FUNKTIONSLÄRA

Christian Gottlieb

Matematiska institutionen
Stockholms universitet
2002

Innehåll

Förord

Det viktigaste är att man har en god grund att bygga på. Det var en av tankarna när vi i Stockholm för några år sedan såg över matematikkurserna för blivande grundskolelärare. Det är också tanken bakom detta kompendium som successivt växte fram under vårt arbete med de nya kurserna. Kompendiet vill ge en introduktion i matematisk analys med tonvikt på elementära metoder, närmare bestämt analys utan differential- och integralkalkyl. Vår tidigare erfarenhet var att man lätt slarvar över de grundläggande begreppen i brådskan att introducera de effektiva verktygen derivata och integral med allt vad därtill hörer av deriveringsregler, partiell integration etc.

När man börjar tänka över det, finner man att det går att åstadkomma förvånansvärt mycket med elementära metoder. I kapitlet om polynomfunktioner t.ex. gör vi ganska ingående studier av kurvor inklusive tangenter, inflexionspunkter och extrempunkter.

Funktionslära är en något förenklad titel. Kompendiet innehåller en del annat också av sådant som är oundgängligt för vidare studier. I första kapitlet studerar vi komplexa tal som modell för plan geometri och utreder då den geometriska tolkningen av multiplikation och division med komplexa tal. Det går med fördel, som vi visar, att göra detta med helt elementär likformighetsgeometri.

Kapitlet om geometriska serier är egentligen en förberedelse för kapitlet om exponentialfunktioner. Det samma kan i viss mån sägas om binomialsatsen, som i kapitel 5 utnyttjas i ett resonemang som försöker introducera talet e. Men binomialsatsen har också fått vara med så att säga på egna meriter. Satsen kommer så ofta till användning att det brukar kännas besvärande att inte ha tillgång till den. Naturligtvis är binomialsatsen intressantast att studera i en kurs i kombinatorik, men det fanns inte utrymme för någon kombinatorik i denna kurs.

Studenter har ibland upplevt materialet som något splittrat. För att i någon mån råda bot på detta och skapa något slags röd tråd har jag ofta låtit övningsuppgifter i ett kapitel utnyttja matematik även ur tidigare kapitel. En del av de geometriska serierna innehåller t.ex. komplexa termer. En viktigare röd tråd på idéplanet är att jag försöker understryka betydelsen av ändamålsenliga formuleringar och beteckningar. Förändrade beteckningar kan ofta ge helt nya idéer och vara avgörande för framgång med ett problem. Man har ofta mycket att vinna på att göra en väl vald substitution och det är alltså substitutionsprincipen jag vill slå ett slag för.

Ett resonemang om funktioner i allmänhet har fått vänta till det sista kapitlet. Jag tycker att man mycket väl, och med fördel, kan skaffa sig en bred repertoar av exempel på funktioner innan man börjar fundera över funktionsbegreppet på ett abstrakt plan. I sista kapitlet införs också begreppet inverterbarhet och invers funktion samt logaritmfunktioner.

Kompendiet som förut hade en något preliminär utformning har nu reviderats i samband med den nya lärarutbildningen och blivit lite fastare i konturerna. Men tanken är densamma. Till kompendiet hör fem separata arbetsblad med läsanvisningar och förståndsfrågor till texten.

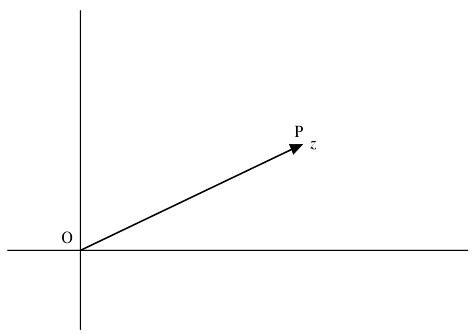
Januari 2002

Christian Gottlieb

1. Komplexa tal och vektorer i planet.

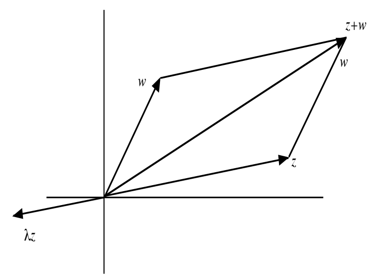
Vi förutsätter i detta kapitel att läsaren är förtrogen med såväl grunderna i vektorgeometri som grundläggande räkning med komplexa tal. Att räkna med vektorer är ett effektivt sätt att bedriva geometri. Det ger oss möjlighet att översätta geometriska samband till algebraiska och att lösa geometriska problem med algebraiska metoder. Speciellt användbar är vektorgeometrin vid beräkning av sträckor och vinklar. De komplexa talen ger oss en alternativ algebraisk modell för den plana geometrin. Vi skall nu jämföra dessa två modeller d.v.s. *jämföra räkning med vektorer med räkning med komplexa tal*.

Utgångspunkten för vårt resonemang är två linjer som är vinkelräta mot varandra och graderade i samma skala. Vi skall tänka på denna figur på två sätt: dels som ett vanligt koordinatsystem i planet, dels som ett komplext talplan med reell och imaginär axel. Skärningspunkten mellan linjerna är origo O eller det komplexa talet 0. Varje punkt P i planet bestämmer både ett talpar (x, y) och ett komplext tal $z = x + yi$.



Vi tillåter oss att omväxlande beteckna en sådan punkt med P eller z. Vi kommer också utan risk för missförstånd att använda orden punkt, talpar och komplext tal synonymt och t.ex. tala om *punkten* $2+3i$. Varje punkt P har dessutom en ortsvektor $\overline{OP}$ med samma koordinater som P. T.ex. har punkten $2 + 3i$ ortsvektorn $(2, 3)$. Fördelen med att arbeta med vektorer är som vi vet att dessa inte är bundna till ett speciellt läge. Vi vet också att varje vektor i planet kan realiseras som en ortsvektor för någon punkt i planet. Vi kommer i fortsättningen också att använda orden komplext tal och vektor synonymt och t.ex. kunna tala om *vektorn* z. En viss försiktighet krävs dock: beteckna inte vektorn z med ett streck över bokstaven z, ty kom ihåg att $\overline{z}$ ju betyder det till z konjugerade komplexa talet!

Låt $z = a + bi$ och $w = c + di$ vara två komplexa tal. Vi tänker också på dem som vektorer (a, b) och (c, d). Summan av de komplexa talen är $z + w = (a + c) + (b + d)i$ och detta svarar mot vektorn $(a+c, b+d)$ som är summan av vektorerna (a, b) och (c, d). Vi ser att *addition av komplexa tal och addition av vektorer* så att säga ”följs åt”. Vi vet hur addition av vektorer sker geometriskt och har därmed nu också en geometrisk tolkning av addition av komplexa tal. I figuren har jag också tillåtit mig att markera vektorn w på två ställen.

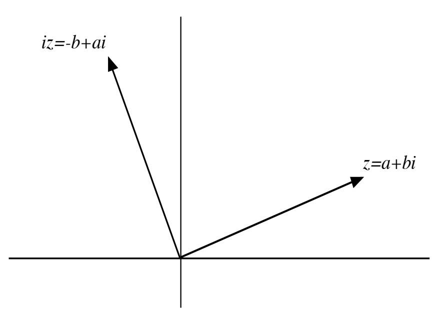


De två grundläggande räkneoperationerna i vektorgeometri är addition av vektorer och multiplikation av vektor med reellt tal. Låt λ vara ett tal. Då är $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$. Samtidigt är ju $\lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi$ så vi ser att *vektorer och komplexa tal även följs åt under räkneoperationen multiplikation med reellt tal*. Talet (vektorn) λz är markerad i figuren (här är $\lambda = -0,5$).

Man talar om *absolutbelopp* i samband både med komplexa tal och vektorer. Absolutbeloppet av en vektor är vektorns längd, som lätt beräknas med Pythagoras sats: $|(a, b)| = \sqrt{a^2+b^2}$. Absolutbeloppet av det komplexa talet $z = a + bi$ är samma sak $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ d.v.s. avståndet mellan talet z och talet 0 eller längden av vektorn z.

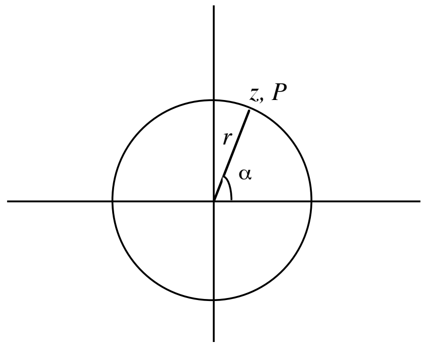
Det finns en räkneoperation som är speciell för vektorer, nämligen skalärprodukten, som alltid ger ett reellt tal till resultat. Det finns också en räkneoperation för komplexa tal som saknas för vektorer, nämligen multiplikation av två komplexa tal. Denna produkt är ett nytt komplext tal. Exempelvis är ju $(2, 3) \cdot (1, 4) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 14$ och $(2+3i) \cdot (1+4i) = -10 + 11i$ helt olika saker. Skalärprodukten har vi tolkat och använt geometriskt. Vi skall nu ge en användbar geometrisk tolkning av komplex multiplikation.

Vi börjar med multiplikation med i. Låt alltså $z = a+bi$ och bilda $iz = ai+bi^2 = -b+ai$. Bildar vi skalärprodukten av vektorerna z och iz så får vi $(a, b) \cdot (-b, a) = 0$. Vektorerna z och iz är alltså vinkelräta. Dessutom är de lika långa, ty $|a+bi| = |-b+ai| = \sqrt{a^2+b^2}$. Med hjälp av figuren nedan så övertygar du dig om att vektorn iz erhålles om man vrider vektorn z vinkeln $90°$ motsols.



Multiplikation med i svarar alltså geometriskt mot en vridning $90°$ motsols. Omvänt betyder därför division med i en vridning 90° medsols. Detta kan också beskrivas som multiplikation med $-i$, ty $1/i = -i$.

Betrakta nu en cirkel med centrum i origo och radie r. Vi kan ange cirkelns ekvation på parameterform: En punkt $P = (x, y)$ ligger på cirkeln om och endast om $(x, y) = r(\cos t, \sin t)$ för något värde på parametern t. I figuren nedan har jag markerat en punkt (komplext tal) z som svarar mot $t = \alpha$. Cirkelns ekvation kan också ges på "komplex" form: $|z| = r$, vilket kan översättas till den välbekanta allmänna formen $x^2 + y^2 = r^2$.



Vi har alltså $(x, y) = r(\cos\alpha, \sin\alpha)$ eller uttryckt i komplexa tal $x + yi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Detta sätt att skriva ett komplext tal kallas för *polär form*.

Exempel. Låt $z = 1 + \sqrt{3}i$. Markera punkten z i en figur och dra en cirkel genom z med medelpunkt i origo. Dra också radien från origo till z liksom i figuren ovan. Cirkelns radie är $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$. Hur stor är vinkeln α i detta fall? Bryter vi ut $r = 2$ ur $z = 1 + \sqrt{3}i$ får vi $z = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. För α gäller alltså att $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ och $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Detta stämmer ju för $\alpha = 60°$ så vi kan skriva $z = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$. Talet $1 + \sqrt{3}i$ skrivet på polär form är alltså $2(\cos 60° + i\sin 60°)$. Du kan också passa på att komplettera din figur med enhetscirkeln (som har radie 1 och medelpunkt i origo). Radien mellan origo och z, som vi ritat, skär enhetscirkeln i $\frac{z}{2} = \cos 60° + i\sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lägg märke till, i exemplet ovan, att 60° naturligtvis kan bytas ut mot vilket som helst av talen $60° + n\cdot 360°$ där n är ett godtyckligt heltal. Alla dessa tal kallar vi *argumentet* för z och betecknar $\arg z$. Vi tillåter oss alltså att skriva $\arg z = 60°$, men också $\arg z = -300°$. Detta är naturligtvis något oegentligt och man skulle kunna säga att argumentet inte är ett väldefinierat reellt tal, utan endast definierat "modulo 360". Korrektare vore kanske att skriva $\arg z \equiv 60° \pmod{360}$. Man kan tycka att man lika väl kunde bestämma sig för att argumentet alltid skall ligga mellan 0 och 360, men vi skall snart se finessen med att tillåta denna mångtydighet.

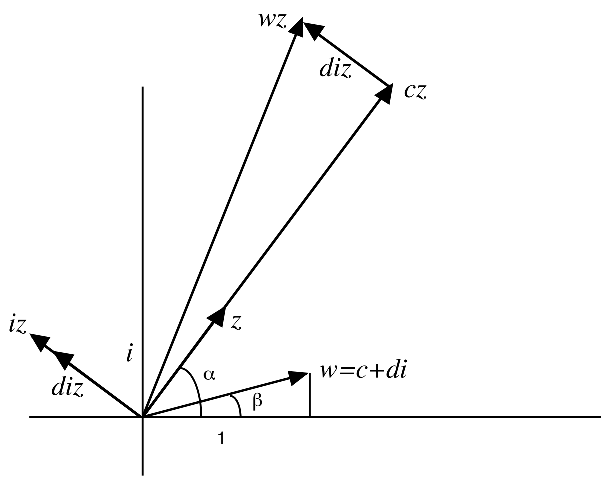
Samma mångtydighet gäller naturligtvis allmänt. Om $\arg z = \alpha$ så är också $\arg z = \alpha + n\cdot 360°$ för alla heltal n.

Övning 1. Markera följande tal i det komplexa talplanet, ange absolutbelopp och argument samt skriv talen på polär form: $3 + 3i$, $-4 + 4i$, $2\sqrt{3} - 2i$ och $-i$.

Övning 2. Låt $z = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$. Markera z och $\overline{z}$ i en figur och skriv $\overline{z}$ på polär form.

Övning 3. Finn ett generellt samband mellan $\arg z$ och $\arg \overline{z}$.

Låt nu z och w vara två komplexa tal. Vi skall studera effekten av att multiplicera z med w. Antag att $w = c+di$ och att $\arg w = \beta$. Antag vidare att $\arg z = \alpha$. Vi kan naturligtvis skriva $wz = cz + diz$, så wz är summan av två komplexa tal (vektorer), som vi nu skall studera var för sig. Betrakta figuren nedan; i figuren är $c > 1$ och $0 < d < 1$. Vektorn cz är parallell med z och $|c|$ gånger så lång. Tänk själv efter hur figuren måste ändras om $0 < c < 1$ eller om $c < 0$.



Vektorn iz får vi, som vi tidigare konstaterat, om vi roterar z vinkeln 90° motsols. Vektorn diz är parallell med iz (i vår figur något kortare än iz eftersom $d < 1$ i figuren). Tänk själv efter hur det skulle se ut om $d > 1$ eller $d < 0$.

Vektorerna cz och diz har adderats geometriskt i figuren till summan wz. Som vi ser har det bildats två stycken rätvinkliga trianglar: T_1 med hörn i 0, c och w och T_2 med hörn i 0, cz och wz. Triangel T_1 har basen $|c|$ och höjden $|d|$ medan triangel T_2 har basen $|c||z|$ och höjden $|d||z|$. Eftersom de två förhållandena $|c||z|/|c|$ och $|d||z|/|d|$ båda är lika med $|z|$ och trianglarna dessutom överensstämmer i mellanliggande vinkel, så följer av ett av likformighetsfallen att T_1 och T_2 är likformiga.

Likformigheten får, som alltid, intressanta konsekvenser. Förhållandet mellan hypotenusorna blir det samma som mellan baserna eller höjderna. Alltså: $|wz|/|w| = |z|$, d.v.s. $|wz| = |w||z|$. Dessutom följer att vinkeln mellan cz och wz är β så att $\arg wz = \alpha+\beta$. Om z och w ligger annorlunda än i figuren så kan det hända att $\alpha + \beta > 360^\circ$. Vi ser nu en poäng med att argumentet av ett komplext tal endast är definierat modulo 360. Vi sammanfattar i en sats:

Sats 1. *Låt z och w vara två komplexa tal. Då är* $|wz| = |w||z|$ *och* $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.

