EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Claudios Ptolemaios

Astronom och Matematiker

av

Gun Lindström och Pernilla Stamming

2005 - No 1

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

Claudios Ptolemaios

Astronom och Matematiker

Gun Lindström och Pernilla Stamming

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Paul Vaderlind

2005

Well do I know that I am mortal, a creature of one day.
But if my mind follows the winding paths of the stars
Then my feet no longer rest on earth, but standing by
Zeus himself I take my fill of ambrosia, the divine dish.

Claudios Ptolemaios, Almagest

Innehållsförteckning

Inledning

Ptolemaios är en av de mest betydelsefulla astronomer och matematiker genom tiderna. Det finns dock få svenska beskrivningar om honom och hans livsverk. Vi har därför försökt göra en korrekt sammanställning av den utländska litteratur vi haft tillgång till.

Vi kommer att ta upp historik kring det hellenistiska samhälle Ptolemaios verkade i och något om honom själv, men vår tyngdpunkt kommer att ligga kring hans skrivna verk.

För att begränsa oss har vi främst studerat hans största verk Almagest och därur tagit upp valda delar.

Av innehållsförteckningen framgår vem av oss som bearbetat de olika avsnitten, [GL] står för Gun Lindström och [PS] för Pernilla Stamming.

Sammanfattning

Matematikern och astronomen Claudios Ptolemaios levde och verkade i vetenskapens huvudsäte Alexandria ca 100-178 e.Kr.

Ptolemaios är känd för sin världsmodell där jorden ”ligger” stilla i världsalltets centrum. Runt jorden kretsar himlakropparna månen, Merkurius, Venus, solen, Mars, Jupiter och Saturnus, i nämnd ordning, i perfekta cirklar. För att deras verkliga rörelser skulle stämma överens med matematiska beräkningar införde Ptolemaios en del ”tricks”. Förutom användandet av epicykler finner han på den så kallade excentern, det vill säga solbanans förskjutning gentemot jordens centrumläge.

Ptolemaios matematiska modeller grundar sig på många och omfattande geometriska modeller. Bevisen till de flesta av dem hänvisar han till den grekiska matematikern Euklides, ca 300 f.Kr., berömda verk Elementa. Han behövde dock komplettera sina beräkningar med en egen sats, som också har fått sitt namn efter honom.

Ptolemaios har skrivit ett flertal vetenskapliga verk, bland annat;

- *Almagest*

Det mest berömda av hans arbeten. Almagest är en stor och teknisk bok och beskrivs som kulmen av grekisk astronomi. Verket är uppdelat på 13 böcker och täcker hela den matematiska astronomin som den dåtida människan kunde begripa sig på. Han påvisar först den matematik som är nödvändig för vidare förståelse av himlakropparnas rörelser. Därefter beskriver han för varje kropp de olika fenomen som kan uppstå. Dessa redovisas i omfattande tabeller.

I vårt arbete har vi koncentrerat oss på Ptolemaios omfattande beräkningar av kordor, något om den sfäriska trigonometri han använde sig av och grundläggande sol- och månteori som sedermera mynnar ut i planetteori.

- *On the Analemma*

Detta verk handlar om hur man genom geometriska konstruktioner i planet kan finna de speciella bågar och vinklar som bestämmer en punkts position på den himmelska sfären.

- *Geografica*

Detta verk är en handledning i kartritning och ända fram till 1500-talet var Geografica den mest detaljerade topografiska kartbok över Europa, Afrika och Asien.

Ptolemaios använde sina astronomiska observationer och med hjälp av matematiska beräkningar bestämde han geografiska lägen och han introducerade det praktiska i att ange de

aktuella platsernas koordinater i latitud och longitud. Det mest centrala i boken är en mycket omfattande tabell över olika platser och dess koordinater vilka då utgjorde grunden till kartorna.

- *Optics*
Ptolemaios gör i detta verk studier om färger, reflektion, ljusbrytning och speglar.
I vår sammanställning tar vi med ett exempel om en analysering av bildförflyttning för runda objekt sett från sned vinkel.

I övrigt nämner vi kort
Handy Tables – Ptolemaios stora tabellsamling,
Harmonics - Musiktoeri,
Planetary Hypotheses – Ptolemaios geometriska modeller blir planetarium,
Planisphaerium – Stereografisk projektion och
Tetrabiblos - Astrologibok.

De flesta av de figurer som förekommer i vårt arbete är tagna från den litteratur vi läst. Några figurer har vi ritat själva, men då har vi haft förebilder.

Slutligen har vi skrivit en kommentar om vår fascination av att någon som inte ens hade tillgång till kikare kunde göra så omfattande utredningar om vårt planetsystem.
Det är just fascinationen som drivit oss i riktning mot matematikens historia, när vi valde ämnesområde för vårt examensarbete.

Historik

Samhällsstruktur

Tiden fram till Ptolemaios
Greklands kultur och språk blev ca 300 f. Kr. internationella och spridda över stora landsdelar kring Medelhavet. Många greker utvandrade. På grund av överbefolkning kunde till exempel en stad utse ett antal män till att anlägga en koloni någonstans i Medelhavsområdet. Många greker flyttade även till Egypten, Syrien och Mesopotamien.

Fram till 200 f. Kr. var det hellenistiska Alexandria den största staden i det ptolemaiska väldet, med Egypten som huvudland. Bönderna var många i Egypten och de var dessa som stod för inkomstkällan för landets rikedomar; att jorden var så bördig berodde på somrarnas översvämningar.

Egypten tillkom Romarriket under ledning av kejsar Augustus, 30 f. Kr. och stod under Roms herravälde flera århundraden. Fram till nu hade de ptolemaiska kungarna härskat över Egypten. Romarriket var som störst 117 e. Kr. då kejsar Trajanus dog. Alla länder kring Medelhavsområdet, Centraleuropa upp till engelska kanalen hörde till Romarriket. I detta stora område hade handeln en viktig betydelse. Eftersom Romarriket var så stort, var det relativt riskfritt att färdas på vatten och land. De stora städerna var beroende av varor från rikets provinser.

Politiskt försköts tyngdpunkten från Grekland österut, men det grekiska inflytandet var fortfarande starkt gällande sociala, kulturella och ekonomiska aspekter. Härskarna styrde med hjälp av grekisk militär och tjänstemän.

Grekerna påverkades av de underkuvade länderna som Persien och Egypten. Alexandria och Antiochia, Selukiderrikets huvudstad, blev världsmetropoler med fler hundra tusen invånare. Många språk talades, miljön var internationell, människor från när och fjärran utbytte tankar och idéer. Huvudstädernas kungahov utvecklades till kulturcentra. Alexandria blev huvudsäte för vetenskapen, där de ptolemaiska kungarna använde en del av sina rikedomar för att göra Alexandria till en av antikens monumentala storstäder.
Faros, fyrtornet, räknas till ett av världens sju underverk. Det var främst efter kung Ptolemaios I:s död, 282 f. Kr., som Alexandria blev ett berömt studiesäte.

Museion, den kungliga vetenskapsakademin blev en stor kulturell samlingsplats, där många lärda män fanns. Där forskade till exempel den grekiske matematikern Euklides vid tiden 300 f. Kr. Han är mest känd för sin bok Elementa. Även Arkimedes, verksam ~250 f. Kr., studerade där. Han anses av många vara den störste matematikern genom tiderna. Museion hade ett astronomiskt observatorium, botanisk trädgård, djurpark och ett stort bibliotek, som var samtidens största med 700 000 volymer. Naturvetenskaperna hade stor framgång under denna period med många nya upptäckter.

Centrum för filosofin var fortfarande Aten, som dock var långt från den platonska, den filosofi där alla fria medborgare i en stadsstat tagit del av det politiska livet och främst riktat sitt intresse åt människan som samhällsvarelse. I den hellenistiska världen uppfattade sig människan som en världsmedborgare utan större möjlighet att påverka i politiken. Filosofin tog därför riktning mot den enskilda människan, med frågeställningen hur individen skulle finna lyckan.

Kristendomen, som från början var en gren inom judendomen, började spridas i Romarriket under det första århundradet. Det spreds fort från Jerusalem till mindre Asien och vidare ut över Romarriket. Kejsarna tyckte att det var oroande men började inte förfölja de kristna förrän 200 e. Kr.

Begreppet hellenism går inte tillbaka till någon antik beteckning utan det grundades på 1600-talet för att beskriva en blandkultur av grekiska och orientaliska komponenter. Till exempel är hellenistisk religion namnet på en synkretistisk religion, som hade uppstått i de områden Alexander erövrat.

Den hellenistiska civilisationen var emellertid inte en enhetlig företeelse, eftersom endast det grekiska inflytandet utgjorde konstanten. De orientaliska beståndsdelarna i samhället växlade alltefter kulturkontakten ägde rum. Den hade en vid geografisk utbredning som inte bestämdes av politiska gränser.

Hellenismen förblev en elitkultur som inte trängde ner i den ursprungliga befolkningens vardag. Eliten ägnade sig åt den grekiska kulturen, dess bildning och livsstil. Grekiska var det officiella språket i den hellenistiska världen.

Hur såg det ut i andra delar av världen?

Andra storriken fanns under denna tid. Hanandynastin under Hanankejsarna fanns i Kina, som hade lika stor befolkning som Romarriket, ca 60 miljoner invånare vid Kristi födelse. Parterriket, nuvarande Iran (Persien), Turkmenistan samt delar av Afghanistan och Pakistan, gränsade till Romarriket och var dess främsta motståndare tills de förlorade Persien en bit in på 200-talet. Kushanariket i det inre Asien.

I Norden räknas denna tid som Järnåldern. Människorna blev mer och mer bofasta. Jordbruket spreds och man började leva i ett bondesamhälle.

Naturvetenskapen

Det romerska riket kunde erbjuda mer spridning av den grekiska vetenskapen och astronomin än vad den grekiska staten kunde. Staden Rom hade däremot mycket lite att erbjuda. Antikens vetenskap skapades nästan helt och hållet av grekerna, vilkas överlägsenhet gentemot romarna gav det grekiska språket en enorm spridning. I det romerska riket studerades böcker på grekiska. Översättningar till latin var sällsynta eftersom de bildade ansågs kunna grekiska. När det romerska imperiet senare upplöses och barbarerna blev herrar över den latinskt dominerade västra delen av riket, isolerades den västra delen från den östra grekiska delen.

Några århundraden senare fanns det få personer som behärskade det grekiska språket i det latinska Europa. Eftersom en stor del av de vetenskapliga skrifterna ej var översatt till latin, kunde vår del av Europa inte längre ta del av de grekiska litteraturkällorna.

Egypten hade en exceptionell hög och sofistikerad levnadsstandard under flera århundraden, men kan dock inte mäta sig med Babylonien och Grekland vad det gäller den vetenskapliga utvecklingen av astronomin.

En av Egyptens viktigaste bidrag till astronomin räknas vara ”Det Egyptiska året” av den bestämda längden 365 dagar. Man har funnit papyrusrullar från romartiden att en solcykel är 25 egyptiska år, vilket motsvarar 9125 dagar. Detta är en avvikelse med $\frac{5}{100}$ av en dag från det sanna antalet.

Rådande världssyn

Forntida människor från Egypten och Babylonien ansåg att de mest betydelsefulla himlakropparna var månen och solen och de såg kropparnas färd på himlavalvet mellan öst och väst. De använde dess faser till att bestämma årets månader och de studerade himlen under århundraden för att kunna förutsäga olika viktiga himmelska fenomen till sina kalendarier. De förutsåg bland annat tiden för solens uppgång och nedgång samt perioden för månförmörkelser. Uträkningarna de använde sig av till sina observationer var av enklare slag, som aritmetik och algebra och de utvecklade aldrig en modell som kopplade samman olika himlafenomen.

Grekerna var de första som gav en icke religiös förklaring till världsalltet. De såg att sol, måne och andra stjärnor bars över himlavalvet från öst till väst, längs cirklar som alltid var parallella till varandra. De steg upp nedanför jorden självt, bars över jorden, ned i väst och försvann. Denna rörelses period och plats för uppgång och nedgång ansågs i det hela vara fix och samma.

Den första bilden av universum gjordes av Aristoteles, grekisk naturforskare och filosof som levde under 300-talet f. Kr. De sju rörliga kropparna rörde sig utanför den fixa jorden i fulländade koncentriska cirklar och deltog i den dagliga öst till väst-rörelsen. Mellan jorden och den närmsta himlakroppen månen fanns den föränderliga, ointressanta världen. Utanför månen upp till den fixa stjärnsfären var allt fullkomligt och beständigt.

Claudios Ptolemaios

Vem var han?

Ptolemaios, vetenskapsmannen, får ej förväxlas med de Ptolemaiska kungarna.

Det finns inte mycket nerskrivet om Claudius Ptolemaios, den enda källan om hans person kommer från hans egna verk. Det sägs att han föddes i Ptolemaios Hermeiou 100 e. Kr., i övre Egypten nära Akhmim. Man vet att han bodde och var verksam i Alexandria, vilket också är den enda plats han nämner i sina anteckningar. Det finns inga tecken på att han skulle ha levt någon annanstans. Man vet inte med säkerhet när han dog. Den litteratur vi har tagit del av har uppgett olika årtal för hans död, men 178 e. Kr. har uppgetts flest gånger.

Hans namn Ptolemaios tyder på att han ursprungligen kommer från Grekland eller någon helleniserad stat, medan Claudius tyder på en romersk anknytning.

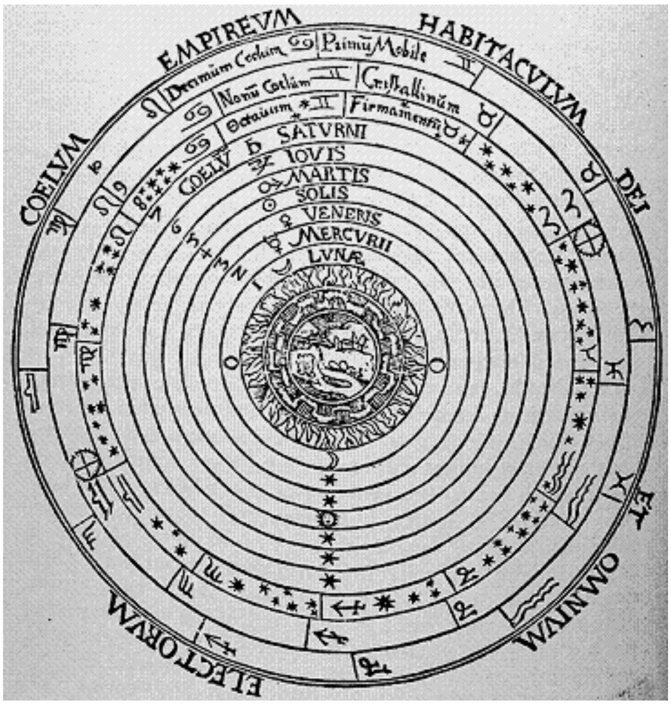
Genom anteckningar från Almagest vet man med största sannolikhet att hans observationer var gjorda i Alexandria mellan den 26: e mars år127 till och med den 2: a februari år 141.

Antydningar har funnits om att Ptolemaios endast sammanställt vad andra tidigare vetenskapsmän upptäckt. Tycho Brahe, dansk 1500-talsastronom, ansåg bland annat att Ptolemaios stjärnkatalog var en kopia av Hipparchos verk. Hipparchos var en framstående astronom och matematiker på 100-talet f. Kr. Enligt H. Vogt, se litteraturlista, kan det inte vara så, eftersom Ptolemaios koordinater inte kan härledas fram från Hipparchos data, då de inte använder sig av samma slags koordinater. Brahes påstående har dock bestått och finns att läsa i mången litteratur. Enligt H. Vogt och A. Ideler är det först på den sista tiden som Brahes påstående blivit ifrågasatt och numera betraktas Ptolemaios som en författare till eget material.

Vad gjorde han?

Ptolemaios har skrivit flera vetenskapliga verk såsom Almagest, Handy tables, Planetary Hypotheses, Planisphaerium, Tetrabiblos, On the Analemma, Geography, Optics och Harmonics.

Ptolemaios är först och främst känd för sin världsmodell, som blev allenarådande fram till Copernicus, tysk astronom 1473-1543. Ptolemaios världsmodell grundas på Aristoteles syn på universum. Aristoteles var en filosof och naturforskare under 300-talet f. Kr. Ptolemaios verifierade den aristoteliska modellen och sa att den stämde.



Figur 1

I detta Ptolemaiska världssystem finns jorden stillastående i världsalltets centrum. Ptolemaios ansåg att solen kretsade runt jorden, men solens bana är något förskjuten från jordcentrum. Månens rotationssfär låg närmast jorden. Därefter kom Merkurius, Venus, Solen, mars, Jupiter och Saturnus. Ytters roterade den inbördes fixa stjärnsfären.

Claudius Ptolemaios utvidgade Hipparchos kordatabeller och uppgav sammanhörande värden av kordor från 0° - 180° med ½ graders intervall. Ptolemaios redogör även för de geometriska satser han använder för beräkning av sina kordor. Bland dem den Ptolemeiska satsen;

> *Om en fyrhörning är inskriven i en cirkel, är produkten av de båda diagonalerna lika med summan av produkten av motstående sidor.* Se sidan 17.

Utvecklingen av geometriska modeller kulminerade i och med Ptolemaios, som med enkla och eleganta modeller beskrev solens, månens och planeternas rörelser. Man kanske skulle kunna säga att det blev ”höjden av likformighet”. Ptolemaios använde sig mycket av likformighet för att bevisa de modeller han använde.

Ptolemaios är den förste matematikern där man hittat bevis på att hans beräkningar används vid vetenskapligt arbete. I hans verk förekommer funktionsbegrepp, som detta med kordan som funktion av vinkeln, solens deklination som funktion av longituden och soluppgången som funktion av ekliptikans båglängd och den geografiska latituden.
Ptolemaios använde också sina tabeller för att finna en vinkel, när han visste kordan. På så vis blev funktionen också invers. Även om Ptolemaios inte använde ”modern” symbolism, var han ändå mycket väl medveten om deras existens.

Den teori som ger numeriska lösningar på geometriska problem som berör vinklar kallas trigonometri. I Bonniers Compactlexikon kan man läsa: Trigonometri – läran om beräkning av en triangels obekanta sidor, vinklar och storlek samt de trigonometriska funktionerna sinus, tangens, cosinus och cotangens. Triangel – plan figur som begränsas av tre räta linjer. (Triangulering – triangelmätning är en metod att kartlägga terrängavsnitt med hjälp av vinkelmätning i trianglar.)

Almagest

”Detta verk har omtalats av många, men seriöst studerats av få.” (O. Pedersen ”A Survey of the Almagest”)

Det grekiska originalet heter *Hè Megalè Syntaxis*.
Originaltiteln på detta verk är, översatt från grekiskan, ”The Mathematical Compilation”, men ändrades ganska snart till ”The Greatest Compilation”. Verket översattes därefter till arabiska och fick titeln ”al-Majisti” och från denna titel blev det sedan ”Almagest” när böckerna översattes från arabiska till latin.

På 1100-talet fanns fem översättningar av Almagest, en på fornsyriska och fyra på arabiska, två av de senare finns fortfarande bevarade, al-Hajjāj (827) och Ishāq-Thābit (901). Översättningar från arabiskan till latin gjordes av mästeröversättaren under 1500-talet, Gerard av Cremona. En version trycktes upp så sent som år 1515.

Idag finns även översättningar gjorda till engelska. En översättare G. J. Toomer skriver bl.a. så här; ”Ur didaktisk synvinkel är Almagest ett mästerverk av klargörande och metodik, överlägsen alla andra forntida vetenskapsböcker och har få jämlikar från någon period”. Men det är mycket mer än så. Långt ifrån att blott vara en ”systematisering” av tidigare grekisk astronomi, som det beskrivs att vara ibland, är det på många sätt ett originellt verk.

Almagest är en stor och teknisk bok och beskrivs som kulmen av grekisk astronomi. Detta verk har haft betydelse ända in på 1500-talet och har analyserats fler än en gång. Under denna period var Almagest inte bara en bok om astronomi utan de beskrivningar som gjordes av ingående subjekt ansågs vara deras definitioner. Den användes också som studiebok i Alexandria och utan tvivel också i Aten under senantiken.

Almagest är uppdelad i 13 böcker där alla tar upp astronomiska begrepp gällande stjärnor och objekt i solsystemet.

Det visade mer än något annat verk eller bok att astronomiska noteringar kunde mynna ut i matematiska modeller. Ptolemaios presenterar aldrig en tabell utan att först förklara hur den kan beräknas och alla parametrar till hans modeller är uppenbart härledda ur noggrant citerade observationer. Med hjälp av dessa och noteringarna kunde man sedan få pålitliga förutsägelser om planeternas framtida positioner

Almagest har bidragit till den föreställning som är så grundläggande inom allt vetenskapligt arbete, att en kvantitativ matematisk beskrivning av naturfenomen, som kan ge tillförlitliga förutsägelser, är både möjlig och önskvärd. Man brukar säga att Almagest betydde för astronomin det Elementa betydde för geometrin. Verket gjorde sina föregångare överflödiga, men Ptolemaios erkände sina föregångares insatser på ett generöst och adekvat sätt. Ptolemaios hänvisar bl.a. till de tidigare vetenskapsmännen Apollonius, 200-talet f. Kr., Hipparchos och Menelaos, 100-talet e. Kr.

Almagest är en handbok som täcker hela den matematiska astronomin som den antika människan kunde begripa sig på. Ptolemaios antog att läsaren inte hade andra kunskaper utöver vetskapen om Euklides geometri och förståelse kring vanliga astronomitermer.

Ptolemaios guidar läsaren från start i och med den första principen, genom nödvändig kosmologi och matematik till en beskrivning av den teori som härrör sig till himlakropparnas (solen, månen, Merkurius, Venus, Mars, Jupiter, Saturnus och de inbördes fixa stjärnorna) rörelse och med detta de varierande fenomen, bland annat förmörkelser. Ptolemaios beskrev för varje kropp i tur och ordning de olika fenomen som man måste ta med i beräkning, la fram en lämplig geometrisk modell, härledde numeriska parametrar från valda observationer för att slutligen konstruera tabeller som gjorde det möjligt att bestämma rörelser eller fenomen i fråga för ett givet tillfälle.

Almagest är strukturerad så till vida att påföljande avsnitt bygger på kunskap om det föregående. Verket är upplagt enligt följande;

Inledning

Bok I:	Information om universums natur. Här beskrivs jordens position. Ptolemaios utvecklar den trigonometriska teori som behövs för att kunna ta till sig Almagest.
II:	Diskussion om den sfäriska astronomin som är relaterad till observatörens position på jorden. Ptolemaios tar upp soluppgång och längden på dagar osv.
III-VI:	Teori kring solens och månens rörelser, nödvändiga som en inledning till planeternas teori.
VII-VIII:	Teori kring de fixa stjärnorna. Stjärnkatalog.
IX-XIII:	Planetteori.

Varje bok är uppbyggd på ungefär samma sätt. Inledningsvis finns en kortfattad kvalitativ beskrivning av de fenomen som ska förklaras. Sen följer en redogörelse för den aktuella geometriska modell som postulat utan bevis. Därefter kommer en pedantisk slutledning kring modellens parametrar från noggrant utvalda och nedtecknade observationer medelst upprepande metoder. Till sist kommer ett verifierande av att med dessa modellparametrar förklara fenomenet på ett kvantitativt sätt.

I de sista fem böckerna diskuteras planetteori. Man tror att det också är Ptolemaios största bidrag i boken. Detta kanske för att det är Ptolemaios helt egna iakttagelser och teorier.

Ingen har tidigare kommit med någon tillfredsställande teoretisk beskrivning av planetrörelserna. Ptolemaios kombinerade sina modeller med epicykler och excentern för att bygga modell för planetrörelser. Denna nya teori är ett mästerligt verk. Han skapade sofistikerade matematiska modeller som stämde med gjorda observationer och, fastän komplicerade, beskrev de planeternas rörelser ganska bra.

Verkets första del innehåller en hel del teorier som är byggda på Ptolemaios föregångare, då främst Hipparchus.

Inledning

I inledningens början dedikerar Ptolemaios hela verket till en speciell Syrus, en person som man inte vet någonting om. Eftersom Ptolemaios även dedikerat andra verk till honom måste han dock ha stått Ptolemaios nära

Denna inledning är viktig ur filosofisk synvinkel. Almagest är i sin helhet ett väldigt tekniskt verk med förnuftigt resonemang kring matematisk astronomi, skriven på ett sådant sätt att författarens personlighet och filosofiska läggning inte framkommer. Det är endast i denna inledning man kan få en glimt av Ptolemaios idéer och tankar kring frågor rörande kunskapsteori, vetenskapsklassificering, mänskligt värde i vetenskapliga undersökningar och etisk inblandning i studierna kring astronomi.

Här är ett exempel på hans klassificering av kunskap;
Filosofi kan delas in i två kunskapsgrupper, en praktisk och en teoretisk. Ser vi på den teoretiska delen kan den i sin tur delas in i tre grupper, teologi, matematik och fysik där till exempel matematik sedan delas i tre undergrupper, en om aritmetik, en om geometri och en om astronomi.

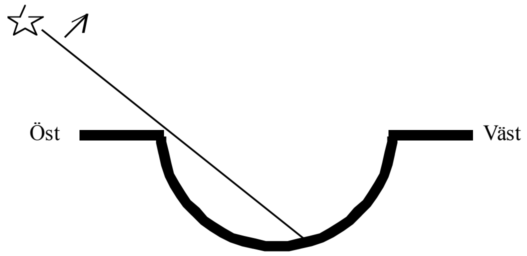
Ptolemaios hade en viss förkärlek till teoretisk kunskap. Han definierade fysik som studier av den aldrig oföränderliga materian världen är uppbyggd av. Här bekymrade man sig för frågor huruvida en substans är varm, kall, söt etc. Matematik ansåg Ptolemaios vara en undersökning kring formens och rörelsens natur bland annat inbegripande begrepp som figurer, beräkningar, kvantitet, storlek, rum, area och tid. Båda dessa beskrivningar överensstämmer med Aristoteles lära som menar att fysik är studier kring naturens föränderlighet och att matematik är en mer abstrakt vetenskap om den fysikaliska världen.

Ptolemaios kärlek till matematik grundar sig på att han ansåg att matematik leder till absoluta sanningen, vilken, om den en gång är bevisad, aldrig kan bli föremål för tvivel. Detta grundar sig på att den matematiska sanningen är inhämtad genom logiska bevis utan hänsyn till om det rört sig kring aritmetik eller geometri.

