Matematiska institutionen
Stockholms universitet
C.G.

Matematik med didaktisk inriktning I
Vektorgeometri och funktionslära
Repetitionsblad 2

I detta andra repetitionsblad skall vi tala om längder och vinklar och om linjer och plan.

Längder och vinklar.

I det första repetitionsbladet beräknade du längden av en vektor given i ett ON-system. Vilken välkänd sats använde du dig då av? Låt nu $\mathbf{u} = (x, y, z)$. Skriv upp ett allmänt uttryck för $|\mathbf{u}|$.

Men nu gäller det vinklar. Låt $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vara vektorer i planet och låt α vara vinkeln dem emellan. Illustrera vektorerna med två pilar som har samma startpunkt. Komplettera figuren till en triangel. Beräkna sedan $\cos\alpha$ genom att använda cosinussatsen.

Du bör komma fram till följande samband:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Genomför gärna denna beräkning även då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i rummet.

Täljaren i uttrycket ovan har vi givit en särskild beteckning och ett särskilt namn, som du säkert minns. Skriv nu om sambandet ovan med användandet av den nya beteckningen.

Diskutera sedan sambandet ovan i följande två speciella situationer. Skriv ned dina iakttagelser:

1. Situationen $\alpha = 90°$.

2. Situationen $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Övning A. Beräkna (cosinus för) vinkeln mellan vektorerna (2,3,7) och (3,4,8).

Övning B. Låt $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$ och $P = (x, y)$ en punkt som varierar, men som uppfyller villkoret $x + y = \frac{x^2+y^2}{2}$. Bevisa att $\overline{AP}$ alltid är vinkelrät mot $\overline{BP}$.

Punktmängder.

I ett koordinatsystem kan vi namnge en punkt (eller en vektor) genom att ange dess koordinater, exempelvis $P = (3, 7)$ eller $\mathbf{u} = (1, -4)$. En punktmängd (t.ex. en cirkel, rät linje, sfär eller ellips) kan vi namnge genom att ange något *algebraiskt villkor* som är uppfyllt för alla punkter i mängden och inga andra. Det kan ske på olika sätt:

Sambandet $x^4 + y^2 = 25$ säger vi vara ekvationen för mängden av alla punkter (x, y) som uppfyller just detta. Du kan säkert ange några punkter i denna mängd. Tillsammans bildar de en kurva och du kan fundera lite över ungefär hur den ser ut.

Uttrycket $(x, y, z) = (2t, -t^2, t^3)$ är också ekvationen för en punktmängd, men denna gång med en *parameter*. Varje värde på t ger oss en punkt i mängden.

Att finna ekvationen, eventuellt på parameterform, för en punktmängd är temat i sista kapitlet (men vi håller oss till linjer, plan och cirklar) liksom att tolka en ekvation. För att lyckas med detta gäller det att kunna formulera vad som gäller just för punkter i mängden och att kunna översätta mellan de olika språken.

Låt oss exempelvis ta en cirkel C med medelpunkt i $A = (a, b)$ och radie r. Fyll i nedan så att de olika språken säger samma sak;

Geometriska: Punkten P ligger på cirkeln C

Geometriska (alternativ): Sträckan AP har längd r.

Vektorgeometriska: $|\overline{AP}|$ har längd r.

Algebraiska: $|\overline{AP}| =$

Algebraiska med koordinater:

Hm. Jag medger att gränsdragningarna mellan språken ibland är svåra.

Övning A. Bestäm ekvationen för cirkeln med medelpunkt i (3,7) och radie 8.

Övning B. Parameterekvationen $(x, y) = (1, 2) + 3(\cos t, \sin t)$ betyder också en cirkel. Förklara varför och teckna cirkelns ekvation utan parameter.

Räta linjer.

Låt A och B vara två skilda punkter i rummet. Illustrera detta samt den räta linje ℓ som bestäms av A och B.

Låt P vara en variabel punkt i rummet. Vi kan tänka oss att P svävar runt i rummet. Ibland ligger P på ℓ. Ibland ligger P inte på ℓ. När ligger P på ℓ?

Fyll i:

Geometriska: P ligger på ℓ, d.v.s. på linjen genom A och B.

Vektorgeometriska: Vektorerna och är

Vektoralgebraiska:

Det vektoralgebraiska uttrycket kan skrivas ännu mer explicit om vi inför koordinater, t.ex. $A = (3, 2, 1)$, $B = (4, 6, 7)$ och $P = (x, y, z)$. Gör så! Detta kallas räta linjens ekvation.

I detta sammanhang är det bra om du redogör för begreppet *riktningsvektor*. Kan en rät linje ha flera riktningsvektorer? Kan två skilda linjer ha samma riktningsvektor?

En linje kan ha en *normalvektor* också, men detta begrepp är mest användbart för räta linjer i planet. Varför är det så?

Rita nu en linje som ligger i planet, innehåller punkten A och har normalvektor $\mathbf{n}$. Låt P vara en variabel punkt. Fyll i igen:

Geometriska: P ligger på ℓ

Vektorgeometriska: Vektorerna och är

Vektoralgebraiska:

Inför vi koordinater så kan vi konkretisera ytterligare. Ge ett exempel.

Övning A. Ange ekvationen för den räta linje som går genom $(3, -2)$ och är vinkelrät mot den räta linje som går genom $(1, 4)$ och $(3, 8)$.

Övning B. Genom (2,8,6) går en linje ℓ' parallell med den linje ℓ, som går genom $A = (1, 1, 1)$ och $B = (3, 5, 6)$. På ℓ' ligger en punkt P sådan att AP är vinkelrät mot AB. Bestäm P.

Plan.

Tänk dig en punkt i rummet och ett plan som innehåller punkten. Håll fast vid punkten, men variera planet för din inre syn. Beskriv vad du ser.

Tänk dig nu en vektor i rummet och ett plan som är vinkelrät mot denna vektor. Håll fast vid vektorn, men variera planet för din inre syn. Beskriv vad du ser.

Övertyga dig om att det bara finns ett plan Π som innehåller en given punkt A och är vinkelrät mot en given vektor $\mathbf{n}$. Fyll sedan i på de olika språken:

Geometriska: Punkten P ligger i Π

Vektorgeometriska: Vektorn $\overline{AP}$ är ...

Vektoralgebraiska: ...

Om vi inför koordinater och säg $A = (2, 1, 3)$, $\mathbf{n} = (-1, 2, 7)$ och $P = (x, y, z)$ kan vi skriva det algebraiska uttrycket mer explicit. Gör så!

Ett alternativt sätt att geometriskt bestämma ett plan är att ange tre punkter i planet, vilka inte ligger i rät linje. Detta skall vi stifta närmare bekantskap med i en senare kurs.

Övning A. Bestäm ekvationen för det plan som skär linjen $(x, y, z) = (2, 3, 4) + t(1, 2, -1)$ under rät vinkel i den punkt där $t = -1$.

Övning B. Låt Π vara det plan som innehåller de tre punkterna (3,3,0), (2,1,3) och (5,2,5). En av följande linjer är vinkelrät mot Π. Vilken?

a) linjen $(x, y, z) = (3, 3, 0) + t(7, -10, -5)$

b) linjen genom $(-3, 14, 6)$ och $(4, 3, 1)$