Observera igen att vårt bevis inte är fullständigt eftersom vårt resonemang hänvisar till en figur som inte täcker alla möjliga fall. Rita själv figurer för de andra fall som kan uppkomma, t.ex. $c < 0$, $d > 1$ och övertyga dig om att ovanstående algebraiska samband ändå gäller.

Jämför vektorerna z och wz. Effekten av multiplikation med w är alltså att vektorn z förlängs med faktorn $|w|$ samtidigt som den vrids motsols vinkeln $\arg w$ (argumentet ökar ju med $\arg w$ vid multiplikationen).

Övning 4. Om du inte redan gjort det, så följer du nu uppmaningen ovan att rita figur och diskutera de "andra fall som kan uppkomma".

Övning 5. Låt $z = -2 + i$ och $w = 3 + 2i$. Beräkna $|z|$ och $|w|$ exakt. Markera z och w i en figur och uppskatta $\arg z$ och $\arg w$ med en gradskiva. Beräkna sedan zw och $|zw|$ exakt samt uppskatta $\arg wz$ genom att igen mäta med en gradskiva. Verifiera Sats 1 i detta konkreta exempel.

Övning 6. Låt $z = \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$.

a) Ange $\arg z^2$ och $|z^2|$ och skriv sedan z^2 på polär form.

b) Skriv även z^3 och z^4 på polär form.

c) Markera talen z, z^2, z^3, z^4 i en figur.

Övning 7. Låt $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$. Markera z, z^2, z^3, z^4 och z^5 i det komplexa talplanet. Hur ligger dessa punkter i förhållande till varandra?

Övning 8. Bestäm på polär form de komplexa tal z som uppfyller $z^2 = 9(\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)$.

Övning 9. Vi har tidigare skrivit talet $z = 1 + \sqrt{3}i$ på polär form. Använd detta till att förenkla $(1 + \sqrt{3}i)^5$.

Övning 10. Förenkla på samma sätt $(2 + 2i)^5$ och $(\sqrt{3} - i)^3$.

Övning 11. Finn ett komplext tal w sådant att multiplikation med w geometriskt betyder en vridning 45° motsols.

För fullständighetens skull behandlar vi också effekten av division.

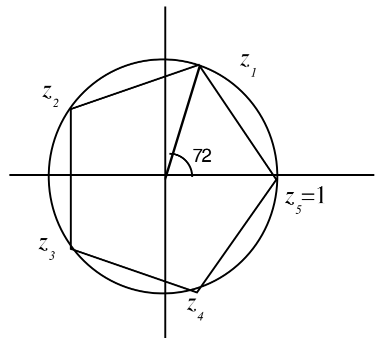
Sats 2. *Låt z och w vara två komplexa tal, $w \neq 0$. Då är $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ och $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$.*

Bevis. Eftersom $z = \frac{z}{w} \cdot w$ kan vi använda Sats 1 och får då $|z| = |\frac{z}{w}||w|$ respektive $\arg z = \arg\left(\frac{z}{w}\right) + \arg w$. Satsen följer omedelbart av detta.

Övning 12. Skriv så enkelt som möjligt $\dfrac{(\cos 17^\circ + i \sin 17^\circ)^3}{(\cos 61^\circ + i \sin 61^\circ)^6}$.

Övning 13. Förenkla $(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)^{-4}$.

Gå nu tillbaka till Övning 7. De fem talen bildar en regelbunden 5-hörning. Låt oss sätta $z_1 = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$, $z_2 = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ \ldots$ d.v.s. $z_k = \cos(k \cdot 72^\circ) + i \sin(k \cdot 72^\circ)$ för $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Vi har då $|z_k| = 1$ och $\arg z_k = k \cdot 72^\circ$ och alltså $z_k = z_1^k$, se figuren.



Naturligtvis är $z_5 = \cos 360° + i \sin 360° = 1$ så $z_1^5 = 1$. Men då är också $z_2^5 = (z_1^2)^5 = 1$ o.s.v. Talen $z_1, z_2, \ldots, z_5$ är alltså de fem rötterna till ekvationen $z^5 = 1$. Tänk igenom detta en gång till och lös sedan följande övningar.

Övning 14. Markera i en figur och skriv på polär form de tre rötterna till ekvationen $z^3 = 1$. Skriv också rötterna på vanlig form.

Övning 15. Gör på samma sätt med rötterna till ekvationen $z^6 = 1$.

Övning 16. Markera i en figur och skriv på polär form de sju rötterna till ekvationen $z^7 = 1$.

Bra, men hur ligger rötterna till ekvationen $z^5 = -1$ o.s.v.? En rot till $z^5 = -1$ ser vi genast, nämligen $z = -1$. Vi kan skriva om ekvationen som $-z^5 = 1$ eller $(-z)^5 = 1$. *Gör vi nu substitutionen* $w = -z$ får vi $w^5 = 1$. Lösningarna till denna ekvation har vi enligt ovan. De är $w_k = \cos(k \cdot 72°) + i(\sin k \cdot 72°)$, $k = 1, \ldots, 5$, och bildar en regelbunden femhörning. Men $z = -w$, så rötterna till $z^5 = -1$ är $z_k = -(\cos(k \cdot 72°) + i(\sin k \cdot 72°))$, $k = 1, \ldots, 5$. Dessa rötter bildar förstås också en regelbunden femhörning, vår gamla femhörning speglad i origo. Rita själv en figur!

Valet av beteckningar är ofta avgörande för våra möjligheter att lösa ett problem. Säkert har du märkt detta många gånger när du arbetat med geometriska problem. Det problem vi just löste är också ett exempel på detta. Vi substituerade, d.v.s. ersatte, $-z$ med w och återförde därmed problemet på ett tidigare löst problem. Substitutionsmetoden är en effektiv matematisk metod. Får du känsla för den så väntar många framgångar. Vi skall se fler exempel i fortsättningen.

Övning 17. Ange lösningarna till ekvationen $z^3 = -1$ och markera dessa i det komplexa talplanet.

Övning 18. Ange lösningarna till ekvationen $z^6 = -1$ och markera dessa i det komplexa talplanet.

Ledning: En lösning är ju $z = i$. Försök med substitutionen $w = iz$.

Exempel. Vi skall nu lösa ekvationen $z^3 = 10(\cos 18° + i \sin 18°)$. Givet är alltså att $|z^3| = 10$ och $\arg z^3 = 18°$. Men enligt Sats 1 är $|z^3| = |z|^3$ så $|z|^3 = 10$ och alltså $|z| = \sqrt[3]{10}$. Sats 1 ger också $\arg z^3 = 3 \arg z$ så $3 \arg z = 18°$. En möjlighet är förstås att

$\arg z = 6°$. Men det finns fler möjligheter! Argumentet är ju bara bestämt modulo 360, jämför diskussionen på sid. 3, så vi kan lika gärna skriva $3\arg z = 18° + 360° = 378°$ eller $3\arg z = 18° + 2{\cdot}360° = 738°$. Det ger oss två nya möjligheter för z, nämligen $\arg z = 126°$ eller $\arg z = 246°$. Ytterligare möjligheter finns inte. Sätter vi t.ex. $3\arg z = 8° + 3{\cdot}360°$ får vi $\arg z = 6° + 360°$, men det ger samma punkt som $\arg z = 6°$. Sammanfattningsvis har ekvationen $z^3 = 10(\cos 18° + i \sin 18°)$ alltså tre rötter: $z_1 = \sqrt[3]{10}(\cos 6° + i \sin 6°)$, $z_2 = \sqrt[3]{10}(\cos 126° + i \sin 126°)$ och $z_1 = \sqrt[3]{10}(\cos 246° + i \sin 246°)$.

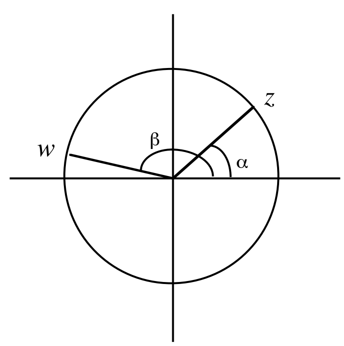
Övning 19. Lös ekvationen $z^5 = 32(\cos 80° + i \sin 80°)$.

Övning 20. Lös ekvationen $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$.

***Tillämpningar på trigonometriska formler.**

Som en tillämpning av Sats 1 låter vi $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ och $w = \cos\beta + i\sin\beta$ vara två tal på enhetscirkeln. Då är $|z| = |w| = 1$ och alltså även $|zw| = 1$. Produkten zw ligger alltså också på enhetscirkeln och vi kan lätt, givet z och w, markera zw, ty vi vet ju att $\arg zw = \alpha + \beta$. Vi har alltså $zw = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$. Men å andra sidan kan zw beräknas genom direkt multiplikation: $zw = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$. Jämför vi de båda uttrycken så erhåller vi de välkända additionsformlerna:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ och
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.



Övning 21. Härled på liknande sätt formler för $\cos 3\alpha$ och $\sin 3\alpha$.

Övning 22. Finn, med hjälp av additionsformlerna ovan, en additionsformel för tangens.

2. Geometriska serier.

Gammaldags s.k. intelligenstest innehöll ofta uppgifter av följande typ: Finn nästa två tal i följden $1, 2, 4, 8, \ldots$. Naturligtvis finns inte något säkert enda riktiga svar på denna fråga. Har du telefonnummer 124863 är svaret kanske givet. Nästa två tal är 6 och 3. Men förmodligen svarar du istället 16 och 32 och menar att talföljden är uppbyggd efter den principen att varje tal är dubbelt så stort som närmast föregående.

Säkert vet du att detta är exempel på en *geometrisk talföljd*. En talföljd kallas geometrisk om förhållandet mellan ett tal och närmast föregående alltid är detsamma. Detta förhållande kallar vi talföljdens *kvot*. En geometrisk talföljd i allmänhet kan vi skriva:

$$a, ak, ak^2, ak^3, \ldots$$

där k är talföljdens kvot. Summerar vi ett antal tal i geometrisk följd får vi en *geometrisk summa*, t.ex.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10}$$

Den elegantaste behandlingen av geometriska summor finner du om du slår upp Proposition 35 i Bok IX i Euklides Elementa. En modernare, mer formelanpassad, teknik att beräkna denna summa är följande:

Kalla summan för s. Då är $2s = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10} + 2^{11}$. Subtraherar vi denna likhet med $s = 1+2+4+8+\cdots+2^{10}$ så försvinner alla termer i högerledet utom två och vi får $2s - s = 2^{11} - 1$. Alltså $s = 2^{11} - 1 = 2047$.

Med samma teknik kan vi lätt visa följande sats.

Sats 1. *Låt $s = a + ak + ak^2 + \cdots + ak^n$ vara en geometrisk summa och antag att $k \neq 1$. Då är*

$$s = \frac{ak^{n+1} - a}{k - 1}$$

Bevis. Vi får $ks = ak + ak^2 + ak^3 + \cdots + ak^n + ak^{n+1}$. Alltså är $ks - s = ak^{n+1} - a$ och således $s = \frac{ak^{n+1}-a}{k-1}$.

Man bör inte anstränga sig för mycket att lära sig denna formel utantill. Det är mycket nyttigare att lära sig det korta resonemanget i beviset: multiplicera med k, subtrahera. I enskilda fall kan man ofta lika gärna använda metoden som formeln. Det var ju så vi gjorde i exemplet ovan. Det kan dock vara bra att lägga märke till att ak^{n+1} är den första av de termer i talföljden som *inte* ingår i summan.

Övning 1. Beräkna $12 - 3 + \frac{3}{4} - \frac{3}{16} + \cdots - \frac{3}{4^8}$.

Ett annat sätt att beräkna den summa vi började med, $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10}$, ger vi i nästa exempel.

Exempel. (Wimbledonmetoden) Vi ställer till med en tennisturnering med 2^{11} deltagare. I första omgången paras deltagarna ihop två och två och det spelas 2^{10} matcher. De 2^{10} segrarna möts i nästa omgång i 2^9 matcher. Varje match har en förlorare som försvinner ur turneringen och en segrare som går vidare. I tredje omgången spelas 2^8 matcher. När endast fyra spelare är kvar så är det dags för de två semifinalerna och därefter den avslutande finalmatchen. Sammanlagt har $2^{10} + 2^9 + 2^8 + \cdots + 4 + 2 + 1$ matcher spelats. I varje match har en spelare åkt ut (det är vitsen). Alla 2^{11} spelare utom en har drabbats av detta när turneringen är över, så totalt har det spelats $2^{11} - 1$ matcher. Alltså $2^{10} + 2^9 + 2^8 + \cdots + 4 + 2 + 1 = 2^{11} - 1$.

Övning 2. Hitta på en egen variant av metoden i exemplet till att tolka och beräkna summan $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^8$. Beräkna också summan med formeln eller metoden i Sats 1.

Betrakta igen formeln $a + ak + ak^2 + \cdots + ak^n = \frac{ak^{n+1} - a}{k-1}$. Om $|k| < 1$ kommer termen ak^{n+1} uppenbarligen att närma sig 0 då n växer. Man säger att ak^{n+1} har *gränsvärdet* 0 då n går mot oändligheten ($n \to \infty$), men vi bryr oss inte om att införa något formellt gränsvärdesbegrepp. Uttrycket $\frac{ak^{n+1} - a}{k-1}$ har därmed gränsvärdet $\frac{0-a}{k-1} = \frac{a}{1-k}$ då n går mot oändligheten. Det är därför naturligt att *definiera* den *oändliga summan* av alla tal i talföljden på följande sätt:

$$a + ak + ak^2 + \cdots = \frac{a}{1-k}$$

Uttrycket i vänsterledet kallar man en *geometrisk serie*.

Exempel. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. Du kan göra ett experiment för att illustrera detta. Ät upp en halv tårta, sedan en fjärdedels tårta och så en åttondels tårta o.s.v. Du kommer att märka att varje portion innehåller hälften av det som är kvar av tårtan. Summan av termerna i följden kommer därför aldrig att överstiga 1, men anta värden godtyckligt nära 1.

Övning 3. Beräkna summan av den oändliga geometriska serien $7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{9} + \cdots$.

Övning 4. Beräkna summan av den oändliga geometriska serien $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2} + \cdots$.

Övning 5. Diskutera hur summan $a + ak + ak^2 + \cdots + ak^n$ varierar när n växer för det fall att $k \geq 1$ och för det fall att $k \leq -1$.

Övning 6. Låt s vara summan av den geometriska serien $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \cdots$ och låt s_n vara summan av de n första termerna i serien. Hur stort måste n väljas för att $s - s_n < 1$ skall gälla?

Det är ingenting som hindrar att termerna i en geometrisk talföljd är komplexa tal. Sats 1 gäller fortfarande och uttrycket för summan av en geometrisk serie $a + ak + ak^2 + \cdots = \frac{a}{1-k}$ gäller om $|k| < 1$. I några av övningarna nedan har du nytta av att kunna skriva ett kompext tal på polär form.

Övning 7. Beräkna den geometriska summan $1 + i + i^2 + \cdots + i^{10}$.

Övning 8. Beräkna den geometriska summan $1 + i + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^8$.

Övning 9. Beräkna summan av den geometriska serien $1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$.

Övning 10. Skriv så enkelt som möjligt funktionen $f(x) = 2^{-x} + 2^{-2x} + 2^{-3x} + \cdots$, där $x > 0$. Varför förutsätter vi $x > 0$?

Övning 11. Beräkna den geometriska summan

$$\frac{2}{\sqrt{3}+i} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^{11}$$

Övning 12. Låt $a \neq b$. Visa att $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$.

