad som menas med talet 3. I alla fall kan vi säga att talet 3 uttrycker (något av) det som mängderna har gemensamt. Det är så ett abstrakt begrepp skapas. Abstrahera betyder ungefär att "dra ifrån" — vi drar ifrån (bortser från) det som skiljer och behåller det gemensamma. Talet 3 innehåller mycket mindre information än t.ex. $\{\text{Uppsala}, \text{Stockholm}, \text{Lund}\}$.

På samma sätt är en vektor mer abstrakt än en riktad sträcka. En vektor innehåller inte någon information om placering i rummet. *Vektorn har endast längd och riktning.*

Det som gör att analogin med talbegreppet ännu haltar något är att vi kommit överens om att mängderna ovan representerar samma tal, talet 3, och att de riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ och $\overrightarrow{EF}$ representerar samma vektor. Men vi har inte något namn på den vektor de representerar. Hur skall vi beteckna den?

En möjlighet är att använda någon av representanterna som namn (men ta bort pilspetsen) och skriva vektorn som $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ eller $\overline{EF}$. Detta är alltså tre olika beteckningar för samma vektor. Vi har rätt att skriva $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$. Att hämta beteckningen för en vektor från en riktad sträcka som representerar vektorn kan jämföras med primitiva sätt att teckna tal. Talet 3 kan ju skrivas som |||, vilket faktiskt är en mängd med 3 element, som alltså representerar talet 3.

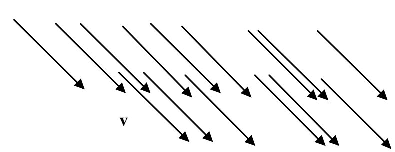
Ett annat sätt att beteckna en vektor är med en liten bokstav i fetstil (eller med ett streck över) t.ex. **u** (eller $\overline{u}$). Vi kan t.ex. låta **u** beteckna den vektor vi illustrerat ovan. Då är alltså $\mathbf{u} = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$.

Om du ändå tycker att vi inte riktigt definierat begreppet vektor, och det kan du ha goda skäl att anse, skall du be din lärare att utveckla ämnet ytterligare.

Hur skall vi nu tänka på vektorn **u**? Vi kan tänka på förflyttningen (rörelsen) från A till B. Det är samma förflyttning som från C till D (lika långt och åt samma håll). Vi kan tänka på **u** som ett uttryck för läget av B (D eller F) relativt A (C respektive E). Geometriska problem handlar ju om punkters relativa läge. Vektorgeometri, skall vi snart se, är ett effektivt sätt att bedriva geometri på.

Vektorer har tillämpningar inom fysiken. Vektorn **u** kan illustrera en hastighet (vektorns längd svarar mot farten d.v.s. hastighetens storlek och vektorns riktning anger rörelseriktningen). Rörelse med konstant hastighet beskrivs alltså av en enda vektor, trots att läget hela tiden ändras. Om vi vill rita vektorn måste vi dock välja en (eller flera) riktade sträckor (pilar) som representerar (illustrerar) vektorn.

Vi ritar alltså vektorer som pilar och kommer ihåg att vi har friheten att flytta pilen vart vi vill (så länge vi håller längd och riktning oförändrade). Eftersom datatekniken gör det lätt att upprepa en figur många gånger kan jag inte motstå frestelsen att illustrera en ny vektor, vektorn **v**, med följande rikhaltiga figur:

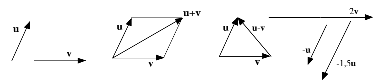


I mångfalden av pilar blir varje pil på något sätt ”anonym” och det gemensamma för pilarna, vektorn **v**, framträder. Man riktigt känner nordvästvinden.

Räkning med vektorer.

Nu tar vi ett avgörande steg. Vi skall införa *räkning med vektorer.* Vi skall addera vektorer, subtrahera vektorer och även multiplicera vektorer med reella tal d.v.s. bilda nya vektorer av typen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och $\lambda\cdot\mathbf{v}$ där λ är ett reellt tal.

Vi inför dessa räknesätt i en figur och överlåter åt din lärare att utveckla detta ytterligare.



Samma vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är här ritade på flera olika ställen (d.v.s. representeras av olika riktade sträckor). Lägg märke till hur $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ kan ses som resultatet av först förflyttningen $\mathbf{u}$ och sedan förflyttningen $\mathbf{v}$ (eller i omvänd ordning). Eftersom pilarna vi ritat inte *är* vektorer utan bara föreställer (representerar) vektorer bör man övertyga sig om att definitionerna av $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och $\lambda\cdot\mathbf{v}$ inte är beroende av *var* vi har ritat pilarna. Diskutera detta med kamraterna och med din lärare, liksom olika sätt att tolka vektorräknesätten.

I och med införandet av vektorräkning (eller vektoralgebra) skall vi kunna *översätta geometriska samband till algebraiska samband* och lösa geometriska problem med algebraiska metoder. Vi skall snart se exempel på det.

Övning 1. Övertyga dig i figuren om följande

a) $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$

b) $\mathbf{v} - \mathbf{u} = -(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

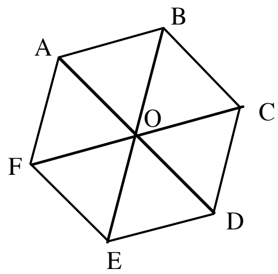
c) $-(2\mathbf{u}) = 2\cdot(-\mathbf{u})$

d) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Här är $\mathbf{w}$ en tredje vektor. Vi förutsätter inte att $\mathbf{w}$ ligger i “samma plan” som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Reagerade du mot skrivsättet “ligger i samma plan” i övningen? Rätt så. En vektor ligger som vi sagt ingenstans. Med det informella språkbruket “$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ ligger i samma plan” menar vi att vi *kan* rita vektorerna i samma plan (d.v.s. att de har representanter som ligger i samma plan). I motsatt fall, om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ inte ligger i samma plan, och $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är som i figuren ovan, så pekar $\mathbf{w}$ ut från pappret.

Utför nu beräkningen $-\mathbf{u}+\mathbf{v}+(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ i figuren ovan. Resultatet blir en “pil” som börjar och slutar i samma punkt d.v.s. “nettot” av förflyttningarna $-\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tillsammans är ingen förflyttning alls. Vi kallar detta för *nollvektorn* och skriver $\mathbf{0}$. Observera att t.ex. $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ och $0\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Vi skall ofta försöka uttrycka nya vektorer i några få givna. Betrakta t.ex. denna regelbundna sexhörning:



Sätt $\overline{AB} = \mathbf{u}$ och $\overline{AF} = \mathbf{v}$. Då är t.ex. $\overline{BC} = \overline{AO} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\overline{FC} = 2\mathbf{u}$ och $\overline{FD} = \overline{FE} + \overline{ED} = \overline{AO} + \overline{AB} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ o.s.v.. Vi säger att $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{FC}$ och $\overline{FD}$ härigenom har skrivits som *linjärkombinationer* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Övning 2. Skriv $\overline{CA}$ och $\overline{CE}$ som linjärkombinationer av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

I själva verket kan alla vektorer i samma plan som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ skrivas som linjärkombinationer av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. För att kunna skriva alla vektorer i rummet som linjärkombinationer krävs tre vektorer som utgångspunkt.

Övning 3. En pyramid har den regelbundna sexhörningen $ABCDEF$ som bottenyta och har sin spets i punkten P. Sätt $\mathbf{a} = \overline{PA}$, $\mathbf{b} = \overline{PB}$ och $\mathbf{c} = \overline{PC}$. Uttryck vektorerna $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ och $\overline{PF}$ i $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

I den enklaste formen av linjärkombination är utgångspunkten bara en vektor och vi talar om *multipler* av denna, t.ex. $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{u}$. Dessa är alla parallella med $\mathbf{u}$ och alla vektorer som är parallella med $\mathbf{u}$ är multipler av $\mathbf{u}$ d.v.s. är $\lambda\mathbf{u}$ för något tal λ där $\lambda > 0$ om $\lambda\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}$ pekar åt samma håll men $\lambda < 0$ om $\lambda\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}$ pekar åt motsatta håll.

