Lösningsförslag till KombinatorikPK 2003-05-20

1. Eftersom $(5,6,7) = (1,2,3) + 4\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3}$ så skall vi använda oss av 4 steg till höger ($\mathbf{e_1}$), 4 framåt ($\mathbf{e_2}$), och 4 uppåt ($\mathbf{e_3}$). Antalet sätt att skriva de tolv symbolerna $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}$ i någon ordning är $\frac{12!}{4!\times 4!\times 4!}$. Jämför Exempel 1.14 i boken.

2. Svaret är

$$2^{\binom{n}{2}} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}},$$

se Exempel 8.6 i boken där fallet $n = 5$ utreds.

3. Låt G vara den riktade grafen på nodmängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ som har en riktad kant från i till j om och endast om $a_{ij} = 1$. Då är A adjacensmatrisen till G, och elementet i rad i kolumn j i A^2 anger antalet riktade stigar av längd 2 från i till j i G (övning 11.3.30 i boken). På samma sätt anger elementet i rad i, kolumn j i A^{n-1} antalet riktade stigar av längd $n-1$ från i till j.

Villkoren på A ger att G är en *riktad turnering*, dvs för $i \neq j$ så är precis en av (i,j) och (j,i) en riktad kant i G. En riktad turnering har alltid en Hamiltonstig, enligt bokens sats 11.7. En sådan Hamiltonstig har längd $n-1$ och ger alltså ett nollskilt element i A^{n-1}.

4. Uppenbarligen så är partitionen $\{1, 2, \ldots, n\} = \{1\} \cup \{2, 3, \ldots, n\}$ ett snitt med kapaciteten $n-1$. Alltså har det maximala flödet värdet $\leq n-1$, och kan vi hitta ett flöde med det värdet så är det maximalt. Funktionen

$$f(i,j) = \begin{cases} 1 & i = 1, j > 1 \\ 1 & i < n, j = n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

är konserverande i varje nod $1 < i < n$ eftersom inflödet = utflödet = 1. Utflödet från källan 1 är $n-1$.

5. Om vi multiplicerar rekursionsformeln med $x^{i+1}y^{j+1}$ och summerar över alla par $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ får vi att

$$\sum_{i,j\geq 0} c(i+1,j+1)x^{i+1}y^{j+1} = \sum_{i,j\geq 0} c(i,j+1)x^{i+1}y^{j+1} + \sum_{i,j\geq 0} c(i+1,j)x^{i+1}y^{j+1} + \sum_{i,j\geq 0} 3c(i,j)x^{i+1}y^{j+1}$$

Kalla vänsterledet VL och högerledet HL. Vi har att

$$\begin{aligned} VL &= \sum_{i,j\geq 1} c(i,j)x^i y^j - \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i=0 \text{ eller } j=0}} c(i,j)x^i y^j \\ &= \sum_{i,j\geq 0} c(i,j)x^i y^j - \sum_{i\geq 0} c(i,0)x^i - \sum_{j\geq 0} c(0,j)y^i + c(0,0) \\ &= G(x,y) - G(x,0) - G(0,y) + G(0,0) \\ &= G(x,y) - (1-x)^{-1} - (1-y)^{-1} + 1 \end{aligned}$$

där vi har använt begynnelsevillkoren

$$
\begin{aligned}
G(x,0) &= \sum_{i\geq 0} c(i,0)x^i = \sum_{i\geq 0} x^i = (1-x)^{-1}\\
G(0,y) &= \sum_{j\geq 0} c(0,j)y^j = \sum_{j\geq 0} y^j = (1-y)^{-1}\\
G(0,0) &= c(0,0) = 1
\end{aligned}
$$