*Betrakta nu polynomet $p(x) = x^2 + x + 1$. Vi kan också skriva $p(x) = 1 + x + x^2$ och tolka detta som en geometrisk summa med första termen 1 och kvoten x. För $x \neq 1$ får vi alltså $p(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. Nollställen till täljaren $x^3 - 1$ har vi utrett tidigare i avsnittet om komplexa tal. De är, skrivna på polär form, $x_k = \cos(k \cdot 120°) + i \sin(k \cdot 120°)$, $k = 1, 2, 3$. Vi vet också att de tre rötterna bildar en liksidig triangel i det komplexa talplanet. För $k = 3$ får vi $x_3 = 1$, som naturligtvis inte är ett nollställe till $p(x)$. Sambandet $p(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ gäller ju bara om $x \neq 1$. I själva verket är $p(1) = 3$. Däremot är x_1 och x_2 nollställen till $p(x)$. Vi ger några övningar på detta.

Övning 13. Beräkna nollställena till $p(x) = x^2 + x + 1$ på vanligt sätt genom att lösa en andragradsekvation. Jämför med x_1 och x_2 ovan.

Övning 14. Skriv för $x \neq 1$ om polynomet $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ som en kvot analogt med ovan. Använd detta och erfarenheterna från avsnittet om komplexa tal till att finna nollställena till $p(x)$. Hur ligger de placerade i det komplexa talplanet?

Övning 15. Finn med valfri metod nollställena till

a) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

b) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$.

3. Binomialsatsen

Utgångspunkten i detta kapitel är den välkända kvadreringsregeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

Vi lägger märke till att högerledet innehåller tre termer och att varje term har grad 2. Detta är naturligt eftersom $(a+b)^2$ är en produkt av två faktorer, $(a+b)(a+b)$, och när vi utvecklar produkten bildas en summa av produkter, som var och en innehåller en faktor ur vänstra parentesen och en faktor ur högra parentesen:

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb \tag{2}$$

Två produkter är lika, $ab = ba$, och sammanförs till $2ab$. Om vi nu i stället skall utveckla $(a+b)^3$ kan vi förvänta oss att varje term blir av tredje graden. Ett sätt att gå till väga är att först utnyttja kvadreringsregeln och skriva:

$$\begin{array}{rcccccccc} (a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) & = & a^3 & + & 2a^2b & + & ab^2 & + & \\ & & & & a^2b & + & 2ab^2 & + & b^3 \\ & = & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 \end{array} \tag{3}$$

Här har jag först multiplicerat a i den första parentesen med var och en av termerna i den andra parentesen och sedan utfört samma manöver med b. Dessutom har jag infört principen att alltid skriva a före b i produkterna. Lägg också märke till att produkterna är ordnade efter fallande a-grad och stigande b-grad. Den första termen, a^3, har a-grad 3 och b-grad 0 o.s.v. Låt oss kalla resultatet för *kubregeln*.

Vi börjar kanske redan nu ana ett mönster. Fjärde potensen $(a+b)^4$ bör ha i princip följande utseende: $(a+b)^4 = a^4 + ?a^3b + ?a^2b^2 + ?ab^3 + b^4$, men vilka koefficienter skall det vara i stället för frågetecknen? Vi utnyttjar kubregeln och förfar på samma sätt som ovan:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) =$$

$$\begin{array}{cccccccccc} a^4 & + & 3a^3b & + & 3a^2b^2 & + & ab^3 & + & & \\ & & a^3b & + & 3a^2b^2 & + & 3ab^3 & + & b^4 & = \\ a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4 & \end{array} \tag{4}$$

En summa av två termer som $a+b$ kallas för ett *binom* och de koefficienter som dyker upp när man utvecklar en potens $(a+b)^n$ kallas för *binomialkoefficienter*. Vi har gjort detta för $n = 2, 3, 4$. Binomialkoefficienterna för $n = 3$ är alltså: 1 3 3 1. För $n = 1$ får vi $(a+b)^1 = a + b$, d.v.s. binomialkoefficienterna 1 och 1.

Binomialkoefficienterna brukar sammanföras i ett schema som kallas *Pascals triangel*:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Innan vi beräknar den 5:e raden i Pascals triangel kan vi lägga märke till att *varje rad börjar och slutar med en 1:a*. När vi utvecklar t.ex. $(a+b)^4$ får vi bara en a^4- och en b^4-term. Gå tillbaka och se hur vi gjorde och du ser att detta är ett "arv" från att det bara finns en a^3- och en b^3-term i utvecklingen av $(a+b)^3$. Vi inser att det måste fortsätta på det viset. Betrakta t.ex.

$$(a+b)^5 = (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \tag{5}$$

och fundera över detta.

Lägg också märke till att Pascals triangel är *symmetrisk*. Det beror förstås på att $(a+b)^n$ alltid är helt symmetriskt i a och b. Vi kan byta plats på a och b utan att värdet förändras. Således bör t.ex. $(a+b)^{19}$ ha samma koefficient framför a^7b^{12} som framför $a^{12}b^7$.

Vi skall lägga märke till ytterligare en egenskap hos Pascals triangel. Betrakta den tredje koefficienten i fjärde raden. Det är en 6:a som betyder att om vi utvecklar $(a+b)^4$ så får vi 6 termer av typen a^2b^2. Gå tillbaka till vår beräkning i (4) så ser du att vi fick dessa 6 termer i så att säga två omgångar: först $a \cdot 3ab^2 = 3a^2b^2$ och sedan $b \cdot 3a^2b = 3a^2b^2$. Inalles $6a^2b^2$. De två 3:or som förekommer här kommer från utvecklingen av $(a+b)^3$ och står i tredje raden i Pascals triangel närmast ovanför 6:an i rad 4. Betraktar vi istället andra koefficienten i rad 4 d.v.s. 4:an så ser vi att den är summan av de två koefficienterna närmast över: $4 = 1 + 3$. Gå igen tillbaka till (4) och förklara själv vad detta beror på.

Låt oss fullfölja utvecklingen av $(a+b)^5$ som vi påbörjade nyss. Vi får:

$$(a+b)^5 = (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) =$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a^5 & + & 4a^4b & + & 6a^3b^2 & + & 4a^2b^3 & + & ab^4 & & & & \\
 & + & a^4b & + & 4a^3b^2 & + & 6a^2b^3 & + & 4ab^4 & + & b^5 & = & \\
a^5 & + & 5a^4b & + & 10a^3b^2 & + & 10a^2b^3 & + & 5ab^4 & + & b^5 & &
\end{array} \tag{6}
$$

Lägg märke till att varje koefficient, med undantag av den första och den sista, är summan av två närliggande koefficienter vid utvecklingen av $(a+b)^4$. Genomför själv utvecklingen av $(a+b)^6$. Resultatet kan sammanfattas i Pascals triangel där vi nu känner sex rader:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Du har nu upptäckt principen. Genom att summera talen två och två i sjätte raden i Pascals triangel kan du själv beräkna den 7:e raden. Successivt kan vi alltså beräkna så många rader vi vill (och orkar) i Pascals triangel och alltså i princip svara på frågan: Vilken är koefficienten framför $a^{38}b^{62}$ i utvecklingen av $(a+b)^{100}$? Än så länge känner vi ingen annan metod att klara detta än att rad för rad arbeta oss ned i Pascals triangel. Man skulle önska sig en formel. Men vi börjar med en beteckning.

Definition. Binomialkoefficienten framför $a^{n-k}b^k$ i utvecklingen av $(a+b)^n$ betecknas $\binom{n}{k}$. Detta uttalas "n över k".

Binomialkoefficienterna i fjärde raden i Pascals triangel är med denna beteckning: $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ och $\binom{4}{4}$. I Pascals triangel kan vi också avläsa t.ex. att $\binom{6}{3} = 20$. Observera att detta är det *fjärde* talet i rad 6. Raden börjar ju med $\binom{6}{0}$.

Vi har lagt märke till och utnyttjat tre viktiga egenskaper hos Pascals triangel:

(i) ettor längst ut

(ii) symmetri

(iii) varje tal inne i triangeln är summan av talen närmast ovanför.

Dessa tre egenskaper kan vi nu uttrycka algebraiskt på följande vis:

Sats 1. *För binomialkoefficienterna* $\binom{n}{k}$ *gäller*

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(iii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ *för* $k \geq 1$.

Tänk själv igenom varför denna sats uttrycker precis de tre egenskaper vi talat om. Innan vi går vidare ger vi några övningar, som du löser med hjälp av Pascals triangel.

Övning 1. Utveckla som en summa av termer:

a) $(2+x)^4$

b) $(x + \frac{1}{x})^5$.

Övning 2. Talet $(\sqrt{3}+i)^5$ kan du bekvämt beräkna genom att övergå till polär form, men du kan också använda Pascals triangel. Gör på båda sätten och jämför resultaten.

Fundera nu lite över följande sats:

Sats 2 (Binomialsatsen). $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-3}a^3b^{n-3} + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$.

Egentligen säger oss denna sats inte mer än definitionen ovan av $\binom{n}{k}$. Vi har ju *definierat* $\binom{n}{k}$ just så att satsen skall gälla! Vi vet hur $\binom{n}{k}$ kan beräknas successivt genom att man använder egenskap (iii) i Sats 1 d.v.s. genom att man beräknar Pascals triangel rad för rad.

Men vi saknar fortfarande en bekväm *formel* som snabbt ger oss t.ex. $\binom{100}{62}$. Vi behöver ytterligare en beteckning:

Definition. För $n = 1, 2, 3, \ldots$ låter vi $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ och utläser detta som n *fakultet*. Vi låter också $0! = 1$.

Nu är det dags för den efterlängtade formeln:

Sats 3. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ för $k = 0, \ldots, n$.

Exempelvis är alltså $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$. Lägg märke till att vi förkortade med 4!. Vi får också $\binom{100}{62} = \frac{100!}{62!\,38!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 64 \cdot 63}{38 \cdot 37 \cdot 36 \cdots 2 \cdot 1}$, där vi förkortat med 62!. Att förenkla detta kan naturligtvis vara en aning arbetsamt, men observera att vi vet att detta är ett heltal. Det är ju koefficienten framför $a^{38}b^{62}$ i utvecklingen av $(a+b)^{100}$. Observera också att antalet faktorer i täljaren är detsamma som i nämnaren d.v.s. 38 (fast faktorn 1 är naturligtvis onödig i nämnaren). *Men vi har inte bevisat satsen ännu.*

Övning 3. Visa att $\displaystyle\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ om $1 \leq k \leq n$.

Sats 3 säger alltså att $\binom{n}{k}$ och $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ alltid är lika. Men hur skall man kunna visa något sådant? Vi vet att koefficienterna $\binom{n}{k}$ bildar Pascals triangel. Låt oss införa den tillfälliga beteckningen $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Lägg märke till logiken här. Detta är vår *definition* av $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. *För att visa satsen skall vi visa att* $\binom{n}{k}$ *och* $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ *är lika.* Vi kan beräkna talen $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ och bilda en alternativ Pascals triangel:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \left\langle {1 \atop 0} \right\rangle & & \left\langle {1 \atop 1} \right\rangle & & \\
 & \left\langle {2 \atop 0} \right\rangle & & \left\langle {2 \atop 1} \right\rangle & & \left\langle {2 \atop 2} \right\rangle & \\
\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle & & \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle & & \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle & & \left\langle {3 \atop 3} \right\rangle \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

Genom att beräkna $\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle$ och så vidare kan du lätt visa att så här långt är den alternativa Pascals triangel och den äkta Pascals triangel lika.

Vi skall nu *visa att den alternativa Pascals triangel är identisk med den äkta Pascals triangel*. För att visa detta räcker det att visa att den alternativa Pascals triangel har följande två egenskaper:

1) ettor i kanten, d.v.s. $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = \left\langle {n \atop n} \right\rangle = 1$

2) samma additiva egenskap som Pascals triangel, d.v.s. $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle$ för $k \geq 1$.

Pascals triangel har ju dessa egenskaper och dessa två egenskaper bestämmer Pascals triangel fullständigt – det är bara dessa egenskaper vi utnyttjar när vi successivt bestämmer

Pascals triangel. Endast Pascals triangel kan ha dessa två egenskaper. Så om den alternativa Pascals triangel också uppfyller dessa villkor måste den alternativa Pascals triangel och den äkta Pascals triangel vara lika eller med andra ord $\binom{n}{k} = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ gälla allmänt.

Övning 4. Fullfölj beviset av Sats 3 genom att visa

a) att $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = \left\langle {n \atop n} \right\rangle = 1$ och

b) att $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle$ för $k \geq 1$.

Ledning: Börja med ett konkret exempel, säg $n = 5$, $k = 3$. Då är V.L.$= \left\langle {5 \atop 2} \right\rangle + \left\langle {5 \atop 3} \right\rangle = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}$. Gör liknämnigt o.s.v.

Vi avslutar med ytterligare några övningar.

Övning 5. Bestäm koefficienten för $a^3 b^{11}$ i utvecklingen av $(a + b)^{14}$.

Övning 6. Bestäm den konstanta termen vid utvecklingen av $(x^3 + \frac{1}{x^2})^{10}$.

Övning 7. Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ genom att utveckla $(1 + 1)^n$.

Övning 8. Förenkla så långt som möjligt: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot 2 + \binom{n}{2}\cdot 2^2 + \binom{n}{3}\cdot 2^3 + \cdots + \binom{n}{n}\cdot 2^n$.

4. Polynomfunktioner.

Inledning.

Betrakta uttrycket $y = x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 7x^2 + x - 3$. Den beroende variabeln, y, är här uttryckt som en *polynomfunktion* i den oberoende variabeln x. I detta exempel är polynomets grad 7. Genom att sätta in ett antal värden på x kan du kanske få en uppfattning om hur y varierar med x. Du kan också markera motsvarande punkter (x, y) i ett koordinatsystem och skissera funktionens graf. Eftersom polynomet är komplicerat (det har i alla fall hög grad) är det troligt att du måste beräkna y för ganska många x-värden för att få en riktig uppfattning om funktionens förlopp. Kanske kan en grafritande räknare vara till hjälp.

Vi skall nu behandla polynomfunktioner av i första hand grad ett, två och tre. Vi skall analysera polynom och skriva om dem på olika sätt. Det visar sig att olika skrivsätt avslöjar olika egenskaper hos polynomen. Vi skall använda elementära metoder och ingen differentialkalkyl.

Om polynomfunktioner av första graden har jag inte så mycket att säga, men vi kan ta $y = 3x - 2$ som exempel. Grafen blir förstås en rät linje, med ekvationen just $y = 3x - 2$. Linjens *lutning* (*riktningskoefficient*) är 3, d.v.s. om x ökar med 1 så ökar y med 3. Rita själv en figur!

En riktningsvektor för linjen är $(1, 3)$ och en punkt på linjen är $(0, -2)$. Linjens ekvation på parameterform är alltså $(x - 0, y + 2) = t(1, 3)$. Vi kan också skriva linjens ekvation som $3x - (y + 2) = 0$ eller $(x - 0, y + 2) \cdot (3, -1) = 0$. Detta är ju en skalärprodukt och säger oss att vektorn $(3, -1)$ är vinkelrät mot vektorn $(x - 0, y + 2)$. Vektorn $(x - 0, y + 2)$ är parallell med linjen, så $(3, -1)$ är alltså normalvektor till linjen.

Övning 1. Bestäm de förstagradspolynom vars grafer går genom punkten $(1, 1)$ och har lutning -2, 0, 1, 3 respektive 10. Rita graferna.

Andragradspolynom.

