

There is an English summary of the questions at the end of the text. However, if there should be any difference in meaning between the Swedish and the English text, you should follow the meaning of the Swedish text.

Fullständiga lösningar krävs, där inte annat uttryckligen anges. Complete solutions should be given, except where otherwise explicitly stated.

Hjälpmedel: Endast sedvanliga skriv- och ritverktyg. **Pocket calculators, et cetera, are NOT allowed.**

1. Låt A vara vilken som helst mängd av 8 olika heltal. Visa att det måste finnas två olika tal $x, y \in A$, sådana att 12 delar $x + y$ eller $x - y$ (eller bådaddera). 6 p

2. Ange den genererande funktionen

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad (1)$$

där a_m är antalet heltalslösningar till ekvationen

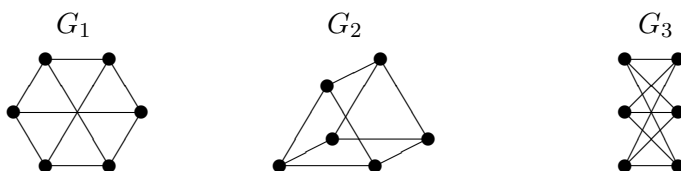
$$3x + 6y = m, \quad x, y \geq 0. \quad (2)$$

Ange också ett explicit uttryck för a_m , som en kvot av två polynom 6 p

3. 11 bollar placeras i 3 lådor, med ett udda antal bollar i varje låda. På hur många sätt kan man göra detta, om:

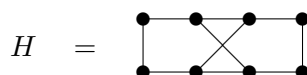
- a) Både bollarna och lådorna är omärkta (och alltså kan betraktas som identiska)? 1,5 p
- b) Både bollarna och lådorna är märkta (med olika beteckningar)? 1,5 p
- c) Lådorna, men inte bollarna, är märkta? 1,5 p
- d) Bollarna, men inte lådorna, är märkta? 1,5 p

4. Avgör vilka två av följande tre grafer som är isomorfa. (För full poäng krävs att du *dels* anger en explicit isomorfi mellan de isomorfa graferna, och *dels* kortfattat motiverar varför den tredje grafen inte är isomorf med de övriga.)



6 p

5. Bestäm det kromatiska polynomet för följande graf:



6 p

6. (Jag påminner om att valensen eller graden för ett hörn v , $\deg v$, är antalet grannar till v .) Låt **andravalensen** $\deg_{(2)}(v)$ vara summan av grannarnas valenser, d. v. s. låt

$$\deg_{(2)}(v) := \sum_{w:\{v,w\}\in E} \deg(w). \quad (3)$$

- a) Ange valensen och andravalensen för varje hörn i grafen H från uppgift 5. 1 p
- b) Beräkna för grafen H summan av andravalenserna, och visa att den är lika stor som summan av kvadraterna på (de vanliga) valenserna. 1 p
- c) Bevisa motsvarande likhet för **varje** (enkel, oriktad) graf $G = (V, E)$. **Ledning:** Beräkna antalet promenader (walks) $x, \{x, y\}, y, \{y, z\}, z$ av längd 2 i grafen på två sätt! 4 p

A brief English summary

- Show that any set of 8 integers contains (different) x and y such that 12 divides $x + y$ or $x - y$.
- Determine the number of ways to put 11 balls into 3 boxes, with an odd number of balls in each box, if: a) Neither balls nor boxes are marked; b) both balls and boxes are marked; c) the boxes, but not the balls, are marked; d) the balls, but not the boxes, are marked.
- Give the generating function (1) as a quotient as two polynomials, where a_m is the number of integer solutions to (2); and also give a_m explicitly.
- Find out which two of the three graphs are isomorphic, giving an explicit isomorphism, and an argument for the third one not being isomorphic to the others.
- Calculate the chromatic polynomial of H .
- With the second degree $\deg_{(2)}$ defined as in (3): a) Mark the degrees and the second degrees for each vertex in H from problem 5; b) calculate the sum of the second degrees in H , and show it to coincide with the sum of the squares of the ordinary degrees; c) prove that the corresponding sums are equal for any graph. **Hint:** how many walks $x, \{x, y\}, y, \{y, z\}, z$ of length 2 are there in the graph?

Skrivningarna återlämnas i mitt arbetsrum (rum 409, hus 6, Kräftriket) kl. 16.45 torsdagen 29 augusti, eller efter individuell överenskommelse.

The exams will be returned in my office (room 409, house 6, Kräftriket), 16:45 hours (a quarter to five P.M.), on Thursday, August 29, or by individual agreement.