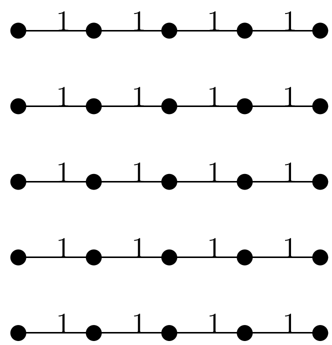
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jan Snellman

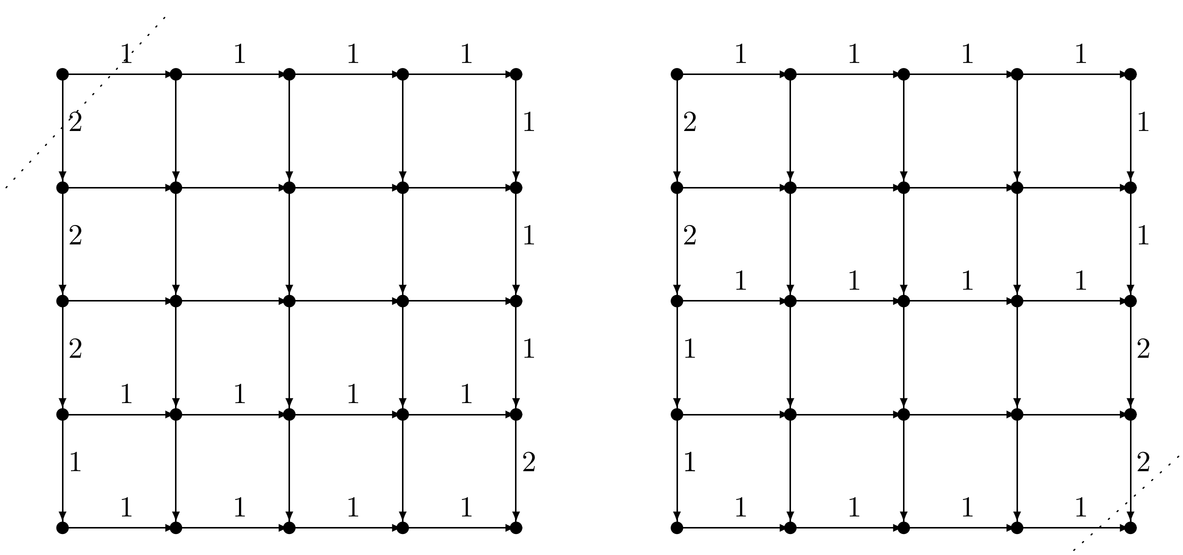
Lösningar till tentamensskrivning i
Kombinatorik PK
20041215

1. Kanterna med vikt 1 bildar en cykelfri delgraf, så de kommer att ingå i varje minimalt uppspännande träd.



För att få ett uppspännande träd skall $5^2 - 1 - 5 * 4 = 4$ lodräta kanter (av vikt 2) läggas till, på ett sådant sätt att ingen cykel uppstår. Man skall alltså välja precis en sådan kant från varje "rad", vilket kan göras på $5^4 = 625$ olika sätt. Vikten blir $5 * 4 + 4 * 2 = 28$.

2. Nedan visas två olika maximala flöden och två olika minimala snitt. Flödena har värde 3, snitten kapacitet 3. Man ser att flödena är maximala/snitten minimala eftersom snitten är mättade.



3. Om A har n element och σ är en permutation på A med precis två fixpunkter $a, b \in A$ så är restriktionen av σ till $A \setminus \{a, b\}$ en fixpunktsfri permutation. Omvänt, om τ är en fixpunktsfri permutation på $A \setminus \{a, b\}$ så kan den på ett unikt sätt utvidgas till en permutation på A som har a, b som fixpunkter. Det följer, att om D_k betecknar antalet fixpunktsfria permutationer på en k-mängd, så är antalet permutationer på en n-mängd med precis 2 fixpunkter givet av $\binom{n}{2} D_{n-2}$. Grimaldi (kap 8.3) visar med inklusion-exklusion att

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

4. Eftersom $2x \in \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$, $4y \in \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$ så ges genererande funktionen av

$$(1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + \dots)(1 + t^4 + t^8 + t^{12} + t^{16} + \dots) = (1 - t^2)^{-1}(1 - t^4)^{-1}.$$

Vi söker ett explicit uttryck för c_n, som är t^n-koefficienten i denna rationella funktion. Vi har att $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 2$, och mer allmänt att $c_{2k+1} = 0$ för alla k, eftersom $2x + 4y$ alltid är jämnt. Om $n = 4k$ så finns lösningarna

$$(x, y) \in \{(0, k), (2, k - 1), (4, k - 2), \dots (2k, 0)\}$$

dvs $c_{4k} = k + 1$. Om $n = 4k + 2$ så finns lösningarna

$$(x, y) \in \{(2, k), (4, k - 1), (6, k - 2), \dots (2k + 1, 0)\}$$

dvs $c_{4k+2} = k + 1$.

Man kan också få fram detta från partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{(1 - t^2)(1 - t^4)} = \frac{1/8}{(1 - t)^2} + \frac{1/4}{1 - t} + \frac{1/8}{(1 + t)^2} + \frac{1/4}{1 + t} + \frac{1/4}{1 + t^2}$$

Det är väl aningen bökigare.