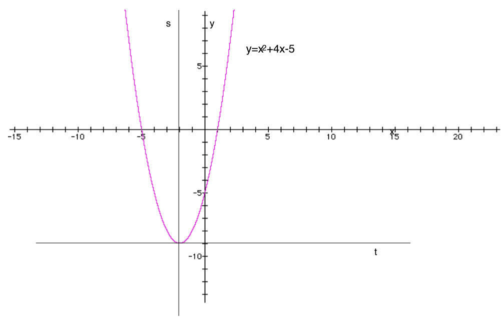
Om högstagradskoefficienten är $\neq 1$ så börjar vi med att bryta ut denna: $2x^2 - 3x + 4 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + 2)$. I det som följer kommer vi därför huvudsakligen att behandla andragradspolynom där högstagradskoefficienten är 1, som t.ex. $y = x^2 + 4x - 5$. Detta polynom är skrivet på vad vi skulle kunna kalla *grundformen*, som en summa av tre termer i fallande grad. Vi skall se att det går att skriva om polynomet på olika sätt, som belyser olika aspekter av polynomet. Det mesta av detta bör vara välbekant sedan tidigare, men det kan vara bra att läsa ändå som en förberedelse för nästa avsnitt om tredjegradspolynom; och jag utesluter inte att även detta avsnitt kan innehålla något nytt.

Vi börjar förstås med att kvadratkomplettera:

$$y = x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9 \tag{1}$$

Detta sätt att skriva polynomet, $y = (x+2)^2 - 9$, kommer jag att kalla för *tvåterms-formen*. Den andra termen, -9, är konstant medan den första termen, $(x+2)^2$, är variabel men alltid ≥ 0. Av detta följer att polynomets värde, d.v.s. y, alltid är ≥ -9 och att det minsta värdet, $y = -9$, endast antas för $x = -2$.

Vi har alltså $y + 9 = (x+2)^2$. Om vi sätter $t = x + 2$ och $s = y + 9$ så är alltså $s = t^2$, och enklare kan det knappast bli. Vi har här ersatt, *substituerat*, variablerna x och y med två nya variabler t och s. Vårt vanliga koordinatsystem, med x- och y-axel har vi kompletterat med en t- och en s-axel. Eftersom $t = 0$ när $x = -2$ ligger s-axeln 2 enheter till vänster om y-axeln och eftersom $s = 0$ när $y = -9$ ligger t-axeln 9 enheter under x-axeln. Se figuren. Origo i ts-systemet har alltså koordinaterna $(-2, -9)$ i xy-systemet.



Grafen till $y = x^2 + 4x - 5$, som vi började med, och grafen till $s = t^2$ är naturligtvis samma kurva. Att $s = t^2$ är ju bara ett annat sätt att uttrycka att $y = x^2 + 4x - 5$. Men det är mycket bekvämare att använda sig av $s = t^2$ när vi ritar kurvan. Kurvan går genom $s = t = 0$, d.v.s. $(x, y) = (-2, -9)$ och har där sin minimipunkt, vilket vi redan konstaterat. Vi ser också att kurvan är symmetrisk med avseende på s-axeln d.v.s. med avseende på linjen $x = -2$.

Går vi tillbaka till omskrivningen (1) ovan ser vi att den enda beräkning vi gör för att finna *minimipunktens x-koordinat* är att halvera x-koefficienten 4. Något mer räknande krävs för att finna minimipunktens y-koordinat (i detta exempel är dock siffrorna enkla). Ett alternativt sätt att beräkna y-koordinaten är förstås att sätta in $x = -2$, vilket ger $y = (-2)^2 + 4\cdot(-2) - 5 = -9$.

Du kan också pröva att redan från början använda substitutionen $t = x + 2$, d.v.s. $x = t - 2$, i uttrycket för y och får då $y = (t-2)^2 + 4(t-2) - 5 = t^2 - 9$. Betrakta noga vad som händer här och observera att valet av substitution, $x = t - 2$, gör att förstagradstermen försvinner. Detta verkar kanske vara ett överdrivet analyserande just nu, men när vi i nästa avsnitt undersöker polynom av tredje graden skall vi se att vi har ännu större nytta av att kunna uttrycka oss på olika sätt.

Övning 2. Genomför samma analys som ovan för polynomet $y = x^2 - 7x + 12$.

Övning 3. Analysera polynomet $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$ och skissera dess graf.

Övning 4. Låt $y = x^2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{8+4\sqrt{3}}$.

a) Skriv utan räkningar ned x-koordinaten för kurvans minimipunkt.

b) Vilken substitution bör man alltså göra "i x-led"?

c) Fullfölj analysen av detta andragradspolynom som ovan. Inför nya variabler t och s och skissera grafen. Vilken är minimipunktens y-koordinat?

Med denna teknik kan varje andragradspolynom $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ skrivas om på formen $s = at^2$ där t och s är två nya variabler som skiljer sig med konstanter från x resp. y. Om $a > 0$ har kurvan en minimipunkt där $t = s = 0$, men om $a < 0$ är kurvan vänd åt andra hållet och har istället en maximipunkt där $t = s = 0$.

Låt oss återgå till vårt inledande exempel $y = x^2 + 4x - 5$, som vi på tvåtermsform skrev som $y = (x+2)^2 - 9$ eller $s = t^2$, där $t = x + 2$, $s = y + 9$. För vilka värden på x skär kurvan x-axeln, d.v.s. när är $y = 0$? Detta är en fråga som kan vara av stort intresse och som är lätt att besvara. Att $y = 0$ ger ju $s = 9$ och alltså $t = \pm 3$, vilket ger $x = 1$ eller $x = -5$. Alternativt sätter vi in $y = 0$ i tvåtermsformen och får $0 = (x+2)^2 - 9$ och alltså $(x+2)^2 = 9$ o.s.v. På samma sätt kan vi för vilket $y \geq -9$ vi önskar lätt lösa ut x. För $y = 7$ får vi t.ex. $(x+2)^2 = 9 + 7$, d.v.s. $(x+2) = \pm 4$ och $x = 2$ eller $x = -6$. I båda dessa exempel observerar vi igen symmetrin kring kurvans "huvudaxel" (s-axeln, linjen $x = -2$).

Förhoppningsvis har du faktorsatsen i färskt minne från tidigare studier och vet att varje nollställe till ett polynom svarar mot en faktor. Om a är ett nollställe, så är $x - a$ en faktor. I vårt fall är alltså $x - 1$ och $x + 5$ faktorer i polynomet. När det gäller andragradspolynom ser vi detta lättast genom att fortsätta från tvåtermsformen, använda konjugatregeln och skriva:

$$y = (x+2)^2 - 9 = (x+2+3)(x+2-3) = (x+5)(x-1) \tag{2}$$

Vi behöver alltså inte åberopa faktorsatsen, som är ett mer teoretiskt resultat.

Vi kan nu skriva polynomet på tre olika sätt: grundform, tvåtermsform och slutligen *faktorform* $(x+5)(x-1)$. De två första formerna är användbara för alla andragradspolynom, men faktorformen är naturligtvis endast möjlig om polynomet har reella nollställen, såvida vi inte tillåter komplexa faktorer.

Det är viktigt att kunna växla mellan de olika skrivsätten. Hur går man över från faktorform, t.ex. $y = (x+3)(x+5)$ till tvåtermsform? Ett sätt är förstås att först utveckla till grundformen genom att multiplicera ihop parenteserna och därefter kvadratkomplettera till tvåtermsformen. Men det går att göra mycket enklare! Håll i dig nu och följ med i följande lilla uträkning (där du observerar att 4 är medelvärdet av 3 och 5).

$$y = (x+3)(x+5) = (x+4-1)(x+4+1) = (x+4)^2 - 1 \tag{3}$$

Om det står en koefficient framför något av x:en så bryter vi först ut denna, t.ex.:

$$y = (3x+3)(x+5) = 3(x+1)(x+5) = 3(x+3-2)(x+3+2) = 3\left((x+3)^2 - 4\right) \tag{4}$$

men om denna koefficient är -1 så kan vi göra så här:

$$y = (x+3)(-x+5) = (4+x-1)(4-x+1) = 4^2 - (x-1)^2 = 16 - (x-1)^2 \tag{5}$$

Det sista exemplet visar alltså att $(x+3)(-x+5)$ har sitt maximum för $x = 1$ och att detta maximum är 16. Om $-3 < x < 5$ kan vi tolka detta geometriskt på följande sätt. En rektangel har sidorna $x+3$ och $5-x$. Omkretsen är alltså 16 oberoende av x. Arean $(x+3)(-x+5)$ blir störst när $x = 1$ eller m.a.o. när sidorna är lika: $x+3 = 5-x = 4$. Rektangeln är då en kvadrat med arean $4 \cdot 4 = 16$.

Övning 5. Skriv $y = (x+8)(x-2)$ på tvåtermsform. Bestäm kurvans minimipunkt. Gör också lämpliga substitutioner som överför kurvans ekvation på formen $s = t^2$. Skissera grafen.

Övning 6. För vilket värde på x är $(-x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})$ maximalt? Hur stort är det största värdet?

Låt oss ännu en gång återgå till vårt inledande exempel $y = x^2 + 4x - 5$. Kurvans minimipunkt är $(-2, -9)$ och sätter vi $t = x + 2$, $s = y + 9$ så har vi $s = t^2$. Lägg märke till att t-axeln, d.v.s. linjen $y = -9$ är *tangent* till kurvan i $(-2, -9)$. Det är den linje som "bäst" approximerar kurvan i närheten av $(-2, -9)$. Vi avstår här från att ge någon generell och formell definition av begreppet tangent, men skall ändå försöka svara på frågan vilka linjer som är tangenter till kurvan i andra punkter. Vilken linje tangerar exempelvis kurvan för $x = 0$, d.v.s. i punkten $(0, -5)$? Vilken linje skall vi m.a.o anse bäst approximera kurvan för x nära 0?

Denna fråga är förhållandevis lätt att svara på. Om $x \approx 0$ är x^2 obetydligt jämfört med x. Den "linjära delen" $4x - 5$ av polynomet $y = x^2 + 4x - 5$ kommer att dominera över x^2 och vi kan skriva $y \approx 4x - 5$. Linjen med ekvationen $y = 4x - 5$ får vi nog anse bäst approximera kurvan $y = x^2 + 4x - 5$ för x nära 0. Kurvans tangent i $(0, -5)$ är alltså $y = 4x - 5$. Rita in tangenten i figuren!

Tangentens lutning, 4, kallas *derivatan* av funktionen $y = x^2 + 4x - 5$ för $x = 0$ och betecknas $y'(0)$. Vi har alltså $y'(0) = 4$. Det är mycket sannolikt att du läst om derivator tidigare och på annat sätt kan beräkna $y'(0)$. Gör det och jämför.

Men vilken ekvation har kurvans tangent för låt oss säga $x = -3$? Låt oss göra substitutionen $t = x + 3$ d.v.s. $x = t - 3$. Att $x \approx -3$ svarar då nämligen mot att $t \approx 0$. Vi får $y = x^2 + 4x - 5 = (t-3)^2 + 4(t-3) - 5 = t^2 - 2t - 8$. När t är nära 0 försummar vi t^2 och har alltså $y \approx -2t - 8$. Tangentens ekvation är alltså $y = -2t - 8$. Ur detta uttryck utläser vi att $y = -8$ då $t = 0$ (då är $x = -3$) och att tangentens lutning är -2. Rita in denna linje i figuren. Vi har alltså $y'(-3) = -2$. Naturligtvis vill vi skriva tangentens ekvation i x och y och får då $y = -2(x + 3) - 8$ eller $y = -2x - 14$.

Övning 7 a) Bestäm ekvationen för tangenten till $y = x^2 + 4x - 5$ för $x = 1$. Vad är alltså $y'(1)$?

b) Bestäm ekvationen för tangenten till $y = x^2 + 4x - 5$ för $x = a$ där a är ett godtyckligt tal. Vad är alltså $y'(a)$?

Övning 8. Bestäm ekvationen för tangenten till $y = x^2 + 2x + 1$ för $x = -3$.

Tredjegradspolynom - inflexionspunkter och tangenter.

I föregående avsnitt såg vi exempel på det matematiska värdet av att kunna omformulera ett uttryck på olika sätt. Allra tydligast blir det om man genom en substitution ändrar valet av beteckningar. En allmän erfarenhet är att man ofta helt kan förflytta tyngdpunkten i ett problem genom att förändra beteckningarna. Detta kommer att framgå ännu mer i detta avsnitt där vi analyserar polynom av tredje graden.

Som utgångspunkt väljer vi polynomet $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$. Vår första uppgift blir att eliminera andragradstermen analogt med hur vi eliminerade förstagradstermen i andragradspolynom. Då använde vi kvadratkomplettering, som ju bygger på kvadreringsregeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nu skall vi istället använda ”kubkomplettering”, vilket ger oss anledning att plocka fram Pascals triangel igen och konstatera att:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{6}$$

Exempelvis är $(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$. Detta polynom har samma två första termer som vårt utgångspolynom $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$. Det här var naturligtvis avsikten. Jag *valde* att utveckla just $(x - 4)^3$ eftersom jag visste att x^2-termen då blir $3 \cdot (-4)x^2$. Den lilla beräkning som föregick detta val var förstås endast att $(-12)/3 = -4$.

Denna “jämna kub” måste vi komplettera för att få vårt önskade polynom:

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11 = (x - 4)^3 - 12x + 53 \tag{7}$$

Vi är nu nere i tre termer, men det är ändå inte riktigt som vi vill ha det. Vi skulle vilja ha $x - 4$ som ny variabel (som vi strax skall kalla t) och uttrycka allt i $x - 4$. Vi gör en omskrivning till:

$$y = (x - 4)^3 - 12x + 53 = (x - 4)^3 - 12(x - 4) + 5 \tag{8}$$

Låter vi nu $t = x - 4$ så har vi $y = t^3 - 12t + 5$. Andragradstermen är alltså eliminerad. Vi kan komma fram till detta uttryck på ett annat sätt också. Substitutionen $t = x - 4$ innebär ju att $x = t + 4$. Sätter vi in detta i vårt ursprungliga polynom så får vi

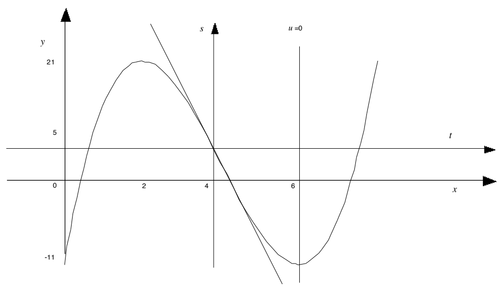
$$y = (t + 4)^3 - 12(t + 4)^2 + 36(t + 4) - 11 = t^3 - 12t + 5 \tag{9}$$

Lägg särskilt märke till hur valet av substitution gör att andragradstermen försvinner: $3 \cdot 4t^2 - 12t^2 = 0$. Sätter vi $y = s + 5$ så får funktionskurvan den enkla ekvationen

$$s = t^3 - 12t \tag{10}$$

Substitutionerna kan, liksom i fallet med andragradspolynom, tolkas så att vi infört ett nytt koordinatsystem, ett ts-system med origo ($t = s = 0$) i $(x, y) = (4, 5)$.

Kurvan $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$ eller $s = t^3 - 12t$ är nu lätt att skissera. Inte minst har vi nytta av att grafen är "spegelsymmetrisk" i vårt nya origo, $(x, y) = (4, 5)$. Vi har ju att $(-t)^3 - 12(-t) = -(t^3 - 12t)$; byter vi tecken på t så byter s tecken, men behåller sitt absoluta värde. Man brukar säga att s är en *udda funktion* av t. Se figuren! Punkten $(4, 5)$ kallas *inflexionspunkt*



För små värden på $|t|$, (där är $t \approx 0$ och $x \approx 4$), kommer termen $-12t$ att vara dominerande över termen t^3 och vi har $s \approx -12t$. Det kan vara ett stöd att, som vi gjort i figuren, rita ut linjen $s = -12t$. Det är den linje som bäst approximerar kurvan nära inflexionspunkten. Linjen är med andra ord kurvans *tangent* i denna punkt. Tangentens ekvation kan också skrivas $y - 5 = -12(x - 4)$ eller $y = -12x + 53$. Du observerar att kurvan ligger ovanför tangenten när $t > 0$ (då är ju $t^3 - 12t > -12t$) men under tangenten när $t < 0$ (ty då är $t^3 - 12t < -12t$).

