STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
Stokastiska processer och simulering II
Tisdagen den 26 maj 2009

Lösningar till tentamen för kursen Stokastiska processer och simulering II

Tisdagen den 26 maj 2009 9 - 14

Examinator: Anders Björkström, tel. 16 45 54, bjorks@math.su.se

---

Problemdel: Uppgift 1

a) Definitionen av Brownsk rörelse med drift gör att vi kan skriva $X(t) = \mu\, t + \sigma\, B(t)$, där $B(t)$ är standardiserad Brownsk rörelse. Eftersom $\mathrm{E}[X(5)] = 5$ får vi $\mu = 1$, och eftersom $\mathrm{Var}(X(5)) = 25$ får vi $\sigma = \sqrt{5}$. Alltså är $\mathrm{E}[X(2)] = 2$ och $\mathrm{Var}(X(2)) = \sigma^2\, 2 = 10$, som ger $\mathrm{P}(X(2) \geq 1) = 1 - \Phi(-1/\sqrt{10}) \approx 0.625$

b) Eftersom $\mathrm{Var}(Y(5)) = 5$ så är $Y(t)$ standardiserad Brownsk rörelse. Om M_5 betecknar det största värde som $Y(t)$ uppnår när $0 \leq t \leq 5$ så gäller för alla $a \geq 0$ att $\mathrm{P}(M_5 \geq a) = 2\,(1 - \Phi(a/\sqrt{5}))$ Med $a = 1$ blir denna sannolikhet ≈ 0.65.

Problemdel: Uppgift 2

a) Eftersom kundernas ankomster utgör en Poissonprocess så är den sökta andelen kunder lika med den del av totala tiden, som systemet är tomt. Vi kan betrakta utvecklingen som en regenerativ process, där en ny cykel påbörjas varje gång lagret fylls på. Smiths teorem (Ross' Proposition 7.4) ger att den del av tiden, som lagret är tomt, är lika med

$$\frac{\mathrm{E}[\text{ tid under en cykel som lagret är tomt }]}{\mathrm{E}[\text{ längd av en cykel }]}.$$

En cykel består av två faser: Fas 1: Från påfyllning tills nästa beställlning görs, Fas 2: Från beställning till påfyllning. Vi inser direkt att

$$\mathrm{E}[\text{ längd av en cykel }] = \mathrm{E}[\text{ Fas 1 }] + \mathrm{E}[\text{ Fas 2 }] = 11 + 3 = 14$$

Under Fas 1 är lagret aldrig tomt. Antag nu att Fas 2 just har börjat. Låt A vara tiden tills nästa kund kommer, och B vara tiden tills beställningen levereras. Då är A exponentialfördelad med väntevärde 1 och B exponentialfördelad med väntevärde 3. Vi antar att A och B är oberoende. Låt Z = tiden som lagret är tomt. Om $A > B$ så är $Z = 0$ och om $B > A$ så är Z exponentialfördelad med väntevärde 3, pga exponentialfördelningens minneslöshet. Då får vi

$$\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{4}0 + \frac{3}{4}3 = 2.25.$$

Andelen kunder som inte köper nån dator är alltså $\frac{2.25}{14} \approx 16$ %.

b) Potentiellt kommer 30 kunder under 30 dagar, men eftersom 16 % av kunderna går förlorade blir det genomsnittliga antalet sålda datorer 25.2 per månad.

Problemdel: Uppgift 3

a) Systemet kan betraktas som en alternerande förnyelseprocess och vi erhåller därför andelen ledig tid som $\mathrm{E}[I]/(\mathrm{E}[I] + \mathrm{E}[B]]$ där I är längden av en ledig period och B är längden av en upptagen period. Eftersom tillströmningen av passagerare är en Poissonprocess med intensiteten en var sjätte minut, så blir $\mathrm{E}[I] = 6$ minuter. Vidare framgår det att S är en summa av två stokastiska variabler vars väntevärden är 1 respektive 4 minuter, så $\mathrm{E}[S] = 5$ vilket enligt den givna formeln ger

$$\mathrm{E}[B] = \frac{5}{1 - (1/6)\,5} = 30$$

som ger $\mathrm{E}[I]/(\mathrm{E}[I] + \mathrm{E}[B]] = 6/(6 + 30) = 1/6$. Tjänstemannen ägnar alltså ungefär 17 % av sin tid åt att läsa Biggles.

b) Vi har redan sett att $\mathrm{E}[I] = 6$, alltså läser han i medeltal 6 sidor.

c) Vi kan betrakta varje busslast (10 passagerare) som *en* kund. Då är förutsättningarna för en M/G/1-kö uppfyllda. Om S_g betecknar den tid det tar att betjäna tio passagerare så är $\mathrm{E}[S_g] = 10\,\mathrm{E}[S] = 50$, och eftersom den nya tillströmningsintensiteten $\lambda_g = \lambda/10$ så blir genomsnittliga längden av en sysslolös period $\mathrm{E}[I_g] = 60$, och av en upptagen period

$$\mathrm{E}[B_g] = \frac{50}{1 - (1/60)\,50} = 300.$$

Precis som förut är alltså tjänstemannen sysslolös 1/6 av tiden, men han hinner nu läsa 60 sidor under varje ledig period.

