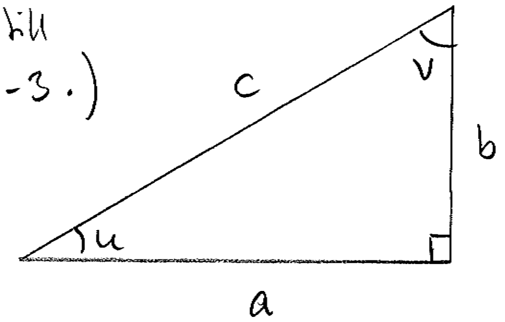
Lösningsförslag till kap. 1 i VEKTORGEOMETRI

(Figur till övn. 1-3.)



$\sin v = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\sin u = \frac{b}{c}$

$\cos v = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\cos u = \frac{a}{c}$

$\tan v = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\tan u = \frac{b}{a}$

1. Ska visa att $\sin(90^\circ - u) = \cos u$

och $\cos(90^\circ - u) = \sin u$.

Summan av vinklarna i triangeln är 180°, dvs

$u + v + 90^\circ = 180^\circ$. Det följer att $v = 90^\circ - u$.

- $\sin(90^\circ - u) = \sin v = \frac{a}{c} = \cos u$ (enl. tabell ovan).
- $\cos(90^\circ - u) = \cos v = \frac{b}{c} = \sin u$ (—— " ——).

2. $\tan(90^\circ - u) = \Big/ \begin{matrix} 90^\circ - u = v \\ \text{enl. } 1 \end{matrix} \Big/ = \tan v = \frac{a}{b} = \frac{a/a}{b/a} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

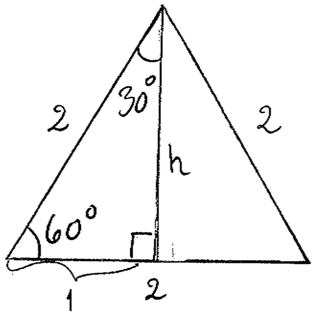
$= \frac{1}{\tan u}$. Alltså $\underline{\underline{\tan(90^\circ - u) = \frac{1}{\tan u}}}$.

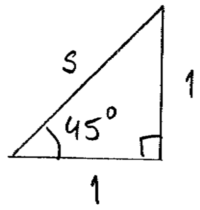
3. Ska visa att $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$.

Enligt Pythagoras sats för rätvinklig triangel så är $a^2 + b^2 = c^2$, eller $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Alltså

$(\cos u)^2 + (\sin u)^2 = 1$, vilket skrivs $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$.

4. Ska beräkna $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ för $u = 30°, 45°, 60°$ med hjälp av trianglarna:





(Jag redovisar inte här varför vinklarna är som markerat i figurerna. Följer från triangelns vinkelsumma.)

Beräkning av höjden h:

Pythagoras sats ger $h^2 + 1^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow \quad h^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{3} \quad$ (ty $h > 0$)

Beräkning av hypotenusan s:

Pythagoras sats ger $1^2 + 1^2 = s^2$, alltså $s = \sqrt{2}$.