Bok I-II

Jordens sfäriska skepnad

Att det inte bara är de himmelska kropparna som är sfärisk utan så även jorden är bevisat genom en serie argument baserad på astronomiska fakta. Ptolemaios börjar med att betrakta tiden för en månförmörkelse som studeras av olika observatörer. Månens inträde i jordskuggan sker vid ett bestämt ögonblick, oberoende var observatören är belägen, men den lokala tiden är givetvis olika. Händelsen inträffar senare ju längre österut observatören befinner sig och tidsdifferensen är proportionell mot avståndet. Dessa visar att jorden har en krökning i öst-västlig riktning. Vidare gör denna krökning jorden till en konvex kropp. Skulle den ha varit konkav betyder det att stjärnorna skulle stiga tidigare för en observatör i väst än för en observatör i öst (se fig. 2). Och om jorden skulle varit plan skulle uppgången varit samtida för alla observatörer.



Figur 2

Nu skulle man kanske kunna tänka sig att jorden var som en cylinder med sin axel i nord-sydlig riktning. Men detta stämmer inte med att stjärnornas höjd över horisonten ändras med att observatören färdas norrut. Detta antyder att horisonten, tangentialplanet till jorden, inte har någon fix riktning relativt jordaxeln, vilket skulle ha varit fallet om jorden varit cylindrisk.

Om vi färdas norrut ser vi också hur stjärnorna gradvis försvinner från den södra stjärnhimmeln samtidigt som fler och fler stjärnor blir cirkumpolar i norr. Resultatet visar på att jorden har en krökning även i nord-sydlig riktning.

Slutligen tar Ptolemaios upp den kända erfarenheten att en observatör ombord på ett skepp som närmar sig kusten först ser bergstoppar och därefter mer och mer av berget ju närmare land skeppet kommer.

Jordens centrala position

Ptolemaios har slagit fast att jorden är sfärisk och placerad någonstans inuti ett sfäriskt universum.

Ptolemaios bevisar att den enda möjliga positionen är i centrum på en himmelsk sfär. Beviset är indirekt så till vida att Ptolemaios visar att alla andra positioner är omöjliga på astronomiska grunder.

Jordens storlek

Ptolemaios intresserar sig för jordens storlek endast i jämförelse med distansen till de fixa stjärnorna. Eftersom de senare hör till en sfär koncentrisk med jorden, blir problemet att finna förhållandet mellan jordradien och radien på den stjärnbeströdda sfären. Ptolemaios liknade jorden som en punkt i jämförelse med himlavalvet. Huvudargumentet är att stjärnorna behåller sina inbördes avstånd oberoende var observatören befinner sig på jorden. Med andra ord är de fixa stjärnorna för långt borta för att uppvisa någon daglig parallax.

Den orörliga jorden

Att jorden förhåller sig orörlig i universums centrum bevisas inledningsvis med astronomiska argument. Ptolemaios stödjer sig på de argument han givit för jordens centrala position. Om jorden skulle vara rörlig skulle risken vara stor att den hamnade i någon av de positioner som är ”otillåtna”.

Hans första fysikaliska bevis baseras på den teori Aristoteles angav med avseende på gravitationen, att det är en naturlig tendens för tunga kroppar att röra sig mot centrum av världen, vilken är deras naturliga plats i vila. Eftersom vi ”vet” att jorden är i universums centrum, faller det sig naturligt att alla tunga kroppar som fritt rör sig under gravitation måste falla till jordytan. Detta sker alltid i vertikalled vinkelrät med jordens tangentialplan i just denna punkt.

Numeriska beräkningar enligt Ptolemaios

Eftersom det mesta av den matematik som bedrivs i Almagest består av trigonometriska beräkningar i vilka geometriska väsen representeras av nummer, kommer först en beskrivning av hur Ptolemaios utförde numeriska beräkningar.

Detta medför att man behöver veta lite om det numeriska system han använde sig av. Vi kan skilja på tre olika system, det grekiska, det egyptiska och det babyloniska. När Ptolemaios skriver ett heltal, använder han det grekiska systemet med dess alfabetssymboler;

för följande 27 siffror: 1, 2, … 9; 10, 20, … 90; 100, 200 … 900.

δ = 4, ίδ = 14, och ρίδ = 114.

Större tal kunde skrivas som α = 1000 och β = 2000.

Tecknet M = 10000 = en myriad.

Detta system är tyvärr ganska otympligt.

Ptolemaios använde delvis det babyloniska sexagesimala talsystemet också. Detta talsystem använde han till, vad vi idag kallar decimalerna. Om vi t.ex. skriver talet $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ skrev Ptolemaios 1;24,51,10, där 1 givetvis står för 1, medan

$$\frac{24}{60} = 0{,}4000 \quad \frac{51}{60^2} = 0{,}014^2 \qquad \text{osv.}$$

Talet 84 ⅓ skrev Ptolemaios som 84;20. Om det skulle skrivits helt på babyloniskt sätt, skulle det ha blivit 1,24;20. Heltalsdelarna skrev han alltså på vanligt grekiskt sätt.

Det har visat sig att en sådan blandning av element från olika civilisationer är karaktäristiskt för hellenistisk kultur. I Almagest finns alltså ”lån” från Babylonien, men även egyptiska element finns också, t.ex. dygnets 24-timmarsindelning. En timme delades i 60 minuter och en minut i 60 sekunder.

Ingenstans i Almagest finns dock förklarat hur och varför han använde sig av det system han gjorde. Kanske Ptolemaios tog för givet att läsaren var väl insatt i talsystemet. Systemet fungerade även för de räkneoperationer som var nödvändiga.
T.ex. löstes följande division, gradtecknet betecknar heltalets ”timme”;

$$\frac{1515°;20{,}15}{25;12{,}10} = 60°;7{,}33$$

genom lösandet av ekvationen;

$$1515°;20{,}15 = 25;12{,}10 \cdot \left(x + \frac{y}{60} + \frac{z}{60^2} \right)$$

där x, y och z är heltal och y och z är mindre än 60.

Först löser man x genom att utföra två multiplikationer, dels med x = 60º och därefter med x = 61º. Det ger 25;12,10 • 60º = 1512º;10 respektive 25;12,10 • 61º = 1537º;22,10.
Vi ser att den första produkten är för liten och den andra för stor.

Vi fortsätter ekvationslösandet genom att sätta x = 60 i ursprungsekvationen.
Det ger då att;

$$1515°;20{,}15 = 1512°;10 + 25;12{,}10 \cdot \left(\frac{y}{60} + \frac{z}{60^2} \right)$$

eller;

$$3°;10{,}15 = 25;12{,}10 \cdot \left(\frac{y}{60} + \frac{z}{60^2} \right).$$

Multiplicering med 60 ger;

$$190';15 = 25;12;10 \cdot \left(y + \frac{z}{60} \right)$$

Tecknet efter 190 indikerar att det handlar om ”minuter”.

Utförandet med y kan här göras lika som med hanteringen av x, fast nu startar vi divisionen med y = 7'.

$$190';15 = 176';25,10 + 25;12,10 \cdot \left(y + \frac{z}{60} \right)$$

vilket är detsamma som;

$$13';49,50 = 25;12,10 \cdot \left(y + \frac{z}{60} \right).$$

Multiplicering med 60 ytterligare en gång ger att;

$$829'';50 = 25;12,10 \cdot z$$

Om vi nu skulle fortsätta den sexagesimala talutvecklingen, skulle vi sätta z = 32'', men vi vill inte ha fler decimaler, så därför sätter vi z = 33''. Och vi är nu framme vid resultatet:

$$60^{\circ};7,33.$$

Detta relativt enkla tal visar att beräkningar med det sexagesimala talsystemet inte är speciellt enkelt och smidigt.

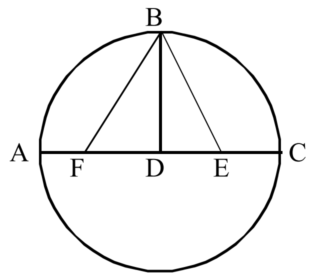
Almagest innehåller resultat från en väldig mängd beräkningar innehållande otaliga operationer. Det är omöjligt att tro att Ptolemaios haft tid att själv utföra dem alla utan med största sannolikhet har han haft hjälp av assistenter.

Beräkning av kordor

Geometridelen i Almagest inleds i bok I där Ptolemaios förklarar sina konstruktioner av s.k. kordatabeller. Kordatabeller hade upprättats tidigare också av såväl Hipparchos som Menelaus, men vad man tror sig veta var de inte så omfattande som Ptolemaios tabeller.

Ptolemaios tabeller omfattar mätningar från en ½ grad till 180 grader i ½-grads-steg. Dessa återkommer han ofta till i resten av verket, då han utför numeriska trigonometriberäkningar.

Likt tidigare grekiska matematiker anammade Ptolemaios det babyloniska sättet att indela en cirkel i 360º. Hans syfte är att bestämma längden av den korda som svarar mot en viss cirkelbåge motsvarande x antal grader i en cirkel med radien R. Eftersom denna längd är proportionell mot R är det tillräckligt att lösa denna typ av problem för en standardcirkel. I modern trigonometri har denna standardcirkel en längd av 1 längdenhet, men eftersom Ptolemaios använde sig av det sexagesimala talsystemet gav han denna standardcirkel en radie på 60 längdenheter. Detta gjorde givetvis beräkningarna enklare än de som utförts vid tidigare tabeller. Hipparchos använde t.ex. R = 57.18, vilket med stor säkerhet vållade besvärligare beräkningsinsatser.



Figur 3

Låt oss använda oss av en cirkel med diametern ADC (se fig. 3) där D är cirkelns centrum. Linjen BD är vinkelrät mot ADC. Punkten E delar DC mitt itu. Punkten F väljs så att EF = EB. Ptolemaios utgår från Euklides Elementa när han visar att sträckan DF är lika lång som sidan i en i cirkeln inskriven tiohörning.

Längden av DF fås som följer:

$$DF = EF - ED = EB - ED = \sqrt{BD^2 + ED^2} - ED = \sqrt{3600 + 900} - 30 = 37;4,55$$

Eftersom DF är lika lång som en av sidorna i en inskriven tiohörning, kan man också skriva att DF = kordan för $\frac{360°}{10}$, $\quad dvs.\ DF = crd(36°)$

Låt dela cirkeln i sex delar. Det ger då en inskriven sexhörning. En sida i en sexhörning kan då beskrivas som crd(60º).

För att beräkna crd(72º) använde Ptolemaios åter Elementa där;

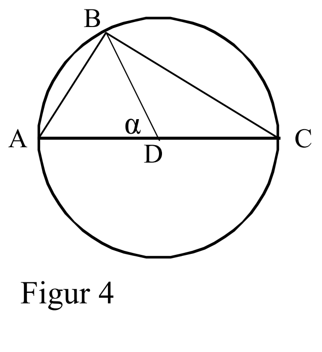
$$BF = crd(72°) = \sqrt{(crd(60°))^2 + (crd(36°))^2} = \sqrt{60^2 + (37;4,55)^2} = 70;32,3$$

crd(72º) är även längden av en sida på en inskriven femhörning.

Att sidorna motsvarar dessa kordor var ett välkänt faktum i grekisk matematik. Det nya i Almagest var att Ptolemaios uttryckte dem i det sexagesimala talsystemet.

Vidare är crd(90º) = 84;51,10. Om detta tal divideras med 60, radien av cirkeln, fås 1;24,51,10, vilket är ekvivalent med värdet på $\sqrt{2}$ känt från den babyloniska matematiken.

Flera kordor kan härledas ur relationen crd(180º - α) = 120^2 – $(\text{crd}(\alpha))^2$, vilket följer av Pythagoras sats applicerad på triangeln i figur 4 nedan där B = 90º.



Figur 4

Ur detta kan så Ptolemaios räkna fram

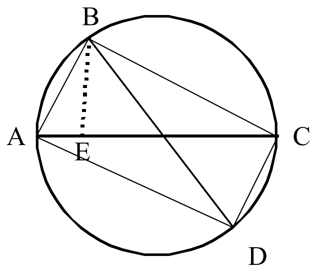
$$\text{crd}(108^\circ) = 97;4,56$$
$$\text{crd}(120^\circ) = 103;55,23$$
$$\text{crd}(144^\circ) = 114;7,37$$

Nu finns en kort kordatabell för crd(n°), där n° är ett element ur;

$$\{36^\circ, 60^\circ, 72^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ, 144^\circ\}.$$

För att fullborda tabellverket krävs kordor kombinerade utifrån en annan linje än diametern. Det krävdes mer av Ptolemaios än den teori han tog ur Elementa, vilket gjorde att Ptolemaios fann på ett eget teorem, som numera kallas Ptolemaios teorem.

Hos en godtycklig fyrhörning inskriven i en cirkel är produkten av diagonalerna lika med summan av produkterna av motstående sidor.

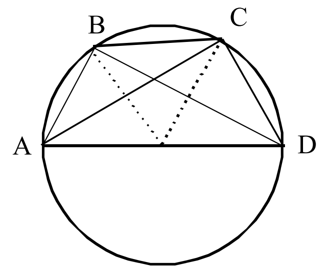


Figur 5

I cirkeln finns en fyrhörning inskriven med hörnen i punkterna A, B, C och D.
Enligt Ptolemaios teorem är $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Beviset kan ske enligt följande:
Punkten E placeras på sträckan AC på ett sådant sätt att vinkeln ABE = DBC. Då fås även att vinkeln ABD = EBC och även att vinkeln BDA = BCA.
Triangeln ABD är likformig med triangeln EBC.
Detta ger att $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC}{EC}$ vilket ger $AD \cdot BC = BD \cdot EC$.
Då även vinkeln BAC = BDC, är triangeln ABE likformig med triangeln DBC.
Detta likformiga samband ger $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{CD}$ vilket ger att $AB \cdot CD = BD \cdot AE$.

Addition av de två sambanden ger just teoremet
$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AE + BD \cdot EC = BD(AE + EC) = BD \cdot AC = AC \cdot BD$.



Figur 6

Vi låter två kordor vara kända, crd(α) = AB och crd(β) = AC. Dessa är inskrivna i halvcirkeln med diametern AD = 2·60 = 120.

Observera återigen att Ptolemaios använde sig av radien 60 i ”sin enhetscirkel”.

Då BD = crd(180º - α)
CD = crd(180º - β)
BC = crd(β–α),
kan man med Ptolemaios teorem finna att;

$$crd(\beta - \alpha) = \frac{crd(\beta)\cdot crd(180° - \alpha) - crd(\alpha)\cdot crd(180° - \beta)}{120}$$

Ptolemaios teorem ger alltså möjligheten att bestämma kordan för den vinkel som är ekvivalent med differensen mellan de två vinklar som motsvarar två kända kordor.

Nu kan man från värdena på crd(90º) och crd(72º) beräkna crd(18º). Genom att därefter kombinera ihop crd(72º) och crd(60º) får man värdet på crd(12º) och med hjälp av crd(18º) och crd(12º) får man värdet på crd(6º). Man kan nu ställa upp en kordatabell för alla kordor på formen crd(n6º) där n är ett heltal.

Sambandet mellan kordor och modern notation är givet av;

$$crd(\alpha) = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Om α=2y och β=2x, sätter in det i beräkningarna ovan fås att:

$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\sin(90º-y) - \sin(90º-x)\cdot\sin y = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$

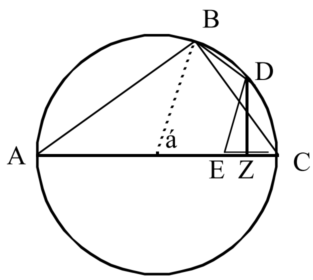
vilket är ett välkänt samband i våra dagar.

På liknande sätt får man också fram att;

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y.$$

Det visar sig alltså att Ptolemaios teorem är motsvarigheten till våra dagars additionsformler för trigonometriska funktioner.

För att bestämma kordan för halva vinkeln till vars hela vinkel kordan är känd gjorde Ptolemaios följande härledning:



Figur 7

Kordan för BC är känd som crd(α) och vi söker $crd\left(\frac{\alpha}{2}\right) = CD$ där D är mittpunkten på bågen BC. Punkten E på sträckan AC är bestämd så att sträckan AE = AB.
Trianglarna ABD och AED blir då kongruenta, vilket då ger att ED = BD = CD.
DZ är vinkelrät mot linjen AC. Sträckan EZ = ZC.
Från detta fås att $ZC = \frac{AC - AB}{2}$.
Då triangeln ADC = 90º, följer från Euklides Elementa VI-8 att $CD^2 = AC \cdot \frac{AC - AB}{2}$,
Vilket omskrivet blir $CD = \sqrt{60(120 - AB)}$. Detta, i sin tur är detsamma som att

$$crd\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{60(120 - crd(180° - \alpha))}.$$

På vår nutida notation kan detta skrivas som $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

Tillsammans med de kordor som tidigare kunnat beräknas, kan nu kordatabeller med intervallet av 3º konstrueras. Genom att beräkna crd(3º) fås att

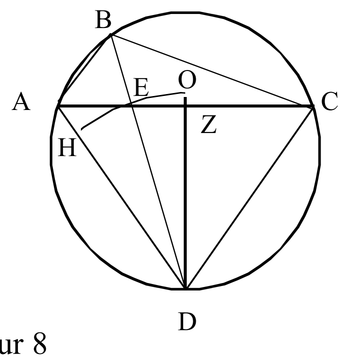
$$crd\left(\frac{3°}{2}\right) = 1;34,15 \text{ och } crd\left(\frac{3°}{4}\right) = 0;47,8 .$$

I och med detta är det nu möjligt att reducera intervallerna med 3º/2 och till och med 3º/4. Detta var dock inte tillräckligt för Ptolemaios. Han ville ha en tabell med intervallet ½º och det skulle vara möjligt om man kunde beräkna crd(½º). Eftersom crd(3º/2) nu var känd, skulle det väl bara vara att dela vinkeln i tre lika delar. Detta var dock ett av de problem som de grekiska matematikerna inte hade lyckats att lösa med sina metoder med passare och linjal. Detta kände naturligtvis Ptolemaios till och han undvek problemet genom följande:

Låt α och β vara två längder i en cirkelbåge vars kordor är kända och som uppfyller villkoret att crd(α) > crd(β). Då följer att

$$\frac{crd(\alpha)}{crd(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{och att} \quad \frac{crd(\alpha)}{\alpha} < \frac{crd(\beta)}{\beta}.$$

Detta kan bevisas geometrisk som i figur 8.



Figur 8

Låt de givna kordorna BC > AB och låt BD halvera vinkeln ABC.
Vidare är CD = AD och EC > AE.
Linjen ZD är vinkelrät mot AC och Z är mittpunkt på AC.
En tänkt cirkel med radien ED och centrum i D skär AD i H och i en förlängning av ZD i O.
Sektorn DEO > triangeln DEZ och triangeln DEA > sektorn DEH, vilket ger att

$\frac{DEZ}{DEA} < \frac{DEO}{DEH}$. Vi har också att $\frac{ZE}{EA} < \frac{ZDE}{EDA}$ och $\frac{ZE + EA}{EA} < \frac{ZDE + EDA}{EDA}$.

Det ger då att $\frac{ZA}{EA} < \frac{ZDA}{EDA}$. Multiplicering med 2 ger att $\frac{AC}{EA} < \frac{CDA}{EDA}$ vilket ger att

$\frac{AC - EA}{EA} < \frac{CDA - EDA}{EDA}$, vilket är detsamma som att $\frac{CE}{EA} < \frac{CDE}{EDA}$.

Eftersom BD delar vinkeln B mitt itu, har vi att $\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{BA}$. Å andra sidan är vinklarnas förhållande ekvivalent med båglängderna $\frac{arcCB}{arcBA}$.

Därav följer att $\frac{CB}{BA} < \frac{arcCB}{arcBA} \Rightarrow \frac{CB}{arcCB} < \frac{BA}{arcBA}$ vilket skulle visas.

I Almagest leder denna relation till att

$$\frac{crd\left(\frac{3^\circ}{4}\right)}{\frac{3}{4}} > \frac{crd(1^\circ)}{1} > \frac{crd\left(\frac{3^\circ}{2}\right)}{\frac{3}{2}}$$

Eftersom värdet på $crd\left(\frac{3^\circ}{4}\right) = 0;47,8$ och $crd\left(\frac{3^\circ}{2}\right) = 1;34,15$ får vi att

$$crd(1^\circ) < 4/3 \cdot 0;47,8 = 1;2,50 \text{ och}$$
$$crd(1^\circ) > 2/3 \cdot 1;34,15 = 1;2,50.$$

crd(1º) skiljer sig inte från det ovan angivna värdet förrän på tredje sexagesimala ”platsen”. Ptolemaios drog då slutsatsen att crd(1º) = 1;2,50.
Eftersom det redan finns ett uttryck för halva vinkeln, är enligt beräkningar crd(½º) = 0;31,25.

Nu var det möjligt för Ptolemaios att konstruera kordatabeller med intervallet av en ½º. Hur detta utfördes ges endast i några få exempel;
crd(2º) fås med hjälp av crd(3º/2) och crd(½º) och crd(5º/2) fås från crd(3º) och crd(½º).

Resultatet av alla kordaberäkningar mynnar alltså ut i den stora ”Tables of Chords” som Ptolemaios publicerade i Almagest, bok I. Detta är också den första trigonometriska tabell i matematikens historia som ännu finns bevarad.

Tabellerna eller tabellen består av 360 rader och har tre kolumner. Den första kolumnen innehåller själva argumentet, vinkeln eller rättare sagt båglängden, α_n, som varierar mellan ½º till 180º med intervallet ½º. Den andra kolumnen listar kordorna crd(α_n) som svarar mot de olika argumenten. Den tredje kolumnen används för att bestämma kordor som inte är listade i den första kolumnen. Detta är gjort genom linjär interpolation:

$$crd(\alpha_n) = crd(\alpha_n) + (\alpha - \alpha_n)\cdot f(\alpha_n) \qquad \text{där } \alpha_n < \alpha < \alpha_n + ½^\circ$$

$$f(\alpha_n) = 1/30[crd(\alpha_n + ½^\circ) - crd(\alpha_n)].$$

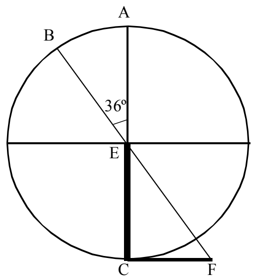
Om vi använder modern notation som i sambandet $crd(\alpha) = 2R\sin(\alpha/2)$, vilket är detsamma som $\sin(\alpha) = crd(2\alpha)/2R$.
Denna visar att kordatabellen är ekvivalent med en modern sinustabell.

vinkel α	crd(2α)	sinα härledd från crd(2α) tabellen	sinα härledd från modern tabell	differensen $\cdot 10^{-8}$
10º	20;50,16	0,17364814	0,17364817	- 003
20º	41; 2,33	0,34202083	0,34202014	+069
30º	60; 0, 0	0,50000000	0,50000000	000

Eftersom både cos(α), tan(α) och cot(α) kan uttryckas i termer av sin(α), var kordatabellen tillräcklig för att lösa alla enklare trigonometriska problem. Mycket av trigonometrin i Almagest baseras på relationerna mellan sidor och vinklar i rätvinkliga trianglar.

”Skuggproblemet” är ett av de beräkningsproblem som Ptolemaios beskrev. Med vetskap om vilken latitud han befann sig på kunde han beräkna skuggan av en stolpe av längd 60. Denna mätning skulle ske mitt på dagen och vid vårdagjämning.

Låt oss säga att hans position var Rhodos, vilket befinner sig på latitud 36º. Därmed räknade Ptolemaios på en *infallsvinkel* av just 36º.



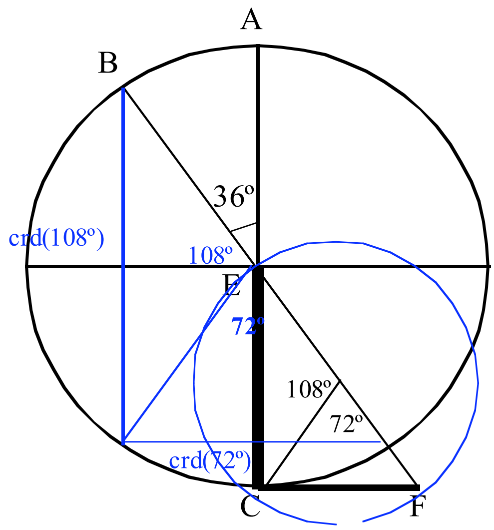
Figur 9

I den större bilden kan man se att det finns likformiga trianglar, dels en rätvinklig triangel som har stolpen som den ena katetern och skuggan som den andra, dels den rätvinkliga triangel vars katetrar består av de två utritade kordorna. Eftersom likformighet, har vi att

$$\frac{CF}{60} = \frac{crd(72°)}{crd(108°)}, \quad \text{vilket ger att}$$

$$CF = 60 \cdot \frac{crd(72°)}{crd(108°)} \quad \text{där}$$

CF = stolpens skugga

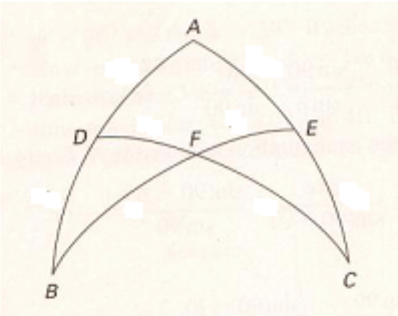


Figur 10

För att kunna utföra beräkningar i denna typ av problem krävs att man alltid inför en hypotenusa med längd 120, vilket också skulle svara mot en diameter med samma längd i en cirkel. I och med det kan man använda sig av de kordatabeller Ptolemaios framställde.

Sfärisk trigonometri

Sfärisk geometri studerades redan på 300-talet f. Kr. De tidigaste arbeten som hittats om sfärisk trigonometri är Menelaos ”Spherica”. Även Ptolemaios räknade på sfärisk trigonometri. Han byggde vidare på det teorem som Menelaos avhandlar i ”Spherica”. Detta teorem visar på sambandet mellan cirkelbågar i storcirklar som skär varandra på en sfärisk yta. Ptolemaios fördubblade Menelaos modell. Genom detta arbete kunde Ptolemaios t.ex. matematiskt räkna fram hur länge solen är uppe på dagen och vilken position den har när den ”går upp”.



Figur 11

Menelaos teorem

Två bågar AB och AC är delade av två andra bågar BE och CD, vilka dessutom de två sistnämnda skär varandra i punkten F. Alla bågarna är segment av storcirklar och de vinklar de svarar mot är mindre än 90º.