Problemdel: Uppgift 4

Vi behöver först ta reda på hur stor del av Kalles körningar som utgår från Södermalm, Vasastan respektive Östermalm. Dessa andelar får vi genom att lösa ekvationssystemet

$$(\pi_{\mathrm{S}}\,\pi_{\mathrm{V}}\,\pi_{\mathrm{Ö}}) \;=\; (\pi_{\mathrm{S}}\,\pi_{\mathrm{V}}\,\pi_{\mathrm{Ö}}) \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

som tillsammans med $\pi_{\mathrm{S}} + \pi_{\mathrm{V}} + \pi_{\mathrm{Ö}} = 1$ ger $(\pi_{\mathrm{S}}\,\pi_{\mathrm{V}}\,\pi_{\mathrm{Ö}}) \;=\; 1/12\ (2,\, 5,\, 5)$. Det finns sex olika resor som Kalle utför (S till V, S till Ö, osv) och med hjälp av Markovkedjans övergångsmatris ser vi att de sex olika körningarnas andelar är:

SV	SÖ	VS	VÖ	ÖS	ÖV
1/12	1/12	1/12	4/12	1/12	4/12

Vi behöver också ta hänsyn till att de olika körningarna tar olika lång tid. De förväntade tiderna är (i minuter)

SV	SÖ	VS	VÖ	ÖS	ÖV
10	10	8	8	5	8

Det följer nu av en känd sats för semi-Markovska processer (7.24 i Ross) att den tid som spenderas på att köra från Vasastan till Södermalm utgör $8/97 \approx 0.08$ av Kalles totala arbetstid.

Teoridel: Uppgift 1

a) En räkneprocess $\{N(t)\,;\, t \geq 0\}$ är en icke-negativ stokastisk process som är heltalsvärd och uppfyller villkoret $N(s) \leq N(t)$ för alla s och t där $s < t$.

b) En förnyelseprocess är en räkneprocess där intervallen mellan successiva språng är oberoende och likafördelade,

c) Den andra händelsen kan inte inträffa förrän tidigast vid $t = 1.6$, så den efterfrågade sannolikheten är 0.

Teoridel: Uppgift 2

Eftersom den simultana fördelningen för (X_2, X_4) är en tvådimensionell normalfördelning så är båda de sökta fördelningarna normalfördelningar. Det återstår att beräkna väntevärden och varianser.

a) Eftersom $X_4 = \lambda X_3 + Z_4$ och $X_3 = \lambda X_2 + Z_4$ så följer $X_4 = \lambda^2 X_2 + \lambda Z_3 + Z_4$. När vi vet $X_2 = x$ följer alltså $\mathrm{E}[X_4 | X_2 = x] = \lambda^2 x$ och $\mathrm{Var}(X_4 | X_2 = x) = \mathrm{Var}(\lambda Z_3) + \mathrm{Var}(Z_4) = \sigma^2(\lambda^2 + 1)$

b) Allmänna formler för betingade väntevärden och varianser ger

$$\mathrm{E}[X_2 \,| X_4 = x] = \mathrm{E}[X_2] + \frac{\mathrm{Cov}(X_2, X_4)}{\mathrm{Var}(X_4)} (x - \mathrm{E}[X_4])$$

och

$$\mathrm{Var}(X_2 \,| X_4 = x) = \mathrm{Var}(X_2) \, (1 - \rho^2)$$

där $\rho^2 = (\mathrm{Cov}(X_2, X_4))^2 / (\mathrm{Var}(X_2) \, \mathrm{Var}(X_4))$. Eftersom $X_2 = z_0 + Z_1 + Z_2$ och $X_4 = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$ och alla Z_n är oberoende så får man $\mathrm{Cov}(X_2, X_4) = 3\sigma^2$ och $\mathrm{Var}(X_4)) = 5\sigma^2$, som ger

$$\mathrm{E}[X_2 \,| X_4 = x] = \frac{3x}{5}$$

och

$$\mathrm{Var}(X_2 \,| X_4 = x) = \frac{6\sigma^2}{5}$$