STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, LPA

MT 5004
LÖSNINGAR
11 januari 2011

Lösningar

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II, 11 januari 2011

Teoridel: Uppgift 1

Se boken.

Teoridel: Uppgift 2

Se boken.

Uppgift 3

a) Låt X beteckna tiden mellan tyristorbyten. Då är

$$\mathsf{E}[X] = \int_0^M x\frac{2x}{100}\mathrm{d}x + \int_M^{10} M\frac{2x}{100}\mathrm{d}x = 2\frac{M^3}{300} + M\left(1 - \frac{M^2}{100}\right) = M - \frac{M^3}{300}.$$

b) Den genomsnittliga kostnaden är $\mathsf{E}\left[\text{kostnad för en period}\right]/\mathsf{E}\left[X\right]$ och

$$\mathsf{E}[\text{kostnad för en period}] = 10000 + 1000\mathsf{P}(X \leq M) = 1000\left(10 + \frac{M^2}{100}\right).$$

Den genomsnittliga kostnaden per år blir alltså

$$1000\frac{10 + \frac{M^2}{100}}{M - \frac{M^3}{300}}$$

Uppgift 4

a) Om $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ så är $F(X) = 1 - \exp\{-\lambda X\} = U \sim \mathsf{U}(0,1)$. Då är $Y = F^{-1}(1-U) = -\frac{\log U}{\lambda} \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ negativt korrelerat med X.

b) Eftersom $F^{-1}(x)$ är en monoton funktion följer resultatet från korrolarium 11.7 i boken.

Uppgift 5

a) Se härledningen av Ross ekvation (10.8) sid 632. Med $s = 0$, $t = 1$, $\mu = 2$ och $\sigma^2 = 1$ får man $\mathsf{E}[X(1)] = 50e^{2+1/2} \approx 609$.

b) Vi vet att $\log X(t)$ är en standardiserad Brownsk rörelse. Vi söker alltså sannolikheten att en standard B.r. från $\log 50$ når $\log 110$ innan $\log 30$. Detta är dock samma som sannolikheten att den från 0 når $\log(110/50)$ innan $-\log(50/30)$, vilken ges av

$$\frac{\log(50/30)}{\log(50/30) + \log(110/50)} \approx 0.39.$$

Uppgift 6

a) Vi tänker på U_i som tider mellan förnyelser i förnyelseprocessen $N(t)$. Då är

$$N_1 = \min\left\{n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\} = 1 + \max\left\{n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} U_i \leq 1\right\} = 1 + N(1),$$

så att

$$\mathsf{E}[N_1] = 1 + \mathsf{E}[N(1)] = 1 + m(1) = 1 + e - 1 = e.$$

b) U_{N_t} är längden på förnyelseintervallet vid tiden t. Således

$$\mathsf{E}[U_{N_t}] = \frac{\mathsf{E}[U^2]}{\mathsf{E}[U]} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$