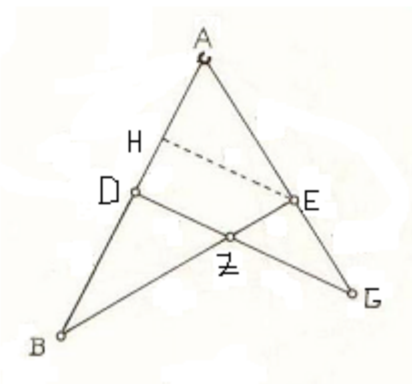
Teoremet säger då att

$$\frac{crd(2EC)}{crd(2EA)} = \frac{crd(2CF)}{crd(2FD)} \cdot \frac{crd(2DB)}{crd(2BA)} \quad \text{och}$$

$$\frac{crd(2AC)}{crd(2AE)} = \frac{crd(2CD)}{crd(2DF)} \cdot \frac{crd(2FB)}{crd(2BE)}$$

Menelaos bevisade detta och samma bevis tar Ptolemaios med i Almagest.

Beviset bygger på likformighet hos en motsvarande komposition i planet.



Figur 12

Enligt teoremet är $\frac{GA}{AE} = \frac{GD}{DZ} \cdot \frac{ZB}{BE}$

Bevis i Almagest:
Dra linjen EH så att den blir parallell med GD. Då är, eftersom linjerna är parallella,

$\frac{GA}{AE} = \frac{GD}{EH} = \frac{GD}{DZ} \cdot \frac{DZ}{HE}$, men EH är även parallell med ZD, vilket ger $\frac{DZ}{HE} = \frac{ZB}{BE}$.

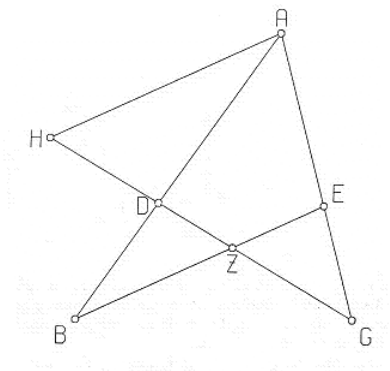
Därmed är det bevisat att $\frac{GA}{AE} = \frac{GD}{DZ} \cdot \frac{ZB}{BE}$.

På liknande sätt bevisas $\frac{GE}{EA} = \frac{GZ}{DZ} \cdot \frac{DB}{BA}$.

Dra en linje utgående från A som löper parallellt med EB och precis så lång att den i en punkt H möter en förlängning av linjen GD enligt figur 13.

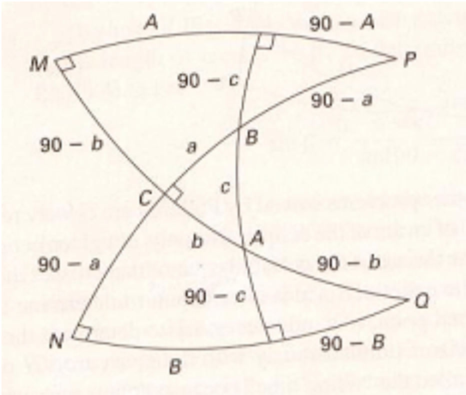
Eftersom AH är parallell med EZ, är $\frac{GE}{EA} = \frac{GZ}{ZH} = \frac{GZ}{ZD} \cdot \frac{DZ}{ZH}$,
men $\frac{DZ}{ZH} = \frac{DB}{BA}$ för BA och ZH är ritade så att de möter de parallella linjerna AH och ZB.
Ptolemaios ger inget bevis för det sista påståendet utan tar det som självklart.

Detta medför att $\frac{GZ}{ZH} = \frac{GZ}{ZD} \cdot \frac{DB}{BA}$, men $\frac{GZ}{ZH} = \frac{GE}{EA}$ vilket då leder fram till påståendet.



Figur 13

Ptolemaios använde sig sen av detta teorem för att lösa sfäriska rätvinkliga trianglar, trianglar komponerade av bågfragment från storcirklar och där två av dessa bågar möts i rät vinkel mot varandra.



Figur 14

Givet en sådan triangel med en rät vinkel i C och övriga vinklar kallad A och B, vinklarnas motstående sidor betecknade a, b och c, konstruerade Ptolemaios en dubblerad "menelaosfigur", se figur 14 ovan eller 15 nedan till vänster, en med toppvinkeln i M och den andra med toppvinkeln i N. Jämför med Menelaos figur där toppvinkeln betecknas med A. De två förhållandena i Menelaos teorem kan uttryckas;

utgående från M
$$\frac{crd2(90-A)}{crd(2A)}=\frac{crd2(90-a)}{crd(2a)}\cdot\frac{crd(2b)}{crd(2\cdot 90)}\quad \text{och}$$

$$\frac{crd(2\cdot 90)}{crd(2A)}=\frac{crd(2\cdot 90)}{crd(2a)}\cdot\frac{crd(2c)}{crd(2\cdot 90)}$$

utgående från N
$$\frac{crd(2a)}{crd2(90-a)}=\frac{crd(2c)}{crd2(90-c)}\cdot\frac{crd2(90-B)}{crd(2\cdot 90)}\quad \text{och}$$

$$\frac{crd(2\cdot 90)}{crd2(90-a)}=\frac{crd(2\cdot 90)}{crd2(90-c)}\cdot\frac{crd2(90-b)}{crd(2\cdot 90)}$$

Förhållandet $crd(2\alpha)=2R\sin\alpha$ medför att uttrycken kan skrivas i modern notation

utgående från M
$$\frac{\sin(90-A)}{\sin A}=\frac{\sin(90-a)}{\sin a}\cdot\frac{\sin b}{\sin(90)}\Rightarrow\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos a}{\sin a}\cdot\frac{\sin b}{1}\Rightarrow$$
$$\tan A=\frac{\tan a}{\sin b}$$

och

$$\frac{\sin(90)}{\sin A}=\frac{\sin(90)}{\sin a}\cdot\frac{\sin c}{\sin(90)}\Rightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin a}\Rightarrow$$
$$\sin A=\frac{\sin a}{\sin c}$$

utgående från N

$$\frac{\sin a}{\sin(90-a)}=\frac{\sin c}{\sin(90-c)}\cdot\frac{\sin(90-B)}{\sin(90)}\Rightarrow\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin c}{\cos c}\cdot\frac{\cos B}{1}\Rightarrow$$

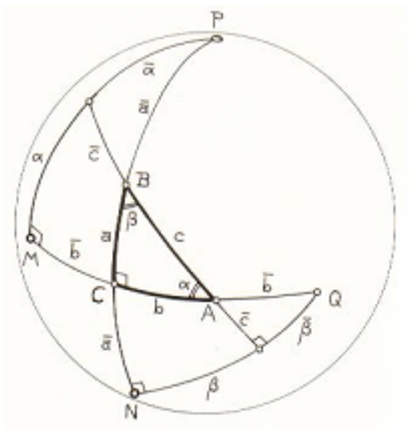
$$\cos B=\frac{\tan a}{\tan c}$$

och

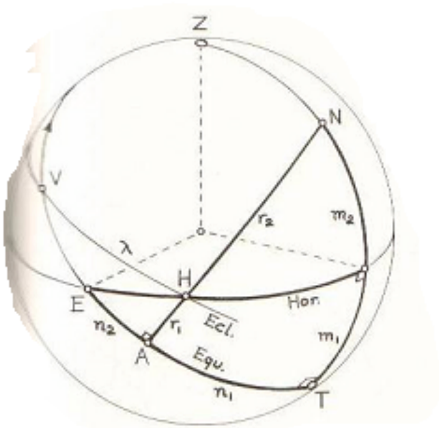
$$\frac{\sin(90)}{\sin(90-a)}=\frac{\sin(90)}{\sin(90-c)}\cdot\frac{\sin(90-b)}{\sin(90)}\Rightarrow\frac{1}{\cos a}=\frac{\cos b}{\cos c}\Rightarrow$$

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b$$

Uppritad på en sfär ter sig konfigurationen som nedan.

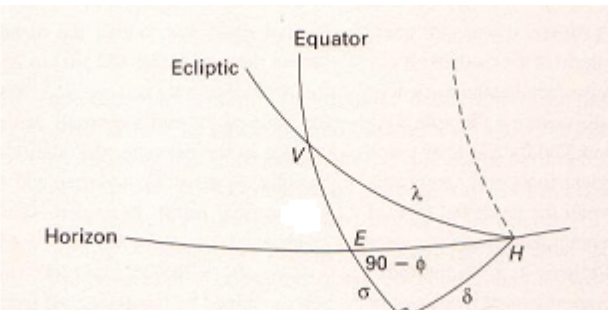


Figur 15



Figur 16

Många av de problem som Ptolemaios löste genom applicerandet av denna teori är nära relaterade till bestämmandet av ”båguppgången” av ekliptikan. För en given geografisk latitud ville Ptolemaios kunna bestämma den båglängd av himmelsekvatorn som korsar horisonten samtidigt som en given båglängd på ekliptikan. I figur 17 nedan är det detsamma som att bestämma längden VE, när man har VH, V är vårdagjämningspunkten.



Figur 17

Denna båglängd kallas för ”uppgångstid”, eftersom tid mäts genom ekvatorns likformiga rörelse runt sin axel. Ett helt varv tar 24 timmar, så 15º längs ekvatorn motsvarar 1 timme och 1º motsvarar 4 minuter.
Ptolemaios löste detta problem för longituder, λ, mellan 10º och 360º i 10º-intervaller och för elva olika latituder, Φ, genom att först lösa triangeln VHC, och därefter triangeln HCE. Alla beräkningar redovisade han i tabeller som han därefter använde i senare arbeten. Med hjälp av tabeller kunde han till exempel beräkna dagslängden för en speciell dag vid en given latitud. Han kunde också beräkna solens position vid soluppgången. I figuren ovan motsvara den bågen EH = β. Om latituden, Φ = 36º och longituden, λ = 30º räknade han med hjälp av teoremet först fram δ = 11º40’ och dagslängden till 13 timmar och 9 minuter. Därefter beräknade han β = 14º28’30’’. Till exempel

$$\sin\beta = \frac{\sin\delta}{\sin(90-\Phi)} = \frac{\sin 11°40'}{\sin 54°} = 0{,}25 \Rightarrow \beta = 14°28'30''$$

∵ En dag där longituden är 30º och latituden är 36º, går solen upp klockan 05.25 lokal tid vid en punkt 14º28’30’’ norr om horisontens östra punkt, E.

Bok III – VI, Sol- och Månteori

Månens teori är historiskt och astronomiskt intimt förknippad till solteorin. För kalendariska avsikter låg intresset i dess rörelser; konjunktion och opposition mellan de två himmelskt lysande kropparna. Uppkomsten av månens och solens förmörkelser är lämpliga till att beskriva dess rörelser. Månens rörelser är mer uppenbart oregelbundna än vad solens rörelser är, som går en fix bana i stjärnsfären. Följaktligen blev solens bana, ekliptikan, det fundamentala referenssystemet för alla himmelska rörelser och dess teori fick föregå månens och andra planeters teorier; ett resonemang som fördes i Almagest.

Det kan tyckas underligt att inte stjärnorna studerades före, eftersom det är mot bakgrund av dessa man ser de himmelska kropparna röra sig, men med antikens bristfälliga instrument skulle noggrannheten ha blivit bristfällig. De fundamentala axlarna, ekliptikan, lokaliseras bäst genom solens och månens positioner som beskrivs noggrant i latitud och longitud. Med dessa referenser gavs andra himmelsobjekt, som stjärnor och planeter, de mest riktiga positionerna

Solteori

Ett solår kom från början av erfarenheten av de periodiska årstidsväxlingarna. Den matematiska astronomin var tvungen att ersätta en sådan intuitiv grundtanke med en riktig definition. Solens återkomst till en fix position med avseende på de fixa stjärnorna, måste ha varit ett bättre kriterium än de långsamma årstidsväxlingarna. Att jämföra solen mot de fixa stjärnorna kunde inte göras, men med teorin för solens och månens rörelser gjordes det möjligt att relatera solens position mot stjärnorna vid godtyckligt tillfälle. Detta ledde fram till det vi idag kallar det sideriska året, en tideräkning med avseende på stjärnorna.

Det sideriska året är karakteristiskt för den babyloniska astronomin under den hellenistiska perioden. Hipparchos däremot drog den slutsatsen att inget periodiskt tidsintervall kunde vara konstant om inga empiriska fakta fanns att tillgå. Hipparchos sa att det tropiska året, ett tidsintervall räknat från vårdagjämning fram till nästkommande vårdagjämning, var tvunget att särskiljas från det sideriska, och att han dessutom fastslog möjligheten att detta år inte var konstant.

Ptolemaios drog slutsatsen tre århundraden senare att något bevis för att det tropiska året skulle variera i längd inte fanns, och att dess längd var 1/300 av en dag kortare än 365 1/4 dagar, vilket är den Alexandrinska tideräkningen. Alltså antog Ptolemaios att det tropiska året var 365;14,48 dagar långt. Detta motsvarar i vår notation 365,2467 dagar. Jämför med dagens gregorianska system, 365,2425 dagar; idag vet man att dessa två olika slags år skiljs åt med en dag vart 3300: e år.

Han fastställde precessionen, jordens rotation kring sin egen axel, till 1º per århundrade. Eftersom man kan tolka precessionen som de fixa stjärnornas rörelse med avseende på vårdagjämningen, definierade han konceptet ”år”, inte av solens återkommande position bland stjärnorna, utan av längden för det tropiska årets period. Denna definition och motsvarande beräkning av himmelsk longitud och latitud från den vårdagjämningspunkten kvarstår än idag.

Eftersom longituden beräknas från vårdagjämningspunkten, avgjorde Ptolemaios att det tropiska året medförde att solens longitud ökar med 360°. Därmed finner han medelhastigheten för solen i longitud per dag, vilket ger;

$$\frac{360°}{365;14,48} = 0;59,8,17,13,12,31$$

Detta värde används sedan till att bygga upp bekväma tabeller av medelrörelser, för andra tidsintervaller; timmar, enstaka dagar (från 1 dag upp till 30 dagar), månader på 30 dagar (mellan 1 och 12 månader), egyptiska år på 365 dagar (från 1 till 18 år) och år i grupper om 18 (från 18 till 810 år). Detta ges i grader uttryckta i det sexagesimala talsystemet.

Upptäckten av solens oregelbundenhet var inte bara en av de mest anmärkningsvärda bedrifterna i tidig astronomi utan den var också avgörande för den förklaring och matematiska metod som behövdes för liknande fenomen gällande månen och andra planeter. Man vet dock inte med säkerhet hur forntidens astronomer avgjorde detta.

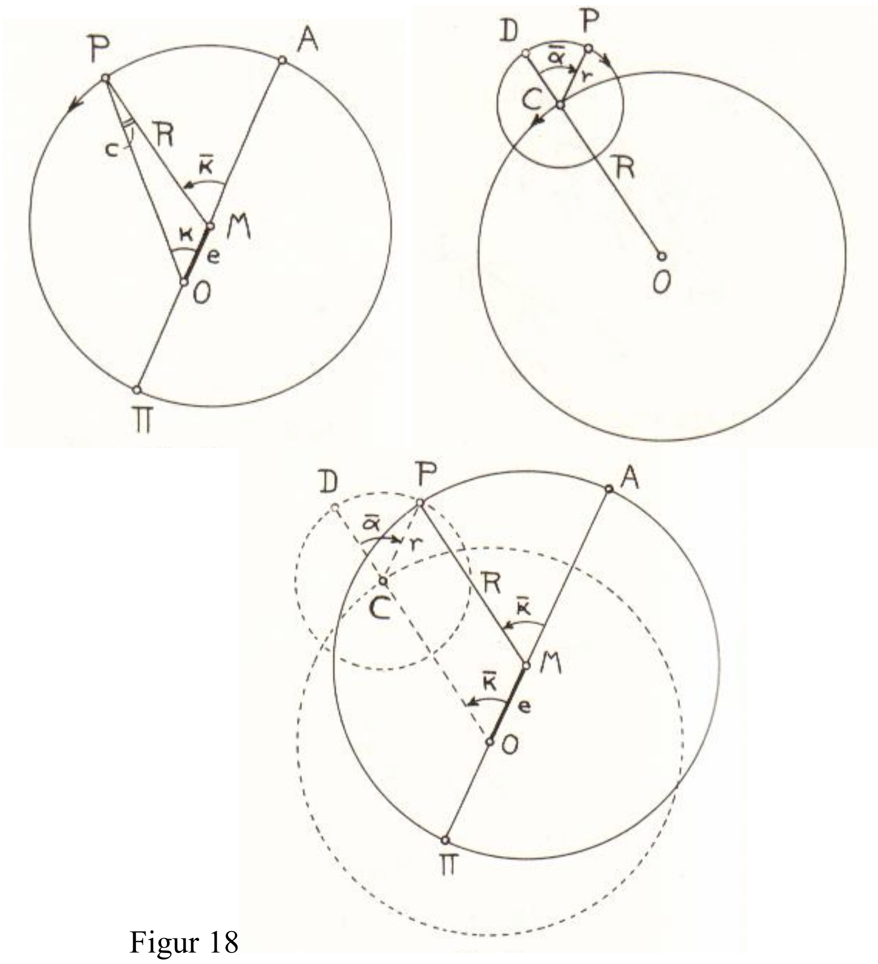
Ptolemaios ger en detaljerad beskrivning av excentriska och epicykliska rörelser; då han använder följande beteckningar;

Excenter;	M	centrum för en cirkel med radie R (vanligtvis R=60)
	O	iakttagare på jorden
	MO = e	excentricitet, av enheter R
	A	höjdpunkt apogeum, störst avstånd från jordens mitt
	π	perigeum, minsta avståndet från jordens mitt
	P	himmelsk kropp, solen = S
	$\bar{\kappa}$	medelvärde, κ egentlig excentrisk oregelbundenhet, båda beräknade från A
	c	skillnad i oregelbundenhet, eller ekvation, positiv eller negativ korrektion

Excentern, M, är punkten för solbanans centrum. Solens cirkelbana kallas för deferenten. Excentriciteten, MO, kan också ses som förhållandet mellan OM och MP för deferenten. Denna har en konstant längd. Perigeum, π, och apogeum, A, är skärningspunkterna för den utdragna linjen från OM, apsidallinjen, vilken pekar ut mot fixa punkter i himmelsfären. Höjden för A beräknas från vårdagjämning i longitud. Linjen OP/OS är en geocentrisk positionsvektor för solen eller någon planet. MP/MS roterar med konstant vinkelhastighet runt M, detta medför att OP/OS roterar i samma riktning runt O men med en varierande vinkelhastighet.

Epicykeln;	C	epicykelns centrum
	r	epicykelns radie (<R)
	Cirkel av radie R = OC	deferenten
	$\bar{\alpha}$	medelvärde för epicykelns oregelbundenhet

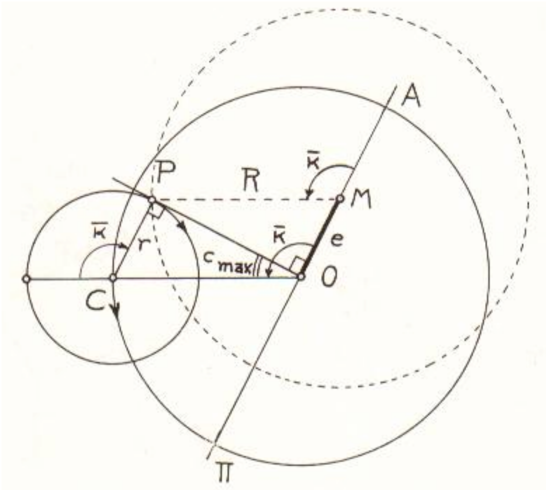
Epicykeln är solens bana då den färdas i den lilla cirkeln, vars centrum, C, rör sig i den ursprungliga jordcentrerade banan. Om epicykeln roterar ett varv, medsols, under samma tid som dess centrum roterar runt jorden kommer solens bana bli densamma som deferenten. De båda rörelserna skapar parallellogrammet, OCPM, visas i figur 18.



Figur 18

En excentrisk rörelse kan alltid ersättas med en ekvivalent epicyklisk rörelse och vice versa, med den förutsättningen att r = e och att oregelbundenheterna för $\bar{\kappa}$ och $\bar{\alpha}$ är av samma absoluta värde, men ökar i motsatt håll gentemot varandra. Punkten P är vertex av parallellogrammet OCPM, vilket utgör iakttagaren, O, centrum för epicykeln, C, en himmelsk kropp, P och cirkelcentrum, M.

Forntida och medeltida astronomer under grekisk influens använde denna ekvivalens omfattande. Man kan till exempel visa att då C når sitt maximum är P kvadratisk till apsidallinjen Aπ, se figur 19 nedan, vilket stämmer för den epicykliska versionen och därför också är sann för en excenter.



Figur 19

På liknande sätt har vi att då P är 90º från apsidallinjen, är hastigheten för P, sett från O, medelhastigheten som är lika med vinkelhastigheten för C. Ptolemaios använder sig av detta faktum ofta, men ger det inget bevis.

Solens bana

Metoden för att bestämma excentriciteten för solens bana och positionen för apsidallinjen, har utnyttjats avsevärt många gånger från Ptolemaios tid fram till Copernicus. Ptolemaios talar inte om att Hipparchos uppfann metoden. Det enda vi vet från Almagest är att Hipparchos använde följande empiriska data;

$$\left.\begin{array}{l}\text{94 ½ dagar från vårdagjämning till sommarsolstånd}\\ \text{92 ½ dagar från sommarsolstånd till höstdagjämning.}\end{array}\right\} \quad (*)$$

En excentrisk bana förklarar dessa data om förhållandet är;

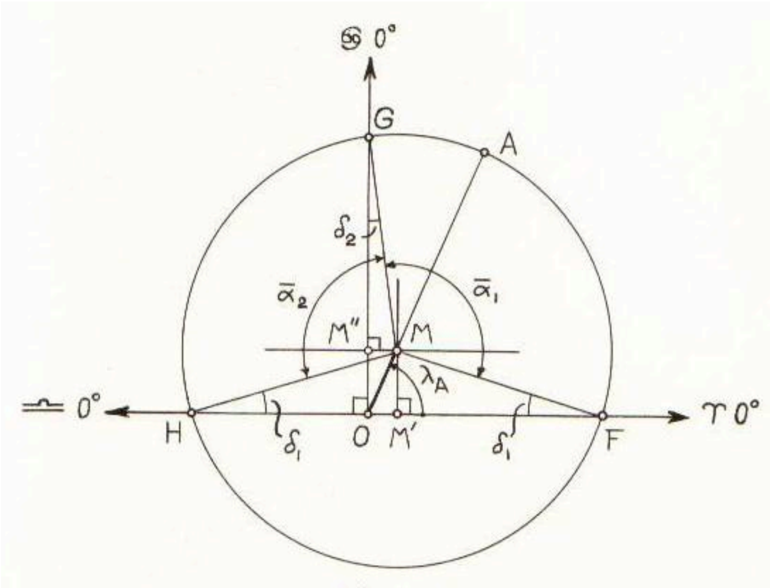
$$\frac{e}{R} = \frac{1}{24} \quad \text{och har höjdpunkten A.}$$

A kallas för höjdpunkten eftersom solen har sitt maximala avstånd från jordens mittpunkt, det vill säga (R + e). Apogeum beräknades i longitud från vårdagjämning och sattes till 65;30º.

Ptolemaios verifierade (*), han antog att solens höjdpunkt var fix och kvarstod vid samma longitud och drog slutsatsen att det sideriska året respektive det tropiska året hade samma längd. Ptolemaios tropiska år kom att bli en astronomisk konstant eftersom han antog att det fanns ett konstant förhållande för jordens precession, dessutom fanns det inga problem i att referera stjärnornas position till vårdagjämningen.

Långt senare kom arabiska astronomer att ifrågasätta Ptolemaios teori, Thãbit b. Qurra, astronom från Bagdad som levde under 800- talet**,** rättade till detta och etablerade det faktum att solens banas apsodallinje också rörde sig i ökande longitudinell riktning, antagligen lika mot precessionen. Qurra tillkännagav att det var det sideriska året som är den astronomiska konstanten.

Idag vet man att det sideriska året är 365,2564 dagar, vilket är något längre än det tropiska året. Skillnaden mellan dessa båda år avgörs av jordens precession, något som inte tideräkningen avseende på stjärnorna påverkas av.



Figur 20

Problemet att bestämma parametrarna från (*) för en excentrisk cirkulär bana var en svårighet som uppstod i månens och planeternas teorier.

Tre punkter, H, G och F, uppstår på en cirkel med givna vinklar från två punkter, iakttagaren O och cirkelns centrum M. O: s position ska bestämmas med avseende på M. De två givna vinklarna vid O är båda 90º, eftersom solen går i ekliptikan, vilken har sitt centrum i O. 90º från vårdagjämningen, F, till sommarsolståndet, G, och igen 90º från G till höstdagjämningen, H. Vinklarna vid M, $\bar{\alpha}_1$ och $\bar{\alpha}_2$, är också kända, eftersom solen förflyttar sig med avseende på M med medelhastigheten 0; 59,8… Därför finner Ptolemaios från (*) att;

$$\bar{\alpha}_1 = 93;9^\circ \text{ och } \bar{\alpha}_2 = 91;11^\circ$$

Eftersom $\bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2 > 90^\circ$, måste M var i den första kvadranten med avseende på O.

Av $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 180 + 4;20$ följer det att $\delta_1 = 2;10$

som medför att; $\delta_2 = \bar{\alpha}_1 - 90 - \delta_1 = 0;59$.

Koordinaterna för M med avseende på O, med R = 60, ger;

OM' = R $\sin\delta_2 = 1;2$ och OM'' = R $\sin\delta_1 = 2;16$

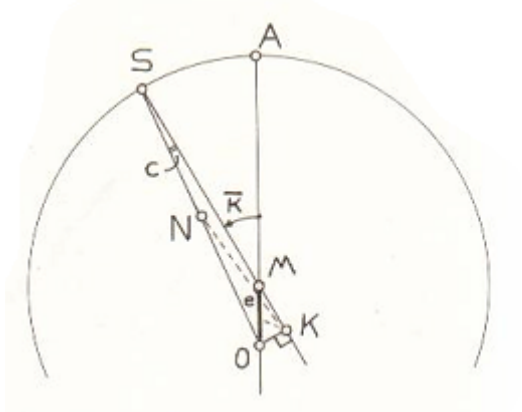
som ger; e = OM = 2;30.

Tillslut kan höjdpunkten, A fås från;

$$\sin\lambda_A = \frac{MM'}{e} = \frac{2;16}{2;30} \Rightarrow \lambda_A = 65;30 \Rightarrow A = \pi 5;30$$

Vilket ger solens bana enligt Hipparchos och Ptolemaios.

