MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningar till tentamen i Kombinatorik pk, den 7 juni 2007

---

1. Det totala antalet sätt att fördela bollarna är lika med antalet funktioner från en 6-mängd till en 4-mängd, alltså 4^6. Antalet sätt då ingen låda är tom är samma som antalet surjektioner från en 6-mängd till en 4-mängd, dvs. $4!S(6,4)$, där $S(6,4)$ är Stirligstalet av andra slaget. Genom att använda relationen $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ för $1 < k < n$, får vi $S(6,4) = 65$. Således är sannolikheten lika med $\dfrac{4!S(6,4)}{4^6} = \dfrac{195}{512} < \dfrac{2}{4}$.

2. Vi kan lätt konstatera att $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ och att $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ för $n \geq 3$. Således $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1 + x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k = 1 + x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}(a_{k-2} + a_{k-3})x^k = 1 + x^2 + x^2 \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2}x^{k-2} + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-3}x^{k-3} = 1 + x^2 + x^2\big(f(x) - 1\big) + x^3 f(x) = 1 + (x^2 + x^3)f(x)$. Detta ger $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2 - x^3}$.

3. a) Följande hörn-korrespondans definierar isomorfin mellan G och H: a - 3, b - 9, c - 2, d - 1, e - 7, f - 5, g - 6, h - 4, k - 10, m - 8.
b) Det är förstås enklare att finna en sådan matchning i grafen H och därefter finna den isomorfa matchningen i G. En möjlig matchning (i grafen H) utgörs av kanterna (4,7), (1,8), (2,5), (3,6), (9,10).

4. Vi söker det minsta positiva heltalet k sådant att $\binom{k}{3} \geq 21$. Eftersom $\binom{6}{3} = 20$ och $\binom{7}{3} = 35$ så är svaret 7 anekdoter.

5. Varje följd $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ... \subseteq A_k$ kan beskrivas genom att till varje element $a \in S$ tillordna det minsta talet $i = 1, 2, ..., k$ sådant att $a \in A_i$, eller talet 0 om a inte är element i någon av delmängderna i följden. För varje $a \in S$ har vi därmed $k+1$ valmöjligheter och därför är antalet följder lika med $(k+1)^n$.

6. Med beteckningar i figuren är det uppenbart att minimal cut har kapaciteten $r_1 + r_2 + ... + r_m = k_1 + k_2 + ..., +k_n = T$ så max flöde har värde T också. Låt därför M den $m \times n$ matris för vilken elementet i rad i och i kolumn j är flödet längs kanten $x_i y_j$ i nätverket. Det är lätt att se att denna matris uppfyller uppgiftens villkor. Till exempel summan av element i rad 1 är lika med flödet genom hörnet x_1 alltså r_1.

Paul