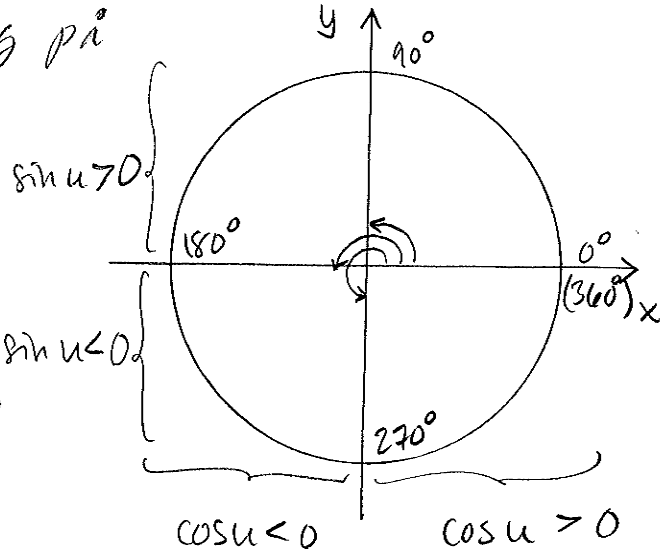
"Avläsning" i trianglarna ger

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$ $\quad \tan 45° = 1$

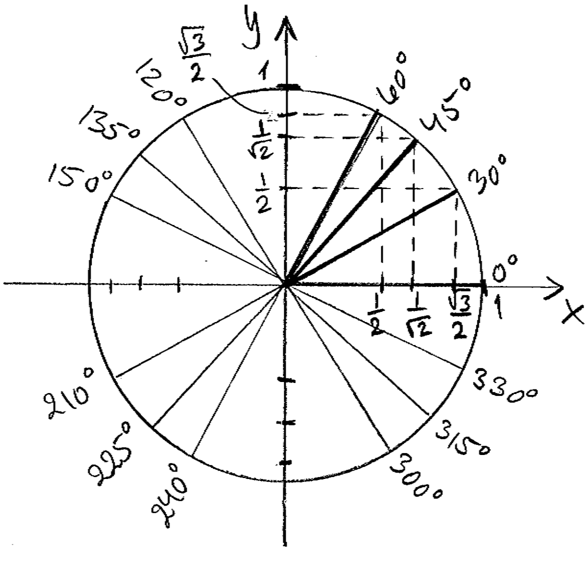
5. (Inte meningsfullt med lösning på
6. dessa uppgifter, men här är iallafall svaret.)



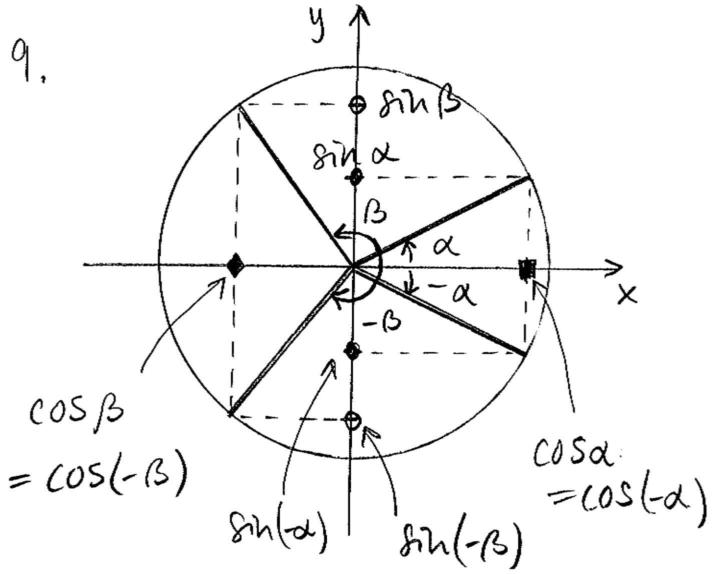
- $\underline{\cos u > 0}$ då
  $0° \leq u < 90°$ och $270° < u \leq 360°$
- $\underline{\cos u < 0}$ då
  $90° < u < 270°$
- $\underline{\sin u > 0}$ då $0° < u < 180°$
- $\underline{\sin u < 0}$ då $180° < u < 360°$

7. Anm. Även om sin u och cos u kan vara negativa så motsvarar |sin u| och |cos u| sidor i en rätvinklig triangel och i Pythagoras sats förekommer bara kvadraterna på sidorna. Tar man cos u eller sin u i kvadrat spelar det ingen roll om de är negativa. (T.ex. $\cos^2 u = |\cos u|^2$.)

8. Rita en bra figur och jämför med "standardvinklar" i första kvadranten. Jämför x- och y-koordinater på enhetscirkeln.
T.ex. $\sin 150° = \frac{1}{2}$,
$\cos 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\tan 300° = -\sqrt{3}$.