Tabeller för solens oregelbundenhet och dess användning
Med dimensionerna för solens bana bestämd, enligt ovan, kan en tabell sammanställas för ekvationen, c, skillnaden i oregelbundenheten för excentern, som en funktion av medelvärdet för excenterns avvikelse, $\bar{\kappa}$, beräknat från apogeum, A. Ptolemaios har en sådan tabell i Almagest III, med en metod som nedan;



Figur 21

Finn en vinkel, c, den så kallade ekvationen, till det givna medelvärdets avvikelse, $\bar{\kappa} = 30$. Apogeum och excentriciteten är densamma i följande exempel, figuren ovan. Gör OK vinkelrät mot SMK, då har vi att;

$$OK = \frac{e}{2{,}0} Crd\, 2\bar{\kappa} = \frac{2;30}{2{,}0} Crd\, 60 = \frac{2;30}{2{,}0} * 1{,}0 = 1;15$$

Från kordatabellerna har vi att;

$$MK = \frac{e}{2{,}0} Crd(180 - 2\bar{\kappa}) = \frac{2;30}{2{,}0} Crd\, 120 = \frac{2;30}{2{,}0} * 1{,}43;55 \approx 2;10$$

I den högra triangeln SOK, med SM=R=60, har vi att;

$$SK = SM + MK = 1{,}2;10 \quad \Rightarrow \quad SO = \sqrt{SK^2 + OK^2} \approx 1{,}2;11$$

$$och\ därför,\ om\ ON = NS = \frac{SO}{2}$$

$$OK = \frac{ON}{2{,}0} Crd\, 2c \quad eller \quad Crd\, 2c = \frac{1{,}0 * OK}{1{,}2;11} \approx 2;25$$

I tabellen finner man motsvarande vinkel 2c=2;18, således c=1;9, som motsvarar värdet för solens avvikelse då $\bar{\kappa} = 30$.

När c=0 medför det att $\bar{\kappa} = 0$ eller 180, och värdet för |c| är symmetriskt till $\bar{\kappa} = 0$ eller 180. Därför ordnar Ptolemaios sina tabeller på sådant sätt att han visar två kolumner, en med början på 6º och den andra med start på 354º. Båda tabellerna slutar på 180º. Fram till $\bar{\kappa} = 90$ respektive 270 är stegen i tabellen 6º för att därefter minska till 3º.

Från figur 19, ser man att max ekvationen, c_{max} måste uppfylla relationen;

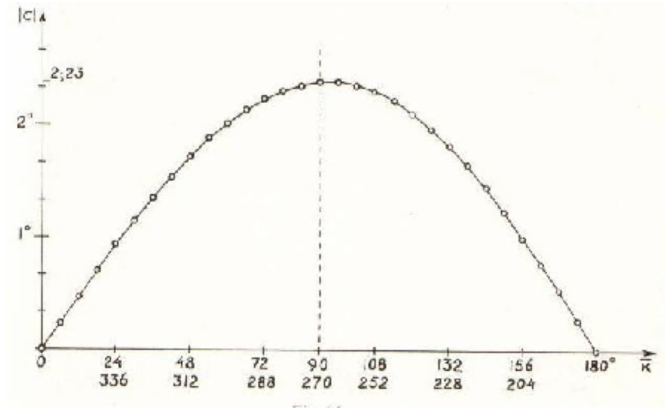
$$\sin c_{max} = \frac{e}{R}$$

Eftersom e=2;30, då R=60, har vi att;

$$\sin c_{\max} = 0;2,30 \quad \Rightarrow \quad c_{\max} = 2;23°.$$

Vi har alltså att ekvationens max uppträder då avvikelsens medelvärde, $\bar{\kappa} = 92;23$.

Den grafiska framställningen för kurvan |c| som funktion av $\bar{\kappa}$, som framställs i Almagest, visar en svag asymmetri.



Figur 22

Tidsekvationer

Antikens kalendrar beräknas antingen från solnedgång till solnedgång eller från soluppgång till soluppgång. Astronomiska definitioner av dagar är besvärliga eftersom tillfället för solnedgång respektive soluppgång inte bara är geografiskt beroende utan också årstidsberoende. För att frångå detta problem med den geografiska latituden räknades dagarna vid middagstid och det var på detta sätt man baserade 24-timmarsdagen. Även årstidernas variationsavvikelse kunde frångås på detta sätt.

Astronomiskt är middagstid den tid solen står som högst på himlen, men vid olika longituder har solen sitt högsta läge vid olika tidpunkter. Av denna orsak har vi idag infört tidszoner.

Fortfarande kom det dock att kvarstå den tidseffekt som gör tiden mellan två på varandra följande meridiala förflyttningar av solen, den så kallade sanna soldagen, av olika längd. Eftersom tabellerna för de himmelska kropparnas medelrörelser baseras på intervallen för konstanta längder, medellängden för solens dagar, är det nödvändigt att undersöka relationen mellan solens observerade förflyttning och den ideala soldagens medellängd. Rättelsen som förvandlar en sann soldag till ett medelvärde för tidsintervallet, är känt som tidsekvationen. Det är karaktäristiskt för den hellenistiska astronomin att en korrekt avvikelse av denna korrigering bestämdes.

Enligt O. Neugebauer, vet man inte vem som upptäckte detta viktiga steg i tideräkningens teori, men med de källor som nu finns att tillgå, uppträder de för första gången i Almagest.

Det finns två effekter som uppkommer från, vad vi idag kallar tidsekvationen; den första är solens oregelbundenhet, variationen av solens hastighet i dess bana som påverkar längden av tidens intervall mellan två på varandra följande solpassager. Den andra effekten är lika med det faktum att solen inte fortgår i ekvatorn utan går i ekliptikan, som skär meridianen i varierande vinklar. Även om solens bana i ekliptikan vore konstant, skulle tiden då meridianen korsar ekliptikans bågar ej vara konstant.

Ptolemaios behandlar alltid dessa fakta i Almagest i samband med jämförelse av två olika moment där solens sanna longitud är kända, genom till exempel observation. Nu betraktas tidsekvationen endast som en funktion av solens longitudinella position.

Månens teori
Bok IV i Almagest är angiven som en enkel månteori, en modell som påstår att månens rörelse, i retrograd riktning, ligger på en epicykel som förflyttar sig på en deferent i vars center iakttagaren finns. Denna modell skulle vara exakt ekvivalent mot solens teori om det inte vore för två kännetecken som är karaktäristiska för månes teori. Till skillnad mot solteorins modell, är månrörelsens apsidallinje roterande och månbanan, det gemensamma planet för deferenten och epicykeln, är vinklad mot ekliptikan, men ignoreras för den longitudinella beräkningen, då den bara är 5º. Latituden kan sedan beräknas oberoende med samma metod som för solens lutning.

Den enkla teorin om månen är utan tvivel det största arvet Ptolemaios fick från sina föregångare inom den teoretiska astronomin. Han gjorde dock åtskilliga utvecklingar av denna teori efter att ha gjort en grundlig genomgång av den, både metodiskt och numeriskt.

I bok IV skriver också Ptolemaios bland annat att det bara är månförmörkelser som passar för bestämning av månens longitud, eftersom de är oberoende av parallaxen. Han ger en kort historisk summering av bestämningen av den fundamentala relationen mellan månens period och rörelse samt ger en diskussion om huruvida man bestämmer avvikelsen för månens period.

Medelrörelser
Ptolemaios fick följande värden från Hipparchos;

En synodisk månad;

$\overline{m} = 29;31,50,8,20$ (1)
4,11 (251) synodiska månader = 4,29 (269) avvikande månader (2)
1,30,58 (5458) synodiska månader = 1,38,43 (5923) latitudperioder(3)

En synodisk period är den tid som förflyter mellan två på varandra följande identiska konfigurationer, sett från jorden av en observerare. En synodisk månad är alltså tiden det tar för månen att fullföra en komplett cykel, från till exempel nymåne till nästkommande nymåne, och mäts med avseende på solen.

Dessa värden nedan presenteras i Almagest av Ptolemaios i tabeller med avseende på medelvärden för longitud, latitud, avvikelse och elongation. De visas i multiplar på 18 år, för enstaka dagar, enstaka år månader och dagar. Motsvarande presenteras också för de olika planeterna.

För att Ptolemaios skulle finna månens medelrörelse per dag, använde han sig av solens medelhastighet.

$$\overline{v}_{sol} = 0;59,8,17,13,12,31 \text{ varv/dag}$$

och finner med hjälp av (1) att månen rör sig under en synodisk månad i snitt;

$$6,0 + \overline{m} * \overline{v}_{sol} = 6,29;6,23,1,24,2,30,57 \text{ varv}$$

Alltså blir den dagliga rörelsen;

$$\overline{v}_{måne} = \frac{(6{,}0 + \overline{m} * \overline{v})}{\overline{m}} = 13;10{,}34{,}58{,}33{,}30{,}30 \text{ varv/dag}$$

Från (2) och (1) får man den avvikande medelrörelsen;

$$\frac{4{,}29 * 6{,}0}{4{,}11 * \overline{m}} = 13;3{,}53{,}56{,}29{,}38{,}38 \text{ varv/dag}$$

Från (3) och (1) ges den dagliga rörelsen med avseende på noden;

$$\frac{1{,}38{,}43 * 6{,}0}{1{,}30{,}58 * \overline{m}} = 13;13{,}45{,}39{,}40{,}17{,}19 \text{ varv/dag}$$

Dessa sista båda värdena kommer Ptolemaios senare att modifiera.

I modern teori föredrar man att inte mäta rörelsen gentemot en nod, utan vill mäta den mot nodlinjen självt.

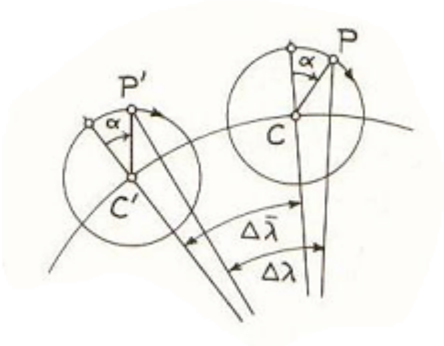
Från (4) och (5) får man den relativa rörelsen mellan solen och månen, medel elongationen;

$$\overline{v}_{måne} - \overline{v}_{sol} = 12;11{,}26{,}41{,}20{,}17{,}59 \text{ varv/dag.}$$

Perioden för månens avvikelse

Solens avvikelse bestämdes i den Grekiska astronomin av årstidernas olikheter. En sådan enkel förklaring förekommer inte för månens oregelbundenhet. Det kan vara svårt att föreställa sig något annat sätt att upptäcka variationen för månens hastighet än med direkt observation av månens förflyttning dag för dag med avseende på de fixa stjärnorna. Sådana observationer finns nedtecknade från babylonierna och det är därför inte överraskande att finna riktiga värden för månadens oregelbundenhet. Att den babyloniska parametern var känd för Hipparchos förstås i Almagest. Ptolemaios problem var att verifiera dessa data, och få värdena så korrekta som möjligt för den avvikande rörelsens medelvärde. Han ger en detaljerad analys där man kan få en riktig period av månens avvikelse.

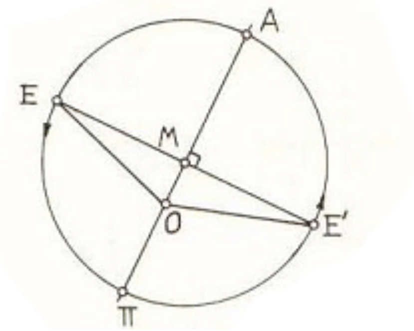
Låt oss anta att τ är en sådan period; låt $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ vara den sanna longituden för månen vid något speciellt tillfälle t_0, och $\lambda_1 = \lambda(t_0 + \tau)$ den sanna longituden för ett senare tillfälle, $t_0 + \tau$, och låt $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ vara motsvarande ökning i longitud. Eftersom τ är samma period för avvikelsen då $t = t_0$ och $t = t_0 + \tau$, oberoende av t_0, kommer $\Delta\lambda$ vara oberoende för det tillfälle då intervallet τ börjar. Med andra ord har vi att; för ett intervall, τ, förhåller det sig så att den sanna rörelsen under intervallet τ är densamma som medelrörelsen $\Delta\overline{\lambda}$ under τ, oberoende av tiden t_0 då τ börjar.
Se figur 23 nedan.



Figur 23

Ptolemaios beaktar endast månförmörkelser som nödvändiga för bestämmandet av den korrekta longituden för månen. För att finna perioden τ för denna avvikelse måste vi finna två intervall $\Delta\lambda$ och $\Delta\lambda'$ för den sanna longituden, vilka ska vara lika. Detta medför att vi ska finna par av förmörkelser, separerade från varandra med samma tidsintervall $\Delta t = \tau$. Vi får då samma medelrörelse för varje par.

För att visa att man inte kan avgöra likheten för $\Delta\lambda$ från likheten för Δt antar Ptolemaios att den första eklipsen uppträder vid E, när solen står exakt kvadratiskt mot apsidallinjen, Aπ, där tidsekvationen nästan har sitt maxvärde, c=2;23º. Se figur 24 nedan.



Figur 24

Om τ har längden (n + ½) år kommer en andra förmörkelse uppträda vid E'. Följaktligen får vi att $\Delta\lambda = 180 + 2c \ = \ 184\ 3/4°$. Om vi nu antar att ett andra par eklipser existerar på sådant sätt att den första förmörkelsen finns vid E', den andra (n + ½) år senare vid E, så kommer vi ha den longitudinella skillnaden $\Delta\lambda' = 180 - 2c \ = \ 175\ 1/4°$ trots likheten för tidsintervallet.

För att kunna eliminera påverkan av solens oregelbundenhet, måste de två paren för månförmörkelse uppfylla ett av följande tillstånd. Se figur 25 fall 1 – 4. Här representerar $E_1E'_1$ det första förmörkelseparet och $E_2E'_2$ det andra. Man antar också att $\Delta_1 t = \Delta_2 t = \tau$ som medför att $\Delta_1\bar{\lambda} = \Delta_2\bar{\lambda} = \Delta\bar{\lambda}$.

Solen går i sin bana och gör;

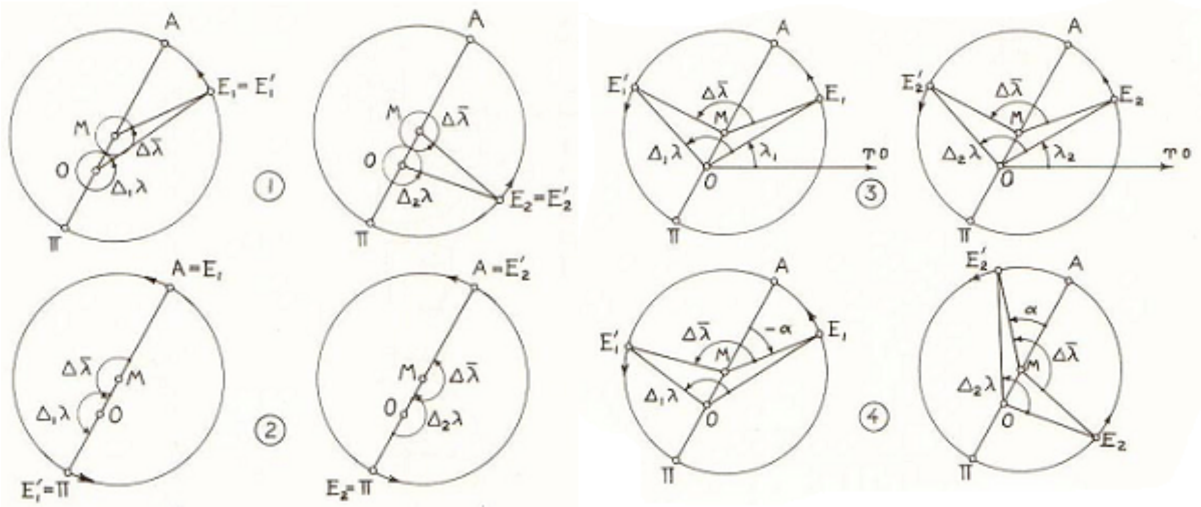
1. fullständig rotation, τ = n.

2. (n + ½) rotationer, det första paret börjar i apogeum, det andra i perigeum, eller vice versa.

3. börjar i samma longitud med båda paren.

4. med det första paret som börjar α^o före apogeum och slutar i det andra paret α^o efter dem.

I alla dessa fall kommer vi att ha $\Delta_1 \bar{\lambda} = \Delta_2 \bar{\lambda}$, vilket önskades.



Figur 25

Eftersom $\alpha(E_1) = \alpha(E'_1)$ och $\alpha(E_2) = \alpha(E'_2)$ inte är uppfyllda, måste vissa situationer för månen undvikas; av den orsaken att det är möjligt att två par förmörkelser, $E_1E'_1$ och $E_2E'_2$ med lika tidsintervall, τ, och longitudinell skillnad, $\Delta\lambda$, inte hör till samma period av månens oregelbundenhet, α.

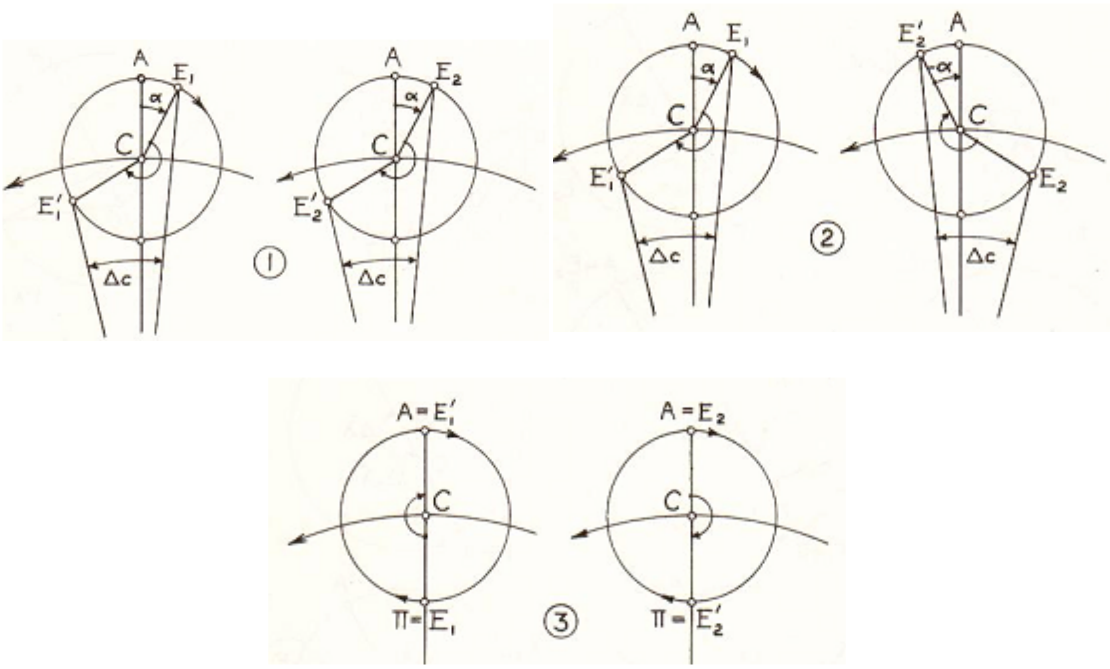
Från $\Delta_1 t = \Delta_2 t = \tau$ följer att $\Delta_1\tilde{\lambda} = \Delta_2\tilde{\lambda}$, man får likheten för den sanna longitudinella ökningen $\Delta_1\lambda = \Delta_2\lambda$, bara om ekvationens skillnad är densamma, dvs. $\Delta_1 c = \Delta_2 c$. Likheten för denna oregelbundenhet måste dock uppfylla $\Delta_1 c = \Delta_2 c = 0$ vid ändpunkterna för respektive $\Delta_1 t$ och $\Delta_2 t$.

Följaktligen måste dessa fall undvikas då $\Delta_1 c = \Delta_2 c \neq 0$. Se figur 24.

1. $\alpha(E_1) = \alpha(E_2)$, eftersom positionerna för E'_1 och E'_2 ger $\Delta_1 c = \Delta_2 c$ utan $E_1 = E'_1$ och $E_2 = E'_2$.

2. $\alpha(E_1) = -\alpha(E'_2)$ eftersom E_2 och E'_1 kommer att ha symmetriska positioner till apsidallinjen, så att vi igen får $\Delta_1 c = \Delta_2 c$ utan $E_1 = E'_1$ och $E_2 = E'_2$.

3. $\Delta_1 c = \Delta_2 c = 0$ är möjligt utan $E_1 = E'_1$ och $E_2 = E'_2$. detta uppträder om $E'_1 = A$, $E_1 = \pi$ och $E'_2 = A$, $E_2 = \pi$, och för liknande situationer av epicykeln med apogeum, A, och perigeum, π



Figur 26

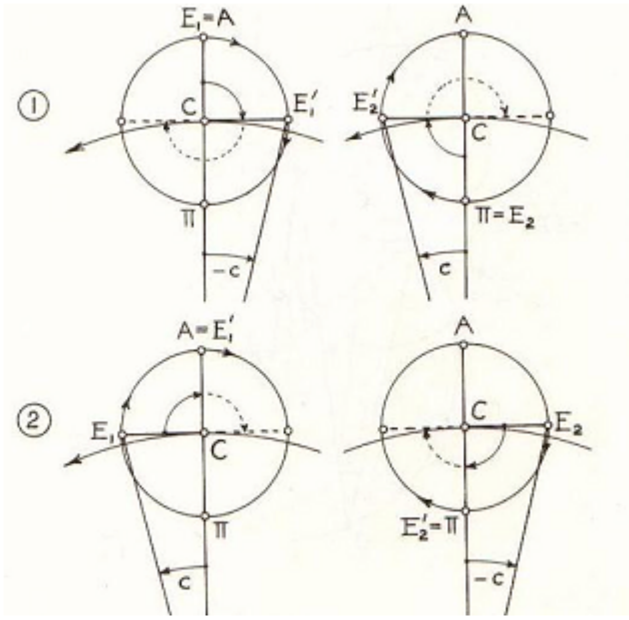
Ptolemaios säger att det är fördelaktigt, inte bara att undvika sådana situationer, men också att välja par av förmörkelser som visar avvikelserna för en synligt återkommande oregelbundenhet så tydligt som möjligt.

De mest fördelaktiga fallen för förmörkelser kommer då vi antar att $\Delta_1 t = \Delta_2 t$ och $\Delta_1 \overline{\lambda} = \Delta_2 \overline{\lambda}$. Man väljer eklipser sådana att det inte finns något helt antal varv av oregelbundenheter i de båda intervallen. $\Delta_1\lambda$ kommer att skilja sig så mycket som möjligt från $\Delta_2\lambda$. Man har då att $\Delta\alpha \neq 360^{\circ}$, och kan dra slutsatsen att τ inte är en period av återkommande avvikelse, trots att $\Delta_1 t = \Delta_2 t$.

Fallen är, se figur 27 nedan;

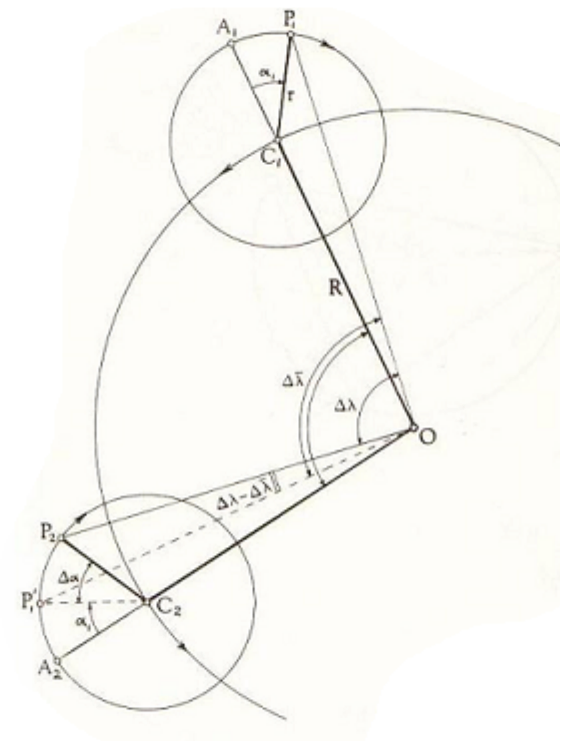
1. $E_1 = A$, $E'_1 \neq \pi$, $E_2 = \pi$ och $E'_2 \neq A$. I de mest extrema situationerna är $\alpha(E'_1) \approx 90^{\circ}$ vilket ger att $\alpha(E'_2) \approx 270^{\circ}$, eller så är $\alpha(E'_1) \approx 270^{\circ}$ och $\alpha(E'_2) \approx 90^{\circ}$. Således är $\max| \Delta_1\lambda - \Delta_2\lambda | = 2c$.

2. $\alpha(E_1) \approx 270^{\circ}$, $\alpha(E_2) \approx 90^{\circ}$. Om, som illustreras i furen nedan, $E'_1 \approx A$ och $E'_2 \approx \pi$, så har vi att $| \Delta_1\lambda - \Delta_2\lambda | = 2c$. den mest extrema situationen kommer att ske då $\alpha(E'_1) \approx 90^{\circ}$och följaktligen $\alpha(E'_2) \approx 270^{\circ}$. Då har vi att $| \Delta_1\lambda - \Delta_2\lambda | = 4c$.



Figur 27

Radie och höjdpunkt för epicykeln
Vi antar att månen, P, rör sig på en epicykel med center, C, iakttagen från centrum, O, på deferenten.



Figur 28

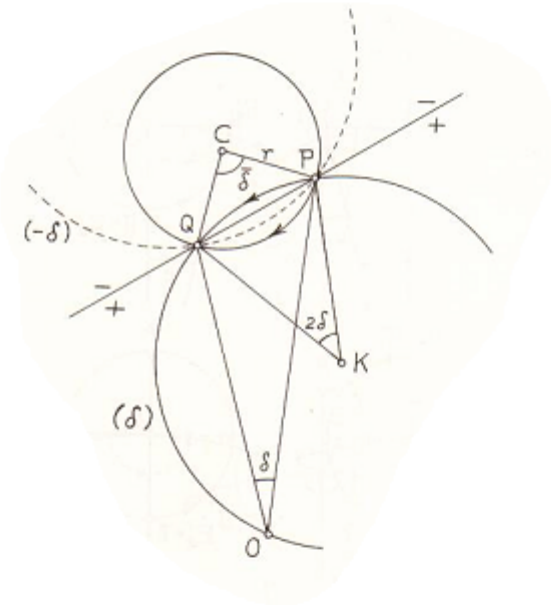
Låt Δλ vara skillnaden mellan två observerade positioner, P_1, P_2, mätt i longituder. Medelvärdet, $\Delta\overline{\lambda}$, är förändringen under tiden, Δt, mellan de två observationerna. Man ser då att skillnaden mellan $\Delta\lambda$ och $\Delta\overline{\lambda}$, beror på epicykelns storlek och P: s position med avseende på apsidallinjen, OA. Detta används också när radien för epicykeln bestäms samt då avståndet mellan A och P fastställs.

