Lösningar till tentamensskrivning i Kombinatorik pk 2008-01-15

Ej helt färdig version.

1. Det finns 2^n olika binära strängar av längd n.

   a) $s = 6$, eftersom $2^5 = 32 < 52 \leq 64 = 2^6$.

   b) $t = 15$, eftersom #(trekortshänder) $= \binom{52}{3} = 22100$, och $2^{14} = 16388 < 22100 \leq 32768 = 2^{15}$.

2. Ordet **KUMULUSMOLN** innehåller 3 **U**, 2 **L**, 2 **M**, samt ett vardera av **K**, **N**, **O** och **S**. Av dessa bokstäver är **O** och **U** vokaler, övriga konsonanter.

   a) #(3-bokstavsord) är $\frac{1}{3!}$-koefficienten i $(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)\,(1 + x + \frac{1}{2}x^2)^2\,(1 + x)^4$ $= \ldots + 44\frac{1}{6}x^3 + \ldots$, d. v. s. $6 \cdot 44\frac{1}{6} = \underline{265}$.

   b) I $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ av dessa trebokstavsord förekommer *ingen* bokstav flera gånger. Svar: $265 - 210 = \underline{55}$.

   c) 4 ord saknar helt konsonant; $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ ord har precis en förekomst av en konsonant; och $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ ord har **L** eller **M** på två platser, samt en vokal på den sista platsen. Svar: $4 + 45 + 12 = \underline{61}$.

3. Eftersom $|A| = 10$, är #(tredelmängder av A) $= \binom{10}{3} = 120$. För varje tredelmängd $B \subset A$ är $S_B \geq 1{+}2{+}3 = 6$ men $\leq 40{+}41{+}42 = 123$. Eftersom $|\{6, 7, 8, \ldots, 123\}| = 123{-}5 = 118 < 120$, måste alltså enligt Dirichlets lådprincip två olika tredelmängder ha samma elementsumma, v. s. b..

4. Det finns ett antal olika sätt att lösa denna uppgift på. Här följer ett av dessa:
   Börja med att betrakta (men inte beräkna) den genererande formella potensserien $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rekursionsformeln kan omformuleras som

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3 \cdot (-1)^n \; ; \tag{1}$$

varför $A(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ för några polynom p och q; och nämnaren är $q(x) = (1{-}x{-}2x^2)\cdot(1{+}x)$, där den första och den andra faktorn motsvarar högerledet respektive vänsterledet i (1). Genom att lösa en andragradsekvation och förenkla finner man att $q(x) = (1 - 2x)(1 + x)(1 + x) = (1 - 2x)(1 + x)^2$. Alltså vet vi, att om vi faktiskt beräknade även $p(x)$, så skulle vi efteråt kunna ha omskrivit $A(x)$ som

$$A(X) = \frac{b}{1 - 2x} + \frac{C}{1 + x} + \frac{d}{(1 + x)^2}\,, \tag{2}$$

för några konstanter b, C och d. Alltså är $a_n = b \cdot 2^n + (c + dn)(-1)^n$, där $c = C + d$.
Vi kan nu helt hoppa över mellanleden och direkt beräkna konstanterna. Alternativt kan vi utnyttja att b och c i någon mening hänför sig till vänsterledet i (1), det som Grimaldi kallar den *homogena* delen. Detta gör det dock inte möjligt att berälna b och c direkt. Däremot kan vi

(V.G.V.)

direkt beräkna återstoden, d. v. s. d. Vi får nämligen en ”partikulärlösning” genom att ansätta $dm(-1)^m$ i stället för a_m i (1):

$$dn(-1)^n - d(n-1)(-1)^{n-1} - 2d(n-2)(-1)^{n-2} = 3\cdot(-1)^n \iff -d+4d=3 \iff d=1$$

och kan efter med korrigering för denna sätta den ”homogena” delen till $a_n^{(h)} := b\cdot 2^n + c\cdot(-1)^n = a_n - dn\cdot(-1)^n$; vilket ger

$$\begin{cases} b+c &= a_0^{(h)} &= 2-0 &= 2 \\ 2b-c &= a_1^{(h)} &= 3+1 &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= 2 \\ c &= 0 \end{cases}.$$

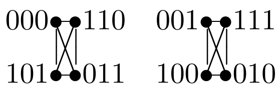
Svar: $a_n = \underline{2^{n+1} + n\cdot(-1)^n}$.

5. Endast fantasin (och möjlighen hur väl du förstår begreppen) begränsar dina svarsmöjligheter. Det finns oändligt många korrekta svar på uppgiften, och jag räknar inte upp dem.

6. Notera först att man för varje hörn, d. v. s. binär sträng $v = b_1 \cdots b_n$ av längd n, kan välja ut två positioner på precis $\frac{n}{2}$ sätt, och att v för varje sådant val har precis en granne som skiljer sig från v i just dessa positioner. Alltså har varje hörn v valens (grad) $\frac{n}{2}$.

   a) Antalet hörn i G_n är antalet binära strängar av längd n, d. v. s. 2^n.

   b) Antalet kanter är hälften av valenssumman, d. v. s. $\frac{1}{2}\cdot 2^n \cdot \binom{n}{2} = \underline{\binom{n}{2}2^{n-1}}$.

a) G_2 : 00•—•11 01•—•10 ; G_3 : 

b) G_n är inte sammanhängande för något n. Om $\{v,w\}$ är en kant i G_n, så måste nämligen w innehålla antingen lika många ettor som v, eller exakt två färre, eller exakt två fler ettor än v; så endast hörn med samma paritet för antalet ettor kan förbindas med en stig. Två hörn som skiljer sig åt i endast en position ligger alltså i olika komponenter.

c) G_n är planär omm $n \in \{2,3\}$. Att G_2 och G_3 är planära visas enklast medelst ritningar av dem. Att G_n inte är planär när $n \geq 4$ kan man visa exempelvis genom att notera att då är

$$3\#(\text{hörn}) - \#(\text{kanter}) = 3\cdot 2^n - (n-1)\cdot 2^{n-2}n \leq 3\cdot 2^n - 3\cdot 2^{n-2}\cdot 4 = 0 < 6\,.$$

d) För att G_n skulle ha en Eulercykel måste ju G_n vara sammanhängande, vilket inte är fallet; så G_n saknar Eulercykel för alla n.

e) Eftersom G_4 innehåller 4-klicken $\{0000, 1100, 1010, 1001\}$ är $\chi(G_4) \geq 4$; men å andra sidan ger exempelvis följande partition av hörnmängden en 4-färgning:

$$\big\{\{0000, 0111, 1000, 1111\},\ \{0011, 0100, 1011, 1100\},\ \{0010, 0101, 1010, 1101\},$$
$$\{0001, 0110, 1001, 1110\}\big\}\,;$$

så $\chi(G_4) = 4$.