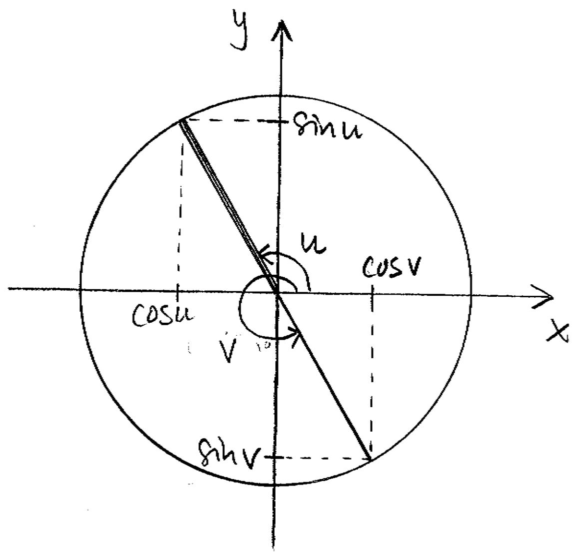
9.



För två vinklar α och β samt vinklarna −α och −β är värden cosinus och sinus markerade. (Valde två för att det ska vara mer övertygande.

Figuren visar att $\underline{\underline{\cos(-u) = \cos u}}$ och $\underline{\underline{\sin(-u) = -\sin u}}$.

10.



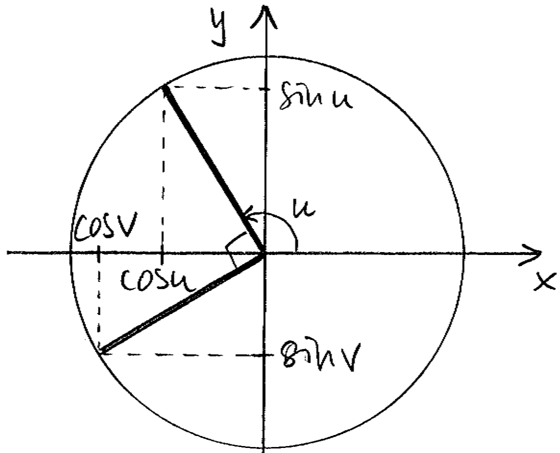
I figuren har jag satt $v = u + 180°$. Vi ser att

$$\underline{\underline{\cos(u+180°) = -\cos u}}$$

$$\underline{\underline{\sin(u+180°) = -\sin u}}.$$

(Anm. Vrider man ett halvt varv extra, dvs $+180°$, hamnar man i motstående kvadrant. Både x- och y-koordinater har då bytt tecken.)

11.



Nu är $v = u + 90°$.

$$\underline{\underline{\cos(u+90°) = -\sin u}}$$

$$\underline{\underline{\sin(u+90°) = \cos u}}$$

12. Även här kan man rita, men jag gör denna istället m.h.a. det vi visat ovan.

Inför beteckningen $w = -u$.

- $\underline{\sin(90^\circ - u)} = \sin(90^\circ + w) = /\text{anv. } 11/$

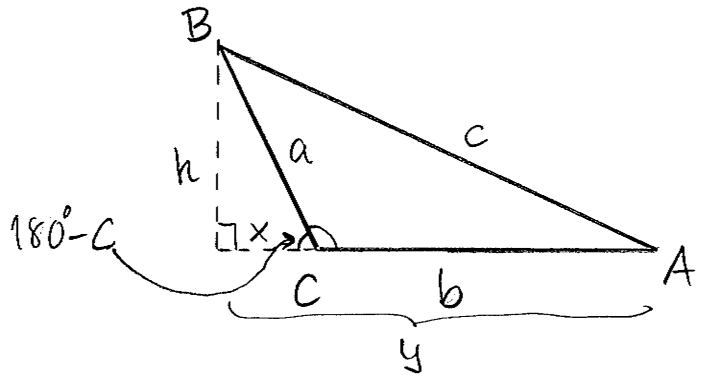
  $= \cos w = \cos(-u) = /\text{anv. } 9/ = \underline{\cos u}$