Det är viktigt att förstå hur Ptolemaios framlade sitt problem. Enligt honom behöver man inte ta hänsyn till olika positioner, C_1 och C_2, för epicykeln, se figur ovan. Om vi sätter in P'_1 med avseende på A_2, liksom P_1 står mot A_1, så är vinkelavståndet mellan P_1 och P'_1 samma som mellan C_1 och C_2, det vill säga $\Delta\overline{\lambda}$. Vinkelavståndet mellan P_1 och P_2 är däremot $\Delta\lambda$, vilket ger att vinkeln P'_1OP_2 är detsamma som $\Delta\lambda$- $\Delta\overline{\lambda}$. Vinkeln vid C_2, mellan P'_1 och P_2 är tillskottet $\Delta\alpha$ för avvikelsen under tiden, Δt. Vi ser då att $\Delta\lambda - \Delta\overline{\lambda}$ är vinkeln där bågen $\Delta\alpha$ uppträder från O.

Om man nu lägger till ytterligare en punkt, P_3, på epicykeln, kan man bestämma förhållandet r:R där R = OC och för positionerna P_1, P_2, P_3 med avseende på apsidallinjen OCA.

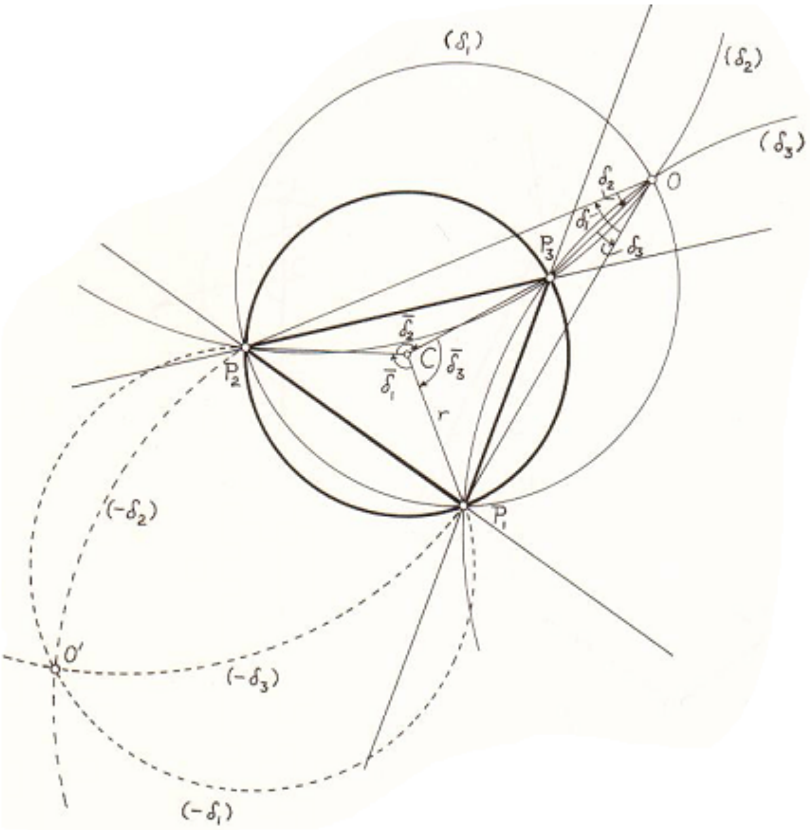
För att Ptolemaios skulle finna tre korrekta positioner för månen, använder han tre månförmörkelser. Då måste man veta skillnaden $\Delta\lambda$ för den sanna longituden, bestämd av de sammansatta solpositionerna vid de tillfällen man befinner sig mitt i förmörkelsen, tillsammans med tidsintervallet, Δt. Från tabeller om medelrörelser fås motsvarande ökning $\Delta\overline{\lambda}$, för medelvärdet i longitud och $\Delta\alpha$ i den epicykliska avvikelsen. Genom att använda proceduren som visas i figur 28 ovan, får man tre punkter på en cirkel med radie, r, utdragna med givna vinklar $\Delta\alpha$ i dess centrum C. Man kan finna positionen för punkten O utanför denna cirkel så att de tre punkterna uppträder från O med givna vinklar $\Delta\lambda$ - $\Delta\overline{\lambda}$.

Man måste först försäkra sig om att det aktuella problemet har en unik lösning. Den geometriska orten för alla punkter O, från vilken en given korda PQ uppträder för en given vinkel δ, är en cirkel med centrum i K där PQ motsvarar vinkeln 2δ i denna cirkel. Se figur 29 nedan.



Figur 29

Nu finns tre punkter på cirkeln med vinklarna $\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2$ vid C, sådana att motsvarande kordor, sett från O, har vinklarna δ_1 och δ_2. En tredje vinkel $\overline{\delta}_3$ vid C, ges av sambandet $\overline{\delta}_1 + \overline{\delta}_2 + \overline{\delta}_3 = 360°$ och motsvara en tredje vinkel δ_3 vid O som uppfyller förhållandet $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$. Se figur 28.



Figur 30

Till varje vinkel δ hör två symmetriska geometriska orter, (δ) och $(-\delta)$, från vilka givna kordor uppträder med samma vinklar $|\delta|$, följaktligen måste vi också undersöka skärningspunkterna för alla tre som uppkommer då man reflekterar (δ_1) på P_1P_2, (δ_2) på P_2P_3 samt (δ_3) på P_1P_3. om man bara reflekterar en eller två av dessa cirklar, kan man inte få en gemensam skärning för alla tre orter som efterfrågades för O. Om alla tre reflekteras, får vi en gemensam skärningspunkt för $(-\delta_1)$, $(-\delta_2)$ och $(-\delta_3)$ i en punkt O', vilket visas i figur 30.

De astronomiska tillstånden tillåter oss att skilja mellan O och O'. Man ser i figur 29 att vinklarna vid O räknas i positiv ordning ökande longitud, motsols riktning, medan vinklarna vid C beräknas positivt för longitud, medsols riktning. Man ser också i denna bild att PQ, kan ses både från O och C med positiva vinklar. Således befinner sig O i det positiva halvplanet. Om K och O vore symmetriskt lokaliserade med avseende på linjen PQ, kommer den positiva vinkeln $\bar{\delta}$ vid C uppträda som $(-\delta)$ vid O. C befinner sig i det negativa halvplanet.

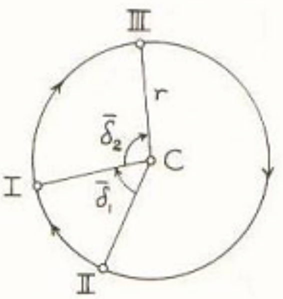
Eftersom vi har tre punkter på epicykeln, har vi sex olika halvplan med motsatta tecken. Dessa definierar sex olika regioner utanför epicykeln med olika kombinationer av tre tecken. Varje skärning associeras till tre olika tecken tillhörande de halvplanen de hör ihop med. Från astronomiska värden ges δ_1 och δ_2, utvecklingen från den första till den andra förmörkelsen och från den andra till den tredje. En tredje vinkel, med tillhörande tecken, bestäms ur sambandet $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$. Trots att vinklarna vid O och O' är identiska så är tecknen i O motsatta tecknen i O' och därför kommer de astronomiska värdena att utesluta en eller två teckenkombinationer.

Som ett exempel används värden från tre babyloniska månförmörkelser, dessa kommer från år 27 och 28 e. Kr., Nabonassar. Följande symboler kommer att användas;

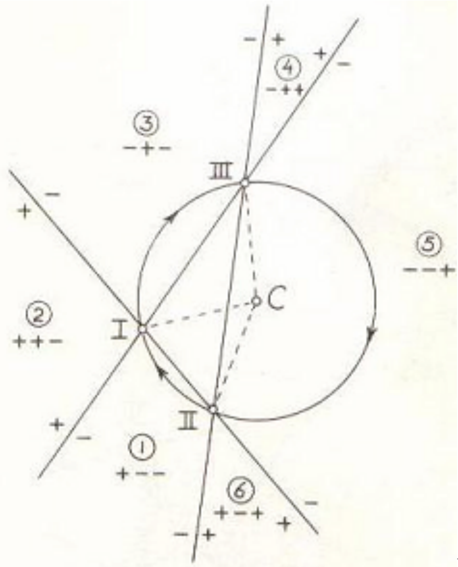
I, II, III	månförmörkelsernas index
λ	den sanna longituden
$\bar{\lambda}$	medelvärdet för den sanna longituden
α	avvikelsen

Från observationerna och de givna tidsintervallen finner man följande data;

	$\Delta\lambda$	$\Delta\bar{\lambda}$	$\Delta\alpha$
Från I till II	349;15	345;51	306;25
Från II till III	169;30	170;7	150;26



Figur 31



Figur 32

När man placerar ut dessa tre punkter på sina relativa platser på epicykeln, märker vi att;

bågen från II → I ges av; $\bar{\delta}_1 = 360 - 306;25 = 53;35$

Bågen från I → III; $\bar{\delta}_2 = 150;26 - \bar{\delta}_1 = 96;51$

Tillslut har vi att; $\bar{\delta}_3 = 360 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 = 209;34$
Se figur 31.

Från O uppträder rörelsen från I → II under vinkeln; $\delta'_1 = 349;15 - 345;51 = +3;24$

Rörelsen från II → III under vinkeln; $\delta'_2 = 169;30 - 170;7 = -0;37$

Förändringen för avvikelsen då rörelsen går från II → I på epicykeln är den resulterande rörelsen från II → III minus rörelsen från I → III vilket är summan av rörelserna från I→ II och från II → III.

Därför ses kordan II → I, från O, vinkeln; $\delta_1 = \delta'_2 - (\delta'_1 + \delta'_2) = -\delta'_1 = -3;24°$

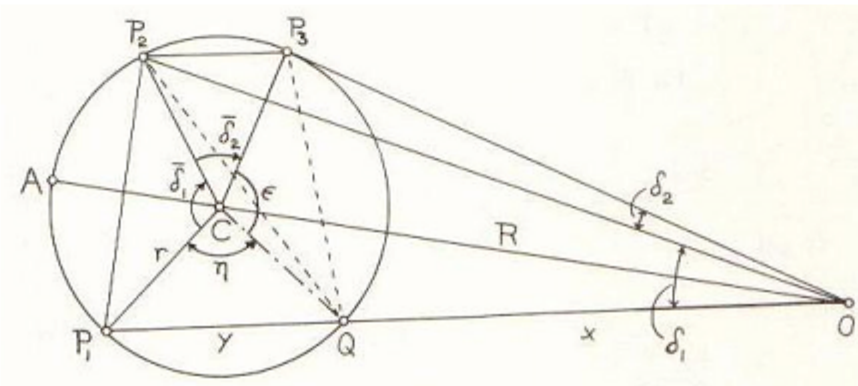
På liknande sätt ses kordorna från I → III, från O, under vinkeln som motsvarar rörelsen från I → II och från II→III; $\delta_2 = \delta'_1 + \delta'_2 = +2;47°$

Tillslut får man då att; $\delta_3 = -(\delta_1 + \delta_2) = +0;37°$

Nu finns sex regioner, se figur 32, där sidorna i triangeln, I, II och III delar cirkelns periferi som representerar epicykeln. Om C skulle befinna sig i regionen (1) skulle δ_1 vara positiv eftersom O tillhör det halvplanet där rörelsen från II→I är beräknat positivt. Vinklarna δ_2 och δ_3 skulle däremot bli negativa eftersom rörelserna då I→III och III→II skulle ses minska i longitud. Regionen får tecknen (+ - -) men eftersom de givna värdena kräver teckenkombinationen (- + +) ser vi att O inte kan tillhöra region (1). I figuren ser vi regionernas teckenfördelningar, angivna i ordningen δ_1, δ_2 och δ_3. Detta visar att kombinationen (- + +) tillhör region (4), och O måste befinna sig i sektorn med vertex III.

På detta sätt resonerade Ptolemaios då han bestämde O; s position med avseende på epicykeln och fastställde de numeriska värdena för vinklarna som han behövde för de trigonometriska slutsatserna.

Det finns tre givna punkter i problemet;
P_1, P_2 och P_3 på en cirkel med radie, r, med givna vinkelavstånd $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$ och $\bar{\delta}_3$. Man vill finna en punkt O utanför cirkeln sådan att kordorna P_1P_2 och P_2P_3 uppträder med de givna vinklarna δ_1 respektive δ_2. Se figuren nedan, observera att punkterna för P_1, P_2 och P_3 som efterfrågades i fallet för eklipserna I, II och III inte är samma punkter.



Figur 33

Antag att OP_1 skär cirkeln vid Q, då är vinklarna vid Q kända. Man har att;

$$P_1QP_2 = \tfrac{1}{2}\,\bar{\delta}_1$$
$$P_2QP_3 = \tfrac{1}{2}\,\bar{\delta}_2$$

Alla tre sidor i triangeln P_2P_3Q kan bli funna. Man har att;

$$P_2P_3 = r \text{ crd } \bar{\delta}_2$$

P_2Q från triangeln P_2QO, där alla vinklar är kända, i enheter av sidan QO = x.

P_3Q från triangeln P_3QO, finns också i termer av x. Eftersom P_3Q = r crd ε, kan man få vinkeln ε och därför också vinkeln $\eta = 360 - (\overline{\delta}_1 + \overline{\delta}_2 + \varepsilon)$.

Det gäller också att y = P_1Q = r crd η.

Med dessa steg får man att både OQ = x och OP_1 = y kan uttryckas i termer av r och är därmed också produkten x (x+y). Denna produkt har ett konstant värde för alla positioner för P_1 på omkretsen och för alla fixa positioner av O.

Användning av punkten A ger;

$$x(x + y) = (R + r)(R - r) \qquad \text{där } R = OC\text{, deferentens radie.}$$

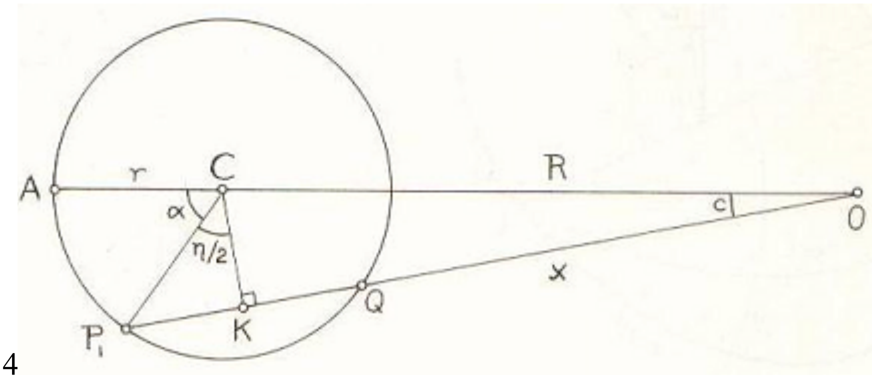
Från detta samband kan man finna ett förhållande mellan r och R, som ger värdet för r i enheter av R=60.

Nu är epicykelns radie känd, men man behöver fortfarande avvikelsen α för en av de tre punkterna på epicykeln; P_1.
Om man gör CK vinkelrät mot OP_1, får man att OK = x + ½y.

Eftersom R = 60, kan man få vinkeln c, som är ekvationen för P_1, och har avvikelsen;

$$\alpha = 90 + c - ½\,\eta$$

eftersom η är känd sedan tidigare. Se figur 34 nedan.



Figur 34

Den sanna longituden λ för P_1 är känd genom observation; genom att finna ekvationen för c kan man också känna till medelvärdet i longitud för P_1;

$$\overline{\lambda} = \lambda - c$$

För att kunna finna avvikelserna för P_2 och P_3 behöver man tillägga $\overline{\delta}_1$ och $\overline{\delta}_2$ till α. Medelvärdet för den longitudinella komponenten resulteras sedan från användningen av ökningen $\Delta\bar{\lambda}$ som ges genom att det kända tidsintervallet Δt är känd mellan observationerna.

Alla parametrar för den epicykliska modellen av månens rörelse kan bli funna genom att bara observera tre olika månförmörkelser.

Ptolemaios modell

Bestämmandet av månens teori härstammar först och främst från observationer av månens förmörkelser. De ”Babyloniska-Hipparchiska”-värdena för medelvärdets rörelser i longitud och latitud hade nästan sex århundraden av noteringar. Det är därför inte överraskande att både Hipparchus och Ptolemaios var överens angående förutsägbara och observerade data gällande månens förmörkelser.

I Almagest, bok V, kan man finna att Hipparchus fann allvarliga avvikelser från de förutsägbara longitudinella positioner för månen, som ej var förknippade med någon syzygie, det vill säga någon nymåne eller fullmåne, speciellt i närheten av kvadranterna. Hipparchus kunde inte få fram någon varaktig teoretisk bild av månens rörelse, till detta hade han för lite och oregelbunden fakta. Ptolemaios, var medveten om Hipparchus funna avvikelser, han gjorde en systematisk undersökning av de observerade bevisen, och lyckades visa ett korrekt mönster av dessa störningar. Ett arbete som måste ha haft inberäknat stort numeriskt arbete, eftersom hans slutsatser inte kan ha nåtts utan att han gjort en noggrann studie av varje fall.

Ptolemaios härledde ett mönster från de numeriska värden som följer;

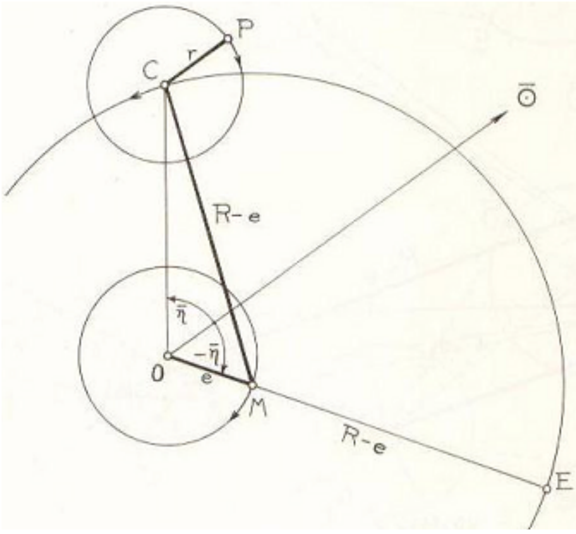
1. ingen avvikelse för syzygier

2. ingen, eller bara lite, avvikelse uppträder i kvadranterna, under de förutsättningarna att månen är simultant nära apogeum eller perigeum på epicykeln.

3. de maximala avvikelserna finns i kvadranterna samtidigt som när månen är nära maxekvationen som orsakas av de epicykliska avvikelserna. Avvikelsernas effekt ökar alltid för den epicykliska oregelbundenheten.

Ptolemaios förstod att just denna typ av skiljaktigheter från den enkla teorin skulle bli resultatet, då storleken av syzygien ökar för en kvadrerad epicykel när den jämförs med dess storlek i syzygien, som tidigare bestämts från eklipsen. En förändring av den aktuella storleken skulle vara en motsägelse till hela känslan som fanns för de matematiska modellerna inom den grekiska astronomin, men samma effekt skulle nås om man flyttade epicykeln närmare den kvadratiske observeraren. Således fås en större storlek av den uppenbara storleken.

Ptolemaios gav deferenten för månens omloppsbana en egen excentrisk rörelse, beroende av solens elongation. Vid konjunktion och opposition, stod centrum C för epicykeln kvar vid det ursprungliga avståndet, R = 60, från observeraren O; medan elongationer på 90º och 270º gav avståndet OC ett reducerat värde som gavs av den största observerade minskningen av den epicykliska ekvationen.



Figur 35

Den bildliga anordningen uppfunnen av Ptolemaios för att nå dessa periodiska variationer av avståndet uppritas i figuren ovan. Benet OM, med längden e, roterar bakåt med samma vinkelhastighet med avseende på observerarens riktning → solens medelvärde som i elongation $\overline{\eta}$ mellan de ökande medelvärdena för solen respektive månen, epicykeln centrum C. I syzygie är $\overline{\eta}$ 0º eller 180º, därför är $2\overline{\eta} = 0$ och avståndet OC = R. I kvadranterna är dock $\overline{\eta} = 90°$ eller 270º, följaktligen är $2\overline{\eta} = 180$ och avståndet OC vid dess minimum R-2e, och gör således epicykelns oregelbundenhet så verkningsfull som möjligt. Uppenbart kan denna typ av rörelse vara förklaringen till de empiriska data, 1, 2 och 3.

Effekten av denna nya modell för månens teori av dess longitud, utöver ekvationen från den enkla epicykliska modellen, är känd som månens andra olikhet, och vanligtvis identifierad med den periodiska olikheten känd i den moderna himmelska dynamiken som evektion, ojämnhet i månens rörelse orsakad av störningar från solen och planeterna, till vilken Thyco Brahe, dansk astronom under 1500-talets senare del, tillade ytterligare en term, variationen, vilken når sitt maximum mellan syzygie och kvadranterna, och är 0 vid båda dessa platser.

I denna figur kallar Ptolemaios cirkeln med centret i M och radie R-e för excentern, E är dess apogeum. Värt att nämna är att centret C för epicykeln inte roterar med en konstant vinkelhastighet runt M men fortgår med medelhastighet bara sett från O, eftersom vinkeln COE ökar med den dubbla elongationen $2\overline{\eta}$. I Ptolemaios månteori finner man grunden för konceptet ekvanten, vilken spelar en stor roll i hans planetteori. Detta är idén att likformiga rörelser kan referera till en annan punkt från det geometriska centret av en cirkulär bana.

Månens rörelse på epicykeln har flera paralleller till planeternas teori. Man kan knappast tvivla på att månens teori var en modifikation av den ursprungliga epicykliska rörelsen. Nästan samma övergång av de fundamentala koncepten mellan månens teori och planeternas modeller kan ses i den sena islamistiska och Kopernikanska utvecklingen.

Ptolemaios härleder sina data till sin nya modell från observeringar av månens rörelser, vilka han presenterar utan vidare diskussion. Från hans tidigare undersökningar av månens förmörkelser, vet man att maxekvationen är 5;1º. Med den nya modellen vill han veta hur stort detta värde kommer bli då månen kvadreras. Motsvarande observationer borde då uppfyllas så nära som möjligt med följande villkor;

1. månens observerade rörelser ska vara ekvivalenta till medelrörelsen eftersom detta indikerar att synlinjen till månen är tangentiell till epicykeln och följaktligen ekvationens maximum.

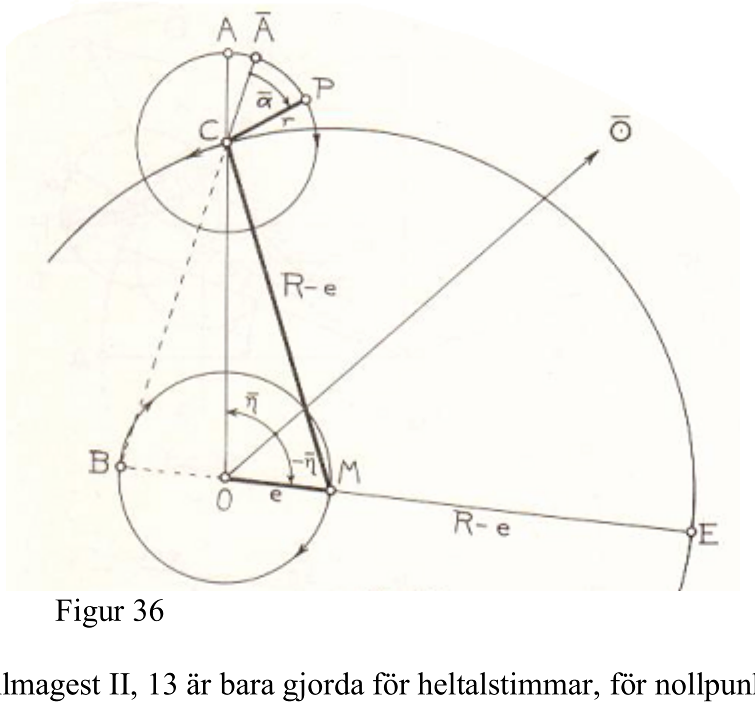
2. elongationen från solen ska vara nära ±90º.

3. den longitudinella komponenten av månens parallax ska vara 0.

Det sista villkoret är viktigt eftersom man inte vet hur mycket närmare månen kommer vara observeraren i elongation, $\overline{\eta}$ = ±90º i jämförelsevis motavståndet då $\overline{\eta}$ = 0. Därför vet man heller inte hur mycket av de observerade longituderna är lika med parallaxen och det är därför nödvändigt att välja observationer som är belägna på de högsta punkterna på ekliptikan, där förändringen av det geometriska avståndets endast påverkar observerarens latitud och inte månens longitud.

Ptolemaios resultat han får från sina observationer, med denna metod, se figur 35 ovan, leder till otrevliga konsekvenser för det geometriska avståndet till månen. Det största avståndet är R + r = 65;15 och det minsta avståndet blir, R – 2e – r = 34;7. Detta storleksförhållande är 2:1, vilket nästan skulle vara i samma storleksförhållande som månens diameter och för dess parallax. Detta är en uppenbar motsägelse till direkta observerbara fakta och visar att Ptolemaios modell måste innehålla några oriktiga element. Ptolemaios berörde aldrig denna svårighet utan lät den bero.

I hans diskussioner om den andra olikheten får Ptolemaios fram samma värde för deferentens excentricitet, e; detta värde får han till 10;19 och får också en symmetrisk lokalisation för punkterna B och M. se figur 36.



Figur 36

Tabellerna i Almagest II, 13 är bara gjorda för heltalstimmar, för nollpunkter och för stjärntecken och för stora geografiska latituder, vilket gör att värdena kan bli missvisande och inte tillräckligt noggranna. Det är svårt att nå den effekt som små förändringar i de givna värdena skulle orsaka i vissa kritiska vinklar.

Bok VII-VIII, Fixstjärnorna

Dessa två böcker behandlar Ptolemaios teorier kring de fixa stjärnorna. Han visar att stjärnorna alltid behåller sin relativa position till varandra. Stjärnsfären rör sig längs ekliptikan. Denna rörelse härrör sig till ekliptikans poler.

Ptolemaios upprättar en stjärnkatalog i kapitel åtta. Den innehåller 1025 stjärnor och 48 konstellationer, vars namn vi använder även idag; Ursa Minor (Lilla björn), Ursa Major (Stora björn), Draco (Draken), Orion och Cassiopeia för att namnge några. Vid sina observationer använde han sig av en så kallad astrolabel, se figur 70 på sidan 76.

Det vetenskapliga intresset för dessa kapitel har varit mycket stort. Katalogen användes ända in på 1700-talet.

