MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik

Lösningar till tentamen i Kombinatorik fk/pk, den 31 maj 2006

---

1. Observera att $46 = 3 \cdot 15 + 1$.
Låt oss fördela bollarna så långt det går utan att placera samma antal bollar i fyra boxar. För detta ändamål lägger vi 1 boll i tre boxar, 2 bollar i tre boxar, 3 bollar i tre boxar, osv, tills vi lägger 15 bollar i tre boxar och 16 bollar i den återstående, 46:e boxen. Sammanlagt har vi fördelat $3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+...+3\cdot15+16 = 376$ bollar. Följaktligen är 376 minimum antal bollar som behövs för att som mest tre boxar ska inneha samma antal bollar. Eftersom vi endast har 375 bollar så kommer minst fyra boxar att inneha samma antal bollar.

2. Låt $u, v \in V$. Om båda dessa hörn ligger i olika komponenter av den icke-sammanhängande grafen $\bar{G}$ så finns det en kant mellan u och v i G, dvs $d(u, v) = 1$. Om u och v ligger i samma komponent av $\bar{G}$, låt w vara ett hörn i en annan komponent av $\bar{G}$. Då är $u - w - v$ en stig mellan u och v i G, vilket ger $d(u, v) = 2$. Således är $d(G) \leq 2$.
Eftersom $G \neq K_n$ så finns det två hörn u och v i G utan någon kant emellan, alltså $d(u, v) \geq 2$. Följaktligen $d(G) \geq 2$ och tillsammans med den tidigare olikheten får vi att $d(G) = 2$.

3. Vi löser ett mera allmän uppgift, nämligen för $|A| = m$ och $|B| = n$.
a) Q_k = antalet ord av längd k i alfabetet $A \cup B$ med ett udda antal symboler från A = (antalet ord som slutar på element från B) + (antalet ord som slutar på element från A) = $n\times$ (antalet ord av längd $k-1$ med ett udda antal element från A) + $m\times$ (antalet ord av längd $k-1$ med ett jämnt antal element ur A) = $n \times Q_{k-1} + m\big((m+n)^{k-1} - Q_{k-1}\big) = (n-m)Q_{k-1} + (m+n)^{k-1}$ för $k = 1, 2, 3, ...$ Uppenbart är att $Q_0 = 0$.

b) Den homogena relationen $Q_k = (n - m)Q_{k-1}$ har karakteristiska ekvation $x = n - m$, så dess allmänna lösning är $Q_k^h = C(n - m)^k$. En partikulär lösning till den inhomogena ekvationen fås med ansatsen $Q_k^p = D(n + m)^k$:
$D(m+n)^k = (n-m)D(m+n)^{k-1}$, vilket ger $D(m+n) = D(n-m)+m$, så $D = \frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen är alltså $Q_k = Q_k^h + Q_k^p = C(n-m)^k + \frac{1}{2}(n+m)^k$. Villkoret $Q_0 = 0$ ger $C = -\frac{1}{2}$ så den sökta lösningen är $Q_k = Q_k^h + Q_k^p = \frac{1}{2}\big((n+m)^k - (n-m)^k\big)$.

4. Det räcker att visa att man kan säkert färglägga hörnen i grafen med $\Delta(G) + 1$ färger. Man kan faktiskt färglägga hörnen i godtycklig ordning och eftersom från varje hörn utgår kanter till högst $\Delta(G)$ andra hörn så finns det därför alltid minst en ”ledig” färg med vilken man kan måla hörnet ifråga.

5. En svit av 4 nollor eller ettor i rad kan börja på någon av positionerna 1, 2, 3, 4. Låt A_i vara mängden av följder som har en svit av 4 ettor eller 4 nollor i rad som börjar på position i, där $i = 1, 2, 3, 4$. Vi söker $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| = |X| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$, där X är är mängden av alla binära sekvenser av längd 7. Således är $|X| = 2^7 = 128$.
Vi finner att $|A_i| = 2^4$ (det kan vara fyra ettor eller fyra nollor som startar på plats i och därefter tre platser att fylla med ettor eller nollor). Vidare är $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4| = 2^3$, eftersom det antingen finns fem ettor eller fem nollor i rad och sedan två platser att fylla. Med liknande resonemang finner vi att $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = 2^2$ och $|A_1 \cap A_4| = 2^1$.
Vidare finner vi att $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2^2$ samt$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 2^1$. Slutligen $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_3| = 2^1$.
Lägger vi ihop detta får vi $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| = 2^7 - 4 \cdot 2^4 + (3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2^1) - (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1) + 2^1 = 88$.

6. At dela pennorna i två lika stora mängder är samma som att välja femton pennor ur väskan. Om då a_{15} betecknar antalet sätt att välja femton pennor ur väskan så är det sökta talet $(a_{15} + 1)/2$ (Ettan i täljaren står för fördelningen med tre pennor av varje slag i var och en av behållarna). Den genererande funktionen för a_n, antalet sätt att välja n pennor ur väskan är $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5 = (1 - x^7)^5/(1 - x)^5 = (1 - 5x^7 + 10x^{14} - 10x^{21} + 5x^{28} - x^{35}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5-1}{k} x^k$. Koefficienten a_{15} för x^{15} är $\binom{19}{15} - 5\binom{12}{8} + 10\binom{5}{1}$. Svaret är därför $\big[\binom{19}{4} - 5\binom{12}{4} + 50 + 1\big]/2 = \big[\binom{19}{4} - 5\binom{12}{4} + 51\big]/2 = 726$.

7. a) Antalet hörn, v, är samma som antalet ordnade urval med upprepningar, alltså $v = 3^3 = 27$. Från varje hörn utgår precis 6 kanter: till exempel utgår från hörnet *aba* kanter till *bba*, *cba*, *aaa*, *aca*, *abb* och *abc*. Grafen är alltså 6-regulär. Således är antalet kanter $e = 6 \cdot 27/2 = 81$.
b) Skulle G vara planär så skulle $3v - e \geq 6$ medan vi har $3v - e = 0$. G är alltså icke-planär. (Annars kan man visa att G innehåller en delgraf som är en indelning av $K_{3,3}$.)

Paul