Det geometriska begreppet *parallellitet* svarar alltså mot det algebraiska begreppet *multipel*. Detta kommer vi att utnyttja många gånger framöver. Vi formulerar resultatet en gång till:

Vektorn $\mathbf{v}$ *är parallell med vektorn* $\mathbf{u}$ *(där* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$*) om och endast om* $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ *för något tal* λ.

Ni kan diskutera i gruppen, hur det blir om $\lambda = 0$ och vad vi skall säga om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ortsvektorer.

För att ange läget av punkter i planet (eller rummet) är det ofta bekvämt att ha en utgångspunkt, ett *origo* O, och sedan ange läget av andra punkter i relation till O d.v.s. med hjälp av en vektor. Mot punkten A svarar därmed *ortsvektorn* $\overline{OA}$ och mot B ortsvektorn $\overline{OB}$.

Förflyttningen från A till B, d.v.s. vektorn $\overline{AB}$, kan vi skriva som skillnaden mellan två ortsvektorer: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Rita en figur! Observera ordningen mellan ortsvektorerna. Vi har ju också $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$. Detta är värt att lägga på minnet, liksom det viktiga resultatet i nästa övning.

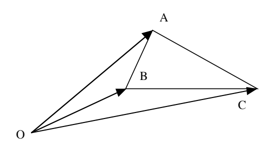
Övning 4. Låt M vara mittpunkten på sträckan AB. Visa att $\overline{OM} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$.

Mittpunktens ortsvektor är alltså medelvärdet av ändpunkternas ortsvektorer. *Det geometriska begreppet mittpunkt svarar alltså mot det algebraiska begreppet medelvärde.*

Rita nu tre punkter A, B och C på ett papper. Upprepa figuren flera gånger så att i några fall A, B, C inte ligger i rät linje och i några fall A, B, C ligger i rät linje. Hur skall vi avgöra om A, B, C ligger i rät linje eller inte? Vi översätter först till det *vektorgeometriska språket*:
A, B, C ligger i rät linje om och endast om $\overline{AB}$ är parallell med $\overline{AC}$
och sedan vidare till det *vektoralgebraiska språket*:
A, B, C ligger i rät linje om och endast om $\overline{AB}$ är en multipel av $\overline{AC}$ (vi bortser från det urartade fallet att några av punkterna sammanfaller).

Den geometriska frågan om rätlinjighet översätts alltså till en algebraisk fråga om en vektor är en multipel av en annan. Detta kommer att vara utomordentligt betydelsefullt för oss senare när vi skall studera linjer och plan i rummet. Men vi skall genast se en annan tillämpning.

Låt O vara origo och $\triangle ABC$ en triangel. Bilda medelvärdet av hörnens ortsvektorer: $\frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3}$. Försök rita denna vektor i din figur med utgångspunkt i origo. Pilspetsen hamnar i en punkt T inne i triangeln (kan vi verkligen veta att T ligger inne i triangeln? Det kommer att framgå strax). Vi har alltså



$$\overline{OT} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3}$$

T kallar vi *triangelns tyngdpunkt*. Låt nu M vara mittpunkten på BC. Då är $\overline{OM} = \frac{\overline{OB}+\overline{OC}}{2}$. Drag medianen AM. Nu påstår jag att tyngdpunkten T ligger på medianen AM d.v.s. att A, T, M ligger i rät linje. För att visa det skall vi, enligt ovan, visa att $\overline{AT}$ är en multipel av $\overline{AM}$. Gör det själv eller läs vidare.

Låt oss använda $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ som genomgående uttrycksmedel. Då är $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = \frac{\overline{OB}+\overline{OC}}{2} - \overline{OA} = \frac{\overline{OB}+\overline{OC}-2\overline{OA}}{2}$ och $\overline{AT} = \overline{OT} - \overline{OA} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3} - \overline{OA} = \frac{\overline{OB}+\overline{OC}-2\overline{OA}}{3}$. Alltså $\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AM}$. $\overline{AT}$ är m.a.o en multipel av $\overline{AM}$ d.v.s. $\overline{AT}$ är parallell med $\overline{AM}$ och därmed har vi visat att A, T, M ligger i rät linje.

Genomför räkningarna en gång till på egen hand. Förklara hur det följer att triangelns medianer skär varandra i en punkt (nämligen triangelns tyngdpunkt). I vilket förhållande delas medianerna av denna punkt?

I följande övning skall du på egen hand genomföra ett analogt resonemang; denna gång i rummet.

Övning 5. Låt $ABCD$ vara en tetraeder och låt Q vara den punkt vars ortsvektor är medelvärdet av de fyra hörnens ortsvektorer. Vi kallar Q för tetraederns tyngdpunkt. Låt slutligen T vara tyngdpunkten i sidoytan BCD.

a) Uttryck $\overline{OT}$ och $\overline{OQ}$ i $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ och $\overline{OD}$.

b) Visa att Q ligger på "rymdmedianen" AT.

c) Förklara hur det nu följer att de fyra rymdmedianerna skär varandra i en punkt.

d) I vilket förhållande delas rymdmedianerna av denna punkt?

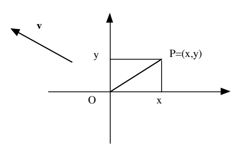
Med hjälp av några enkla algebraiska manipulationer har vi ovan fått ett nytt bevis för den välkända satsen att medianerna i en triangel går genom en punkt. Det faller absolut ingen skugga på det gamla beviset (repetera det!), men det är alltid nyttigt att se gamla resultat i nytt ljus. Vektoralgebra har alltså fått en första tillämpning och dessutom har vi i Övning 5 visat en tredimensionell motsvarighet till satsen om medianerna. Denna motsvarighet är kanske lite knepigare att komma åt med vanlig euklidisk geometri.

Koordinater, längder och vinklar.

Läsaren har måhända lagt märke till att vi ännu inte diskuterat vinklar mellan vektorer (dock begreppet parallellitet) och endast obetydligt begreppet längd (dock har vi talat om "lika lång" och förhållande mellan sträckor). Nu tänker vi oss att en längdenhet är oss given och vi skall genast ge oss i kast med diverse "mätproblem".

Livet blir enklare om vi förser oss med ett vanligt *ortonormerat koordinatsystem* ("ON-system") d.v.s. ett koordinatsystem där axlarna (x-, y- och eventuellt z-axeln) bildar räta vinklar och alla är graderade med samma längdenhet. Dessutom placerar vi koordinatsystemet med origo i vårt "gamla" origo O.

Vi tänker oss till en början att vi arbetar i plan geometri. Endast två axlar behövs då och varje punkt får två koordinater, $P = (x, y)$.



Vi säger också att (x, y) är *koordinaterna för ortsvektorn* $\overline{OP}$ och skriver $\overline{OP} = (x, y)$. Varje vektor $\mathbf{v}$ är ortsvektor för någon punkt. Vi har ju frihet att placera $\mathbf{v}$ var vi vill, speciellt med utgångspunkt i O. Markera som övning Q så att $\overline{OQ} = \mathbf{v}$ i figuren. På detta sätt kan varje vektor ges koordinater.

Resultatet i följande övning är mycket viktigt. Det gör att vi kan *översätta räkning med vektorer till räkning med koordinater.*

Övning 6. Låt $\mathbf{u} = (x, y)$ och $\mathbf{v} = (x', y')$. Övertyga dig i en figur om att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x + x', y + y')$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (x - x', y - y')$ samt att $\lambda\mathbf{u} = (\lambda x, \lambda y)$ för varje tal λ.

Övning 7. Låt $P = (3, 5)$ och $Q = (4, 2)$. Bestäm koordinaterna för $\overline{PQ}$.
Ledning: Vi har ju $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$.

Lägg särskilt märke till Övning 7, hur man beräknar koordinaterna för förflyttningen från P till Q d.v.s. för vektorn $\overline{PQ}$. Tänk igenom hur det vi sagt skall anpassas till rymdgeometri och lös Övning 6 och Övning 7 igen fast i rummet (sätt $\mathbf{u} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (x', y', z')$ i Övning 6 och t.ex. $P = (3, 5, 9)$, $Q = (4, 2, 7)$ i Övning 7).

Längden av en vektor $\mathbf{u}$ betecknar vi $|\mathbf{u}|$. I planet, $\mathbf{u} = (x, y)$, bestäms $|\mathbf{u}|$ lätt med Pythagoras sats: $|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2$. Rita en figur för att illustrera detta och övertyga dig om att formeln gäller även om x eller y är negativt.