Bok IX – XI, Planetteori

I de sista fem böckerna diskuteras planetteori. Man tror att det är Ptolemaios största bidrag i boken. Ingen har tidigare kommit med någon tillfredsställande teoretisk beskrivning av planetrörelserna. Ptolemaios kombinerade sina modeller med epicykler och excentern för att bygga modell för planetrörelser. Denna nya teori är ett mästerligt verk och var allenarådande under de kommande fjorton århundradena. Han skapade sofistikerade matematiska modeller som stämde med gjorda observationer och, fastän komplicerade, beskrev de planeternas rörelser ganska bra. Han förklarar planeternas skiftningar i ljusstyrka genom sin epicykliska modell. När epicykeln rullar runt på den större deferenten kommer planeterna omväxlande närmare och längre bort från jorden. På liknande sätt förklaras också planetslingorna, de ögleformade banorna planeterna beskriver på himlavalvet.

Teorin av månens olikheter och av planeternas rörelse, både i longitud och i latitud, är en stor prestation. De vackra modellerna, härledningarna av de fundamentala parametrarna från noggrant utvalda observationer, gjorde det extremt svårt att introducera mer än betydelselösa modifikationer av grundteorin. Även Ptolemaios bristfälliga modell för månens andra olikhet med avseende på avståndet fick ingen riktig modifikation förrän långt senare. Ptolemaios planetteori visar inga sådana uppenbara skiljaktigheter mellan förutsägbara och observerbara fenomen trots att systematiska observationer skulle ha avslöjat olikheter som ämnade ha orsakat mindre omarbetningar för de grundläggande parametrarna. Ptolemaios själv ändrade på några av sina element av den teori han först presenterades i Almagest. Han var också helt medveten om att de data angående planeterna han hade tillgång till, inte var lika tillförlitliga som de uppgifter han hade för solen och månen.

Den ptolemaiska modellen ansågs vara beräknad snarare än fysisk. Eventuella avvikelser från observationer låg vanligtvis inom observationsmetodernas felmarginal. Man ville ge en geometrisk förklaring till de fenomen man studerade. I princip är det möjligt. J-L Lagrange, italiensk matematiker och astronom, 1736-1813, visade att alla rörelser längs himmelsekvatorn kan approximeras godtyckligt nära genom epicykler och en mer modern version av detta resultat är gjord av nutida matematikern Sternberg (1969).

Ptolemaios följde de forntida astronomerna när han skulle bestämma ordningen för de olika planeterna. Han placerade solens sfär i mitten, precis som de innan gjort, med Saturnus, Jupiter och Mars utanför. Dessa tre bildar tillsammans de yttre planeterna. Venus, Merkurius och månen placerades innanför solen viket gör att Venus och Merkurius benämns som de inre planeterna. Fördelen med detta var att solen delade de två grupperna naturligt.

Nu skulle han beskriva de fem planeternas uppenbara rörelse med termer som likformiga och cirkulära rörelser eftersom det var den enda rörelsen som var förenlig med den gudomliga naturen, oregelbundenhet var främmande för dem.

Ptolemaios introduktion till Almagest IX

Absoluta avstånd tar ingen plats i Ptolemaios planetära teori; alla dimensioner i hans modeller för varje planet uttrycks i enheter av radien, R = 60, för deferenten. I bokens början gör Ptolemaios vissa kommentarer av de fysikaliska arrangemangen för planeternas omloppsbanor. Han skriver bland annat att praktiskt taget alla astronomer håller med honom när han antar att Saturnus, Jupiter och Mars är närmare oss än de fixa stjärnorna, men är längre bort än solen. Det fanns, trots allt, svårigheter angående Venus och Merkurius, som av tidigare astronomer placerats mellan solen och månen. Senare astronomer hade meningsskiljaktigheter angående detta, eftersom denna ordning skulle medföra förekomsten av passager. Därför placerade de alla fem planeternas omloppsbanor utanför solen.

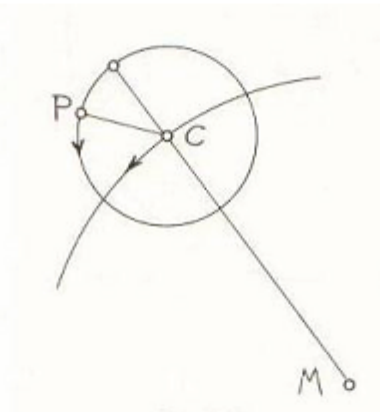
Ptolemaios delade inte denna uppfattning. Han fann det mer sannolikt att planeterna med en begränsad elongation, var separerade av solen från dessa planeter som nådde opposition. Ptolemaios påpekar att ingen teori skulle placera en planet så nära oss att en observerbar parallax skulle bli resulterande. Man får komma ihåg att solens parallax ännu inte hade blivit bestämd, utan bara indirekt genom månens parallax, då genom dess eklipser. Därför motsäger inte möjligheten att uppskatta solens avstånd det faktum att ingen parallax för Venus eller Merkurius kunde upptäckas, även om deras omloppsbanor är närmare oss än vad solen är.

Det finns ingen enhetlig teori om de fem planeterna, som skulle ha varit att föredra. Merkurius avvek speciellt från de andra planeternas uppförande. Mars, Jupiter och Saturnus hade dock så mycket gemensamt att de kunde antas ha samma grundläggande teorier. För Venus kunde han dock använda en del av denna teori.

Ptolemaios fasthåller tydligt att avstånden för planeternas problem bara kan lösas genom mätningar av parallaxen och måste således förbli obesvarade. Från detta kan man se att han inte tänker i de banorna för närliggande sfäriska arrangemang, en hypotes han senare kom att utveckla i ”Planetary Hypotheses”. Vad som är mer viktigt är att det faktum att han inte såg att sambandet mellan epicyklernas centrum för Venus och Merkurius och solen kunde leda till en uppskattning av dess absoluta avstånd.

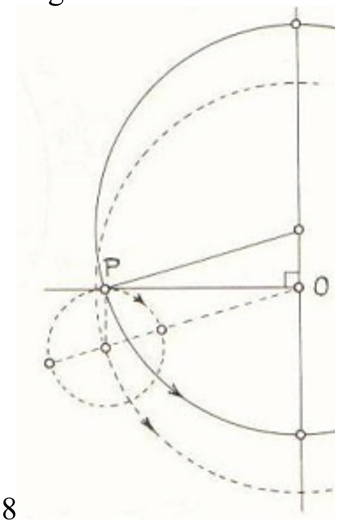
Det andra kapitlet i Almagest, bok IX, behandlar problemet att utveckla en planetär teori för vilken det filosofiska postulatet ligger till grund. De observerade oregelbundenheterna för dessa planeters rörelse är resultatet av en kombinerad likformig rörelse. Ptolemaios hävdar att ingen vetenskapsman tidigare har lyckats med detta.

Ptolemaios skiljer på två olika oregelbundenheter för planeternas rörelse; en med avseende på ekliptikan som gäller planeternas generella rörelse i longitud. Den andra avser planeternas observerbara tillbakagående rörelse med avseende på solen. I Almagest, bok IX, diskuterar Ptolemaios generellt dessa olikheter och försöker klarlägga att det som förklarar de empiriska värdena är en epicyklisk modell. Vilket betyder att planeterna som rör sig på en epicykel betyder samma som att en epicykels centrum rör sig på deferenten.
Se figur 37 nedan.

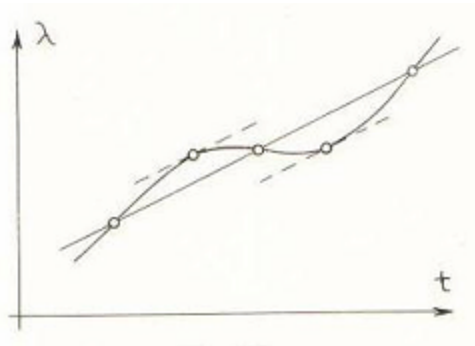


Figur 37

För att undersöka avvikelsen med avseende på ekliptikan, måste man se till att planeternas position alltid är i samma position med avseende på solen, det vill säga i opposition eller i en stationär punkt, latitud komponent ignoreras. Observationer visar då att avståndet mellan sådana punkter är större i vissa delar av ekliptikan än i andra och att tiden mellan den minsta hastigheten till medelrörelsen överstiger tiden mellan medelrörelsen och den snabbaste utvecklingen. Ett sådant uppträdande, säger Ptolemaios, kan representeras av en epicykel eller av en excenter eftersom, med första modellen, uppträder medelrörelsen i observerarens tangentiella synlinje till epicykeln, med andra modellen vid kvadranten med avseende på apsidallinjen, där den minsta utvecklingen uppträder vid apogeum och den snabbaste vid perigeum. Se figur 38 nedan till vänster.



Figur 38

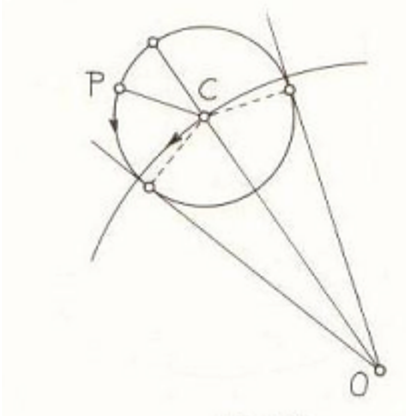


Figur 39

Ptolemaios anser det vara mer naturligt att anta att den excentriska modellen framskrider i ekliptikan vara riktig, annars skulle hans beskrivning, för epicykeln med avseende på solen, lett till en epicykel-epicykel.

För att studera oregelbundenheten med avseende på solen, måste sekvenserna för de synodiska fenomenen observeras och sedan jämföras med planetens framåtskridande i longitud. Man finner då att tidsförhållandet mellan planetens framåtskridandets medelvärde och minimivärde alltid är mindre än mellan den maximala hastigheten och medelvärdet. Se figur 39 ovan till höger.
Detta, förmodade Ptolemaios, uteslöt en excenter eftersom bågen mellan den minsta hastigheten, vid apogeum se figur 38, och medelhastigheten, vid kvadranten, skulle överstiga bågen mellan medel och maxhastigheten, vid perigeum, till skillnad mot erfarenheten. Denna

observerade asymmetri kunde förklaras med en roterande epicykel, som i figuren nedan, där den maximala hastigheten tillhör den större bågen. Detta var det avgörande till att den roterande epicykliska modellen skulle användas, när man väl bestämt att det var en epicyklisk modell som skulle användas.



Figur 40

Ptolemaios beskriver sin modell för planeterna noggrant, vilken är densamma för alla planeter med undantaget Merkurius som han var tvungen att göra vissa modifikationer för. För alla planeterna gäller det att deferenternas apsidallinjer deltar i precessionen, vilken är 1° per århundrade. Detta gör att deras apsidallinjer är fixa gentemot stjärnorna, jämfört med solens teori vilken antas ha en fix tropisk longitud för apogeum. Ett sista antagande gäller ett lutande plan för deferenternas plan med avseende på ekliptikan samt ett lutande plan för epicyklarna med avseende på deferenterna; dessa antagande gjordes för att förklara planeternas latitud.

Medelrörelsens parametrar

De två komponenter som representerar planeternas rörelse i Ptolemaios teori, består av epicykelns centrums rörelse på deferenten och av planetens rörelse självt i epicykelns periferi. Den första beskriver framåtskridandets medelvärde i longitud, den andra redogör oregelbundenheten som orsakas av de synodiska fenomenen, speciellt de retrogärda rörelserna som uppträder i den fixa relation gentemot solen.

Innan dessa nya geometriska påfund kom i stånd, hade de babyloniska astronomerna upptäckt flertalet identiteter som anpassade de upprepade periodiska synodiska fenomen. Det var från dessa identiteter Ptolemaios härledde de första närmevärdena för medelvärdet för vinkelhastigheten i epicykelns centrum samt till dess rörelses oregelbundenhet.

Om N är ett heltal för det tropiska året, en vårdagjämning till nästa, R är ett heltal för planetens rotation i longitud; longituden räknas då med avseende på vårdagjämningen, vilket var Ptolemaios definition av det tropiska året, samt att A är ett heltal av den synodiska perioden.

Då gäller för de yttre planeterna att;

$$N = R + A$$

Goda numeriska närmevärden från den tidiga babyloniska astronomins tid fanns att tillgå och hade följande värden;

	♄ Saturnus	♃ Jupiter	♂ Mars
N (tropiskt år)	59	71	79
R (rotation i longitud)	2	6	42
A(synodisk period)	57	65	37

Eftersom de två innersta planeterna har en begränsad elongation från solen, gäller att;

N = R

och A är oberoende.

Följande värden kommer från de babyloniska astronomerna för de inre planeterna;

	♀ Venus	☿ Merkurius
N = R(tropiskt år = rotation i longitud)	8	46
A(synodisk period)	5	145

Ptolemaios förbättrade teorin av planeternas rörelse och introducerade några korrigeringar för dessa relationer som han infogade i sina egna tabeller i Almagest bok IX.

De justerade relationerna antogs för varje fall motsvara ett exakt antal fullständiga oregelbundenheter.

I Ptolemaios tabeller utgår han som vanligt från det tropiska året; 365;14,48 dagar; hans tabeller med den nya teorin blev;

♄ **Saturnus**	59 år +1;45 dagar → 2 varv +1;43º	A = 57
♃ **Jupiter**	71 år – 4;54 dagar → 6 varv - 4;50º	A = 65
♂ **Mars**	79 år + 3;13 dagar → 42 varv + 3;10º	A = 37
♀ **Venus**	8 år – 2;18 dagar → 8 varv – 2;15º	A = 5
☿ **Merkurius**	46 år + 1;2 dagar → 46 varv + 1º	A = 145

Parametrarna för medelrörelsens longitud och oregelbundenhet kan härledas från dessa värden i tabellen och ligger till grund för medelrörelsetabellerna i Almagest IX, kap 4.

Vi har till exempel att Saturnus oregelbundenhet för den dagliga rörelsen är;

59 år + 1;45 dagar → 5,59,11;18,12 dagar,

viket motsvarar; 57 * 6,0 = 5,42,0º för den oregelbundna rörelsen.

Som ger;

$$\frac{5{,}42{,}0}{5{,}59{,}11;18} = 0;57{,}7{,}43{,}41{,}43{,}40^{\circ} \textit{ per dag}$$

ett tal som återfinns i hans tabeller.

Om man subtraherar detta värde från medelrörelsen för solen, ty N = R + A, får man rörelsens medelvärde för Saturnus i longitud;
Detta är;

$$0;2,0,33,31,28,51^{\circ} \text{ per dag.}$$

Från de två sistnämnda värdena härleds alla värdetabeller för timmar, för 30 dagar, för enstaka och 18 egyptiska år. För de innersta planeterna är medelrörelsen i longitud identisk med medelrörelsen för solen.

En jämförelse mot de värden vi har idag för planeternas period, visar att uppgifterna för de yttre planeterna är väldigt nära, medan det för de inre planeterna inte stämmer lika bra. I denna jämförelse har vi räknat med det sideriska året, vilket är 365,26 dagar, gentemot Ptolemaios tropiska år som är 365,2466 dagar. Det blir en ungefärlig sammanställning i modern notation av de olika planeternas perioder.
I den sista kolumnen är Ptolemaios värde för antalet tropiska år och dagar, från tabellen ovan, dividerat med dagens värde för den sideriska perioden.

	Period i dagar, baserat på nuvarande sideriskt år	**Antal varv för Ptolemaios data**
♄ **Saturnus**	10759,436	2,003
♃ **Jupiter**	4332,556	5,984
♂ **Mars**	687,0	42,005
♀ **Venus**	224,7	12,995
☿ **Merkurius**	87,95	191,045

Om man bara tittar på heltalsdelarna för antalet varv och jämför dessa med Ptolemaios framräknade värden ser man att värdena för Saturnus, Jupiter och Mars ligger väldigt nära varandra. För de inre planeterna skiljer sig däremot värdena kraftigt. Ptolemaios fick knappt 8 varv för Venus och bara 46 varv för Merkurius i hans tabell medan vi har fått 12 varv respektive 191 varv.

De yttre planeterna

Mars, Jupiter och Saturnus
Varför de tre yttre planeterna, Mars, Jupiter och Saturnus, kunde behandlas på samma sätt berodde inte bara på att de hade liten excentricitet utan visade också att de hade samma typ av observerbara fenomen. Många av dessa företeelser var periodiska eller i alla fall nästan periodiska så länge som de stegvisa hädelserna separeras av olika tidsintervall som varierade med det konstanta medelvärdet.

Alla planeter påminde om solen och månen, eftersom de hade en rörelse från väst till öst med varierande vinkelhastighet bland de fixa stjärnorna. Rörelsen var dock tillräckligt regelbunden för att ge värden för dess sideriska och tropiska period. Detta gavs enligt;

$$T_s\omega_s = 360° \quad och \quad T_t\omega_t = 360°$$

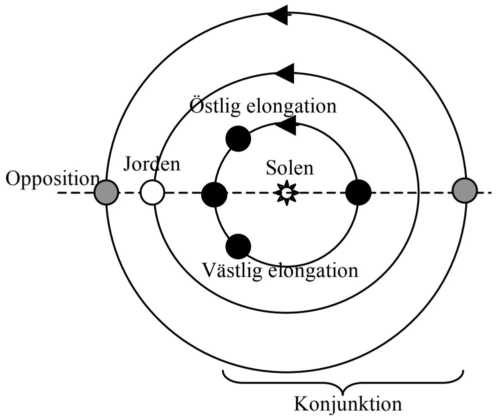
där s = siderisk och t = tropiskt.

Eftersom den direkta rörelsen inte var likformig, kunde man också definiera en anomalistisk period, där planeterna återkommer till samma hastighet. Detta definierades enligt;

$$T_a\omega_a = 360°$$

Planeterna visade ett flertal olika synodiska fenomen. Det visade sig att planeterna överger sin banas riktning; den stannar upp för ett ögonblick, fortsätter i en båge i västlig riktning, för att återigen stanna upp efter bågens slut och sedan återgå till sin ursprungliga bana. En annan besynnerlig sak var att Venus och Merkurius båda hade en begränsad elongation gentemot solen, som de ibland stod i konjunktion till. Medan de andra planeterna både kunde stå i konjunktion och opposition. Man kunde koppla samman fenomenen för opposition med den retrogärda rörelsen på sådant sätt att oppositionen alltid befann sig i mitten av den bakåtgående förflyttningen.

Elongationen är vinkeln mellan solen och en planet sett från jorden, när en planet står i konjunktion, menas det att himlakroppen är placerad antingen mellan solen och jorden, eller på andra sidan om solen. När en planet står i opposition, menas det att planeten är placerad utanför jorden, detta kan bara de yttre planeterna göra.



Observera att denna bild avser dagens astronomis teori

Figur 41

De retrogarda händelserna för planeterna skedde vid ganska oregelbundna intervall, likväl kunde man definiera ett medelvärde för den synodiska perioden mellan två fenomen av samma slag. Detta definierades som;

$$T_{syn}\omega_{syn} = 360°$$

Alla yttre planeternas latitud varierade mellan ett maximum i norr och ett minimum i söder, med samma numeriska värde. Detta gav möjligheten att kunna mäta ytterligare en period; ”the draconitic”, det vill säga en period med avseende på latituden. Även detta skede har en motsvarande vinkelhastighet och definierades enligt;

$$T_d\omega_d = 360°$$

detta kallades för medelvärdets rörelse i longitud.

Ptolemaios startade med att beräkna ekliptikans longitud utifrån vårdagjämningen, inte från någon fix stjärna. Detta medförde att den sideriska perioden inte spelade någon roll, men kunde härledas från det tropiska eftersom den retrogarda rörelsen av dagjämningspunkterna bara var något kortare än den tropiska perioden. Med Ptolemaios mått på precessionen och om vinkelhatigheternas medelvärde mättes i grader per år, fick man att;

$$\omega_t = \omega_s + \frac{1}{100^\circ}$$

Ptolemaios trodde också att planeternas omloppsbanors nodlinjer var fixa gentemot stjärnorna. Det betyder att ;

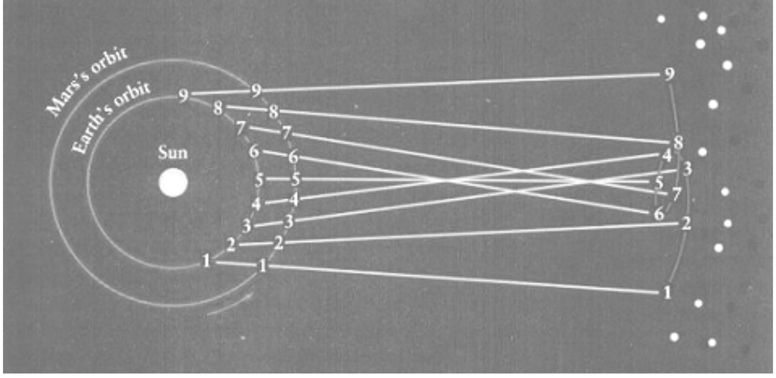
$$T_d = T_s \quad och \quad \omega_d = \omega_s$$

Ptolemaios anomalistiska period kan sammankopplas med Keplers teorier för en planets omloppsbanor ur ett heliocentriskt perspektiv, vilket är svårt i ett geocentriskt solsystem. Kepler var en tysk astronom och matematiker, 1571-1630. Hans anomalistiska period, i detta sambands avseende, är densamma som den synodiska period vi idag använder. I Almagest använder Ptolemaios sig av ”oregelbundenhet” i flera olika meningar och avseenden och kan enligt O. Pedersen ge ett vilseledande intryck.

De retrograda rörelserna

Första gången, vad man vet, en rationell förklaring till planeternas bakåtgående fenomen gjordes utfördes av Eudoxos, en grekisk astronom och matematiker från 300-talet f. Kr. Han försökte förklara planeternas rörelser med koncentriska sfärer. Under 200-talet f. Kr. gjorde Apollonius den första teorin för planeternas rörelse med hjälp av en excenter och epicykliska rörelser, vilken sedan Ptolemaios kom att bygga sina egna teorier på.

Hur kommer det sig att man såg planeterna gå i dessa märkliga ögleformiga banor? Bilden nedan visar hur planeten Mars förflyttar sig gentemot stjärnorna ur ett heliocentriskt perspektiv. Jorden går i sin bana fortare än vad Mars gör runt solen, detta gör att jorden passerar Mars i sin innerbana. Under denna förbipasserande tid, punk 4-6, ser det ut som om Mars gör en bakåtgående rörelse när den ses med stjärnorna som bakgrund och Mars får den ögleformade rörelse som Ptolemaios såg och försökte förklara. Detta fenomen får alla de yttre planeterna när jorden passerar dem i sin bana.



Figur 42

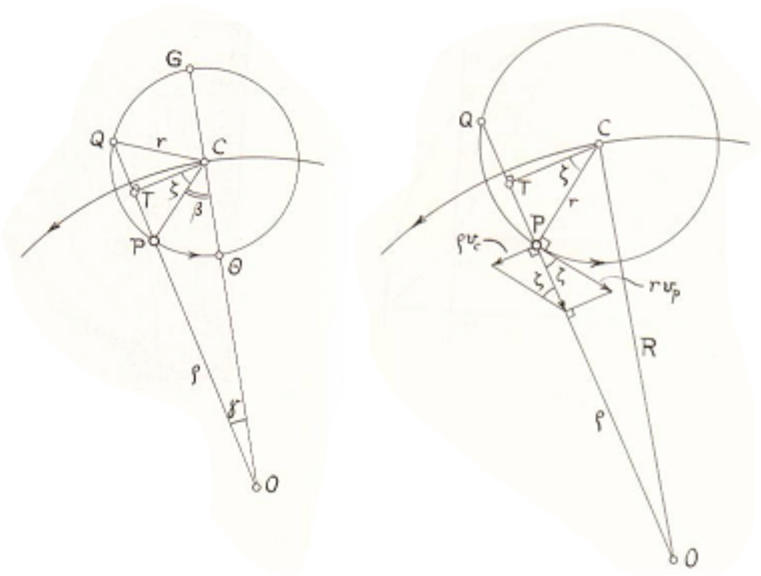
Ptolemaios sa att om en planet, befinner sig vid punkt P på dess epicykel så ser den ut att vara stationär för en observerare O. Denne observerare befinner sig i centrum av deferenten. Då gäller sambandet;

$$\frac{\rho}{PT} = \frac{v_p}{v_c} \qquad \text{(1) se figur 43 nedan}$$

Man har att v_p är planetens vinkelhastighet på dess epicykel, med avseende på riktningen OC, och vinkelhastigheten, v_c, gäller för C sett från O med avseende på någon fix stjärnas riktning. Avståndet mellan P och O betecknas med ρ. P: s position är som i figurerna nedan och kallas för den stationära punkten. En andra stillastående punkt bildas symmetriskt med avseende på radien OC. Bågen som bildas mellan dessa stationära punkter visar planetens återgående rörelse.

Ett modernt bevis för detta samband fås om man tänker sig att P är fixt när den resulterande vektorn av rörelsen runt O och C pekar mot O. då får man att;

$$\sin\varsigma = \frac{\rho v_c}{r v_p} = \frac{PT}{r}.$$



Figur 43

En planets rörelse inte kommer att bli retrogard när dess hastighet, v_p på epicykeln är för liten jämförelsevis mot rörelsen hos v_c. Formel (1) kan ge en exakt gräns, ingen bakåtgående rörelse kommer att ske när de två stationära punkterna sammanträffar i epicykelns perigeum.

För de olika vinkelhastigheterna har vi att;

$$v_p = \frac{R-r}{r} \cdot v_c \qquad men \qquad v_p > \frac{R-r}{r} \cdot v_c$$

tillfredställer alla planeter.

Ett litet men; den sista formeln här gäller inte för månen sett från solen. Månen kommer inte få en retrogard rörelse eftersom olikheten inte kommer att uppfyllas. Enligt tabell för månen är;

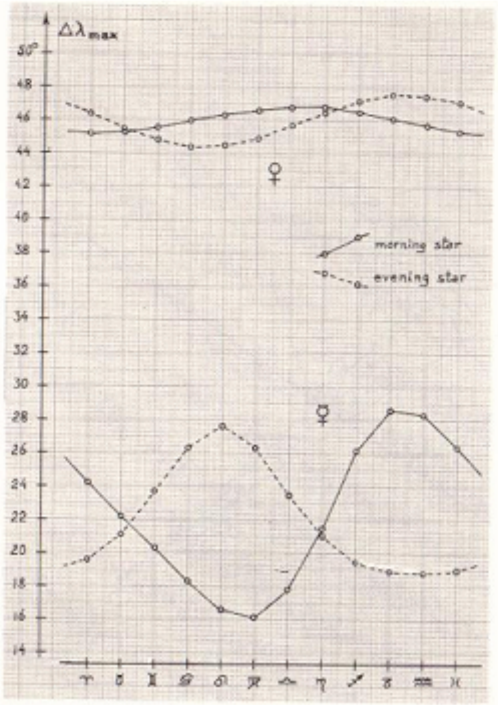
$$v_p \approx 13 v_c \quad men \quad \frac{R}{r} \approx 6{,}28$$

vilket inte uppfyller den sista olikheten.

