STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,
Examinator: Per Alexandersson

Tentamen i
Linjär algebra för lärare, fortsättningskurs
20 maj 2013 kl $09^{00} - 14^{00}$

*Hjälpmedel: Enbart penna och radergummi. Alla svar skall motiveras!*

1. Bestäm rangen av matrisen
$$\begin{pmatrix} 2000 & 2001 & 2002 & 1999 \\ 2002 & 2000 & 2003 & 2001 \\ 1996 & 2003 & 2000 & 1995 \\ 2006 & 1998 & 2005 & 2005 \end{pmatrix}.$$
10p

2. Mängden $U \subseteq P_3(\mathbf{R})$ definieras av att $p(x)$ ligger i $U$ om $p(1) + p(-1) = 0$ och $p(0) = 0$.
   (a) Visa att $U$ är ett delrum till $P_3(\mathbf{R})$. 5p
   (b) Bestäm en bas för $U$, och dimensionen för $U$. 5p
   *Tips:* Ansätt $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

3. (a) En linjär avbildning $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras av att $F(2,0,0) = (4,0,2)$, $F(0,2,0) = (2,2,0)$ och $F(0,1,1) = (1,3,-1)$. Bestäm avbildningsmatrisen till $F$ i standardbasen för $\mathbf{R}^3$. 6p
   (b) En viss avbildning $G$ har avbildningsmatrisen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Bestäm alla egenvärden till denna avbildning. 3p
   (c) Är matrisen $A$ diagonaliserbar? 1p

4. (a) Låt $U_1 \subseteq \mathbf{R}^4$ vara det linjära höljet av vektorerna $(2,1,2,1)$ och $(1,1,1,0)$ och låt $U_2 \subseteq \mathbf{R}^4$ vara det linjära höljet av vektorerna $(3,1,3,2)$ och $(2,1,1,1)$.
   Bestäm en bas för $U_1 + U_2$ och en bas för $U_1 \cap U_2$. 8p
   (b) Låt $W_1 \subseteq P_3(\mathbf{R})$ vara det linjära höljet av polynomen $2 + x + 2x^2 + x^3$ och $1 + x + x^2$, och låt $W_2 \subseteq P_3(\mathbf{R})$ vara det linjära höljet av polynomen $3 + x + 3x^2 + 2x^3$ och $2 + x + x^2 + x^3$. Använd dig av resultatet ovan, och ge exempel på polynom som ligger i $W_1 + W_2$ samt $W_1 \cap W_2$.
   2p

5. Använd dig av skalärprodukten $(p|q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ och bestäm en ON-bas för delrummet $U$ i $P_2(\mathbf{R})$ som spänns upp av polynomen $2x - 1$, $2x$ och $x + 1$. 10p

6. Låt $A$ vara en kvadratisk matris som kan diagonaliseras som $TDT^{-1}$, där $D$ är en diagonalmatris med talen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ på huvuddiagonalen.
   Då definieras matrisen $2^A$ som $T2^DT^{-1}$, där $2^D$ är diagonalmatrisen med talen $2^{d_1}, 2^{d_2}, \ldots, 2^{d_n}$ på huvuddiagonalen.
   (a) Diagonalisera matrisen $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. 4p
   (b) Bestäm matrisen $2^C$. 6p

Lycka till!

*Skicka ett mail till per@math.su.se för information om tentamensresultat.*

**English version on the next page!**

1. Find the rank of the matrix
$$\begin{pmatrix} 2000 & 2001 & 2002 & 1999 \\ 2002 & 2000 & 2003 & 2001 \\ 1996 & 2003 & 2000 & 1995 \\ 2006 & 1998 & 2005 & 2005 \end{pmatrix}.$$
10p

2. The set $U \subseteq P_3(\mathbf{R})$ is defined by the condition that $p(x)$ is in $U$ if $p(1) + p(-1) = 0$ and $p(0) = 0$.
   (a) Show that $U$ is a subspace of $P_3(\mathbf{R})$. 5p
   (b) Find a basis for $U$, and determine the dimension of $U$. 5p
   *Tip:* Let $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

3. (a) A linear map $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is defined by $F(2, 0, 0) = (4, 0, 2)$, $F(0, 2, 0) = (2, 2, 0)$ and $F(0, 1, 1) = (1, 3, -1)$. Find the transformation matrix for $F$ with respect to the standard basis in $\mathbf{R}^3$. 6p
   (b) A certain linear map $G$ has the transformation matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Find all eigenvalues of this map. 3p
   (c) Is $A$ diagonalizable? 1p

4. (a) Let $U_1 \subseteq \mathbf{R}^4$ be the linear span of the vectors $(2, 1, 2, 1)$ and $(1, 1, 1, 0)$ and let $U_2 \subseteq \mathbf{R}^4$ be the linear span of $(3, 1, 3, 2)$ and $(2, 1, 1, 1)$.
   Find a basis for $U_1 + U_2$ and a basis for $U_1 \cap U_2$. 8p
   (b) Let $W_1 \subseteq P_3(\mathbf{R})$ be the linear span of the polynomials $2 + x + 2x^2 + x^3$ and $1 + x + x^2$, and let $W_2 \subseteq P_3(\mathbf{R})$ be the linear span of the polynomials $3 + x + 3x^2 + 2x^3$ and $2 + x + x^2 + x^3$. Use the result from previous problem, and give examples of polynomials in $W_1 + W_2$ and $W_1 \cap W_2$.
   2p

5. Use the scalar product $(p|q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ and find an ON-basis for the subspace $U$ in $P_2(\mathbf{R})$ which is spanned by $2x - 1$, $2x$ and $x + 1$. 10p

6. Let $A$ be a square matrix which can be expressed as $TDT^{-1}$, where $D$ is a diagonal matrix with the entries $d_1, d_2, \ldots, d_n$ on the main diagonal.
   We then define $2^A$ as $T2^DT^{-1}$, where $2^D$ is the diagonal matrix with the entries $2^{d_1}, 2^{d_2}, \ldots, 2^{d_n}$ on the main diagonal.
   (a) Diagonalize the matrix $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. 4p
   (b) Compute the matrix $2^C$. 6p

Good luck!