Om P och Q är två punkter i planet, säg $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, kan vi lätt beräkna avståndet d mellan P och Q. Det är ju helt enkelt längden av sträckan PQ eller vektorn $\overline{PQ}$, d.v.s. $d = |\overline{PQ}|$. Men $\overline{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Alltså är $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Detta kallas ibland "avståndsformeln", men kom ihåg att det egentligen bara är Pythagoras sats.

Innan vi börjar med avståndsberäkningar i rummet löser du följande övning, som ger en tredimensionell variant av Pythagoras sats.

Övning 8. Låt a, b, c vara kanterna i ett rätblock. Låt d vara (rymd-)diagonalen i rätblocket. Visa att $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

För en vektor $\mathbf{u} = (x, y, z)$ får Övning 8 konsekvensen att $|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Rita några figurer för att illustrera detta. Förklara varför det stämmer även om t.ex. $x < 0$.

Övning 9. Bestäm avståndet mellan $P = (2, 3, -1)$ och $Q = (4, 4, 1)$.

Om du vill kan du skriva upp en avståndsformel i rummet också, men belasta inte hjärnan med någon torr utantillkunskap. Kom bara ihåg att det är Pythagoras sats det handlar om; tredimensionella varianten enligt Övning 8 tillämpad i en speciell situation.

Övning 10. Låt $A = (3, 1, 4)$, $B = (1, 9, 6)$ och $C = (7, 5, 4)$. Beräkna längden av sidorna i triangeln ABC.

Det kan nog vara läge nu att repetera vad vi talat om i trigonometri ty nu skall vi beräkna vinklar. Med *vinkeln mellan två vektorer* menar vi den vinkel mellan $0°$ och $180°$ som bildas då vi ritar vektorerna med samma utgångspunkt (eller med pilspetsarna i samma punkt; det ger samma resultat. Rita figur!). Repetera cosinussatsen och övningarna efter denna i första kapitlet.

Övning 11. Beräkna vinkeln A i $\triangle ABC$ i Övning 10.

Övning 12. Beräkna (cosinus för) vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (7, 1)$.

Meningen är att du skall rita en figur och sedan använda cosinussatsen när du löser Övning 12. Om du räknar rätt bör du komma fram till att cosinus för vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Den vinkel mellan $0°$ och $180°$ som har detta cosinusvärde brukar betecknas $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$, vilket kan utläsas arcuscosinus. Ordet arcus betyder båge och $\arccos a$, där $-1 \leq a \leq 1$, är alltså den båge (vinkel) mellan $0°$ och $180°$, vars cosinus är a.

Tänker vi igenom lösningen av Övning 12 mer generellt skall vi se att slutresultatet blir ganska enkelt (mycket tar i själva verket "ut vart annat"). Vi börjar i planet, men jag överlåter detaljerna till följande övningsuppgift.

Övning 13. Låt $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vara två vektorer i planet (givna av koordinater i ett ON-system). Visa att för vinkeln α mellan vektorerna gäller sambandet

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Ledning: Använd cosinussatsen på den triangel som bildas av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Skalärprodukt.

Lägg märke till det enkla uttrycket i högerledet i Övning 13. Vi har multiplicerat $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ "koordinatvis" och sedan adderat produkterna. Resultatet kallar vi för *skalärprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi betecknar denna $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Ordet skalär är synonymt med tal och produkten kallas skalärprodukt eftersom produkten blir ett tal (och inte en ny vektor). Skalärprodukten införs på motsvarande sätt i tre dimensioner:

Definition.
a) Låt $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vara två vektorer givna i ett ON-system i planet. Då definieras skalärprodukten av $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.
b) Låt $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vara två vektorer givna i ett ON-system i rummet. Då definieras skalärprodukten av $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Skalärprodukten är förstås lätt att räkna ut när vi känner vektorernas koordinater. Vi har användning för skalärprodukten t.ex. när vi beräknar vinkeln mellan två vektorer. I planet har vi redan visat följande sats.

Sats 1. *Låt* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *vara två vektorer (skilda från nollvektorn) i planet eller i rummet. För vinkeln* α *mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *gäller då*

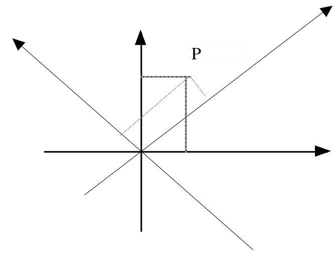
$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Bevis. a) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i planet, så har du redan visat detta i Övning 13. Det enda vi nu gjort är att använda oss av den nya beteckningen $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.
b) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ligger i rummet visar du satsen med samma typ av räkningar som i Övning 13. Det blir bara lite fler bokstäver att hålla reda på denna gång! Vi skall bevisa denna sats en gång till, i exemplet efter Övning 15.

Om vi söker α beräknar vi alltså först $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och sedan $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ för att slutligen lösa ut $\cos \alpha$ med hjälp av Sats 1. Lös Övningarna 11 – 12 igen med denna teknik.

Satsen ger skalärproduktens viktigaste egenskap. Det finns en del intressanta frågor man kan passa på att diskutera här. Betrakta först vänsterledet i formeln i Sats 1. Det är en vanlig produkt av tre tal, vektorernas längder och cosinus för mellanliggande vinkel. Så snart en längdenhet är införd är det ingen tvekan om vad dessa tre faktorer betyder. Det behövs inte något koordinatsystem för att vi skall förstå innebörden av faktorerna.

Högerledet däremot har vi definierat med koordinater som utgångspunkt. Om vi skulle vrida på koordinatsystemet så skulle alla punkter och vektorer få förändrade koordinater (ja ja, origo har oförändrade koordinater). Jämför figuren.



Hur går det då med skalärprodukten? Jo, formeln i Sats 1 gäller naturligtvis fortfarande (vi har inte krävt att koordinatsystemet skall ha någon annan egenskap än att vara ortonormerat). Vänstra ledet är oförändrat ty vektorernas längder och mellanliggande vinkel rubbas inte av att vi vrider och vänder på koordinatsystemet. Alltså är även högerledet, skalärprodukten, oförändrad. Vi sammanfattar

Skalärprodukten blir densamma oberoende av valet av koordinatsystem, värdet av $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ *är nämligen alltid, enligt Sats 1, det samma som* $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$.

Detta är anledningen till att man i de flesta böcker använder $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$ som *definition* av $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Efter hand har jag dock kommit att tycka att detta är något långsökt. Vi håller oss till vår definition ovan (men din lärare kanske går i taket!). Det är den definitionen vi använder när vi beräknar skalärprodukten. Men vi håller i minnet det (mycket märkliga) faktum att $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ inte förändras om vi vrider på koordinatsystemet. Vi håller också uttrycket i Sats 1 i minnet. Vi kan skriva det som en formel för $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \qquad \text{eller} \qquad \alpha = \arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Övning 14. Låt $\mathbf{u} = (2,1)$, $\mathbf{v} = (3,2)$ i ett visst (ortonormerat) koordinatsystem. Vrid koordinatsystemet $45°$ motsols. Vilka koordinater får $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i det nya systemet? Verifiera att $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ får samma värde beräknade i båda systemen. Bestäm också vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Skalärprodukten har en annan viktig egenskap. Låt oss beräkna skalärprodukten av en vektor med sig själv! Säg $\mathbf{u} = (x,y,z)$. Vi får då $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = x^2+y^2+z^2$, men enligt Pythagoras sats (Övning 8) är ju detta kvadraten på längden av $\mathbf{u}$. Alltså:

Sats 2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$.

Vi kommer ofta använda att skalärprodukten följer några enkla räknelagar. Dessa följer omedelbart av vår definition av skalärprodukt och av motsvarande räknelagar för vanliga tal. Vi sammanfattar dem i en övning.

Övning 15. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vara vektorer (i planet eller i rummet) och låt λ vara ett tal. Visa följande räknelagar:

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

b) $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

c) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

d) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

e) $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

Lagarna ger oss frihet att multiplicera ihop parenteser ungefär som vid räkning med vanliga tal (eller polynom).