Om du tycker att dessa räkningar är omfattande skall du igen lägga märke till att det inte krävs andra beräkningar än $12/3 = 4$ för att finna *inflexionspunktens x-koordinat*. Det är inflexionspunktens y-koordinat och tangentens ekvation som kräver en del räknearbete.

Med den teknik vi har använt, som innebär ett enkelt byte av koordinatsystem, kan varje tredjegradskurva $y = x^3 + px^2 + qx + r$ skrivas på formen $s = t^3 + at$. Sambandet mellan x och t är här $x + \frac{p}{3} = t$, d.v.s. kurvans inflexionspunkt fås för $x = -\frac{p}{3}$. Talet a är lutningen för tangenten till kurvan i inflexionspunkten. Kurvans utseende beror endast av värdet på a. Om $a \geq 0$ är båda termerna växande när t växer. Då är också s växande med t. Men om $a < 0$, som i vårt exempel, är termen t^3 växande medan termen at är avtagande. Som vi konstaterade i exemplet är at den dominerande termen för t nära 0. Det framgår också av figuren att kurvan är avtagande i ett intervall som innehåller 0. Om å andra sidan $|t|$ är tillräckligt stort, så dominerar termen t^3 och funktionen är växande, vilket också syns i vår figur.

Övning 9. Betrakta kurvan $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 14$

a) För vilket värde på x har kurvan sin inflexionspunkt?

b) Fullfölj analysen av kurvan på samma sätt som ovan, d.v.s. inför nya variabler så att kurvan kan skrivas $s = t^3 + at$. Bestäm inflexionspunkten och ekvationen för kurvans tangent genom denna.

Övning 10. Förfar sammalunda med $y = x^3 - 9x^2 + 11x + 18$.

Det är inte svårt att bestämma tangenten även i andra punkter än inflexionspunkten. Låt oss som exempel ta samma kurva som förut, $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$, och försöka bestämma tangenten för $x = 7$. Vi sätter $x - 7 = r$. För säkerhets skull använder jag här bokstaven r istället för t eftersom t redan förut så att säga är "upptaget". Men i allmänhet är det bra att vänja sig vid att en bokstav används tillfälligt och kan dyka upp senare i en annan betydelse!

Att $x \approx 7$ svarar mot att $r \approx 0$ och vår uppgift är blott att skriva y som funktion av r och urskilja den "linjära" delen. Vi får $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11 = (r+7)^3 - 12(r+7)^2 + 36(r+7) - 11 = r^3 + 9r^2 + 15r - 4$. Tangentens ekvation är alltså $y = 15r - 4 = 15(x-7) - 4$. Tangeringspunkten är $(7, -4)$ och tangentens lutning är 15. Detta är funktionens derivata för $x = 7$ och vi skriver $y'(7) = 15$.

Det kan vara intressant att notera också att $y = 9r^2 + 15r - 4$ är den andragradskurva som bäst approximerar $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$ för x nära 7. Du kan rita in andragradskurvan i figuren och se att den ansluter väl till tredjegradskurvan för $x \approx 7$.

Övning 11 a) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$ för $x = -1$.

b) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$ för $x = a$ där a är ett godtyckligt tal.

*Maximi- och minimivärden till polynom av tredje graden samt något om polynom av högre grad.

Låt oss gå tillbaka till vårt exempel ovan, $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$ eller $s = t^3 - 12t$ där $t = x - 4$ och $s = y - 5$. Vårt nästa projekt är att ta reda på för vilka värden på x som kurvan "vänder". Dessa x-värden ligger symmetriskt i förhållande till $x = 4$ (d.v.s. i förhållande till $t = 0$). Vi skall strax se att dessa intressanta punkter framgår tydligt om vi lyckas eliminera förstagradstermen (men då kommer vi att få tillbaka en andragradsterm!).

Vi inför således en ny variabel igen, låt os säga $u = t - c$. Hur skall c väljas så att förstagradstermen blir 0 om vi uttrycker s (eller y) som funktion av u? Låt oss pröva med att ersätta t med $u+c$ i uttrycket för s. Vi får då $s = (u+c)^3 - 12(u+c)$. Förstagradstermen i $(u+c)^3$ är $3c^2u$, medan förstagradstermen i $-12(u+c)$ är $-12u$. Vi bör alltså välja c så att $3c^2 - 12 = 0$, d.v.s. $c = \pm 2$.

Låt oss välja $c = 2$ och alltså ersätta t med $u + 2$. Vi får då

$$s = (u+2)^3 - 12(u+2) = u^3 + 6u^2 - 16 \quad \text{eller} \quad y = u^3 + 6u^2 - 11 \tag{11}$$

Här saknas en förstagradsterm och vi kan dra slutsatsen att kurvans tangent för $u = 0$ är $y = -11$ d.v.s. en vågrät linje. Nu påstår jag att kurvan vänder från avtagande till växande, d.v.s. har ett *lokalt minimum* för $u = 0$ (där är $t = 2$ och $x = 6$) och att detta minimivärde är -11. Den lodräta linjen $u = 0$ har jag markerat i figuren ovan.

För att visa detta behöver vi bara göra en omskrivning till:

$$y = u^3 + 6u^2 - 11 = -11 + u^2(u + 6) \tag{12}$$

vilket är ≥ -11 då $u \geq -6$ ty då är $u^2(u + 6) \geq 0$. Du kan identifiera punkten $u = -6$ på kurvan.

Lokalt minimum har vi alltså i $(x, y) = (6, -11)$ eller m.a.o i $(t, s) = (2, -16)$. På grund av symmetrin i inflexionspunkten har kurvans *lokala maximum* koordinaterna $(t, s) = (-2, 16)$ eller $(x, y) = (2, 21)$. Ett alternativt sätt att finna denna punkt är att istället välja $c = -2$ ovan, som i följande övning.

Övning 12. Gör istället substitutionen $t = v - 2$ i vårt exempel och förklara hur det framgår att $y \leq 21$ för alla v i närheten av 0.

Övning 13. Studera noga igen hur vi fann den substitution som eliminerade förstagradstermen. Visa att det alltid går att genomföra detta med kurvan $s = t^3 + at$ om $a < 0$.

Övning 14. Gå tillbaka till kurvan i Övning 9. Du har redan bestämt inflexionspunkt m.m. Fortsätt nu och bestäm kurvans lokala maximi- och minimipunkter.

I nästa övning får du fundera över hur man eliminerar förstagradstermen direkt utan att först ha eliminerat andragradstermen.

Övning 15. Betrakta kurvan $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 80$. Gör en substitution $x = u + b$ så att förstagradstermen försvinner. Bestäm kurvans lokala minimipunkt.

Vår teknik att med hjälp av en substitution bestämma tangenter till tredjegradspolynom går utmärkt att använda även för polynom av högre grad, som nästa övning visar.

Övning 16. Låt $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 5$. Vi skall studera funktionens uppträdande i närheten av $x = 3$.

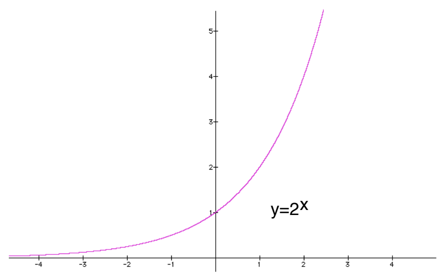
a) Sätt $x - 3 = t$ (d.v.s. $x = t + 3$) och skriv y som ett polynom i t.

b) När $x \approx 3$ är $t \approx 0$ och förstagradstermen i polynomet i t dominerar över termerna av högre grad. Använd detta faktum till att finna en linje som approximerar kurvan för x nära 3. Denna linje är kurvans tangent för $x = 3$. Tangentens ekvation bör skrivas som en ekvation i x och y.

5. Exponentialfunktioner.

Inledande kurvstudier.

Börja med att skissera grafen till funktionen $y = 2^x$. Din kurva bör se ut ungefär som i denna figur:



Du gick antagligen tillväga så, att du beräknade värdet av 2^x för ett antal olika värden på x och sedan sammanband motsvarande punkter till en kurva. I första hand kanske du satte in $x = 1, 2, 3, 4$ och fick $y = 2, 4, 8, 16$. Observera att x-värdena här bildar en *aritmetisk talföljd* med *differensen* 1 och att y-värdena bildar en *geometrisk talföljd* med *kvoten* 2.

För $x = 0$ får vi $2^0 = 1$ och för negativa värden, $x = -1, -2, -3$, får vi $y = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. Vi vet ju att $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Du kan observera igen att medan $-3, -2-, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ är en aritmetisk talföljd så bildar motsvarande y-värden en geometrisk talföljd.

Kanske satte du in värden på x också som inte är heltal, som $x = \frac{1}{2}$ eller $x = 1,5$ eller t.o.m. $x = \sqrt{2}$ eller $x = \pi$? Räknaren ger oss värden på y, men vi skall komma ihåg att dessa bara är närmevärden. Detta räcker dock för att ge oss punkter i vår figur.

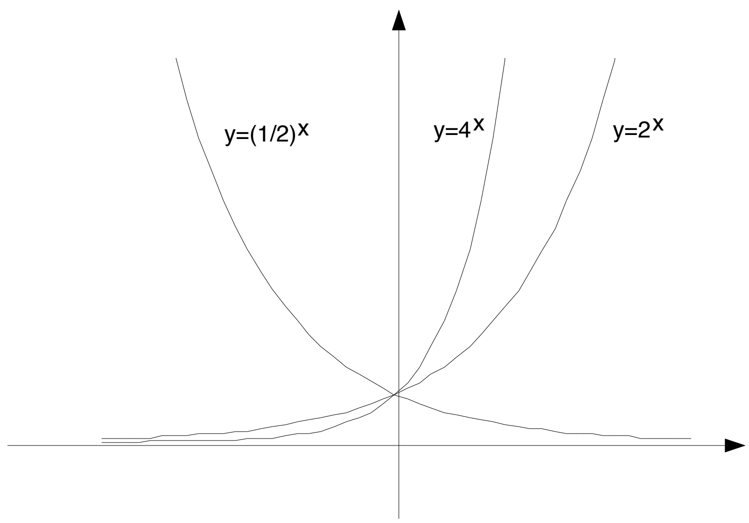
Allvarligare är att räknaren döljer för oss att det kan finnas problem här. Räknaren ger oss värden och vi behöver inte reflektera över *innebörden* av t.ex. $2^{1,5}$ eller 2^π. Av dessa potenser är den första lättast att förstå sig på eftersom $1,5 = \frac{3}{2}$ är ett rationellt tal. Du vet sedan tidigare att $2^{\frac{1}{2}}$ är definierat som $\sqrt{2}$ och att $2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^3$. Att man satt $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ är för att den vanliga potenslagen $(2^a)^b = 2^{ab}$ skall gälla. Den ger oss $(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^1$ och alltså $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Denna diskussion skulle kunna föras ännu mycket längre och djupare: Vad menas egentligen med $\sqrt{2}$? Finns det något sådant tal, och hur multiplicerar man detta tal med sig självt? Detta är frågor som berör de reella talens innersta väsen.

Ännu mer intrikat är förstås problemet att ge en innebörd åt $2^{\sqrt{2}}$, 2^π och andra potenser med irrationell exponent. Man kan här vägledas av två principer: dels att man önskar att "potenslagarna" skall fortsätta att gälla så att t.ex. $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$, dels principen att om a är nära b så skall 2^a vara nära 2^b. Eftersom $3,14$ är nära (och något mindre än) π så bör $2^{3,14}$ således vara nära (och något mindre än) 2^{π}. Vi skall inte fördjupa oss mer i detta ämne, men det är viktigt att vara medveten om problemet.

Av potenslagarna följer att om ett givet x-värde, säg $x = a$, ökas med talet $d > 0$ så ökar y från 2^a till $2^{a+d} = 2^a 2^d$, d.v.s. y *multipliceras* med faktorn 2^d. Observera att eftersom $d > 0$ är denna faktor större än 1. Ett antal x-värden i aritmetisk följd: $x = a$, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d, \ldots$ ger oss y-värden i geometrisk följd 2^a, $2^d 2^a$, $2^{2d} 2^a$, $2^{3d} 2^a, \ldots$ med kvoten 2^d. Vi kan uttrycka detta så, att exponentiell tillväxt är en kontinuerlig motsvarighet till geometrisk tillväxt.

Vi skall studera flera funktioner av typen $y = a^x$ där a är ett positivt tal. Dessa funktioner kallas *exponentialfunktioner* och talet a är exponentialfunktionens *bas*. Observera att i en exponentialfunktion är exponenten variabel men basen konstant.

Betrakta följande figur som visar graferna till de tre exponentialfunktionerna $y = 2^x$, $y = 4^x$ och $y = (\frac{1}{2})^x$. Jämför kurvorna innan du läser vidare.



Det första vi lägger märke till är att alla kurvorna går genom punkten $(0, 1)$. Detta gäller naturligtvis alla exponentialfunktioner eftersom $a^0 = 1$ gäller för alla $a > 0$.

Vi lägger också märke till att kurvorna $y = 2^x$ och $y = (\frac{1}{2})^x$ ser ut att vara varandras spegelbilder i y-axeln. Är det verkligen så, och hur kan man visa det? Det skulle innebära att om (a, b) är en punkt på $y = 2^x$ så är $(-a, b)$ en punkt på $y = (\frac{1}{2})^x$ (här skall a kunna vara ett negativt tal). Markera själv sådana punkter i figuren. Givet är alltså att $b = 2^a$ och vi skall visa att (eller utreda om) $b = (\frac{1}{2})^{-a}$. Men detta är lätt och följer omedelbart av potenslagarna: $(\frac{1}{2})^{-a} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^a} = \frac{1}{\frac{1}{2^a}} = 2^a = b$ enligt förutsättningen.

Drag nu en vågrät linje som skär kurvorna, säg linjen $y = b$ där $b > 0$. Lägg märke till hur skärningspunkterna med $y = 2^x$ och $y = 4^x$ ligger i förhållande till y-axeln. Det ser ut som om skärningspunkten med $y = 2^x$ ligger dubbelt så långt från y-axeln som skärningspunkten med $y = 4^x$. Kan vi bevisa det? Vi påstår alltså att om vi fixerar $y = b$ och om $b = 4^a$ så är $b = 2^{2a}$. Vi ser omedelbart att detta är sant ty $2^{2a} = (2^2)^a = 4^a$.

Svårigheten i dessa exempel är endast att översätta våra iakttagelser till ett algebraiskt formelspråk. Detsamma gäller i följande exempel och övningsuppgifter.

Exempel. Bestäm basen c så att för varje vågrät linje gäller att linjens skärningspunkt med $y = 2^x$ ligger mitt emellan linjens skärningpunkter med $y = 4^x$ och $y = c^x$! Låt oss säga att den vågräta linjen skär $y = 4^x$ för $x = a$ och $y = c^x$ för $x = b$. Skärningspunkten med $y = 2^x$ ges då enligt förutsättningarna av $x = \frac{a+b}{2}$. Eftersom de tre skärningspunkterna har samma y-koordinat får vi $4^a = c^b = 2^{(a+b)/2}$. Nu är $4^a = 2^{2a}$ så $(a + b)/2 = 2a$, vilket ger $b = 3a$. Alltså är $4^a = c^{3a} = (c^3)^a$, vilket ger $4 = c^3$ och slutligen $c = \sqrt[3]{4}$.

Övning 1. Bestäm basen c så att varje vågrät linje skär kurvan $y = c^x$ i en punkt mitt emellan y-axeln och kurvan $y = 4^x$. Rita figur!

