MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jan Snellman

Kombinatorik PK
20030520

Inga hjälpmedel tillåtna. 11p ger säker godkänt. $\mathbb{Z}$ betecknar heltalen, $\mathbb{N}$ de icke-negativa heltalen.

1. Låt $G = (V, E)$ vara den riktade oändliga graf vars nodmängd är $V = \mathbb{Z}^3$ och vars bågmängd är $E = \{\,(\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{e}_i) | \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^3,\ i \in \{1, 2, 3\}\,\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Bestäm antalet riktade stigar från $(1, 2, 3)$ till $(5, 6, 7)$. 3 p

2. Hur många är de uppspännande delgrafer till K_n som saknar isolerade noder, d.v.s varje nod har valens ≥ 1? Ett svar i form av en summa behöver inte förenklas. 3 p

3. Låt $A = (a_{ij})$ vara en $n \times n$-matris så att $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $a_{ii} = 0$, $a_{ij} + a_{ji} = 1$ för $i \neq j$. Visa att A^{n-1} har något nollskilt element. (Ledning: Hamiltonstig.) 3 p

4. Låt, för varje heltal $n > 1$, (G_n, u_n) vara följande nätverk: $G_n = (V_n, E_n)$ är den riktade grafen på $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ med kantmängd $E_n = \{\,(i, j) | 1 \leq i < j \leq n\,\}$. Noden 1 är källa, noden n är sänka.

   Beräkna det maximala värdet för ett flöde genom detta nätverk då varje kant har kapacitet 1. 3 p

5. Funktionen $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ är bestämd av att $c(i, 0) = c(0, j) = 1$ för alla $i, j \in \mathbb{N}$, samt av att
$$c(i + 1, j + 1) = c(i, j + 1) + c(i + 1, j) + 3c(i, j).$$
   Funktionen $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ är bestämd av att
$$d(n) = \sum_{i=0}^{n} c(i, n - i).$$
   Ge ett slutet uttryck för $d(n)$. (Ledning: det kan löna sig att beräkna $G(x, y) = \sum_{i,j\geq 0} c_{i,j} x^i y^j$, och sedan studera $G(t, t)$.) 5 p

6. En *involution* på en mängd V är en bijektion $\sigma : V \to V$ så att $\sigma^2 = 1_V$. Låt d_n beteckna antalet involutioner på en mängd med n element. Hitta en rekursionsformel för d_n, och använd denna formel för att verifiera att
$$G(t) = \sum_{n\geq 0} d_n \frac{t^n}{n!} = \exp(t + t^2/2).$$
   (Ledning: om $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ och $\sigma : V \to V$ är en involution, så är antingen $\sigma(v_n) = v_n$, eller så är $\sigma(v_n) = v_i$, $i \neq n$. I det första fallet är restriktionen av σ till $V \setminus \{v_n\}$ en involution. Vad händer i det andra fallet?) 5 p

Skrivningsåterlämning måndag den 26 maj kl 10.00-10.45 i sal 35, därefter hos studievägledaren på mottagningstid.