Exempel: Tre linjer i rummet

Avgör om följande 3 linjer är parallella, samma eller annars om de har någon skärningspunkt.

Linje 1 går genom punkterna $P_1=(0,3,-1)$ och $P_2=(3,-3,5)$.

Linje 2 ges av $(x-2, y+1, z-3) = t(-2,4,-4)$.

Linje 3 ges av
$$\begin{cases} x = 2+t, \\ y = -9+2t, \\ z = 9-t. \end{cases}$$

Linjerna har riktningsvektorer

$$\bar{v}_1 = \overline{P_1P_2} = (3-0, -3-3, 5-(-1)) = (3,-6,6),$$

$$\bar{v}_2 = (-2,4,-4) \quad \text{och}$$

$$\bar{v}_3 = (1,2,-1).$$

Linje 1 och 2 är parallella om $\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}_2$ för något λ.

$$\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}_2 \iff \underbrace{(3,-6,6)}_{3(1,-2,2)} = \lambda \underbrace{(-2,4,-4)}_{(-2)(1,-2,2)} \iff \lambda = -\frac{3}{2}$$

Alltså är linje 1 och 2 parallella (el. samma).

Linje 3 är parallell med dessa om $\bar{v}_3 = \lambda \bar{v}_2$ för något λ.

$$\bar{v}_3 = \lambda \bar{v}_2 \iff (1,2,-1) = \lambda(-2,4,-4) \iff (1,2,-1) = \lambda(-2)(1,-2,2)$$

Lösning saknas så linje 3 har en annan riktning.

Linje 1 och 2 är samma linje om de har någon punkt gemensam (då följer att de har alla punkter gemensamma). $P_2 = (3,-3,5)$ ligger på linje 1. Vi undersöker om P_2 uppfyller ekvationen för linje 2 för något t:

$$(3-2, -3+1, 5-3) = t(-2, 4, -4) \iff$$

$$(1,-2,2) = t\cdot(-2)(1,-2,2) \iff t = -\frac{1}{2}$$

Lösning för t finns så linje 1 och 2 är samma linje.

Nu ska vi se om linje 3 skär denna. Isåfall ska ekvationerna för både linje 2 och linje tre uppfyllas för någon punkt (x,y,z). Men värdena på parametrarna behöver inte vara samma. Därför byter vi parameternamn för ena linjen, säg linje 2:

$$(x-2, y+1, z-3) = s(-2, 4, -4) \iff$$

$$\begin{cases} x = 2-2s \\ y = -1+4s \\ z = 3-4s \end{cases} \quad (*)$$

Frågan är nu om det finns både s och t så att (x,y,z) överrensstämmer i linje 2 och 3.

$$\begin{cases} 2-2s = 2+t \\ -1+4s = -9+2t \\ 3-4s = 9-t \end{cases} \iff \begin{cases} -2s - t = 0 \\ 4s - 2t = -8 \\ -4s + t = 6 \end{cases} \quad (+2) \quad (-2)$$

(anv. sk. Gauss-eliminering)

$$\iff \begin{cases} -2s-t=0 \\ 0-4t=-8 \\ 0+3t=6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2s=-t \\ t=2 \\ (t=2) \end{cases} \iff \begin{cases} s=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

Lösning finns så linjerna skär varandra.
Skärningspunkten fås då $s=-1$ sätts in i (*).

$$\begin{cases} x=2+2=4 \\ y=-1-4=-5 \\ z=3+4=7 \end{cases} \qquad \left(\text{Kontroll med } t=2 \text{ i linje 3:} \quad \begin{cases} x=2+2=4 \\ y=-9+4=-5 \\ z=9-2=7 \end{cases} \quad \text{OK!} \right)$$

Linjerna skär i punkten $(4,-5,7)$.

Anm. Det "vanligaste" är förstås att två linjer i rummet inte skär varandra. Ekvationssystemet för s och t har tre ekvationer och saknar därför "oftast" lösning.