Övning 2. Bestäm basen c så att varje vågrät linje skär kurvan $y = c^x$ i en punkt mitt emellan kurvorna $y = 2^x$ och $y = 4^x$.

Övning 3. Låt $y = a^x$ vara en exponentialfunktion. Låt $x_0 < x_1$ och antag att $a^{x_0} = 3$ och $a^{x_1} = 192$.

a) Beräkna a^b där b är medelvärdet av x_0 och x_1.

b) Låt c, d vara två tal sådana att $x_0 < c < d < x_1$ och $c - x_0 = d - c = x_1 - d$. Beräkna a^c och a^d.

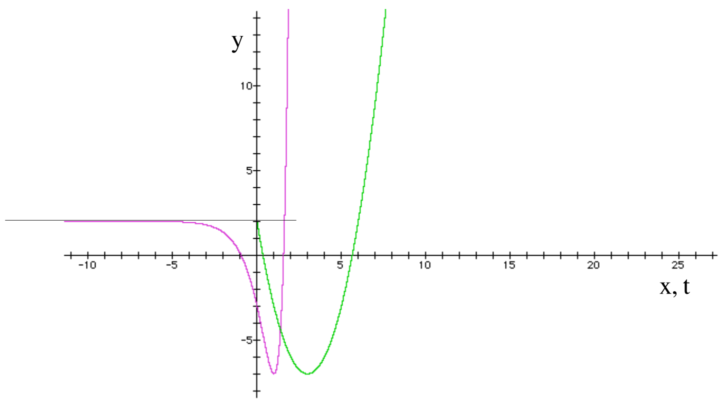
Övning 4. Betrakta exponentialfunktionen $y = a^x$. Låt $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vara en aritmetisk talföljd med differensen d. Motsvarande y-värden bildar en geometrisk talföljd med kvoten k. Antag att $k = 4$ gäller för ett visst värde på d. Hur skall d ändras för att vi skall få $k = 8$?

Övning 5. Skissera kurvan $y = (\sqrt{3})^{x+2}$. Spegla kurvan i den vågräta linjen $y = 2$ och finn ett algebraiskt uttryck för den nya kurvan.

Övning 6. Låt $y = 2\cdot(\sqrt{3})^x - (\sqrt{2})^x$. Bestäm summan av funktionsvärdena för $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Genom att kombinera polynom och exponentialfunktioner på olika sätt kan vi bilda mer komplicerade funktioner som $y = x2^x$, $y = 2^{x^2}$, $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$ och så vidare. Ibland kan en substitution vara klargörande, som i följande exempel.

Exempel. Låt $y = 9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 2$. Vi skall försöka bestämma funktionens minsta värde. Gör vi substitutionen $3^x = t$ så har vi $9^x = t^2$ och $3^{x+1} = 3t$. Uttrycker vi y som en funktion i t får vi alltså $y = t^2 - 2\cdot 3t + 2 = t^2 - 6t + 2$. Kvadratkomplettering ger $y = (t - 3)^2 - 7$. Detta uttryck är minst för $t = 3$, vilket svarar mot $x = 1$. Minsta funktionsvärdet är alltså $y = -7$ och detta värde antas för $x = 1$. Det kan vara intressant att jämföra graferna för $y = t^2 - 6t + 2$, $t > 0$ och $y = 9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 2$, se figuren nedan. Samma y-värden antas av dessa båda funktioner. Den vänstra kurvan kan sägas uppkomma ur den högra genom ett slags deformation i vågrät led. Observera att t-värden nära 0 svarar mot stora negativa x-värden. Det ger y-värden nära 2. Jag har ritat in linjen $y = 2$ som stödlinje (“asymptot”).



Övning 7. Bestäm nollställen till $y = 4^x - 5 \cdot 2^{x-1} + 1$ och skissera grafen till denna funktion. Hur uppträder kurvan för stora negativa värden på x?

Övning 8. Skissera följande kurvor

a) $y = x2^x$

b) $y = 2^{x^2+2x}$

Övning 9. Beräkna minsta värdet av $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{2^x}} + 2^{-x}$ och skissera grafen till denna funktion. Hur uppträder kurvan för stora värden på x?

Övning 10. Rita återigen kurvan $y = 2^x$ för $0 \leq x \leq 1$. Vi skall försöka uppskatta arean A av området som begränsas av kuvan, av axlarna samt av linjen $x = 1$.

a) Det är lätt att visa geometriskt att $1 < A < 2$. Hur då?

b) Drag nu också linjen $x = \frac{1}{2}$. Komplettera figuren på lämpligt sätt med två vågräta sträckor så att vi får två rektanglar som tillsammans är större än A. De bör ha areorna $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ respektive $\frac{1}{2} \cdot 2$. Vi har nu $A < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) En approximation, som ligger närmare A, får vi om vi ritar tätare med lodräta linjer, låt oss säga $x = \frac{1}{10}, x = \frac{2}{10}, \ldots, x = \frac{9}{10}$. Vårt område är något mindre än ett område som utgörs av 10 rektanglar. Rita en tydlig figur och beräkna den sammanlagda arean av dessa rektanglar. Vilken uppskattning av A ger detta? (Formeln för en geometrisk summa kan åter komma till användning.)

d) Pröva med ännu fler lodräta linjer och jämför resultaten.

e) Om antalet lodräta linjer är n, så ger oss samma resonemang ett uttryck i n som approximerar A. Hur ser detta uttryck ut? Sätt in stora n-värden för att finna goda approximationer av A.

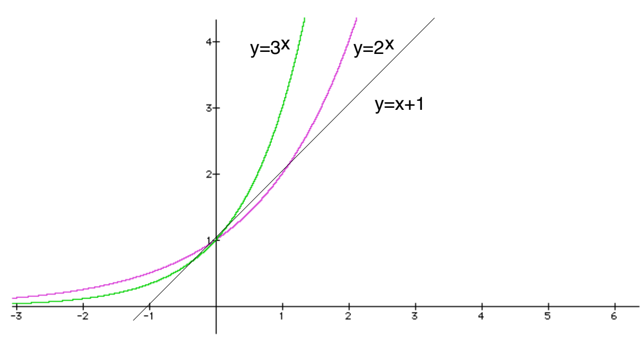
Som första exempel på exponentialfunktioner duger $y = 2^x$ och $y = 3^x$ alldeles utmärkt. Det är lätt att, t.o.m. i huvudet, beräkna några funktionsvärden och att skisssera funktionernas grafer. Vid lite mer avancerade kurvstudier, liksom i många av matematikens tillämpningar, är dock varken $y = 2^x$ eller $y = 3^x$ den "enklaste" och mest lämpliga exponentialfunktionen. Den mest använda exponentialfunktionen har en bas som är ett irrationellt tal som brukar betecknas med bokstaven e. Talet e kan alltså inte skrivas exakt som en kvot av heltal. Det kan inte heller uttryckas med hjälp av rotsymboler. Det är därför man, liksom man gjorde med talet π, infört en speciell beteckning för talet. Men vi kan ge ett närmevärde: $e \approx 2,718$.

I nästa avsnitt, som är mer teoretiskt, visar vi ett sätt att introducera talet e. Det är inte nödvändigt att läsa det för att förstå resten av kompendiet, men för allmänbildningens skull bör man läsa nästa stycke, som ger en koncentrerad "snabbkurs":

Tangenten till exponentialfunktionen $y = e^x$ i punkten $(0, 1)$ har lutning 1. Tangentens ekvation är alltså $y = x + 1$. Se figuren på sid. 31 och jämför med figuren på denna sida, som visar hur kuvorna $y = 2^x$ och $y = 3^x$ ligger i förhållande till linjen $y = x + 1$. Talet e kan skrivas som summan av en oändlig serie, $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ (se formel (3) på sid. 30) eller som gränsvärdet av $(1 + \frac{1}{n})^n$ när n går mot oändligheten (se formel (6) på sid. 32).

*Jämförelse mellan kurvorna $y = 3^x$, $y = 2^x$ och linjen $y = x + 1$ samt en introduktion till talet e.

I nästa figur har jag ritat kurvorna $y = 2^x$, $y = 3^x$ samt linjen $y = x + 1$. Alla tre går de genom punkten $(0, 1)$. Vi skall studera kurvornas uppträdande för positiva x-värden nära 0. Det ser ut som om $3^x > x + 1$ *för alla* $x > 0$ medan $2^x < x + 1$ om $x > 0$ men *nära* 0. Naturligtvis kan vi inte säkert sluta detta ur figuren. Kurvan har vi ju ritat genom att schablonmässigt sammanbinda ett antal punkter. Detta gäller förstås även om vi tar hjälp av en grafritande räknare. I synnerhet för x-värden mycket nära 0 är osäkerheten stor. Är verkligen $3^{0,01} > 1,01$? Vi skall försöka utreda denna fråga och också svara på den naturliga följdfrågan: Var går gränsen, d.v.s. vilket är det minsta tal a sådant att $a^x > x+1$ gäller *för alla* $x > 0$? Detta a bör alltså, om vi får tro vår figur, ligga någonstans mellan 2 och 3.



Att generellt i alla detaljer visa att $3^x > x+1$ för positiva x skall vi inte klara, helt enkelt därför att vi inte strikt har definierat innebörden av 3^x för irrationella värden på x. Låt oss börja med att studera följande sekvens av x-värden (som närmar sig 0): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Vi sätter alltså $x = 1/n$ och låter $n = 1, 2, 3, \ldots$. Låt oss försöka visa att $3^{1/n} > 1 + 1/n$ eller m.a.o. att $3 > (1+1/n)^n$ och till att börja med strunta i de x som ligger mellan dessa tal.

Talföljden $(1+1/n)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ är intresssant. Det är inte så självklart vad som händer när n växer eftersom vi har att göra med två motverkande tendenser: exponenten n växer, men basen $1 + 1/n$ avtar. *Beräkna med miniräknaren närmevärden för de första fem talen i följden*! Som du ser blir $(1+1/n)^n$ så långt större och större. Man kan visa att talföljden är växande för alla n. Vi skall dock inte göra detta. Däremot skall vi visa att talföljden inte växer obegränsat. Ja, vårt första mål är ju att visa att $(1+1/n)^n < 3$ för alla n.

Vad är naturligare än att använda binomialsatsen?

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots \\ &\qquad + \frac{1}{(n-1)!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2}{n^{n-2}} + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n^{n-1}} \end{aligned} \tag{1}$$

Den sista termen är ju $\frac{1}{n^n}$, men jag har valt att uttrycka alla termer på samma form så att mönstret framgår. Observera att faktorerna $\frac{n-1}{n}, \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}, \ldots$ alla är mindre än 1. Utnyttjar vi detta får vi:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{2}$$

Problemet att visa $(1+1/n)^n < 3$ för alla n är alltså löst om vi lyckas visa att den oändliga serien $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 3$. Detta är mycket lättare än man skulle kunna tro. Utnyttjar vi att $3! > 2^2$, $4! > 2^3$, $5! > 2^4$ osv. får vi nämligen $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3$ där vi utnyttjat att $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ är en geometrisk serie med summan 1.

Vi har nu visat att $(1+1/n)^n < 3$ d.v.s. att $1 + 1/n < 3^{1/n}$. För x-värden av typen $x = 1/n$ gäller alltså $3^x > x + 1$. Irrationella x-värden lämnar vi därhän, men rationella x-värden kan du själv fundera över i följande övning:

Övning 11. Visa för positiva heltal m och n att $3^{m/n} > 1 + m/n$.

Ledning. Vi vet att $3^{1/n} > 1 + 1/n$. Tag m:te potens av båda leden och använd binomialsatsen.

Låt oss återgå till att betrakta den oändliga serien $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$. Vi har visat ovan att oavsett hur många termer vi summerar så blir summan inte större än 3. Eftersom seriens termer är positiva och summan alltså växer ju fler termer som summeras så följer att serien har ett *gränsvärde* < 3 som den konvergerar mot. Detta är inte något självklart och sammanhänger återigen med de "reella talens innersta väsen". Att vi inte kan bevisa det här beror inte minst på att vi inte formellt har definierat begreppet gränsvärde.

Alltnog, summan av denna serie blir ett tal som brukar betecknas e och som kan visas vara irrationellt. Vi har alltså:

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \tag{3}$$

Det är lätt att finna undre uppskattningar av e. Det är ju bara att summera ett ändligt antal termer i serien. Så är t.ex. $2 < e$, $2,5 < e$ och så vidare.

Övning 12. Visa att $2,7 < e$.

En övre uppskattning av e har vi också funnit, nämligen $e < 3$. Repetera hur vi insåg detta ovan genom jämförelse med en geometrisk serie. Förfinar vi tekniken så kan vi finna bättre begränsningar av e, t.ex.

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!\cdot 4} + \frac{1}{3!\cdot 4^2} + \frac{1}{3!\cdot 4^3} + \cdots =$$

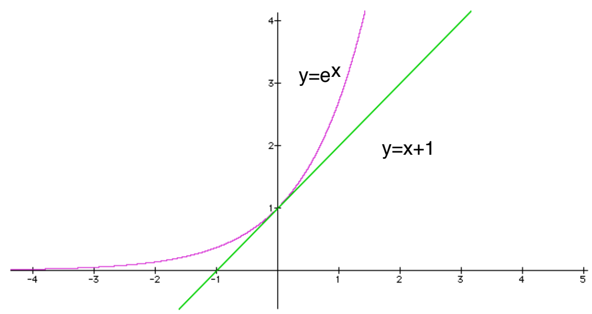
$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 2\frac{13}{18}$$

Övning 13. Finn en ännu bättre övre uppskattning av e.

Övning 14. Låt $a_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Visa att $a_n < e < a_n + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$.

Känns det som om vi kommit från ämnet? Vårt första mål var att visa att $3^x > 1 + x$ för $x > 0$. Detta har vi också visat (för rationella x). Men vi har faktiskt visat något mer. Vi har ju enligt (2) och (3) att $(1 + 1/n)^n < e$, d.v.s. $e^{1/n} > 1 + 1/n$ för alla n. Analogt med ditt resonemang i Övning 11 visar du att $e^x > 1 + x$ gäller för alla rationella $x > 0$. Egentligen är vi redan här ute på djupt vatten. Talet e är irrationellt, och vad skall man egentligen mena med $e^{\frac{1}{2}}$? Vi lämnar dock sådana diskussioner åt sidan och litar till vår intuition. Men det är nyttigt att vara medveten om de problem som finns. Man kan visa följande sats, där du lägger märke till att x kan vara både positivt och negativt.

Sats. *$e^x > x + 1$ gäller för alla $x \neq 0$.*



I figuren lägger du märke till att linjen $y = x + 1$ ser ut att vara tangent till kurvan $y = e^x$. *Fundera över vad det kan vara som hindrar oss att bevisa detta nu.*

Om $a > e$ så är förstås $a^x > e^x$ om $x > 0$, så vi får omedelbart följande korrolarium (följdsats):

Korrolarium. Om $a \geq e$ är $a^x > x + 1$ för $x > 0$.

Så var fallet med 3^x. Lägg märke till att 3^x ser ut att vara mindre än $1 + x$ för negativa x-värden nära 0. Vi skall inte fördjupa oss i negativa x-värden. Med liknande teknik som ovan kan man dock visa att om $a > e$ så är $a^x < x + 1$ för negativa x-värden nära 0. Ju närmare a är e desto mindre är det intervall där $a^x < x + 1$.

**Kurvan $y = 2^x$ för små positiva värden på x.

Gå tillbaka till den första figuren med kurvorna $y = 3^x$ och $y = 2^x$. Har vi visat att $2^x < x + 1$ för små positiva x-värden? Nej, vi har visserligen visat att $2 < e$, men vi har inte motiverat varför e^x skulle vara "gränsfallet", d.v.s. varför $a^x < x + 1$ skulle gälla för små positiva x-värden om $a < e$. Grafen till e^x gör det ändå troligt att det är så.

