STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,
Examinator: Per Alexandersson

Tentamen i
Linjär algebra för lärare, fortsättningskurs
21 mars 2013 kl $09^{00} - 14^{00}$

Hjälpmedel: Enbart penna och radergummi. Alla svar skall motiveras!

1. (a) Bestäm vilka $x \in \mathbf{R}$ som löser ekvationen $\det(A) = 0$, där

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

5p

   (b) Motivera varför $\operatorname{rank} A = 4$ om determinanten för A är nollskild. 2p

   (c) Bestäm $\operatorname{rank} A$ för alla värden på $x \in \mathbf{R}$. 3p

2. Låt $U \subseteq \mathbf{R}^3$ vara det delvektorrum som definieras av $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$.
   Låt $V \subseteq \mathbf{R}^3$ spännas upp av vektorerna $(3, 2, 1)$ och $(1, 2, 3)$.
   Finn en bas för U, och bestäm sedan en bas för $U + V$ och en bas för $U \cap V$. 10p

3. En linjär avbildning $F\colon P_2(\mathbf{R}) \to P_3(\mathbf{R})$ definieras av

$$F(a + bx + cx^2) = a - b + (a - b)x + (a - c)x^2 + (2a - b - c)x^3 \text{ för alla } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

   (a) Bestäm avbildningsmatrisen för F med avseende på respektive rums standardbaser. 3p

   (b) Beräkna en bas för $\operatorname{Im} F$ och en bas för $\ker F$. 6p

   (c) Ange dimensionerna för $\operatorname{Im} F$ och $\ker F$. 1p

4. Låt B vara matrisen

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestäm alla egenvärden till B. 3p

   (b) För varje egenvärde, bestäm en bas av egenvektorer till motsvarande egenrum. 5p

   (c) Är B diagonaliserbar? Motivera ditt svar. 2p

5. (a) Låt $W \subseteq \mathbf{R}^3$ vara det linjära höljet av vektorerna $(1, 1, 0)$ och $(1, 1, 1)$.
   Bestäm en ON-bas för W och utvidga denna bas till en ON-bas för hela $\mathbf{R}^3$. 7p

   (b) Låt $(p(x)|q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ vara en skalärprodukt på rummet av reella polynom.
   Avgör om polynomen $1 - x$ och $1 - 3x$ är ortogonala m.a.p denna skalärprodukt.

3p

6. Låt C vara en kvadratisk matris, där summan av talen i varje enskild kolonn blir 1.
   Visa att 1 är ett egenvärde till C, genom att bevisa följande påståenden:

   (a) Summan av alla rader i matrisen $C - I$ blir nollvektorn.

   (b) Determinanten $|C - I|$ är noll.

   (c) $\lambda = 1$ är ett egenvärde till C. 10p

   I är identitetsmatrisen.

Lycka till!

Information om tentaresultat och återlämning kommer på kursforumet.