De inre planeterna

De inre planeterna, Merkurius och Venus, befann sig enligt Ptolemaios mellan månen och solen. Han påtalade att det inte fanns någon upplevd parallax på någon av dessa båda och att man heller aldrig sett någon passage framför solens synbara skiva.

Venus och Merkurius har ett fenomen som särskiljer sig från de yttre planeterna åt, dessa befinner sig aldrig i opposition och ses därför inte runt midnatt, utan syns alltid i närheten av solen. Den maximala elongationen för Venus är 47º och mellan 18º och 28º för Merkurius. När elongationen är östlig och tillräckligt stor, ses planeten som en aftonstjärna ovanför den västra horisonten precis efter solnedgång. När elongationen är västlig syns planeten som en morgonstjärna ovan den östliga horisonten före soluppgång. Mellan dessa perioder finns en osynlig tid då planeterna befinner sig för nära solen för att synas. De flesta teorier om de inre planeterna baseras på observationer av synodiska fenomen. Här visas ett diagram över Venus, överst, och Merkurius då de ses som morgon- respektive aftonstjärna.



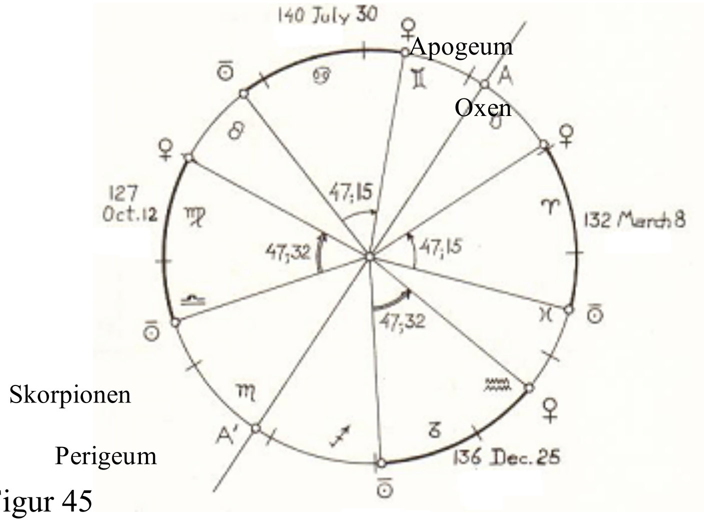
Figur 44

Dessa båda planeter har också avvikelser vad det gäller deras rörelse i himmelsfären. Eftersom de så gott som följer solens bana i ekliptikan fås en avvikelse relaterat till deras position på ekliptikan. Denna oregelbundenhet liknar de yttre planeternas rörelse. En andra avvikelse relateras till planeternas position med avseende på solen och orsakar synodiska fenomen. Mest oregelbunden är Merkurius faser, kan ses i bilden ovan. Normalt kan en fas återkomma regelbundet flera gånger varje år, men avsaknaden av Merkurius synlighet på himlen kan ske under vissa perioder. Detta beror på att Merkurius inte når upp till de elongationer från solen som behövs för att vara synlig som morgon- eller aftonstjärna.

Liksom för de yttre planeterna ligger Venus och Merkurius deferent i ett lutat plan gentemot ekliptikan, men är inte konstant för de inre planeterna.

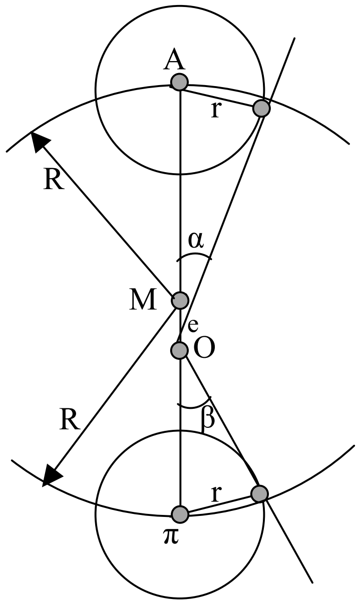
Venus
När Ptolemaios skulle börja studera Venus fanns inte många äldre observationer nedskrivna. Han fick göra iakttagelserna själv och är gjorda med bara några års mellanrum.

Teorin för Venus påminner mer om de yttre planeterna än vad teorin för Merkurius gör. Ptolemaios börjar med att bestämma apsidallinjens position för den excentriska deferenten vilken bär upp epicykelns center. Hans metod var enkel; Venus studerades och han fann att den maximala elongationen var 47;15º för både morgon- och aftonstjärnan. Likheterna i elongationerna tydde på symmetri för epicykelns position med avseende på apsidallinjen. Figuren nedan visar apsidallinjens position i de olika stjärntecknena, gradantalet visar elongationen för olika observationer.



Figur 45

Med någon observation utöver dessa kunde Ptolemaios bestämma apogeum, perigeum, excentriciteten, OM = e, och därifrån få radien r för epicykeln under två olika vinklar. Se figur 46 nedan.



Figur 46

Han får då följande uträkning i modern notation;

$$r = (R+e)\sin\alpha = (R-e)\sin\beta \qquad \Rightarrow \qquad e = R\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} \quad (1)$$

Ptolemaios egen procedur är mer komplicerad, han beräknar enligt följande;

$$r = \frac{R+r}{120} crd2\alpha = \frac{R-r}{120} crd2\beta \qquad (2)$$

Genom att införa R' och e' sådana att R' + e' = 120 får han följande ekvationer;

$$R'+e' = 120 \quad och \quad R'-e' = 120\frac{crd2\alpha}{crd2\beta} \quad från\ vilka\ han\ får$$

$$R' = 60\left(1+\frac{crd2\alpha}{crd2\beta}\right) \quad och \quad e' = 60\left(1-\frac{crd2\alpha}{crd2\beta}\right)$$

Han måste nu byta de införda enheterna så att de gäller för R = 60, och får;

$$e = 60\left(1-\frac{crd2\alpha}{crd2\beta}\right)\cdot\frac{60}{60\left(1+\frac{crd2\alpha}{crd2\beta}\right)} \qquad (3)$$

som är ekvivalent med (1) eftersom den kan skrivas som;

$$e = R\frac{crd2\beta - crd2\alpha}{crd2\alpha + crd2\beta}$$

vilket skulle kunna fås direkt från (2).

Enligt O. Neugebauer ger användningen av (3) onödiga fel i det numeriska utförandet. Ptolemaios fick från (2) och (3) fram värdena;

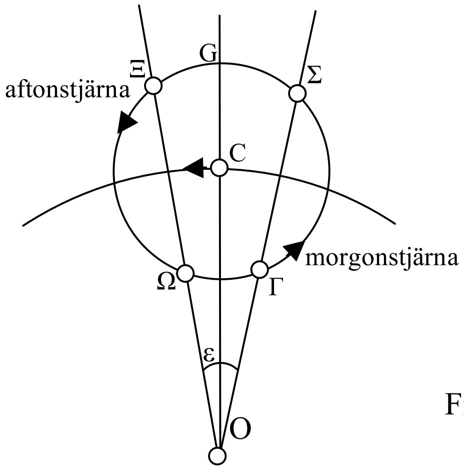
e = 1;15 r = 43;10 (R = 60)[3]

Räkning utan onödiga fel ger;

e = 1;16,48 r = 43;10,48.

Skillnaden för dessa värden har dock ingen större betydelse för Venus position.

Figur 47 visar bilden Venus rörelse på sin epicykel. Två gånger under varje synodisk period kommer Venus bli osynlig, en gång i framåtgående rörelse då planeten står i yttre konjunktion mellan Σ och Ξ och en andra gång, mellan Ω och Γ, då planeten står inre konjunktion och kommer ha en retrograd rörelse.



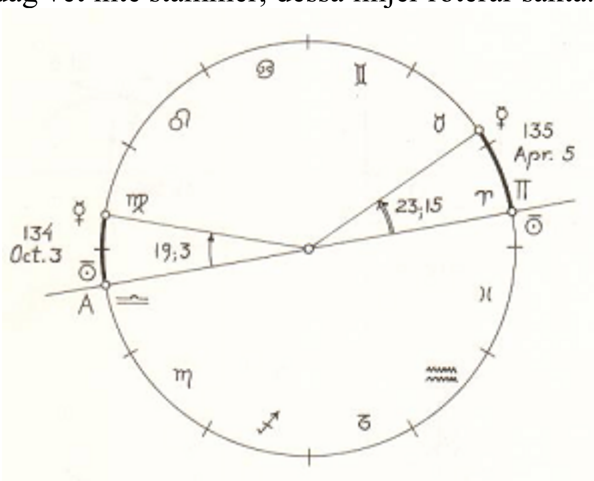
C = solen
O = Jorden
På epicykeln visas fyra olika tillfällen då Venus går i sin bana.

Figur 47

Eftersom OC är observerarens riktning mot solen kommer planeten inte ses när den kommer in till konen med axeln OC och under vissa vinklar ε vid O.

Merkurius
Problemet med att lösa Merkurius gåta började inte med Ptolemaios utan hade redan startat långt före hans tid; även de babyloniska astronomerna under den hellenistiska perioden hade svårt att förstå dess skiftningar mellan dess osynlighet och synlighet. Ptolemaios observationer av Merkurius grundade sig på data från tidigare astronomer och en del var dessvärre mycket felaktiga, enligt O. Pedersen. Datainsamlingarnas tidpunkter var också mycket spridda, några gjordes med 400 års skillnad.

Ptolemaios använde sig av exakt samma metod för att bestämma apsidallinjen som han gjorde för Venus. Han kom fram till att den låg mellan vågen och väduren. Han fick fram att apogeum hade ett värde på 190º, vilket är, enligt O. Pedersen, ett mycket felaktigt värde, ungefär 30º. Apsidallinjerna för både Venus och Merkurius har fixa positioner gentemot stjärnorna, vilket man idag vet inte stämmer, dessa linjer roterar sakta.



Figur 48

Merkurius rörelse på sin epicykel visas på samma sätt som för Venus rörelse på sin epicykel, se figur gällande Venus rörelse på sin epicykel. Merkurius märkliga beteende sker på den synliga sektorn ΞΩ i början av skorpionen och sektorn ΓΣ i början av oxen.

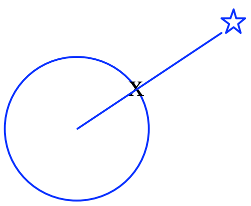
Andra skrivna verk

On the Analemma

Detta verk finns i en latinsk översättning från grekiskan.
”On the Analemma” är en mästerlig liten avhandling av Ptolemaios. Inom astronomins kontext betyder ”analemma” en specifik metod för att beräkna (eller finna), genom geometriska konstruktioner i planet, speciella bågar och vinklar, vilka bestämmer en punkt på den himmelska sfären. Idag kan man kanske kalla det för ”beskrivande/målande geometri”. Ett av användningsområdena är soluret.

Ptolemaios ”Analemma” avhandlar följande problem; antag att den geografiska latituden φ, en specifik tid, timmen h, på en given dag och därefter sollongituden λ är känd. Man vill då veta de speciella rymdkoordinaterna vilka beskriver solens läge vid det givna ögonblicket (eller tidpunkten) på ett sätt som är bekvämt för ”visarkonstruktioner”.
Ptolemaios inställning är att det bara finns tre inbördes ortogonala möjliga riktningar i rymden. Därför är det möjligt att konstruera, med hänsyn till tre ortogonala axlar, tre unikt bestämda stora cirklar på himmelssfären som kan tjänstgöra som referenscirklar för rymdkoordinater på sfären.

Den enhetssfär med observatören i centrum kallas för ”himmelssfären”. Om motsatsen inte specifikt anges, antar man att observatörens läge och jordens centrum sammanfaller. Bara i frågor som rör parallaxer är det nödvändigt att skilja på observatörens position och jordens centrum.

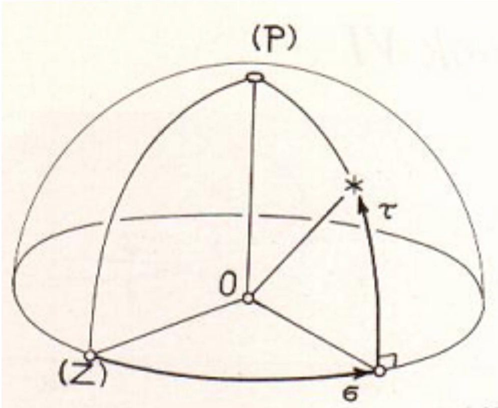


Figur 49

”Synlinjen” mellan observatören och stjärnan (kan även vara månen, solen, planeter) möter himmelssfären i en punkt, vars läge med hänsyn till ett system av ortogonala sfäriska koordinater kräver två bågar, vilka är konventionellt namngivna beroende på det speciella koordinatsystemet.

I allmänhet kan ett system av sfäriska koordinater beskrivas med hjälp av;

a) En bestämd stor cirkel väljs ut som ”grundläggande storcirkel” och en positiv riktning väljs.
b) En av dess två poler väljs ut som ”synlig pol” (P).
c) På denna grundcirkel väljs sen en punkt, Z som ”nollpunkt”.

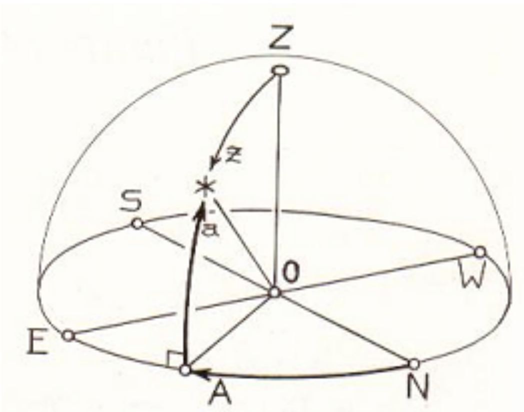


Figur 50

En stjärnas position på himmelssfären kan bestämmas med utgångspunkt från a, b och c och med hjälp av de två bågarna σ och τ. σ mäts i grader från 0˚ till 360˚ längs grundcirkeln med början i Z. τ mäts i grader från 0˚ till 90˚ längs en tänkt båge mellan polerna där 0˚ ligger på grundcirkelns periferi och 90˚ vid polen P.

Sen antikens tider har man använt sig av tre typer av koordinatsystem.

1. Horisontsystemet
   a) Som "grundcirkel" väljs horisonten.
   b) Som "synlig pol" är zenit Z.
   c) Och som "nollpunkt" väljs nordpunkten N (ej att förväxla med nordpolen)



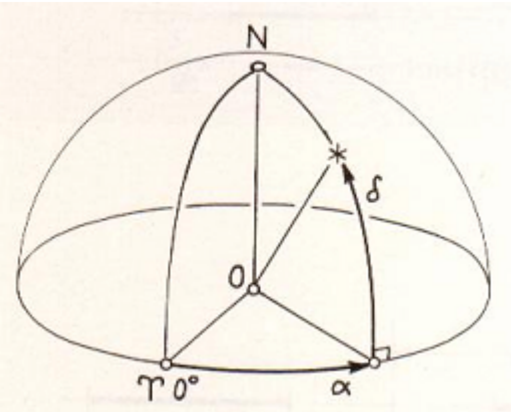
Figur 51

Den stora cirkeln SZN kallas meridianen.

De korresponderande koordinaterna är azimut A och höjden a. Azimut är (enligt Bonniers kompaktlexikon) vinkeln mellan en himlakropps läge och en orts meridian, räknat längs horisonten. Koordinat A spelade nästan ingen roll alls i forntida och medeltida astronomi, medan höjden på ett objekt, speciellt solen, var möjlig att få genom direkta observationer. Komplementet z = 90˚ - a kallas för zenitdistansen.

2. Ekvatorsystemet

a) Ekvatorn utses som ”grundcirkel”.
b) Som ”synlig pol” väljs nordpolen N.
c) Som ”nollpunkt” väljs vårdagjämningspunkten r. Vårdagjämning – den tidpunkt på våren då solen står mitt för ekvatorn och dag och natt är lika långa.



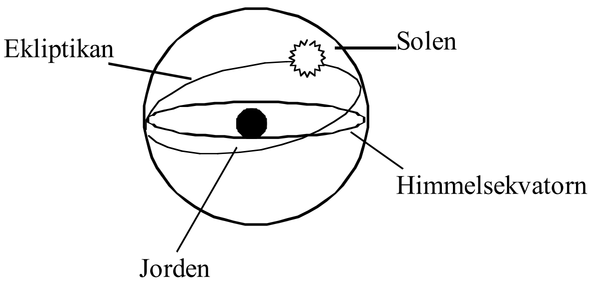
Figur 52

De korresponderande koordinaterna är den så kallade högra uppstigningen α, räknad moturs sedd från N och deklinationsvinkeln δ.
Detta system är det viktigaste i modern tid på grund av att intrument är monterade att följa himmelssfärens rotation runt axeln ON. Tidig astronomi hade bara vetskap om positioner vid givna tidpunkter.

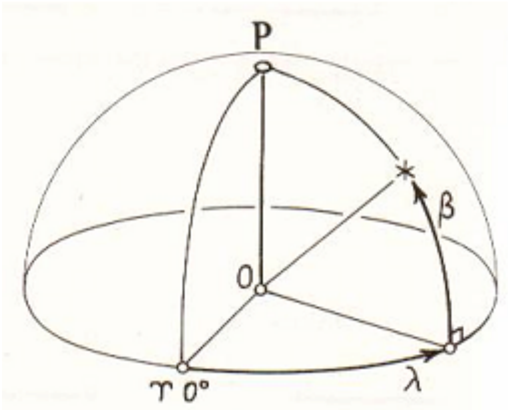
Ekvatorsystemet var av stor betydelse på grund av relaterandet tid med den likformiga ändringen av ”dne högra uppstigningen”. Därav räknas α inte enbart i grader utan även i timmar på så sätt att 24 timmar svarar mot 360º, vilket i sin tur medför att 1 timme = 15º och 0;4 timme = 4 minuter = 1º.

3. Det ekliptiska systemet

a) Ekliptikan är utvald som ”grundcirkel”. Ekliptikan är solens skenbara bana över himlavalvet och den bildar en vinkel på 23,5º med himmelsekvatorn.
b) Som ”synlig pol” väljs ekliptikan pol P, som finns på det norra halvklotet.
c) Som ”nollpunkt” väljs vårdagjämningspunkten r.



Figur 53

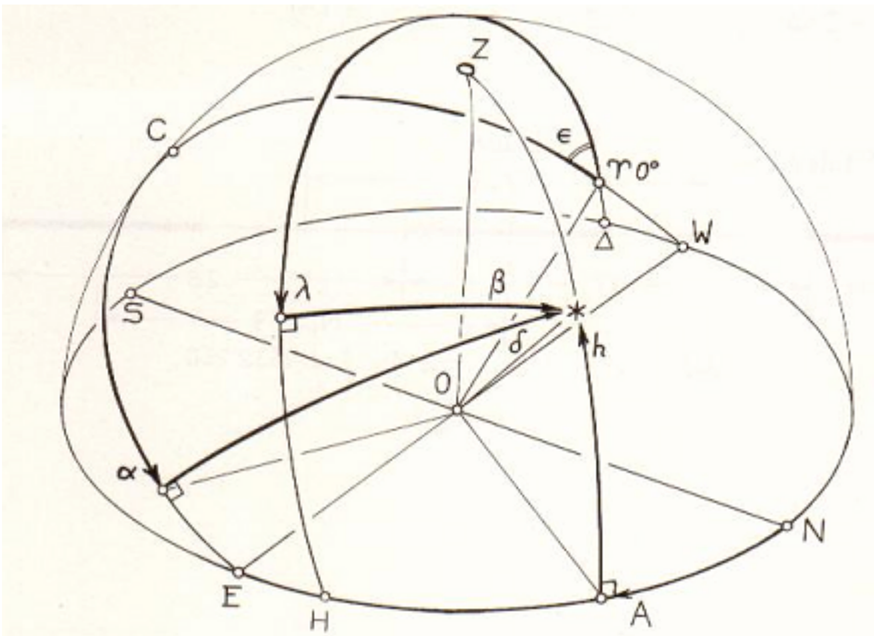


Figur 54

De korresponderande koordinaterna är longituden (längdgraden) λ räknad moturs sedd från P och latituden (breddgraden) β. Longituden mäts inte bara i grader mellan 0º och 360º utan även i 30º-zoner som kallas ”zodiaktecken” eller enbart ”tecken”.

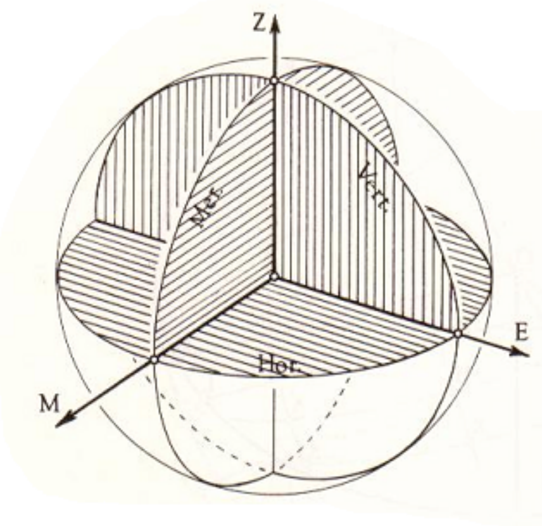
Relationen mellan de olika systemen

Betydelsen av de olika koordinater som används i de tre system som just beskrivits blir uppenbar om de placeras i sina relativa positioner med hänsyn till samma himlakropp. Ekvatorn skär horisonten i punkten E (öst) och W (väst) och når sin högsta höjd, SC i punkten C. Ekliptikan och ekvatorn skär varandra i vårdagjämningspunkten r och i punkten λ = α = 180º. Vinkeln ε mellan dem kallas för ”ekliptikans skevhet”. Ekliptikan och horisonten skär varandra i punkten H och Δ.

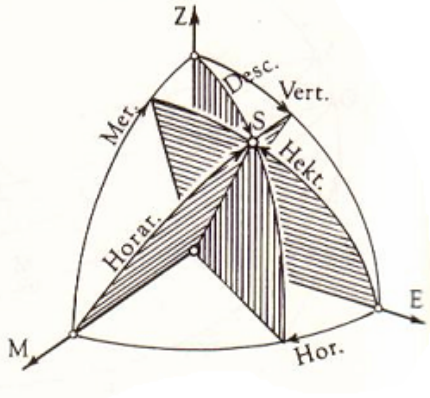


Figur 55

Ptolemaios koordinatsystem



Figur 56



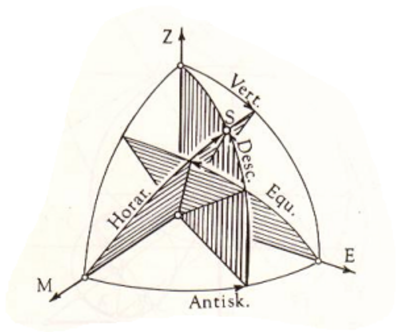
Figur 57

Vi betraktar tre ortogonala koordinatplan (se figur 56); ett horisontellt, ett vertikalt och ett meridiant. Deras genomskärning kallas meridianlinjen som representeras av M-axeln, ekvatoriallinjen E-axeln och ”visaren” Z-axeln.

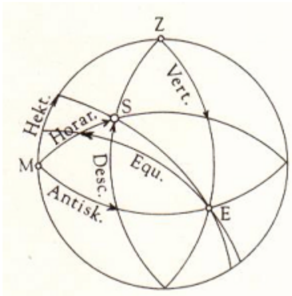
För att kunna bestämma koordinaterna för en godtycklig punkt på sfären, här representerad av solen S introducerade Ptolemaios tre rörliga stora cirklar, en för varje axel (figur 57). Man kan också uttrycka det som att han konstruerade ett plan alltid rörligt i varje par av koordinatplan vilka genomskär en axel. Dessa plan bestämmer en vinkel mellan axlarna och punkten S. Planet som roterar runt E-axeln innehåller ”*hektemoros*”, planet roterande runt M-axeln innehåller ”*horarius*” och det plan som roterar runt Z-axeln innehåller ”*descensivus*”. Dessa namn har inte Ptolemaios kommit på själv utan namnet ”*hektemoros*” är tänkt att referera till de sex årstidsbundna timmarna under vilka solen vandrar från horisonten till meridianen, ”*horarius*” representerar också de timmar under vilka solen rör sig medan ”*descensivus*” är avståndet till zenit.

Vilka par som helst av dessa tre vinklar kan användas till att bestämma positionen av S. Men istället för att använda vinklarna från de rörliga planen, kan man ta de tre vinklarna som uppkommer mellan de rörliga planen och koordinatplanen. Vinklarnas namn kommer av koordinatplanen; ”horizontalis”, ”meridionalis” och ”verticalis”. Vilka par som helst av dessa vinklar beskriver också positionen av S. Dessa två tripplar utgör ”de sex vinklarna” i Ptolemaios koordinater. Det var hans mål att visa hur dessa vinklar kunde bestämmas direkt ur geometriska konstruktioner från givna φ, h och λ där φ betecknar geografiska latituden, h klockslaget en specifik dag och λ sollongituden.

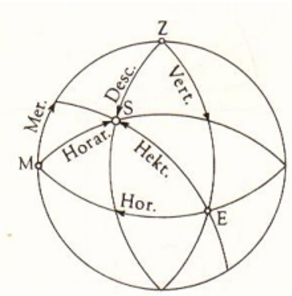
Koordinatsysytemet på det ”gamla sättet”



Figur 58



Figur 59



Figur 60

Själva koordinatplanen var de samma som Ptolemaios, men bara två av dem innehöll S. Ekvatorialplanet tjänade som ett tredje plan oberoende av S. Konsekvensen av detta var att de sfäriska koordinaterna, vilka bestämde positionen av S blev asymmetriska. Bara två av bågarna ”slutade” vid S (figurerna 58 och 59).