Exempel. Genom att tillämpa räknelagarna skall vi nu ge ett *nytt och kortare bevis* av Sats 1. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer med mellanliggande vinkel α. Rita en triangel med "sidorna" $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Då säger cosinussatsen att $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$ eller, skrivet med hjälp av skalärprodukt, $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$. Enligt Övning 15 e) kan vänsterledet skrivas $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Efter förenkling får vi $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$ och alltså $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$. Vi har nu bevisat Sats 1 en gång till och lite smidigare än förra gången eftersom vi inte behövde räkna explicit med koordinater (och skilja mellan planet och rummet).

Resultatet i nästa övning kan vara intressant att känna till, men vi skall inte återkomma till det i detta kompendium.

Övning 16. Låt x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 vara tal. Bevisa olikheten $(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 \leq (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$. Olikheten kallas *Cauchys olikhet*.

Ledning. Tolka båda leden med hjälp av vektorerna $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Skalärprodukten har en tredje egenskap som omedelbart följer av Sats 1, nämligen

Sats 3. *Låt* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *vara två vektorer, båda skilda från nollvektorn. Då är* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vinkelräta om och endast om* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Bevis. Låt α vara vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi har då enligt Sats 1 att $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Eftersom $|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}| > 0$ är vänsterledet $= 0$ precis då $\cos\alpha = 0$ d.v.s. endast för $\alpha = 90°$. Men vänsterledet $= 0$ samtidigt som högerledet $= 0$ d.v.s. precis då $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Den sats vi just visat är mycket användbar. Vi har nu ett kriterium för rätvinklighet. Vi har därmed ytterligare ett exempel på hur vi kan översätta ett geometriskt förhållande till ett algebraiskt. Det geometriska begreppet *vinkelräthet* svarar mot det algebraiska begreppet "*skalärprodukten är 0*".

Övning 17. Visa att triangeln med hörn i $A = (4, 5, 2)$, $B = (6, 8, 1)$, $C = (7, 4, 5)$ har rät vinkel i A.

Övning 18. Låt O vara origo och $A = (2, 3, 4)$. Bestäm den punkt P på z-axeln för vilken AP är vinkelrät mot OA.

Blandade övningar.

Övning 19. I en fyrhörning $ABCD$ förbindes mittpunkterna på motstående sidor med varandra. Visa att förbindelselinjerna delar varandra mitt itu.

Övning 20. Använd vektorräkning för att för en godtycklig triangel visa att medianerna kan parallellförflyttas så att de bildar en ny triangel.

Övning 21. Låt $A_1, \ldots, A_6$ vara punkter i rummet. Låt $M_1, \ldots, M_6$ vara mittpunkterna på A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 resp. A_6A_1. Låt O vara en godtycklig punkt (origo). Skriv $\overline{OM_6}$ som en linjärkombination av $\overline{OM_1}, \ldots, \overline{OM_5}$.

Övning 22. Låt $\mathbf{a} = (2,1)$, $\mathbf{b} = (1,2)$ och $\mathbf{c} = (-2,5)$. Skriv $\mathbf{c}$ som en linjärkombination av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Skriv också $\mathbf{b}$ som en linjärkombination av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$.

Övning 23. I triangeln $\triangle ABC$ är D, E punkter på AB så att $AD \cong DE \cong EB$. Vidare är F och G punkter på AC så att DF och EG är parallella med BC. Uttryck $\overline{EF}$ och $\overline{BG}$ som linjärkombinationer av $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$. Är $\overline{EF}$ och $\overline{BG}$ parallella?

Övning 24. Bestäm a så att vektorerna $(1,-3,2)$ och $(2,1,a)$ bildar vinkeln 60° med varandra.

Övning 25. Betrakta en regelbunden pyramid vars basyta är en kvadrat och vars höjd är lika stor som kvadratens sida. Pyramiden har sålunda fyra sidoytor som är likbenta trianglar. Beräkna cosinus för toppvinkeln i en av dessa.

Övning 26. Låt $O = (0,0,0)$, $P = (4,1,1)$, $Q = (5,-4,11)$ och låt $A = (1,2,3)$, $B = (1,3,4)$, $C = (2,6,2)$. Visa att $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$.

Övning 27. Visa att diagonalerna i en romb skär varandra under räta vinklar.

Övning 28. Ett rätblock har sidlängderna 1, 2 resp. 3. Beräkna de vinklar som uppkommer mellan rätblockets fyra rymddiagonaler.

Övning 29. (diagonalerna i en parallellogram) Visa att summan av kvadraterna på diagonalerna i en parallellogram är lika med summan av kvadraterna på parallellogrammens sidor.

Ledning. Låt O vara ett hörn i parallellogrammen och låt OA, OB, OC vara sidorna som utgår från O. Låt $\mathbf{a} = \overline{OA}$, $\mathbf{b} = \overline{OB}$ vara ortsvektorerna för A, B. Man säger ibland att $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ "spänner upp" parallellogrammen. Diagonalerna bestäms nu av vektorerna $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Uttryck påståendet i övningen algebraiskt.

Övning 30. (diagonalerna i en parallellepiped) Låt O vara ett hörn i en parallellepiped och låt OA, OB, OC vara kanterna som utgår från O. Vi riktar kanterna och sätter $\mathbf{a} = \overline{OA}$, $\mathbf{b} = \overline{OB}$, $\mathbf{c} = \overline{OC}$ samt sätter $a = |\mathbf{a}|$ o.s.v. (vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ spänner upp parallellepipeden). I O möts tre sidoytor till parallellepipeden. Låt d_a, d_b, d_c vara längderna av de tre diagonalerna utgående från O i dessa sidoytor (du får själv bestämma vilken diagonal som är d_a o.s.v., men jag tycker det finns ett naturligt val). Låt d vara längden av rymddiagonalen utgående från O. Visa att $d^2 = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

Övning 31. (medianens längd) Låt A, B, C vara hörnen i en triangel och a, b, c längderna av motstående sidor. Låt m vara längden av den median som utgår från hörnet C. Visa formeln $m^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$.

Övning 32. (höjderna i en triangel) Visa att de tre höjderna i en triangel går genom en punkt.

Ledning. Låt ett av triangelns hörn vara origo O. Låt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vara ortsvektorerna för de andra hörnen. Låt $\mathbf{u}$ vara ortsvektorn för skärningspunkten P mellan *två* av höjderna (säg de som inte utgår från O). Då är $(\mathbf{u} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0$ och $(\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$. Visa nu att P också ligger på den höjd som utgår från O, d.v.s. att $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$.

3. Linjer och plan m.m.

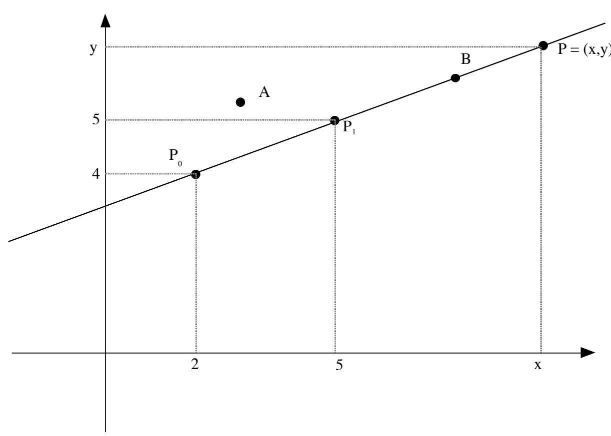
Inledning.

I förra kapitlet gick vi igenom grunderna i vektorgeometri och talade om punkter, koordinater och vektorer. Många geometriska problem översatte vi till algebraiska och löste sedan med algebraiska metoder. Vi fann att skalärprodukten är ett effektivt hjälpmedel vid beräkning av avstånd och vinklar.

Nu skall vi gå vidare och behandla *punktmängder* – i första hand *linjer* och *plan*. Vår första uppgift är att ge ett algebraiskt uttryck för att en punkt tillhör (resp. inte tillhör) en viss punktmängd.

Linjer i planet.

Betrakta t.ex. linjen i nedanstående figur. Linjen går genom de två givna punkterna P_0 och P_1 och har obegränsad utsträckning "åt båda hållen". Skilj alltså mellan en linje och en sträcka. Vi arbetar till en början med plan geometri och förutsätter att koordinatsystemet är ett vanligt ortonormerat system. I detta exempel är $P_0 = (2, 4)$ och $P_1 = (5, 5)$.



