MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Paul Vaderlind

Tentamensskrivning i
KOMBINATORIK pk
5 poäng
den 16 augusti 2004 kl 09:00–14:00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För full poäng krävs fullständiga motiveringar. 12 poäng ger säkert godkänd. Observera att uppgifterna *inte* är ordnade efter svårighetsgraden.

---

1. Av institutionens 73 anställda ska 17 väljas till styrelsen och där ska en prefekt och en vice-prefekt väljas. Hela styrelsen ska sättas runt en cirkulärt bord. Hur många olika "bord" kan man få på detta sätt? Två utplaceringar anses vara identiska om den ena fås genom att rotera den andra runt bordet. (3p)

2. Antag n, r är icke negativa heltalen, $r \leq n$. Visa, gärna med en kombinatorisk argument, att för varje heltal m, $0 \leq m < n$ är $\binom{n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n-m}{k}\binom{m}{r-k}$. (4p)

(Ledtråd: Dela en n-mängd i två delar. Observera också att $\binom{a}{b} = 0$ ifall $a < b$.)

3. Från mängden $\{1, 2, 3, ..., 1000000\}$ väljs 1001 tal. Visa att bland de valda talen måste finns två tal a och b sådana att $0 < \sqrt{a} - \sqrt{b} < 1$. (4p)
(Ledtråd: Lådprincipen kan vara användbar här.)

4. Fröken ska dela ut 20 karameller och 20 sega råttor till fyra barn på sådant sätt att inget barn får färre än 2 eller fler än 7 godis av varje slag. På hur många sätt kan fröken fördela alla godisbitar? (4p)
(Ledtråd: Använd gärna genererande funktioner.)

5. Låt $G(V, E)$ vara en sammanhängande planär graf med minsta krets av längd $k > 2$. Visa att $|E| \leq \frac{k}{k-2}\big(|V| - 2\big)$. Använd denna olikhet för att visa att $K_{3,3}$ är icke-planär. (Fallet med $k = 3$ bevisades under lektionerna med hjälp av Eulers relation mellan hörn, kanter och regioner i en planär graf.) (4p)

6. En graf G har tre kant-disjunkta hamiltonska kretsar. Tolv av grafens hörn har valens 6, resterande hörn har valens 7. Visa att kanterna i grafen kan färgläggas med sju färger så att varje par av kanter med ett gemensamt hörn får olika färg. (4p)
(Ledtråd: Vad kan man säga om antalet hörn i grafen G?)

LYCKA TILL!

Skrivningsåterlämning: måndag den 23 augusti, kl 12:00 i kafferummet, hus 5 och därefter hos Tom Wollecki, rum 208, hus 6.