5. Vi har att $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, samt att

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Vi beräknar

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Kalla koefficientmatrisen A. Den är symmetrisk och därför diagonaliserbar, med egenvärden $r_1 = 3/2 + \sqrt{5}/2$, $r_2 = 1/r_1 = 3/2 - \sqrt{5}/2$. Följaktligen så är $x_n = ar_1^n + br_2^n$. För $n = 0, 1$ ger detta

$$1 = a + b$$
$$2 = ar_1 + br_2$$

vilket ger att $a = 1/2 + \sqrt{5}/10$, $b = 1/2 - \sqrt{5}/10$. Den noggranne kontrollerar att

$$x_2 = ar_1^2 + br_2^2 = 1/40\,\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right)^2 + 1/40\,\left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{5}\left(-3 + \sqrt{5}\right)^2 = 5.$$

6. (a) Vi kodar positionerna genom att ange villka som är på Kräftriketsidan (de övriga är på Hagasidan) och genom att beteckna Herrar med stor bokstav, Fruar med liten bokstav.

3 Herrar på Kräftriketsidan: 3 Fruar: [ABCabc]. 2 Fruar: Omöjligt. 1 Fru: Omöjligt. 0 Fru: [ABC]. Totalt: 2 positioner.

2 Herrar (säg Herr A och Herr B, multiplicera med $\binom{3}{2} = 3$): 3 Fruar: [ABabc]. 2 Fruar: [ABab]. 1 Fru: Omöjligt. 0 Fru: [AB] Totalt: 3*3=9 positioner.

1 Herre: av symmetriskäl lika många positioner som med 2 Herrar, dvs 9 positioner.

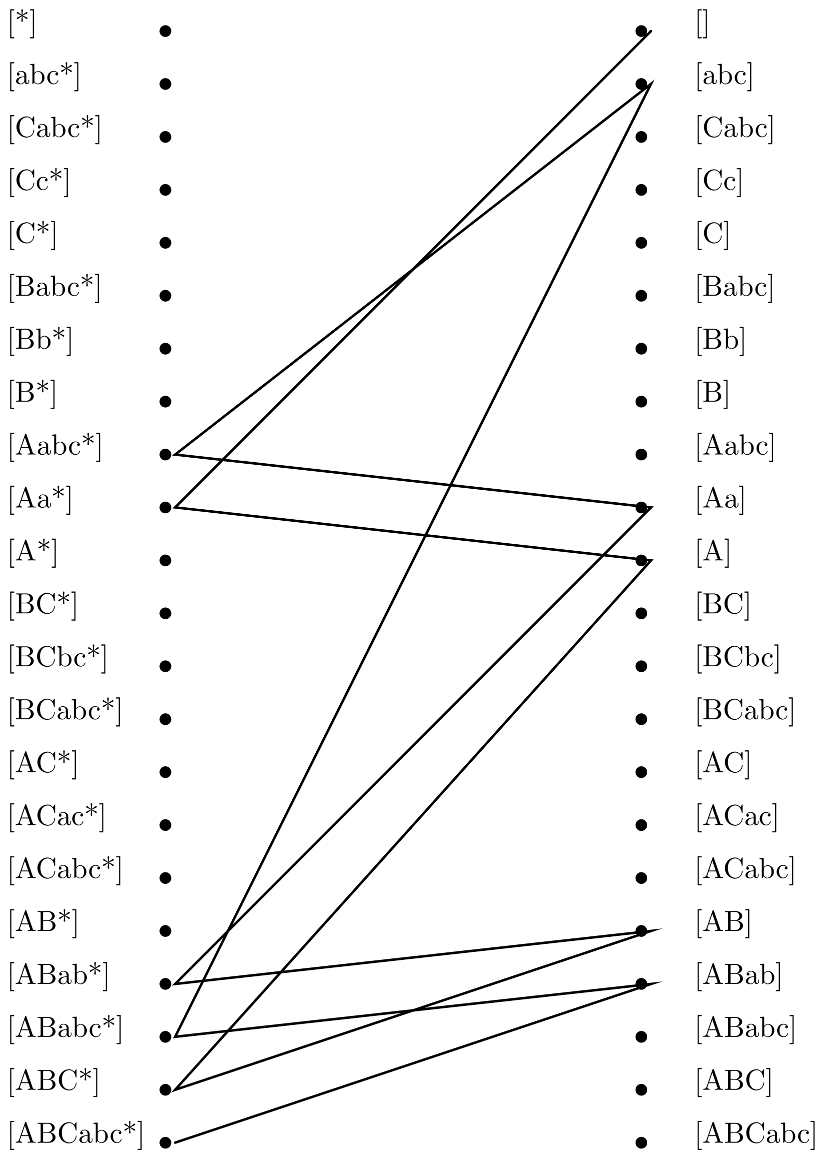
O Herrar: av symmetriskäl lika många positioner som med 3 Herrar, dvs 2 positioner.

Allt som allt: 2 + 9 + 9 +2 = 22 positioner.

(b) Vi låter en *utökad position* vara en sedlig utplacering samt en placering av båten. Om båten finns på Kräftriketssidan indikerar vi det med en asterisk *. Startpositionen är alltså [ABCabc*], och det finns totalt 44 utökade positioner.

Vi bildar nu en bipartit graf vars hörn ges av de utökade positionerna, och där två sådana hörn förbinds av en kant om en båttur överför den ena positionen i den andra; tex så finns en kant mellan [ABCabc*] och [BCbc]. Eftersom det är möjligt att ro tillbaka, kan kanterna antas vara oriktade.

När grafen väl är skapad kan vi tex använda Dijkstras algoritm för att hitta en stig från [ABCabc*] till []. I Figur 1 ges en sådan stig: vi ritar bara ut de kanter som ingår i stigen, annars skulle bilden bli väl grötig.



Figur 1: En möjlig roddtur