Vektorn $\overline{P_0P_1} = (3, 1)$ är parallell med linjen. Varje vektor som är parallell med en given linje kallas *riktningsvektor* till linjen. Således är t.ex. $(3, 1)$ en riktningsvektor till linjen i vårt exempel. Som övning kan du själv ange ett antal andra vektorer som också är riktningsvektorer till denna linje.

Punkten A är en punkt utanför linjen och punkten B är en punkt på linjen. Kan vi uttrycka denna skillnad mellan A och B på något annat sätt, mer algebraiskt? Betrakta vektorerna $\overline{P_0A}$ och $\overline{P_0B}$ samt riktningsvektorn $\overline{P_0P_1}$. Naturligtvis är $\overline{P_0B}$ parallell med $\overline{P_0P_1}$ men $\overline{P_0A}$ inte parallell med $\overline{P_0P_1}$. Eller uttryckt algebraiskt: $\overline{P_0B}$ är en multipel av $\overline{P_0P_1}$ men $\overline{P_0A}$ är inte en multipel av $\overline{P_0P_1}$.

Du kan nu lösa följande övning.

Övning 1. Avgör vilka av följande punkter som ligger på linjen genom P_0 och P_1 i figuren: (8,8), (11,7), (17,9), (-7,0), (41,7), (-49, -15).

När du har löst övningsuppgiften så har du för sex konkreta punkter (en del tämligen "avlägsna") lyckats avgöra om de ligger på linjen eller ej. Inte illa!

Låt nu $P = (x, y)$ vara en godtycklig punkt på linjen. Då är vektorn $\overline{P_0P} = (x-2, y-4)$ parallell med $\overline{P_0P_1} = (3, 1)$ d.v.s.

$$(x - 2, y - 4) = t\cdot(3, 1)$$

där t är något reellt tal. Värdet av t beror förstås på *var* på linjen som P ligger. Olika värden på t svarar mot olika lägen på P. Tänk efter var P ligger om t.ex. $t = 0$, $t = 1$ eller $t = -1$.

Man brukar kalla t för en *parameter*. Låter vi t "genomlöpa" de reella talen så kommer P att genomlöpa linjen.

Ekvationen (likheten) $(x - 2, y - 4) = t\cdot(3, 1)$ kallar vi *linjens ekvation på parameterform*. Det enda vi har gjort är att algebraiskt notera att vektorn $\overline{P_0P}$ är parallell med vektorn $\overline{P_0P_1}$.

Man kan leka lite med ekvationen och disponera den på olika sätt, t.ex.

$$(x, y) = (2, 4) + t\cdot(3, 1) \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 4 = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \end{cases}.$$

Vilket framställningssätt som är bäst beror på sammanhanget, men lägg märke till att det är skrivsättet $(x-2, y-4) = t\cdot(3, 1)$, som är den *direkta* översättningen från geometri till algebra.

Övning 2 a) Ange de punkter på linjen (i figuren ovan) som svarar mot $t = 2$, 3 resp. -7.
b) Ange motsvarande t-värden för de punkter i Övning 1 som ligger på linjen.

Övning 3. Att punkten $P = (x, y)$ ligger på linjen kan vi också uttrycka så, att $\overline{P_1P}$ är parallell med $\overline{P_1P_0}$. Hur ser det ut om man översätter detta till en ekvation med parameter?

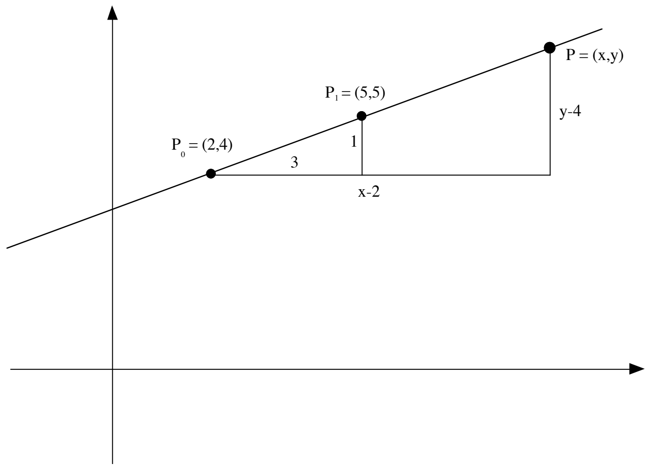
Övning 3 visar att samma linjes ekvation kan skrivas på olika sätt. Punkterna P_0 och P_1, som vi utgick från, är ju dessutom utbytbara mot vilka som helst två punkter på linjen.

Lös följande uppgifter innan du går vidare.

Övning 4. Ange en riktningsvektor till linjen $\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$.

Övning 5. Två av följande linjer är i själva verket identiska: $(x-13, y+6) = t\cdot(8,-6)$, $(x,y) = (30,-18) + t\cdot(-4,3)$ resp. $\begin{cases} x = 1 - 12t \\ y = 3 + 9t \end{cases}$. Vilka?

Det finns ett annat sätt också att algebraiskt uttrycka att $P = (x,y)$ ligger på en viss rät linje. Vi använder samma linje, men ritar en ny figur:



Den gamla figuren har vi kompletterat med två rätvinkliga trianglar med baser 3 resp. $x-2$ och höjder 1 resp. $y-4$. Att punkten P ligger på linjen betyder precis att dessa två trianglar är likformiga d.v.s. att

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1}$$

Detta är ju också en ekvation – linjens ekvation på *allmän form* – men denna gång utan parameter. Med hjälp av den allmänna formen är det lätt att avgöra om en punkt ligger på linjen (ekvationen stämmer) eller inte (ekvationen stämmer inte). Du kan lösa Övning 1 igen – det går nog smidigare när du använder den allmänna formen. Å andra sidan är parameterformen bra om man snabbt behöver tillgång till många konkreta punkter på linjen. Du bör också tänka efter hur det blir om P ligger på andra sidan om P_0 jämfört med som vi ritat. Gäller ekvationen fortfarande?

Naturligtvis kan vi utsätta ekvationen ovan för diverse algebraiska manipulationer, vilket ger oss olika framställningssätt, som kan vara nog så intressanta, t.ex. $1\cdot(x-2) - 3\cdot(y-4) = 0$ eller $(1,-3)\cdot(x-2, y-4) = 0$ eller $x - 3y + 10 = 0$ eller $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

Ibland förekommer det att man ger olika namn på alla dessa sätt att disponera linjens ekvation, men det bör man inte belasta minnet med eftersom denna namnflora i grunden är fullständigt ointressant. Men man bör lägga märke till skillnaden mellan den allmänna formen (som ger ett *villkor* på punkter (x,y) på linjen) och parameterformen (som uttrycker punkter (x,y) på linjen *explicit* med hjälp av en parameter).

Låt oss betrakta de olika framställningssätten av den allmänna formen ovan. Ekvationen $(1,-3)\cdot(x-2, y-4) = 0$ säger att skalärprodukten av $(1,-3)$ och vektorn

$\overline{P_0P} = (x-2, y-4)$ är 0, d.v.s. att $(1,-3)$ är vinkelrät mot $\overline{P_0P}$ för alla punkter P på linjen. Vektorn $(1,-3)$ är alltså helt enkelt *vinkelrät mot linjen*! En vektor som är vinkelrät mot en given linje kallas *normalvektor* till linjen. Rita in normalvektorn $(1,-3)$ i figuren ovan! Naturligtvis är linjens normal- och riktningsvektorer vinkelräta: $(1,-3)\cdot(3,1) = 0$. Känner vi en punkt P_0 på en linje och en normalvektor n till linjen kan vi också lätt skriva ned linjens ekvation på allmän form: $\overline{P_0P}\cdot\mathbf{n} = 0$.

Övning 6. Bestäm ekvationen på allmän form för linjen genom $(4,-2)$ med normalvektor $(2,5)$.

Det sista framställningssättet av vår linje, $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$, uttrycker y som en *funktion* av första graden av variabeln x. En sådan funktion kallas naturligt nog även en linjär funktion. Koefficienten framför x, alltså $\frac{1}{3}$, kallas linjens *lutning* (eller *riktningskoefficient*). Om du följer ekvationerna bakåt ser du att lutning är kvoten mellan y- och x-koordinaterna för linjens riktningsvektor $(3,1)$, d.v.s. tangens för vinkeln mellan linjen och x-axeln.