Vi arbetar som tidigare med att sätta $x = 1/n$ och låta $n = 1, 2, 3, \ldots$. Antag alltså att $a < e$. Vi önskar visa att $a^{1/n} < 1 + 1/n$ när n är tillräckligt stort (då är $1/n$ ett litet positivt tal). Med andra ord vill vi visa att $(1 + 1/n)^n > a$ för stora n. Vi har än så länge bara visat att $(1+1/n)^n < e$ inte att $(1+1/n)^n$ skulle ligga *nära* e för stort n (och därmed kunna bli större än a). Uppskattningen i (2) bygger på en ganska grov förenkling av det exakta uttrycket i (1).

Eftersom nu $a < e$ kan vi skriva $a = e/c$ för något tal $c > 1$. Med tanke på definitionen av e är det klart att om vi summerar tillräckligt många termer i serien så blir summan så nära e vi kan önska oss t.ex. större än talet $e/\sqrt{c}$ (varför vi väljer just detta tal får strax sin förklaring). Välj alltså k så stort att

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} > \frac{e}{\sqrt{c}} \tag{4}$$

Låt nu vidare $n > k$ och betrakta igen det exakta uttrycket (1) för $(1+1/n)^n$. Stryker vi alla termer utom de k första får vi en uppskattning nedåt av $(1+1/n)^n$:

$$(1+\frac{1}{n})^n > 2 + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{n^{k-1}} \quad (5)$$

Talet k håller vi fixt nu, men tillåter oss att variera n. Vi skall ju bara visa att $(1+1/n)^n > a$ för stora n. De "störande" faktorerna $\frac{n-1}{n}$, $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}, \cdots$ i (5) har alla gränsvärdet 1 då $n \to \infty$. Detta innebär att om n är tillräckligt stort så är alla dessa faktorer större än t.ex. $1/\sqrt{c}$, ty $1/\sqrt{c}$ är ett tal mindre än 1. Väljer vi nu n så stort att detta gäller så blir hela högerledet i (5) större än $(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!})\frac{1}{\sqrt{c}}$ och alltså $(1+\frac{1}{n})^n > (2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!})\frac{1}{\sqrt{c}}$. Kombinerar vi detta med (4) får vi $(1+1/n)^n > e/c$. Men $e/c = a$ så nu har vi faktiskt visat att om n är tillräckligt stort så är $(1+1/n)^n > a$ och således $a^{1/n} < 1+1/n$.

Det är alltså som vi trodde att e^x är gränsfallet. Om $a < e$ så finns positiva x-värden nära 0 där $a^x < x+1$. Vi har visat att det gäller för alla x av typen $1/n$ om n är tillräckligt stort. För att få bilden mer komplett skulle vi också vilja visa att om $a^{1/n} < 1+1/n$ för ett viss n så gäller också att $a^x < x+1$ för alla positiva $x < 1/n$. Det har vi faktiskt inte bevisat. Men medge att det skulle se konstigt ut annars. Vi har inte heller visat att $a^x > x+1$ gäller för $x < 0$. Men jag tycker vi ändå har drivit denna diskussion tillräckligt långt.

Det följer av resonemanget ovan att för ett godtyckligt tal $c < 1$ gäller $(1+1/n)^n > e/c$ om n är tillräckligt stort. Med andra ord: *för tillräckligt stora värden på n får vi värden på $(1+1/n)^n$ som ligger så nära e vi kan önska.* Man säger att e är *gränsvärdet* (eller *limes*) av talföljden $(1+1/n)^n$ när n går mot oändligheten och skriver detta: "$(1+1/n)^n \to e$ då $n \to \infty$" eller

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n. \quad (6)$$

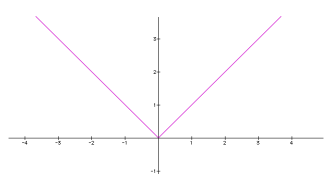
6. Funktionsbegreppet, inversa funktioner och logaritmer.

Inledande om funktioner.

Är det inte märkligt att vi nu arbetat en hel del med funktioner av olika slag, polynomfunktioner och exponentialfunktioner m.m., men ännu inte preciserat vad vi menar med en funktion i allmänhet? Det kan nog vara så, att ju mer grundläggande ett begrepp är desto mindre är det omedelbara behovet av en noggrann precisering. För att ta ett exempel så kan man läsa en hel del skolgeometri utan att ha funderat närmare över vad man egentligen menar med en rät linje, medan även en kortare uppsats om parallelltrapetset är obegriplig om inte begreppet parallelltrapets först definierats. Det räcker inte med en figur.

På samma sätt var det nödvändigt att tala om vad vi menar med exponentialfunktioner, innan vi fördjupade oss i dessa, så att det är klart för envar att $y = 2^x$ är en exponentialfunktion men inte $y = x^2$. Däremot har vi klarat oss utan att precisera vad en funktion i allmänhet är för något.

Kanske tänker du på en funktion som en formel eller ett "uttryck i x" som 2^x, $x^3 - 8$ eller $\sin x$. De symboler vi har ger oss stora möjligheter att bilda komplicerade uttryck i x. Ett enkelt sådant uttryck i x är $f(x) = |x|$. Grafen till denna funktion är lätt att rita upp:



För den som inte mött absolutbeloppstecknet förut kan vi skriva fuktionen på följande sätt: $f(x) = x$ om $x \geq 0$ men $f(x) = -x$ om $x < 0$. Observera att $|x| = -x$ om $x < 0$ ty då är $-x > 0$. I detta fall använder vi alltså *två alternativa uttryck* i x, som gäller i var sitt intervall. Ofta skriver man på följande sätt:

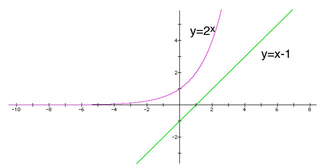
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

Kanske tänker du också på en funktion som en kurva? För att det skall stämma överens med det första synsättet, "uttryck i x", får det inte finnas två punkter på kurvan med *samma* x-koordinat. Givet x-värdet skall ju "i princip" y-värdet kunna räknas ut. Geometriskt betyder detta att varje lodrät linje skär kurvan i högst en punkt. Så är fallet med grafen ovan till $f(x) = |x|$ (men kanske kallar du inte det en kurva?). En vågrät linje däremot kan skära denna graf i två punkter.

Båda dessa synsätt, "uttryck i x" och "kurva", har sina begränsningar, som vi strax skall se. När vi nu brutit isen och accepterar alternativa uttryck i x för olika x kan vi skriva t.ex.

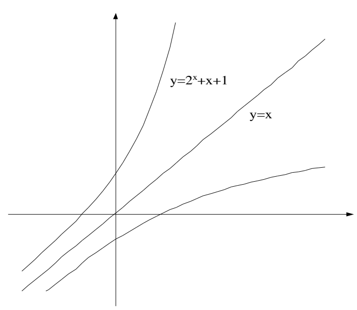
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{då } x \text{ är rationellt} \\ 2^x & \text{då } x \text{ är irrationellt} \end{cases}$$

Hur ser grafen ut till denna funktion? I nedanstående figur har jag ritat två kurvor, $y = x - 1$ resp. $y = 2^x$.



Grafen till vår funktion $f(x)$ skall emellertid bara innehålla de punkter (x, y) på linjen $y = x - 1$ som har *rationell* x-koordinat och bara de punkter (x, y) på kurvan $y = 2^x$ som har *irrationell* x-koordinat. Grafen till $f(x)$ är alltså inte en sammanhängande kurva utan tvärtom mycket "splittrad".

I nästa figur ser vi kurvan $y = 2^x + x + 1$. Vi ser också den räta linjen $y = x$ och *spegelbilden* av kurvan $y = 2^x + x + 1$ i linjen $y = x$.



Att spegling i linjen $y = x$ har sitt intresse skall vi se i nästa avsnitt. Lös först följande övning.

Övning 1. Visa att spegelbilden av kurvan $y = 2^x + x + 1$ i linjen $y = x$ (se figuren ovan) har egenskapen att varje lodrät linje skär kurvan i endast en punkt. Vilken egenskap hos kurvan $y = 2^x + x + 1$ behöver du utnyttja för att visa detta?

Din figur och Övning 1 visar att spegelkurvan har den egenskap som funktionsgrafer brukar ha, nämligen att två skilda punkter på kurvan aldrig har samma x-koordinat. För en punkt (x, y) på spegelkurvan gäller alltså i princip att y-värdet är helt bestämt av x-värdet. Ändå räcker den symbolik, vi normalt har tillgång till, inte för att skriva y som ett uttryck i x. Vi skall återkomma till den spegelvända kurvan i ett par exempel i nästa avsnitt.

Våra två sätt att uppfatta begreppet funktion räcker alltså inte var för sig till att täcka alla funktioner vi så att säga "vill ha med". Vi har sett dels att det finns uttryck i x som inte kan illustreras med en graf, dels att det finns kurvor som inte kan beskrivas med ett uttryck i x. I vårt resonemang har vi dock flera gånger snuddat vid en idé som vi nu tar fasta på.

Med en funktion f menar vi en avbildning som till varje tal, låt oss säga x, i en viss mängd tillordnar ett annat tal som vi kallar funktionsvärdet av x och betecknar $f(x)$.

Frågan är då förstås vad vi menar med en "avbildning". Ordet är synonymt med funktion och förklaringen ges i den efterföljande texten: varje x tillordnas ett funktionsvärde $f(x)$. Man säger att x *avbildas* på $f(x)$. Ofta betecknas funktionsvärdet y och skrivsättet $x \overset{f}{\mapsto} y$ förekommer för att symboliskt illustrera att funktionen f avbildar x på y. Till varje ingångsvärde x hör alltså ett utgångsvärde y.

Ibland tänker man på en funktion som en "regel" som till varje x ger ett y, men då ligger man nära det där med uttryck i x. Det kan finnas fall där en regel inte går att formulera. I litteraturen förekommer också stundom ett påhitt som kallas "funktionsmaskin".

Inverterbara funktioner.

Vi har nu tillgång till ett mer generellt och framför allt mer precist funktionsbegrepp än tidigare, men ofta går det även i fortsättningen bra att tänka på en funktion som ett uttryck i x eller som en kurva. Lägg märke till orden "i en viss mängd" ovan när vi preciserar funktionsbegreppet. För det mesta tillåts alla värden på x, men ibland finns naturliga undantag, t.ex. definierar $y = \frac{1}{x}$ en funktion för alla $x \neq 0$.

Principen "till varje x endast ett funktionsvärde y" hindrar förstås inte att samma y-värde kan förekomma flera gånger. Vi såg ett exempel på detta inledningsvis i funktionen $f(x) = |x|$. Så är förhållandet också med t.ex. $f(x) = x^2 + x$ (här är $f(1) = f(-2)$) eller med $f(x) = 2^x - x$ (här är $f(0) = f(1)$).

Om däremot $f(x) = \frac{1}{x}$ eller $f(x) = x^3 + x$ så kan två olika x-värden inte ha samma funktionsvärde y, men hur skall man kunna *bevisa* det? I det första fallet är det klart att om $y = \frac{1}{x}$ så är $x = \frac{1}{y}$. Vi kan så att säga "lösa ut" x ur ekvationen $y = \frac{1}{x}$. Det finns alltså, givet y, bara ett x-värde med y som funktionsvärde, nämligen $x = \frac{1}{y}$. I det andra fallet är det svårare att lösa ut x, men vi kan resonera på följande vis: Om x_1 och x_2 är två tal och $x_1 < x_2$ så är även $x_1^3 < x_2^3$ och alltså $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$. Följaktligen har inte x_1 och x_2 samma funktionsvärde! Detta är ett exempel på en *strängt växande* funktion; större x-värde ger alltid större y-värde.

En funktion sådan att inget funktionsvärde förekommer mer än en gång kallas *inverterbar*. Vi skriver ned definitionerna av dessa begrepp en gång till i lite mer formellt språk och passar samtidigt på att införa begreppet *strängt avtagande* funktion.

Definition. En funktion f sägs vara inverterbar om $x_1 \neq x_2$ medför $f(x_1) \neq f(x_2)$. En funktion f sägs vara strängt växande om $x_1 < x_2$ medför $f(x_1) < f(x_2)$. En funktion f sägs vara strängt avtagande om $x_1 < x_2$ medför $f(x_1) > f(x_2)$.

Det bör väl vara uppenbart att om en funktion är strängt växande eller strängt avtagande så är funktionen inverterbar. Du kan fundera över om en funktion kan vara inverterbar utan att vara vare sig strängt växande eller strängt avtagande. Kanske finner du något exempel i följande övning.

Övning 2. Avgör vilka av följande funktioner som är strängt växande, strängt avtagande respektive inverterbara: $y = 2^x + 3^x$, $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^4 - 3x^3 + 7$, $y = x^3 - x$, $y = x^3 - 6x^2 - 3x - 10$ och $y = \frac{1}{x^2}$.

Ett enkelt exempel på en inverterbar funktion är $f(x) = x^3$. Denna funktion är ju strängt växande. Vi har t.ex. $1 \overset{f}{\mapsto} 1$, $2 \overset{f}{\mapsto} 8$, $-2 \overset{f}{\mapsto} -8$ och allmänt $a \overset{f}{\mapsto} b$ om $b = a^3$. Varje funktionsvärde förekommer bara en gång så "ingångsvärdet" är i princip helt bestämt av "utgångsvärdet". Om utgångsvärdet är -8 så måste ingångsvärdet vara -2. Det finns alltså en avbildning, d.v.s. en funktion, som så att säga leder oss tillbaka från utgångsvärdet till ingångsvärdet (t.ex. från -8 till -2). Denna funktion kallas för den *inversa funktionen* till f och betecknas f^{-1}. Vi har alltså $1 \overset{f^{-1}}{\mapsto} 1$, $8 \overset{f^{-1}}{\mapsto} 2$, $-8 \overset{f^{-1}}{\mapsto} -2$ och allmänt $b \overset{f^{-1}}{\mapsto} a$ om $b = a^3$. Naturligtvis kan vi också skriva $f^{-1}(1) = 1$, $f^{-1}(8) = 2$ och så vidare. Vi har också $f^{-1}(64) = 4$ ty $f(4) = 64$.

En generell definition av begreppet invers funktion kan vi formulera på följande sätt.

Definition. Låt f vara en inverterbar funktion. Den inversa funktionen till f, betecknad f^{-1}, bestäms av följande egenskap

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

Om vi t.ex. för någon inverterbar funktion f råkar veta att $f(17) = -6$ så vet vi alltså samtidigt att $f^{-1}(-6) = 17$. Att $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ gör att egenskaper hos f kan översättas till egenskaper hos f^{-1} och omvänt. Ett problem som gäller f^{-1} kan översättas till ett problem som gäller f.

Vi återgår till den funktion som vi började med, $f(x) = x^3$. Att $f^{-1}(b) = a$ eller ekvivalent $f(a) = b$ betyder alltså att $b = a^3$, vilket också kan skrivas $a = \sqrt[3]{b}$. Vi har alltså $f^{-1}(b) = \sqrt[3]{b}$. Det stämmer ju väl med de funktionsvärden vi beräknade tidigare, t.ex. $f^{-1}(64) = 4$. Byter vi ut bokstaven b mot x har vi $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ibland kan det vara bra att formulera verkan av en funktion i ord. Funktionen $f(x) = x^3$ "upphöjer till 3", medan den inversa funktionen $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ "drar kubikroten". Vi ser tydligt att det är fråga om omvända, inversa, processer.

Vi ger två exempel till och sedan några övningar.