- $\underline{\cos(90^\circ - u)} = \cos(90^\circ + w) = /\text{anv. } 11/$

  $= -\sin w = -\sin(-u) = /\text{anv. } 9/ = -(-\sin u) = \underline{\sin u}$

13. Beviset finns i texten.

En "hake": triangeln skulle kunna ha en trubbig vinkel, dvs se ut så här:



14. Utgår nu från figuren ovan där $C > 90^\circ$.

$x = a\cos(180^\circ - C) = /\text{enl. } 10/ = a(-\cos(-C)) = /\text{enl. } 9/ = -a\cos C$

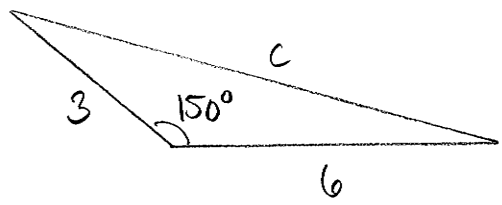
$y = b + c = b - a\cos C$. $\quad h = a\sin(180^\circ - C) = a\sin C$

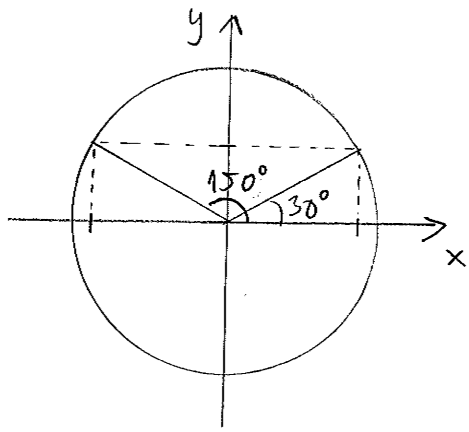
Pythagoras sats ger $y^2 + h^2 = c^2 \iff (b - a\cos C)^2 + (a\sin C)^2 = c^2$

$\iff b^2 - 2ab\cos C + \underbrace{a^2\cos^2 C + a^2\sin^2 C}_{a^2 \cdot 1} = c^2$

$\iff \underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. Cosinussatsen är visad.

15.





Använder cosinussatsen samt (med enhetscirkeln till hjälp) att $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

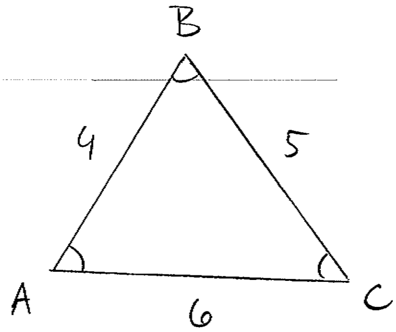
$$c^2 = 3^2 + 6^2 - 2\cdot 3\cdot 6\cdot \cos 150° \iff$$

$$c^2 = 9 + 36 - \cancel{2}\cdot 18\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \iff c^2 = 45 + 18\sqrt{3}$$

Eftersom $c > 0$ så är lösningen $c = \sqrt{45+18\sqrt{3}}$.

Kan även skrivas som $c = 3\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

16. $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$



- $\cos A$ fås ur

$$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6 \cos A \iff$$

$$25 = 16 + 36 - 48\cos A \iff$$

$$\cos A = \frac{27}{48} \iff \cos A = \frac{9}{16}$$ (Vinkeln $A = \arccos\frac{9}{16} \approx 56°$.)

- $\cos B$ fås ur

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos B \iff$$

$$36 = 16 + 25 - 40\cos B \iff \cos B = \frac{5}{40} \iff \cos B = \frac{1}{8}$$ $(B \approx 83°)$

- $\cos C$ fås ur $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cos C \iff$

$$16 = 25 + 36 - 60\cos C \iff \cos C = \frac{45}{60} \iff \cos C = \frac{3}{4}$$ $(C \approx 41°)$