Det är viktigt att kunna variera mellan olika sätt att skriva linjens ekvation; även mellan parameterform och allmän form. Vi ger några övningar på detta.

Övning 7. En linje har riktningsvektor $(4,-1)$. Bestäm en normalvektor till linjen.

Övning 8. Ange två punkter på linjen $\begin{cases} x = 7-2t \\ y = 8+t \end{cases}$. Bestäm riktningsvektor, normalvektor och lutning för linjen och skriv slutligen linjens ekvation på allmän form.

Övning 9. Ange två punkter på linjen $2x+5y = 7$. Bestäm riktningsvektor, normalvektor och lutning för linjen och skriv slutligen linjens ekvation på parameterform.

Övning 10. Bestäm ekvationen (i valfri form) för den linje som bildar $30°$ vinkel med x-axeln och skär y-axeln i punkten $(0,5)$.

Övning 11. Två av följande linjer är parallella. Vilka?

a) $(x-3, y+4) = t(4,-2)$

b) $\frac{x+1}{6} = \frac{y-5}{3}$

c) $y = 2x+4$

d) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \end{cases}$

Två linjer som inte är parallella har förstås en skärningspunkt. Känner vi linjernas ekvationer så kan vi beräkna denna. Vi ger några exempel.

Exempel. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $y = 4x-5$ och $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{3}$. Den sökta punkten uppfyller två villkor; den ligger nämligen på *båda* linjerna. Skärningspunkten uppfyller med andra ord båda linjernas ekvationer, d.v.s. *ekvationssystemet*:

$$\begin{cases} y = 4x-5 \\ \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{3} \end{cases}$$

Jag är säker på att du på något sätt kan lösa detta system och komma fram till att $x = \frac{36}{17}$, $y = \frac{59}{17}$. Längre fram skall vi lösa ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta och då kan det vara läge att tänka efter hur man mer systematiskt skall gå till väga.

Exempel. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna

$$(x, y) = (4, 7) + t\cdot(2, 1) \quad \text{och} \quad 2x + 3y = 8.$$

Ett sätt att lösa detta är förstås att skriva om den första linjens ekvation på allmän form och sedan göra som i föregående exempel. Men det är inte det enklaste sättet. Eftersom den sökta punkten ligger på den första linjen är punkten *av formen* $(4, 7) + t\cdot(2, 1)$ eller m.a.o. $(4 + 2t, 7 + t)$. Dessutom skall punkten ligga på den andra linjen d.v.s. uppfylla *villkoret* $2x + 3y = 8$. För vilket värde på t uppfyller $(x, y) = (4 + 2t, 7 + t)$ detta villkor? Vi får $2\cdot(4 + 2t) + 3\cdot(7 + t) = 8$. Alltså $t = -3$ och skärningspunkten är $(-2, 4)$.

Exempel. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna

$$(x - 1, y - 2) = t\cdot(4, 3) \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

Punkten skall vara dels av formen $(1 + 4t, 2 + 3t)$ dels av formen $(-3 + 4t, 5 + t)$. Men det är naturligtvis inte säkert att det är fråga om *samma* värde på parametern t. Den gemensamma punkten för de båda linjerna svarar mot, låt oss säga, $t = t_1$ på den första linjen och $t = t_2$ på den andra. Vi får då $(1 + 4t_1, 2 + 3t_1) = (-3 + 4t_2, 5 + t_2)$ eller m.a.o. ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 1 + 4t_1 = -3 + 4t_2 \\ 2 + 3t_1 = 5 + t_2 \end{cases}$$

Säkert löser du lätt detta ekvationssystem och finner $t_1 = 2$, $t_2 = 3$ och skärningspunkten $(9, 8)$. Som ett alternativ till denna lösning kan du välja att skriva t.ex. den första linjens ekvation på allmän form och sedan förfara som i föregående exempel. Gör så!

Vi avslutar detta avsnitt med några övningar innan vi i nästa avsnitt ger oss ut i rummet. Din lärare kan lätt förse dig med fler övningar. Kanske kan du också hitta på egna.

Övning 12. Bestäm hörnen i den triangel som bildas av de tre räta linjerna

$$(x + 16, y + 7) = t\cdot(7, 4), \quad 2x + 3y + 1 = 0 \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -11 + 8t \end{cases}$$

Övning 13. Låt $A = (1, 2)$, $B = (2, 4)$, $C = (3, 1)$ och $D = (4, 0)$. Bestäm skärningspunkten mellan förlängningslinjerna till sträckorna AC och BD.

Övning 14. Bestäm skärningspunkten mellan den linje som går genom $(-3, 1)$ och har normalvektor $(7, 4)$ och den linje som går genom punkterna $(2, 6)$ och $(10, -7)$.

Övning 15 a) Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(3, 2)$ och är vinkelrät mot linjen $y = 3x + 1$.

b) Bestäm skärningspunkten mellan dessa båda linjer.

c) Beräkna det vinkelräta avståndet mellan $(3, 2)$ och $y = 3x + 1$.

Linjer i rummet.

När vi nu ger oss ut i rummet stöter vi genast på den svårigheten att vi i en figur på ett plant papper endast kan ge en förenklad bild av verkligheten. För att öva upp känslan kan du ta vara på de räta linjer som finns naturligt omkring dig. Många uppträder som skärningslinje mellan två plan (t.ex. mellan golvet och väggen). Med hjälp av snören, pennor och andra raka föremål brukar det gå ganska bra att illustrera hur linjer kan vara belägna i förhållande till varandra. Lägg särskilt märke till att två linjer i rummet i "normalfallet" varken är parallella eller skärande. Försök illustrera detta med en figur! Sådana linjer brukar kallas *skeva*.

I regel blir figuren för komplicerad om man ritar ett koordinatsystem med tre axlar och försöker placera linjerna rätt i förhållande till detta. Vi får nöja oss med mer schematiska bilder. Huvudsaken är att bilden hjälper oss till fruktbara idéer och hjälper oss att översätta ett geometriskt problem till ett algebraiskt.

Vi skall nu bestämma ekvationen för den räta linje i rummet, som går genom punkterna $P_0 = (2, 3, -1)$ och $P_1 = (4, 2, 5)$. Du kan nöja dig med att illustrera detta med ett rakt streck på ett papper och två punkter särskilt markerade, d.v.s. i princip med samma figur som i planet. En riktningsvektor till linjen, d.v.s. en vektor parallell med linjen, är förstås $\overline{P_0P_1} = (2, -1, 6)$. Att en punkt $P = (x, y, z)$ ligger på linjen är ekvivalent med att vektorn $\overline{P_0P}$ är parallell med linjens riktningsvektor d.v.s. att

$$(x - 2, y - 3, z + 1) = t\cdot(2, -1, 6)$$

för något värde på parametern t. Detta är *linjens ekvation* (på parameterform) och naturligtvis kan vi liksom i planet disponera om uttrycket på olika sätt, t.ex. $(x, y, z) = (2, 3, -1) + t\cdot(2, -1, 6)$ eller $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$. Någon direkt motsvarighet i rummet till den allmänna formen för linjer i planet har vi inte. Vi skall nämligen snart se att ekvationer av typen $x - 3y + 2z = 8$ betyder *plan* i rummet.

Övning 16 a) Avgör vilken eller vilka av följande punkter som ligger på linjen i exemplet ovan. $(16, -4, 40)$, $(-4, 0, -19)$ och $(\frac{2}{\sqrt{2}-1}, 3 - \sqrt{2}, 2\sqrt{18} - 1)$.

b) Bestäm den punkt Q på linjen sådan att P_1 ligger mitt emellan P_0 och Q.

c) Bestäm skärningspunkten mellan linjen och det plan som innehåller x- och y-axlarna (xy-planet).

Övning 17. Bestäm ekvationen för den linje genom $(2, 1, 8)$ som är parallell med linjen $(x, y, z) = (1, 3, -1) + t\cdot(4, -2, 1)$.

I nästa övning ger vi ett exempel på två linjer som faktiskt skär varandra. Naturligtvis bestämmer du också skärningspunkten.