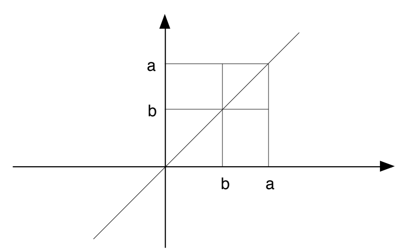
Exempel. Låt $f(x) = 8 - 7x$. Denna funktion är strängt avtagande och således inverterbar. Kan vi ge ett enkelt uttryck för $f^{-1}(x)$? Det gäller alltså att bestämma b om $f^{-1}(x) = b$. Vi får enligt definitionen av invers funktion att $f(b) = x$ och alltså $8 - 7b = x$. Det är lätt att lösa ut b. Vi får då $b = \frac{8-x}{7}$. Alltså är $f^{-1}(x) = \frac{8-x}{7}$. Exempelvis är $f^{-1}(2) = \frac{6}{7}$, vilket stämmer överens med att $f(\frac{6}{7}) = 2$.

Exempel. Låt $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$. Denna funktion är strängt växande och alltså inverterbar. Om $f^{-1}(x) = b$ så gäller $f(b) = x$ d.v.s. $\sqrt[3]{b} - 2 = x$. Även i detta fall kan vi lösa ut b och vi får nu $b = (x+2)^3$. Alltså $f^{-1}(x) = (x+2)^3$.

Övning 3. Visa att funktionen $f(x) = 3x + 2$ är inverterbar. Ge ett uttryck för $f^{-1}(x)$. Rita graferna till f och f^{-1} i samma koordinatsystem.

Övning 4. Visa att funktionen $f(x) = x^3 + 1$ är inverterbar. Ge ett uttryck för $f^{-1}(x)$. Rita graferna till f och f^{-1} i samma koordinatsystem.

Vi skall nu helt allmänt utreda det geometriska förhållandet mellan f:s och f^{-1}:s grafer. Låt (a, b) vara en punkt på f:s graf. Det betyder att $f(a) = b$. Men då är $f^{-1}(b) = a$, så (b, a) är en punkt på f^{-1}:s graf. Du kan på egen hand, med hjälp av figuren nedan, övertyga dig om att punkterna (a, b) och (b, a) är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.



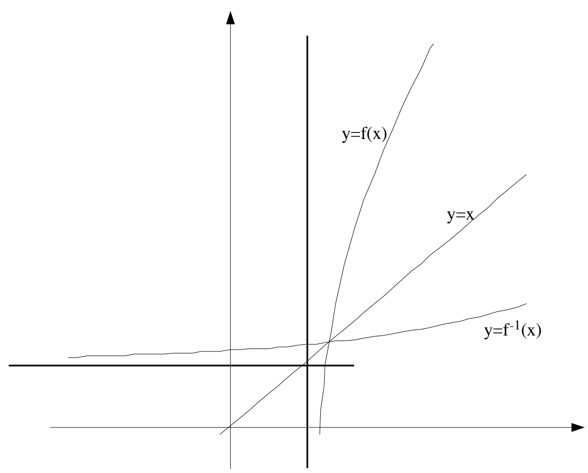
Slutsatsen av detta blir att f^{-1}:s graf i sin helhet är *spegelbilden av f:s graf i linjen* $y = x$. Komplettera dina figurer i Övning 3 och 4 med linjen $y = x$. Detta geometriska förhållande är ofta användbart vid kurvritning. Det är, för att ta ett exempel, säkert lättare i Övning 4 att skissera grafen till f^{-1} som spegelbilden av grafen till $y = x^3 + 1$ än att använda uttrycket $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Ibland är det dessutom så att $f^{-1}(x)$ inte kan skrivas som ett uttryck i x. I följande exempel på det återser vi en gammal bekant från den inledande diskussionen om funktionsbegreppet.

Exempel. Låt $f(x) = 2^x + x + 1$. Eftersom 2^x växer med x så är f en strängt växande funktion och därmed inverterbar. Grafen till $f(x)$ har vi i figuren före Övning 1. I figuren har vi redan tidigare ritat in spegelbilden av kurvan $y = 2^x + x + 1$ i linjen $y = x$. Vi vet nu att denna spegelbild är grafen till den inversa funktionen f^{-1}. Övning 1 kan vi också se i ett nytt ljus. Att varje lodrät linje skär spegelkurvan i bara en punkt, d.v.s. att spegelkurvan är grafen till en funktion, beror på att varje *vågrät* linje skär den ursprungliga kurvan i bara en punkt, d.v.s. på att $f(x)$ är inverterbar. Observera att en vågrät linje efter spegling i $y = x$ övergår i en lodrät linje. Vi kan inte skriva $f^{-1}(x)$ som något enkelt uttryck i x, men vi kan bestämma enstaka funktionsvärden, t.ex. $f^{-1}(12) = 3$ ty $f(3) = 12$.

Exempel. Vi låter ännu en gång $f(x) = 2^x + x + 1$. I vilken eller vilka punkter skär kurvan $y = f^{-1}(x)$ linjen $y = \frac{x}{4}$? Vi kan inte ersätta $f^{-1}(x)$ med ett explicit uttryck i x, men definitionen av invers funktion leder oss till en omformulering av villkoret $y = f^{-1}(x)$, nämligen $x = f(y)$ och således $x = 2^y + y + 1$. Samtidigt är $y = \frac{x}{4}$, d.v.s. $x = 4y$. Alltså är $2^y + y + 1 = 4y$ och $2^y + 1 = 3y$. Vi har lite tur och finner två lösningar genom prövning:

$y = 1$ och $y = 3$. Motsvarande x-värden är $x = 4$ och $x = 12$. De sökta skärningspunkterna är alltså $(4, 1)$ och $(12, 3)$.

Exempel. Låt $f(x) = \frac{x-2x^2+2}{1-x}$, $x > 1$. Utför vi polynomdivisionen av täljaren med nämnaren får vi en kvot och en rest: $x - 2x^2 + 2 = (2x + 1)(1 - x) + 1$ och alltså $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{1-x}$. Om nu $x > 1$ så är det klart att $1 - x$ avtar då x växer och att därmed $\frac{1}{1-x}$ växer med x. Eftersom $2x + 1$ också växer med x så följer att $f(x)$ är en strängt växande funktion i området $x > 1$. Eftersom $f(x)$ bara är definierad för $x > 1$ gäller att den inversa funktionen $f^{-1}(x) > 1$ för alla x. Däremot är $f^{-1}(x)$ definierad för alla x ty $f(x)$ kan anta alla värden. I figuren nedan har jag ritat in graferna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$, linjen $y = x$ samt hjälplinjerna (asymptoterna) $x = 1$ och $y = 1$.



Det är faktiskt möjligt, och inte särskilt svårt, att skriva $f^{-1}(x)$ explicit som ett uttryck i x. Sätter vi $f^{-1}(x) = y$, så har vi ju $f(y) = x$ och alltså $\frac{y-2y^2+2}{1-y} = x$, vilket kan förenklas till $y^2 - \frac{1+x}{2}y + \frac{x-2}{2} = 0$. Detta är en andragradsekvation i y med lösningarna $y = \frac{1+x\pm\sqrt{x^2-6x+17}}{4}$. En analys, som vi dock utelämnar här (men din lärare hjälper dig säkert gärna), visar att villkoret $y > 1$ gör att vi måste välja plustecknet för alla x. Alltså $f^{-1}(x) = \frac{1+x+\sqrt{x^2-6x+17}}{4}$.

I nästa avsnitt skall vi möta ett viktigt exempel på inversa funktioner, nämligen logaritmer. Detta avsnitt avslutar vi nu med några övningar.

Övning 5. Låt $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, $x \neq 3$. Rita grafen till f och visa att f är inverterbar. Skriv $f^{-1}(x)$ som ett uttryck i x. För vilka värden på x är $f^{-1}(x)$ definierad?

Övning 6. Låt $f(x) = x^3 + x$. Bestäm skärningspunkterna mellan kurvan $y = f^{-1}(x)$ och linjen $y = \frac{x+2}{4}$.

Övning 7. Bestäm a så att $f(x) = \frac{2+ax}{x-3}$ är sin egen invers.

Logaritmfunktioner.

Exponentialfunktionen $f(x) = 2^x$ är strängt växande och alltså inverterbar. Den inversa funktionen till f kallas 2-logaritmen (eller *logaritmfunktionen med basen* 2) och betecknas $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Eftersom $2^x > 0$ för alla x så är $\log_2 x$ bara definierat för $x > 0$. Går vi tillbaka till den allmänna definitionen av invers funktion så får vi sambandet:

$$2^a = b \Leftrightarrow \log_2 b = a$$

Håller man detta i minnet så brukar de flesta problem i en inledande kurs om logaritmer att lösa sig. Ett "logaritmproblem" kan i allmänhet översättas till ett "exponentproblem". Exempelvis är $\log_2 8 = 3$ ty $2^3 = 8$ och $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{3}$ ty $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Däremot kan inte t.ex. $\log_2 3$ eller $\log_2 5$ skrivas enklare. Sätter vi $\log_2 3 = a_1$ och $\log_2 5 = a_2$ så har vi alltså $2^{a_1} = 3$ och $2^{a_2} = 5$, av vilket framgår att $\log_2 3$ ligger någonstans mellan 1 och 2 och att $\log_2 5$ ligger någonstans mellan 2 och 3. Exponentlagarna är ju välbekanta och dessa får konsekvenser för logaritmer. Exempelvis är $2^{a_1+a_2} = 2^{a_1}2^{a_2} = 15$ så $a_1 + a_2 = \log_2 15$. Alltså $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5$. Vi får också $2^{a_1-a_2} = 2^{a_1}/2^{a_2} = \frac{3}{5}$ så $a_1 - a_2 = \log_2 \frac{3}{5}$ d.v.s. $\log_2 \frac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5$.

Övning 8. Visa att $\log_2 3^8 = 8 \log_2 3$.

Övning 9. Visa att $\log_2(x_1x_2) = \log_2 x_1 + \log_2 x_2$ för alla $x_1, x_2 > 0$.

Övning 10. Skissera kurvan $y = \log_2 x$ genom att spegla kurvan $y = 2^x$ i linjen $y = x$.

För varje tal $c > 1$ är exponentialfunktionen $f(x) = c^x$ strängt växande och således inverterar. Inversen f^{-1} kallas c-logaritmen, betecknas $f^{-1}(x) = \log_c x$ och är definierad för $x > 0$. Talet c kallas *logaritmfunktionens* (liksom exponentialfunktionens) *bas*. Även då $0 < c < 1$ är förstås $f(x) = c^x$ inverterbar (funktionen är då strängt avtagande), men det är inte så vanligt att tala om logaritmer med bas mindre än 1. Nyckeln till framgång i arbetet med c-logaritmer är sambandet:

$$c^a = b \Leftrightarrow \log_c b = a$$

Exempel. Antag att $\log_3 x = 15$. Vi skall försöka beräkna $\log_9 \sqrt{x}$. Låt oss sätta $\log_9 \sqrt{x} = a$. Då är alltså $9^a = \sqrt{x}$. Samtidigt vet vi att $3^{15} = x$. Alltså $\sqrt{x} = \sqrt{3^{15}} = 3^{15/2}$, så $9^a = 3^{15/2}$, vilket ger $3^{2a} = 3^{15/2}$ och alltså $2a = \frac{15}{2}$ och $a = \frac{15}{4}$.

Övning 11. Visa att $\log_c 1 = 0$ för alla c.

Övning 12. Beräkna $\log_3 27$, $\log_5 5\sqrt{5}$ och $\log_7 \frac{49}{\sqrt[3]{7}}$.

Övning 13. Visa allmänt

a) $\log_c x_1 + \log_c x_2 = \log_c(x_1x_2)$

b) $\log_c x_1 - \log_c x_2 = \log_c \frac{x_1}{x_2}$

c) $\log_c x^s = s \log_c x$

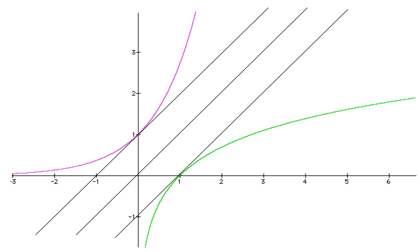
Övning 14. Antag att $\log_4 x = 9$. Beräkna $\log_8(\frac{1}{2}x^2)$.

De tre likheterna i Övning 13, *logaritmlagarna*, är ofta bekväma att använda vid förenkling av uttryck som innehåller logaritmer. Större nytta har du dock av att lära dig tekniken att översätta från logaritmer till exponenter, som i exemplet och övningarna ovan.

I avsnittet om exponentialfunktioner jämförde vi de två kurvorna $y = 2^x$ och $y = 3^x$ i närheten av $x = 0$ och hur dessa kurvor förhåller sig till linjen $y = x + 1$. Vi introducerade talet e, som ligger mellan 2 och 3, som basen för den exponentialfunktion $y = e^x$ som tangeras av linjen $y = x + 1$ för $x = 0$.

Inversa funktionen till $f(x) = e^x$, eller med andra ord $f^{-1}(x) = \log_e x$, kallas den *naturliga logaritmfunktionen* och betecknas ofta $\ln x$. Vi har alltså $\ln x = \log_e x$ och denna funktion definieras av ekvivalensen $e^a = b \Leftrightarrow \ln b = a$. Exempelvis är $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ och $\ln \frac{1}{e^2} = -2$.

I nedanstående figur visas kurvorna $y = e^x$, $y = \ln x$ samt linjerna $y = x$, $y = x + 1$ och $y = x - 1$. Observera att linjen $y = x - 1$ är spegelbilden av linjen $y = x + 1$ i $y = x$. Linjen $y = x - 1$ är tangent till $y = \ln x$ i punkten $(1, 0)$.



Vi ger ett exempel till och avslutar sedan med några övningar.

Exempel. Vi skall lösa ekvationen $\log_3 x + 4\log_x 3 = 5$. Låt oss göra substitutionerna $\log_3 x = t$ och $\log_x 3 = u$. Ekvationen kan nu skrivas $t + 4u = 5$, men för att kunna bestämma t och u (och sedan x) bör vi försöka finna ytterligare något samband mellan t och u. Vi har $3^t = x$ och $x^u = 3$, vilket ger $(3^t)^u = 3$ och alltså $3^{tu} = 3$. Men då måste vi ha $tu = 1$ och alltså $u = \frac{1}{t}$. Ekvationen $t + 4u = 5$ kan vi nu skriva $t + \frac{4}{t} = 5$ och vi finner lätt rötterna $t = 1$ och $t = 4$. Sambandet $x = 3^t$ ger oss till sist lösningarna $x = 3$ och $x = 81$ till den ursprungliga ekvationen.

Övning 15. Lös ekvationen $\log_2 \sqrt{x} + \log_4 \frac{1}{x^2} = -2$.

Övning 16. Förenkla $\dfrac{5^{\log_2 3}}{3^{\log_2 5}}$ så långt som möjligt.

Övning 17. Visa sambandet $\log_a b \log_b c = \log_a c$.

Övning 18. Använd sambandet i Övning 17 och din räknare till att finna ett närmevärde på $\log_7 82$. Jag utgår från att din räknare inte har en knapp för 7-logaritmen, men kanske för e-logaritmen eller 10-logaritmen (ofta betecknad lg).

Övning 19. Lös ekvationen $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^5 + 3\log_3 9 = 0$.

Övning 20. Låt $f(x) = 2^x + (\frac{1}{2})^x$, $x \geq 0$. Rita graferna till $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$. För vilka x är $f^{-1}(x)$ definierat? Beräkna $f^{-1}(\frac{10}{3})$. Försök också finna en formel som uttrycker $f^{-1}(x)$ i x.

Övning 21. Beräkna summan av den geometriska serien $\ln 2 + \ln \sqrt{2} + \ln \sqrt[4]{2} + \ln \sqrt[8]{2} + \cdots$.

Övning 22. Förenkla uttrycket $(\log_6 18)^3 + 3(\log_6 18)^2 \log_6 2 + 3 \log_6 18 (\log_6 2)^2 + (\log_6 2)^3$.