För högerledet gäller att

$$
\begin{aligned}
HL &= x\sum_{i,j\geq 0} c(i,j+1)x^i y^{j+1} + y\sum_{i,j\geq 0} c(i+1,j)x^{i+1}y^j + \sum_{i,j\geq 0} 3c(i,j)x^{i+1}y^{j+1}\\
&= x(G(x,y)-G(x,0)) + y(G(x,y)-G(0,y)) + 3xyG(x,y)\\
&= x(G(x,y)-(1-x)^{-1}) + y(G(x,y)-(1-y)^{-1}) + 3xyG(x,y).
\end{aligned}
$$

Eftersom $VL = HL$ så kan vi lösa ut att

$$
G(x,y) = \frac{1}{1-x-y-3xy} = 1 + x + y + 5xy + \dots
$$

Det är besvärligt att ange vad $c(i,j)$ är! Däremot är det relativt enkelt att få fram $d(n)$, som är t^n-koefficienten i

$$
G(t,t) = \frac{1}{1-2t-3t^2} = \frac{3}{4}\frac{1}{1-3t} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t}.
$$

Denna koefficient är uppenbarligen $\frac{3}{4}3^n + \frac{1}{4}(-1)^n$.

En alternativ metod är följande: om vi sätter $c(i,j) = 0$ då i eller j är negativ så gäller fortfarande rekursionsformeln

$$
c(i,j) = c(i,j-1) + c(i-1,j) + 3c(i-1,j-1),
$$

utom för $i = j = 0$. Vi beräknar allra först $d(0) = c(0,0) = 1$, $d(1) = c(1,0) + c(0,1) = 1 + 1 = 2$, $d(3) = c(2,0) + c(1,1) + c(0,2) = 1 + c(1,0) + c(0,1) + 3c(0,0) + 1 = 7$. För $n > 0$ så gäller att

$$
\begin{aligned}
d(n+2) &= \sum_{k=0}^{n+2} c(k,n+2-k)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k,n+2-k)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k-1,n+2-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k,n+1-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3c(k-1,n+1-k)\\
&= d(n+1) + d(n+1) + 3d(n)
\end{aligned}
$$

Differensekvationen

$$d(n+2) = 2d(n+1) + 3d(n), \quad d(0) = 1, d(1) = 7$$

har lösningen $d(n) = \frac{3}{4}3^n + \frac{1}{4}(-1)^n$.

6. Antingen så är $\sigma(v_n) = v_n$, varför restriktionen av σ till $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ är en involution, eller så är $\sigma(v_n) = v_i$ med $i \neq n$. I det senare fallet så måste $\sigma(v_i) = v_n$, och restriktionen av σ till $V \setminus \{v_i, v_n\}$ vara en involution. Eftersom $i \neq n$ kan väljas på $n-1$ olika sätt får vi att

$$d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}.$$

Om vi sätter $d_0 = d_1 = 1$ så gäller den rekursionsformeln för alla $n \geq 2$. Vi kan förstås också skriva

$$d_{n+2} = d_{n+1} + (n+1)d_n,$$

giltigt för $n \geq 0$. Vi multiplicerar den senare likheten med $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ och summerar över alla $n \geq 0$. Det leder till att

$$\sum_{n\geq 0} d_{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 0} d_{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n\geq 0}(n+1)d_n\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Eftersom

$$G'(t) = \sum_{k\geq 1} d_k k\frac{t^{k-1}}{k!} = \sum_{k\geq 1} d_k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n\geq 0} d_{n+1}\frac{t^n}{n!}$$

och

$$tG(t) = \sum_{n\geq 0}\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

så gäller att b$VL = G'(t) - 1$ och att $HL = G(t) - 1 + tG(t)$. Vi skall alltså verifiera att $G'(t) = (1+t)G(t)$ har lösningen $G(t) = exp(t + t^2/2$ och uppfyller att $G(0) = 1$, $G'(0) = 1$. Det är trivialt. Den ambitiöse kan lösa

$$\frac{dG}{dt} = (1+t)G$$

genom att separera variabler:

$$\int\frac{dG}{G} = \int(1+t)dt = t + t^2/2 + C$$

ger att $\log(G) = t + t^2/2 + C$ dvs att $G = C\exp(t + t^2/2)$.