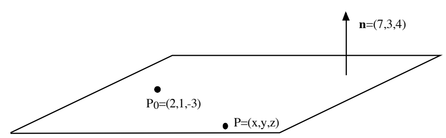
Övning 18. Visa att de två linjerna

$$(x-2, y-3, z+1) = t\cdot(2, -1, 6) \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 5+t \\ y = -6+2t \\ z = 2+5t \end{cases}$$

har en gemensam punkt.

Plan i rummet.

Nedanstående figur skall föreställa ett plan i rummet. Planet har naturligtvis obegränsad utsträckning. Figuren visar endast en liten del därav.



P_0 är en punkt i planet och $\mathbf{n}$ är en *normalvektor* till planet, d.v.s. en vektor som är vinkelrät mot planet. Övertyga dig själv om att P_0 och $\mathbf{n}$ helt bestämmer planet (det finns alltså inget annat plan som innehåller just punkten P_0 och samtidigt har $\mathbf{n}$ som normalvektor). Som övning kan du tänka bort P_0 ett tag men behålla $\mathbf{n}$. Hur kan planet variera då? Vad kan vi alltså säga om två skilda plan med samma normalvektor? Som en andra övning tänker du bort $\mathbf{n}$, men behåller P_0. Hur kan planet nu variera?

Låt oss säga att $P_0 = (2, 1, -3)$ och $\mathbf{n} = (7, 3, 4)$ i ett vanligt ortonormerat koordinatsystem. Hur kan vi avgöra om en punkt $P = (x, y, z)$ ligger i planet eller inte? Men det är lätt! Att P ligger i planet är ekvivalent med att vektorn $\overline{P_0P}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$ d.v.s. att skalärprodukten $\overline{P_0P}\cdot\mathbf{n} = 0$ eller m.a.o.

$$(x-2, y-1, z+3)\cdot(7, 3, 4) = 0.$$

Detta är *planets ekvation*. Det framgår tydligt av ekvationen att $(2, 1, -3)$ är en punkt i planet och att $(7, 3, 4)$ är normalvektor till planet. Vi kan disponera om uttrycket på olika sätt. T.ex. kan vi utföra skalärmultiplikationen och få $7(x-2)+3(y-1)+4(z+3) = 0$ eller $7x+3y+4z-5 = 0$ eller $7x+3y+4z = 5$. Det sista skrivsättet är naturligtvis enkelt, men det är vårt första skrivsätt som är den *omedelbara algebraiska tolkningen av att punkten P ligger i planet*.

Följer du normalvektorns koordinater genom räkningarna så ser du att koordinaterna blir koefficienter framför x, y resp. z när vi skriver ekvationen som $7x+3y+4z-5 = 0$.

Du inser också att detta inte är specifikt för detta exempel utan att det alltid måste vara så.

Övning 19 a) Bestäm ekvationen för det plan genom punkten $(1, 3, -2)$ som har normalvektorn $(2, -4, 5)$. Skriv planets ekvation på några olika sätt.

b) Avgör vilka av följande punkter som ligger i planet: $(-1, 4, 0)$, $(-5, 5, 2)$, $(-3, 6, 2)$.

c) Bestäm skärningspunkten mellan planet och z-axeln.

Vi ger ett exempel till. Låt oss utgå från ekvationen $3x - y + 2z = 11$. Kan vi vara säkra på att detta verkligen betyder ett plan? Med tanke på erfarenheterna ovan kan du säkert själv gissa vad som borde vara planets normalvektor. En punkt som satisfierar ekvationen kan vi naturligtvis lätt finna, t.ex. genom att sätta in värden på två av variablerna och lösa ut den tredje. En punkt är t.ex. $(2, 5, 5) = P_0$, säg. Vi har ju $3\cdot 2 - 1\cdot 5 + 2\cdot 5 = 11$. Subtraherar vi denna likhet från ekvationen $3x - y + 2z = 11$ får vi den ekvivalenta ekvationen $3(x-2) - 1(y-5) + 2(z-5) = 0$. När ekvationen är skriven på denna form är den geometriska tolkningen uppenbar (vi låter som vanligt $P = (x, y, z)$): Vektorn $\overline{P_0P}$ är vinkelrät mot vektorn $(3, -1, 2)$ d.v.s. P ligger i det plan som går genom P_0 och har normalvektorn $(3, -1, 2)$.

Övning 20. Ange en normalvektor till, och ge exempel på en punkt i, planet $3x+4y-2z = -2$. Skriv ekvationen på en form så att den geometriska tolkningen blir uppenbar.

Övning 21. Visa att den räta linjen $(x, y, z) = (2, 3, 4) + t\cdot(4, -1, 3)$ är parallell med (men inte ligger i) planet $-3x + 6y + 6z = 35$.

Ledning: Visa att linjens riktningsvektor är vinkelrät mot planets normalvektor. Rita figur.

I Övning 21 såg vi ett exempel på en linje och ett plan som är parallella. Det "normala" är dock att en linje och ett plan har en skärningspunkt, som i nästa övning:

Övning 22 a) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (7, -5, 5) + t\cdot(1, 1, 0)$ och planet $-x + 4y + z = 5$.

b) Beräkna vinkeln mellan linjens riktningsvektor och planets normalvektor.

c) Hur stor är alltså vinkeln mellan linje och plan?

Tänk dig tre olika plan i rummet. I "normalfallet" finns det exakt en punkt som ligger i alla tre planen, d.v.s. planen har *en* skärningspunkt. Så är fallet i följande exempel.

Exempel. Bestäm skärningspunkten mellan planen $x + 3y - 2z = 3$, $-x - y + 4z = 11$ och $2x + 11y - 3z = 25$. Eftersom skärningspunkten skall uppfylla alla tre ekvationerna, skall vi "helt enkelt" lösa följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ -x - y + 4z = 11 \\ 2x + 11y - 3z = 25 \end{cases}$$

Kanske kan du på egen hand lösa detta system. Om du gör det bör du också fråga dig om den lösning du funnit säkert är den enda (rita en figur som visar att det *kan* förekomma att tre plan skär varandra utefter en rät linje).

Jag överlåter till din lärare att visa dig hur man mer systematiskt attackerar ekvationssystem. I detta fall kan en bra början vara att i första skedet låta första ekvationen stå kvar oförändrad, ersätta den andra ekvationen med summan av första och andra ekvationerna samt minska den tredje ekvationen med två gånger den första. Ekvationssystemet övergår då i:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ \quad 2y + 2z = 14 \\ \quad 5y + z = 19 \end{cases},$$

som har exakt samma lösningar som det ursprungliga systemet (varför?). Geometriskt betyder detta att vi ersätter två av de tre givna planen med två andra plan utan att de tre planens skärningspunkt rubbas. Din lärare kan hjälpa dig att förklara vad som händer. Säkert kan du lösa ut y och z ur andra och tredje ekvationerna. När systemet är löst bör du ha funnit skärningspunkten $(2, 3, 4)$.

Övning 23. Visa att de tre planen $x+2y+z = 4$, $2x+y-z = -4$ och $3x+10y+5z = 18$ skär varandra i en punkt. Bestäm denna.

Två plan skär varandra, om de inte är parallella, utefter en rät linje.

Exempel. Betrakta de två planen $x - 2y + z = 6$ och $2x + y - 2z = -1$. De har normalvektorerna $(1, -2, 1)$ resp. $(2, 1, -2)$. Uppenbarligen är inte normalvektorerna parallella. Planen är således inte heller parallella utan skär varandra längs en rät linje. Frågan är bara vad denna linje har för ekvation. För punkten (x, y, z) på linjen gäller båda planens ekvationer, d.v.s. ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

Vi kan eliminera x ur den andra ekvationen genom att minska denna med två gånger den första. Vi får då

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ \quad 5y - 4z = -13 \end{cases}$$

Om vi nu dividerar den andra ekvationen med 5 och sedan till den första ekvationen adderar två gånger den andra så kommer y att elimineras ur den första ekvationen. Vi får då först

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ \quad y - \frac{4}{5}z = -\frac{13}{5} \end{cases} \quad \text{och sedan} \quad \begin{cases} x - \frac{3}{5}z = \frac{4}{5} \\ y - \frac{4}{5}z = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Naturligtvis kan vi för vilket värde som helst på z entydigt lösa ut x och y. Vi har inte heller väntat oss en entydig lösning till systemet. Ekvationssystemet skall ju satisfieras av alla (x, y, z) på en rät linje, vars ekvation vi är i färd med att bestämma. Vi kan uttrycka att z kan väljas fritt genom att sätta $z = t$, där t är en godtycklig parameter. Då får vi $x = \frac{3}{5}t + \frac{4}{5}$ och $y = \frac{4}{5}t - \frac{13}{5}$. Alltså $(x, y, z) = (\frac{4}{5}, -\frac{13}{5}, 0) + t\cdot(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$. Detta är den sökta linjens ekvation!

Vi kan utläsa riktningsvektorn $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ och en punkt $(\frac{4}{5}, -\frac{13}{5}, 0)$ på linjen. Hade vi lagt upp räkningarna annorlunda ovan hade vi kanske fått ett annat uttryck för linjen. Det har vi ju sett tidigare att en linjes ekvation kan uttryckas på olika sätt. Om sanningen skall fram hade vi nog kunnat undvika bråktal genom att lägga upp räkningarna lite mer taktiskt, men jag tyckte ändå att det här var ett naturligt sätt att lösa problemet första gången. Naturligtvis är t.ex. $5\cdot(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1) = (3, 4, 5)$ också riktningsvektor till linjen, varför linjens ekvation lika gärna kan skrivas: $(x, y, z) = (\frac{4}{5}, -\frac{13}{5}, 0) + t\cdot(3, 4, 5)$. Sätter vi in $t = \frac{2}{5}$ här (eller $t = 2$ i den första formen av linjens ekvation) hittar vi en punkt med heltalskoordinater på linjen, nämligen $(2, -1, 2)$. Det ger oss ett tredje, för ögat mer tilltalande, uttryck för linjens ekvation: $(x, y, z) = (2, -1, 2) + t\cdot(3, 4, 5)$.

Övning 24. Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan de två planen $x - 11y + 2z + 8 = 0$ och $3x - y - 2z = 0$.

Övning 25. Tre plan är givna: Π_1: $x + 6y + 6z = 13$, Π_2: $3x - 6y + 2z = -1$ och Π_3: $3x - 4y + z = 0$. Låt ℓ_1 vara skärningslinjen mellan Π_1 och Π_2 och låt ℓ_2 vara skärningslinjen mellan Π_2 och Π_3. Bestäm ekvationerna för ℓ_1 och ℓ_2 samt vinkeln mellan dem.

Övning 26. Bestäm a och b så att linjen $(x, y, z) = (2, a, -1) + t(b, 2b, 1)$ helt ligger i planet $2x - 5y + 4z = 11$.

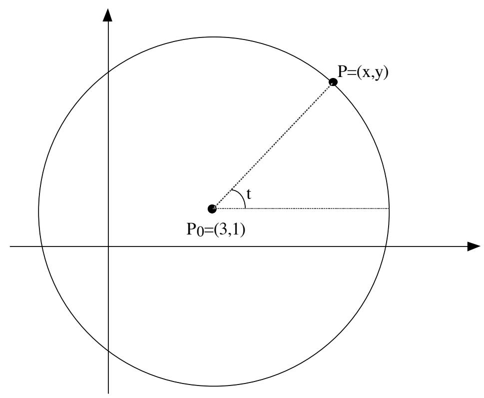
Med dessa övningar avslutas vår inledande studie av linjer och plan. Vi har talat om riktningsvektorer och normalvektorer och vi har sett hur man algebraiskt uttrycker, med en ekvation, att en punkt ligger i ett plan eller på en linje (i planet eller rummet). Punkterna på en linje i rummet uttryckte vi explicit med hjälp av en parameter som tillåts variera över de reella talen. Planets ekvation skrev vi utan parameter som ett villkor på koordinaterna för de punkter som ligger i planet. Vi har tillämpat dessa algebraiska uttrycksmöjligheter i några övningar där uppgiften varit att bestämma skärningspunkter mellan t.ex. två plan eller en linje och ett plan.

Det finns ett sätt också att explicit uttrycka punkterna i ett plan. Man behöver då två parametrar och talar om planets ekvation på parameterform. Denna möjlighet ligger närmast till hands om planets normalvektor är okänd, men man istället känner en triangel i planet (d.v.s. tre punkter i planet, vilka inte ligger i rät linje). Hur man i denna situation bestämmer en normalvektor är naturligtvis en viktig fråga. Detta problem samt frågor om avstånd mellan linjer som inte skär varandra och andra mer avancerade avstånds- och vinkelberäkningar skall vi inte behandla i detta kompendium.

Cirklar och sfärer.

Efter våra framgångar med algebraiska beskrivningar av räta linjer och plan ger vi oss i kast med utmaningen att med algebraiska metoder studera cirklar och sfärer.

Betrakta t.ex. *cirkeln* i nedanstående figur. Cirkeln har sin medelpunkt i $P_0 = (3, 1)$ och den har radien 5.



Att punkten $P = (x, y)$ ligger på denna cirkel betyder förstås att $|P_0P| = 5$. Längden av en vektor har vi beräknat förr och, eftersom $\overline{P_0P} = (x - 3, y - 1)$, får vi nu

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Detta är *cirkelns ekvation på allmän form*. Återigen ett exempel på en direkt översättning från geometri till algebra.

Övning 27. Bestäm skärningspunkterna mellan cirkeln $(x-3)^2+(y-1)^2 = 25$ och linjen $7x - y = 45$.

Övning 28. Visa att linjen genom punkterna $(0, 9)$ och $(8, 5)$ är tangent till den cirkel som har medelpunkten i $(2, 3)$ och går genom $(6, 1)$. Ange också tangeringspunkten.

Cirkeln i vår figur kan beskrivas med parameter också. Låt t beteckna den vinkel vi markerat i figuren. Vi låter t variera så att $0° \leq t \leq 360°$. Eftersom cirkeln är fem gånger så stor som enhetscirkeln har vi $\overline{P_0P} = 5(\cos t, \sin t)$ eller

$$(x - 3, y - 1) = 5(\cos t, \sin t)$$

vilket är *cirkelns ekvation på parameterform*. Naturligtvis kan vi disponera ekvationen på andra sätt: $(x, y) = (3 + 5 \cos t, 1 + 5 \sin t)$ eller $\begin{cases} x = 3 + 5\cos t \\ y = 1 + 5\sin t \end{cases}$

Att en punkt P ligger på en viss *sfär* i rummet kan lätt uttryckas i form av en ekvation analogt med cirkelns ekvation (på allmän form):

Övning 29. Bestäm ekvationen för den sfär med radie 3 som har medelpunkt i $(1, 2, -1)$. Visa att $(3, 4, 0)$ ligger på sfären.

Övning 30. Visa att planet $2x+3y+6z = 46$ *tangerar* sfären $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 49$ i punkten $(2, 4, 5)$.

Blandade övningar.

Vi avslutar även detta kapitel med några blandade övningar.

Övning 31. Bestäm a och b så att linjerna $(x, y, z) = (2 + t, b - 2t, 1 + t)$ och $(x, y, z) = (1+3t, 2a+bt, 2+t)$ skär varandra under rät vinkel. Bestäm också linjernas skärningspunkt i detta fall.

Övning 32. Låt A och B vara punkterna $(1, 0, 0)$ resp. $(0, 1, 0)$. Bestäm de punkter P på linjen $(x, y, z) = t(2, -1, 1)$ för vilka triangeln APB har en rät vinkel.

Övning 33. Bestäm alla punkter i rummet vars avstånd till punkterna $(5, 2, 6)$ och $(1, -1, 2)$ är lika stort.

Övning 34. Visa att punkten $(4, 6)$ ligger på cirkeln $(x, y) = (1 + 5\cos t, 2 + 5\sin t)$. Bestäm ekvationen för cirkelns tangent i denna punkt.

Övning 35. Visa att de två sfärerna $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 16$ och $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4$ skär varandra. Bestäm ekvationen för det plan i rummet som innehåller sfärernas skärningscirkel!

Övning 36. Triangeln $\triangle ABC$ har hörnen $A = (2, 3)$, $B = (4, 7)$ och $C = (8, -1)$. Bestäm ekvationen för bisektrisen genom B.

Övning 37. Låt $A = (2, 3, -1)$, $B = (4, 5, 3)$ och $C = (5, -1, 7)$ vara tre punkter och betrakta triangeln $\triangle ABC$. Höjden från C skär sidan AB i D. Bestäm koordinaterna för D.