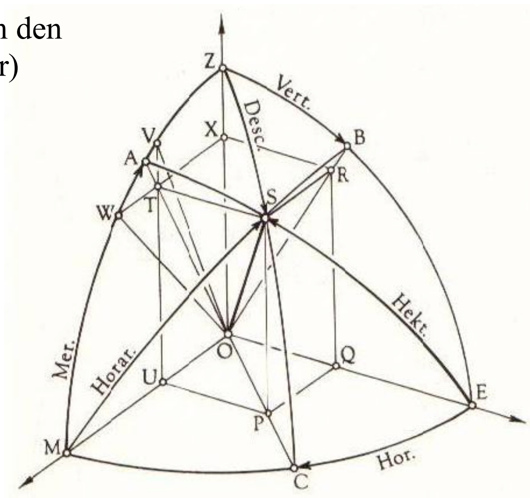
Det är uppenbart att Ptolemaios strikta regelbundna arrangemang representerar ett metodiskat framåtskridande som gjorde sig själv lämplig i den aktuella konstruktionen. Ptolemaios konstruktion är åskådliggörs i figuren 60.

De sex vinklarna

Med hjälp av stegvisa konstruktioner och den slutliga konstruktionen (figuren till höger) fås de sex vinklarna;

1. Bågen MA ger ”meridianus”.
2. Vinkeln SOE är ”hektemoros”.
3. ZW = ZS = ”descensivus”.
4. MV = MS = ”horarius”
5. XOR = ZOB = ”verticalis”
6. UPO = EOC = “horizontalis”

Genom detta är det möjligt att numeriskt bestämma vinklarna genom att mäta båglängderna i fråga



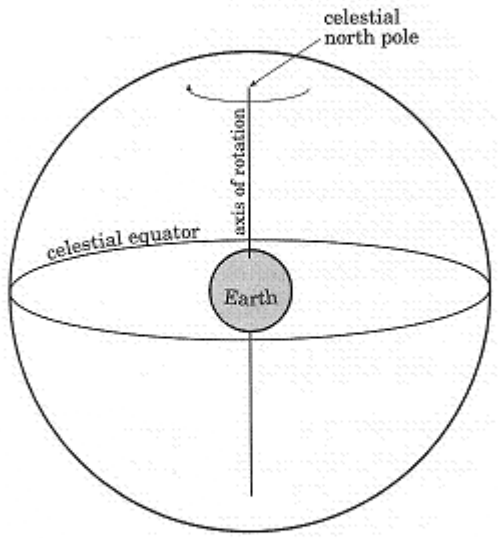
Figur 61

Geografica

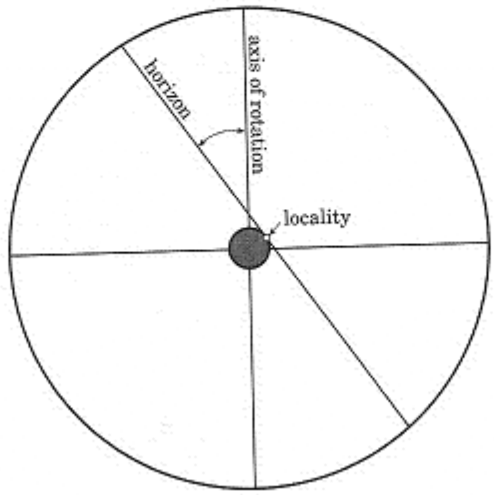
Geografica härrör sig med säkerhet till Ptolemaios senare period i livet, fast den var på planeringsstadiet redan vid tiden för Almagest. Kärnan i den sista boken i Geografica är skriven före en av böckerna i ”Handy Tables”, som man vet är senare daterad än ”Tetrabiblos”.

Geografica är det enda bokverk som behandlar kartografi som överlevt från den klassiska perioden och en av de mest inflytelserika vetenskapliga verk genom tiderna. Ptolemaios arbetade med ”Geografike’ hyphe’gesis” – handledning i geografi - under det andra århundradet. I mer än trettonhundra år var det den mest detaljerade topografiska kartbok över Europa, Afrika och Asien som fanns och den allra bästa referensen i hur man samlar information och ritar kartor. Geografica är uppdelad på åtta böcker och innehåller bland annat en världskarta över den då kända världen.

Ptolemaios använde sina astronomiska observationer och med hjälp av matematiska beräkningar bestämde han geografiska lägen och lokaliseringar. Han introducerade det praktiska i att ange koordinater i latitud och longitud för det som ritats på en världskarta. Då kunde alla, som tagit till sig bokens teorier, själv reproducera Ptolemaios karta som helhet eller bara vissa partier och i vilken skala som helst.



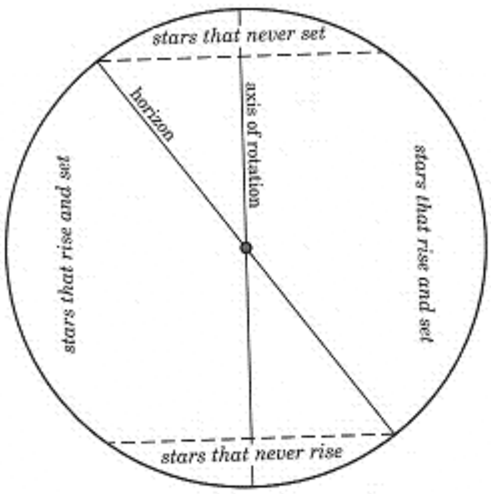
Figur 62



Figur 63

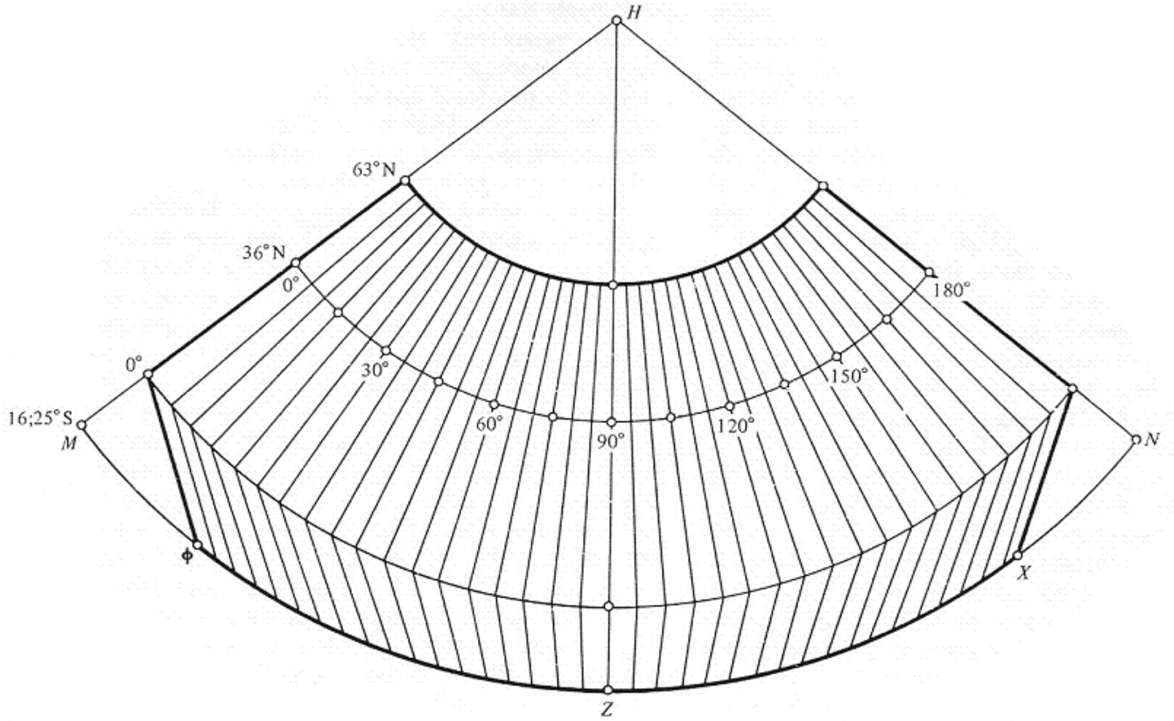
Ptolemaios gör antagandet att läsaren förstår och accepterar kosmos ”två-sfärs-modell”, där himlen ses som en gigantisk sfär som dagligen roterar runt en central axel. I denna stora sfärs centrum befinner sig en stilla jord. Stjärnorna tänktes fixerade vid den himmelska sfärens yta. Som ett resultat av himmelsfärens dagliga rotation beskriver de fixa stjärnorna parallella cirklar, vilka alla är centrerade till polerna och den största av dem är himmelsekvatorn, som är vinkelrät mot rotationsaxeln, figur 62.

Eftersom jorden är en sfär kan man anta ett tangentplan till varje plats på jordens yta. Detta tangentplan är mera känt som horisonten, figur 63. Genom att se jorden som mycket liten i jämförelse med kosmos antar Ptolemaios horisonten som en av de perfekta storcirklarna som tycks dela himmelsfären i två exakt lika stora delar. Horisonten antas, på grund av jordens stillhet, vara fix. Därmed uppstår också en fix vinkel mellan horisontplanet och himmelsfärens rotationsaxel, den så kallade inklinationsvinkeln. Denna inklinationsvinkel är av Ptolemaios känd som latituden, vilken varierar med platsen för observationen. Latituden är också avgörande för vilka stjärnor en observatör kan se och inte se, figur 64. En observatör vid den norra eller södra polen, vilkas latitud är 90º, finna att vissa stjärnor alltid är synliga, medan andra aldrig syns. När inklinationsvinkeln är 0º, är observatören vid ekvatorn och båda polerna är i horisontplanet. Alla stjärnor kommer då att både stiga upp över horisonten och därefter dala ner under den igen. Varje stjärna är över horisonten lika lång tid som den är under. Av detta kan man påvisa att en ort A ligger norr om B, om det finns stjärnor i den norra himmelsfären som alltid syns i A, medan de går upp och ner i B eller om stjärnor som går upp och ner i B aldrig syns i A.

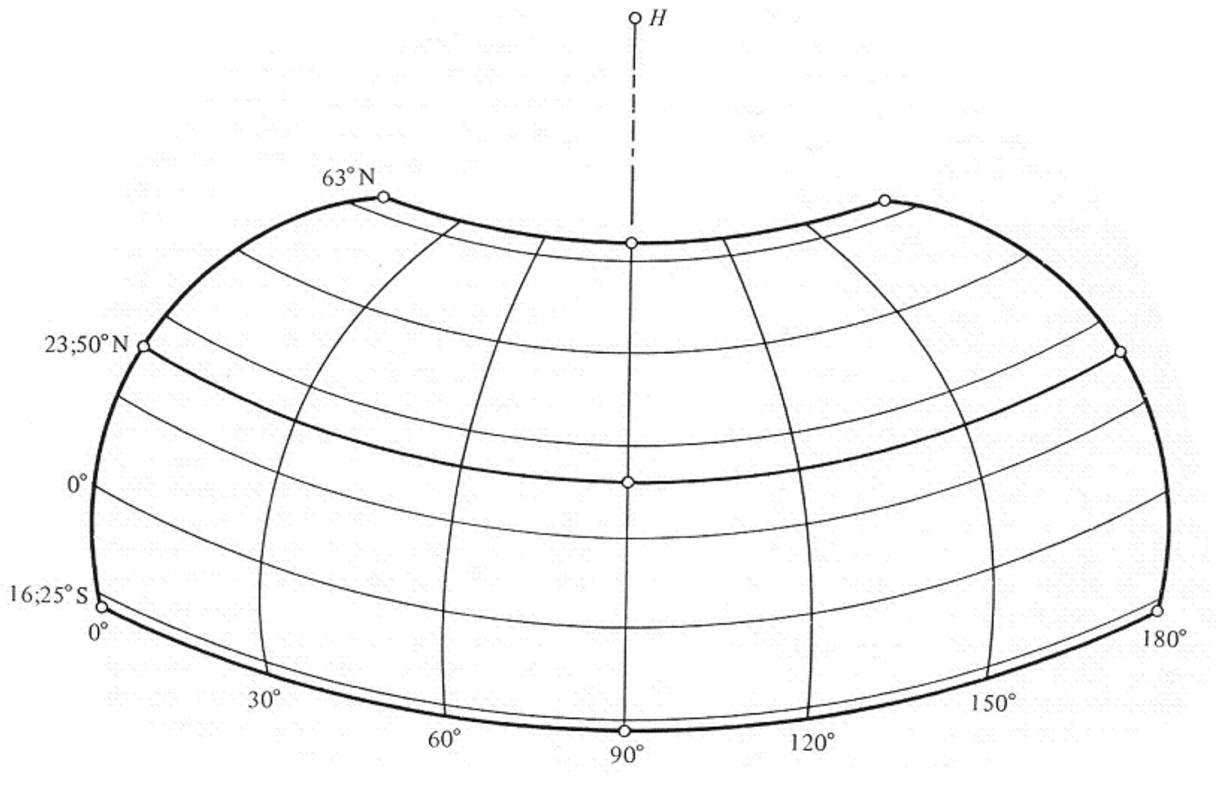


Figur 64

Den kända världen, enligt Ptolemaios, täckte 180º i longitudinell riktning från hans noll-meridian och i latitud från 16;25º i söder till 63º i norr. I hans första projektion, figur 65, är meridianerna avbildade ”radier” som möts i en punkt H, dock inte densamma som den norra polen. Latituderna bildar cirklar med meridianernas mötespunkt H som centrum. I sin andra projektion, figur 66, var målet att projektionen mer skulle likna en glob. De parallella latituderna är här tre till antalet och även här konstruerade som cirklar, men nu har meridianerna konstrueras som bågar som skär punkter på latitudcirklarna. Detta gav ett visuellt intryck av jordens krökning samtidigt som den relativa distansen mellan olika platser bevarades. Den första projektionen är en anmärkningsvärd god approximation till senare tiders koniska projektion. Ptolemaios tog ett gigantiskt steg i den vetenskapliga utvecklingen av kartritning.



Figur 65



Figur 66

Eftersom inga kartoriginal finns kvar är det oklart om Ptolemaios själv någonsin gjorde någon egen karta eller om han bara gjorde tabellerna. Den äldsta kända ritningen gjordes av en ingenjör från Alexandria, Agathodaemon. Dateringen är okänd, men det finns dock detaljer som Ptolemaios omöjligt kan ha vetat om. På 1400-talet nådde denna kopia Italien, där den reproducerades, först för hand men 1477 trycktes den från kopparplåt.

Figur 67

På Ptolemaios världskarta förenades Afrika och Asien i söder och Indiska Oceanen gjordes till ett innanhav. Runt hela världsbilden finns det tolv änglar nedtecknade. Dessa änglar symboliserar de tolv vindarna på jorden. Till exempel blåser den kalla ”Boreas” från norr, den varma ”Notus” från söder, den torra ”Apeliotes” från öster och den fuktiga ”Zephir” från väster.

Det mest centrala i boken är dock en enorm tabell över platser och deras respektive koordinater. Denna tabell var tänkt att utgöra basen i kartritandet.

Figur 68 är en karta uppritad efter de koordinater Ptolemaios skrivit ner i sina tabeller. Italiens stövelliknande form syns tydligt. Även Storbritannien och Irland känns lätt igen, liksom ”udden” Danmark.

Figur 68

Geografica räknas till att ha lagt grunden för att projicera en sfär på en plan yta. Den himmelska sfären avbildas på ekvatorplanet genom projektion från den södra polen. Ptolemaios *bevisar* dock inte den viktiga egenskapen att cirklar på en sfär bildar cirklar på planet.

Handy Tables

”Handy Tables” är en systematisk fortsättning på de tabeller som finns spridda i Almagest. Handy Tables var tänkt för att användas till mer praktiska beräkningar. Den redigerades och gavs ut av Theon av Alexandria. Med hjälp av tabellerna i detta verk gick det betydligt snabbare att beräkna solens, månens och planeterna positioner än vad det gick att göra med hjälp av tabellerna i Almagest.

Till dessa tabeller finns numeriska förbättringar i deras presentation och framställan. De blev mer bekväma att använda och Ptolemaios förbättrade också ingående parametrars noggrannhet. Även i denna bok presenteras den matematik som är nödvändig för man som läsare ska kunna få en förståelse för tabellerna och dess förtjänster.

Detaljer kring ”Handy Tables” vet man bara från de två kommentarer som är gjorda av Theon av Alexandria (som troligtvis var en av Ptolemaios lärare). Näst efter Almagest är ”Handy Tables” ett av de viktigaste verken om matematisk astronomi. En latinsk översättning gjordes i augusti år 534.

Tabellerna blev standardhandbok i den antika världen och dess form bevarades över hela medeltiden.

Harmonics

Man tror att ”Harmonics” arbetades fram efter ”Tetrabiblos”.

Detta arbete om musikteori består av tre böcker. Det behandlar de matematiska intervaller (på en spänd sträng) mellan noter och deras klassificering och hur det stämmer överens med de olika traditionella grekiska systemen. Ptolemaios söker en medelväg mellan de två skolorna som Pythagoras och Aristoxentus står för. Enligt Ptolemaios betonar den tidigare den matematiska teorin på bekostnad av örats ”bevis” medan den senare framhärdar det motsatta. Återigen får vi se prov på Ptolemaios önskan att upprätta en teori som är matematiskt tillfredsställande, men ändå tar hänsyn till företeelserna orsaker.

Enligt Porphyry (sent 200-tal) är ”Harmonics” mest en vidareutveckling av tidigare arbeten, dock inte Ptolemaios egna utan främst från Didymus (första århundradet).

Optics

”Optics” består av fem böcker, vilka finns bevarade i latinsk version från 1200-talet. Det grekiska originalet är försvunnet.

Ptolemaios gör i dessa böcker ett studium om färger, reflektion, ljusbrytning och speglar av varierande utformning. I Almagest tas ingen hänsyn till t.ex. ljusets brytning i atmosfären, trots den möjliga påverkan på observationerna. Man kan påvisa en utveckling i Ptolemaios teori av ”månillusionen” mellan Almagest och fram till Optics, och som dessutom indikerar i vilken ordning han skrivit dessa verk. Han har stött sig på framförallt två olika källor; den vetenskapliga och den filosofiska. Till den vetenskapliga hör bland annat Euklides Elementa vilket också är grunden i Ptolemaios geometriska resonemang. Euklides, som också skrev en bok om optiken, utgör matematikens ramar för det synliga ljuset. Ptolemaios använder sig av ett instrument kallat; diopter, vilken han kanske lärt av Archimedes. Till de filosofiska källorna hör bland annat den stoiska filosofin, vilken underligger hans teorier om de synliga iakttagelserna.

Liksom det stora flertalet av de samtida teoretikerna trodde Ptolemaios att synförmågan berodde på ett slags ”synflöde” som strömmade ut från ögat i konformade knippen av ljusstrålar. Själva konspetsen ligger inuti ögongloben. Flödet skapar sensation hos betraktaren, när det träffar på färgade objekt. Ptolemaios bevisar att synförmågan är utbredd i en rät linje och bestämmer storleken på synfältet.
Ptolemaios tror också att närvaron av ljus är en nödvändighet och att färger är en inneboende kvalitet hos varje objekt. Han var väl förtrogen med Platons färgteorier, vilken han också förkastade. Han vände sig främst mot den Platonska teori där utvidgning och kontraktion orsakar färgförnimmelse.

Böckerna tre och fyra handlar om reflektion. Först och främst finns tre lagar stipulerade;
1. Bilden framträder i en punkt längs den oändliga linje som förenar ögat med reflektionspunkten i spegeln. 2. Bilden framträder på lodlinjen mellan objektet och spegelytan. 3. Alla ljusstrålar har lika reflektionsvinkel.

Det förekommer också en anmärkningsvärd diskussion angående riktigheten i assimilering av bikulärt till monokulärt seende i geometriska bevis. Ptolemaios bestämmer relationen mellan den bild som ses av först det vänstra ögat och sedan det högra och därefter den sammansatta bilden som ses av de båda ögonen tillsammans genom att använda en fyndig experimentapparatur bestående av linjer i olika färger. Från de tre lagarna utvecklar han sen en serie teorem kring lokalisering, storlek och utseende av bilder, först för plana speglar, sen konvexa speglar och därefter konkava speglar. Slutligen tar han upp även cylindriska speglar.

I den sista boken behandlas ljusbrytning. Fenomenet demonstreras med hjälp av ett mynt i ett kärl fyllt med vatten.

Ptolemaios gör experiment för att bestämma storleken på brytningen från luft till glas, från vatten till glas och från luft till vatten. Ptolemaios gör dessa försök med hjälp av en graderad cirkelskiva. För varje par av media tabulerar han brytningsvinkeln som korresponderar med den infallsvinkel på 10º, 20º, …, 80º. Resultatet kan inte vara obearbetat eftersom den andra differensen är konstant i alla fallen, men de är anmärkningsvärt nära vad man kan härleda från Snell´s brytningslag ($\sin\theta/\sin\varphi$ = konstant) med ett lämpligt brytningsindex.

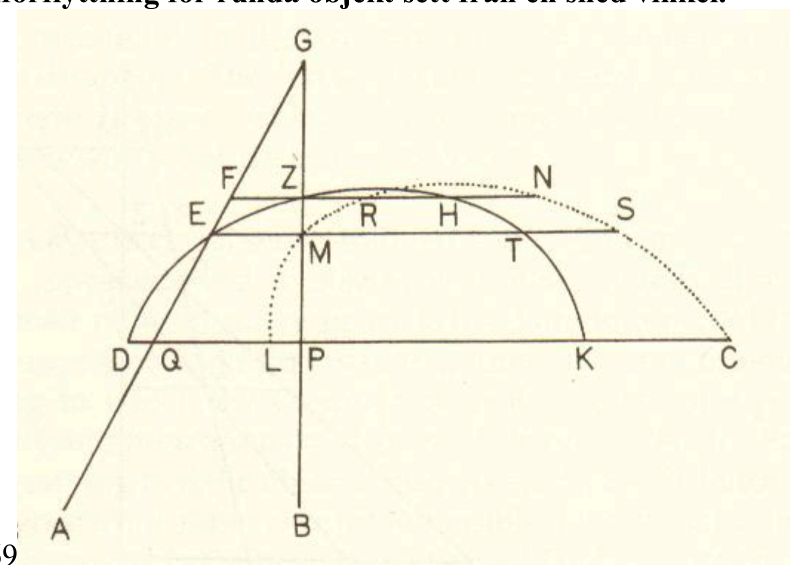
Bevis av teorin genom ofta återkommande experiment med hjälp av, för ändamålet konstruerad apparatur, är det mest påfallande draget i ”Optics”. ”Verket är ett imponerande exempel på den matematiska vetenskapens utveckling ur fysikaliska data och det är värdigt författaren av Almagest”, skriver översättaren G. J. Toomer. Det är dock svårt att veta hur stor Ptolemaios del är i ”Optics” eftersom så lite av verket finns kvar i original.

”Optics” influenser i Europa är ringa. Men den var en inspirationskälla till Ibn-al-Haythams (kring ca år 1000) optiska verk och hans anmärkningsvärda experiment med ljus måste tillskrivas Ptolemaios.

Ptolemaios teori av den bildliga förnimmelsen/iakttagelsen

Ptolemaios förklarar hur månens bild kan ses vara större än verklig storlek, månillusionen, då den ses vid horisonten. Fenomenet att himmelska objekt vid horisonten är större än vad de är i zenit lyckades han inte förklara i Almagest. I Almagest säger han att det beror på brytningen genom atmosfärens ånga; som ger en resulterande förstorad bild av ett objekt likt ett föremål nedsänkt i vatten ger.

Analysering av bildförflyttning för runda objekt sett från en sned vinkel.



Figur 69

[56] Teorem III.3. Låt AG och BG i figuren representera den korrekt valda och gemensamme axeln, och låt en given cirkulär båge DEZHTK ritas på dem. Från punkterna D, Z och E dras vinkelräta linjer mot axeln BG så att DP, EM och FZ bildas. Låt nu dessa utvidgas genom och utöver punkterna H, T och K. Låt till slut DL och KC bli avmarkerade så de är ekvivalenta mot QP, låt också HN och ZR vara ekvivalenta till FZ och avmarkera slutligen ST ekvivalent mot EM.

[57] Ögat vid A, kommer då att se D vid L, K vid C, E vid M, Z vid R och H vid N, den konkava linjen DEZHTK kommer att ses ligga längs den konkava linjen som passerar genom punkterna L, M, R, N, S och C. Detsamma kommer att ske för konvexa linjer. Översättaren, A Mark Smith, påpekar här att Lejune noterade i L'Optique, p.115, n. 50, att den konkava bildlinjen LMRNSC omöjligtvis kan vara cirkulär – ett påstående som blir uppenbar när försök till uppritande av diagram enligt tillståndets uppsättning vidare i konstruktionen. Icke desto mindre är detta ignorerat av Ptolemaios och reflekteras inte i diagrammen tillhandahållna av de olika manuskripten.

[58] En förklarande summering av axial konvergens. Det har demonstrerats att oavsett vad som ses på sådant sätt med båda ögon, måste uppkomma på två platser, antingen separerade eller sammanslagna, när vi ser någonting ansikte – mot – ansikte och fokuserar i samma riktning, så länge som ingenting stör seendeprocessen. Eftersom dess strålning är extremt begränsad i sidled, är det naturligt för det visuella flödet att flytta runt kring hela den synliga magnituden och orsaka axlarnas konvergens under en kort tid med en ofattbar hastighet. Likt den synliga författningsförmågan av avlägsna objekt precis då ögat öppnas, är den synliga avsökningen av varje synlig magnitud som passerar olika delar på dess yta, det hela sker så snabbt att känslan är att det sker samtidigt. ...

[59] Månillusionen. ... kommer angående avstånd, så länge som känslan försvagas i proportion till konvergensen. Generellt; när en synlig stråle faller på ett synligt objekt på något annat sätt än som är inneboende av dess natur eller praxis, uppfattas dess karakteristiska tillhörigheter mindre klart. Då också, uppfattningen av dess avstånd som fås kommer att försvagas. Detta verkar vara orsaken till varför himmelska objekt som tenderar lika visuella vinklar, de nära zenit verkar mindre medan de som ligger nära horisonten ses på ett annat sätt än vad brukligt är. Saker högt upp ser mindre ut än vanligt och ses med svårighet.

Planetary Hypotheses

”Planetary Hypotheses”, vilket avslutar Almagest, har många detaljer gemensamt med ”Handy Tables”. Detta verk, som består av två böcker, är en mer populistisk redogörelse för de resultat som presenteras i Almagest. Visserligen tar han upp och presenterar nödvändig matematik för att kunna tillgodogöra sig materialet som senare redovisas, men Ptolemaios ändrar här vissa parametrar och han introducerar märklig förbättring i teorin kring planeternas latituder och han introducerar även ett helt nytt system för beräkning av den absoluta storleken på och avståndet till planeterna. Ptolemaios gör det på ett ganska sinnrikt sätt genom att ersätta abstrakt geometrisk teori med mekanik. Modellen blir mer fysiskt påtaglig i ett planetarium. (I Almagest var modellen rent geometrisk.)

Endast den första boken finns kvar i grekiskt original, men hela verket finns tillgängligt i en arabisk översättning.

Planisphaerium

Detta arbete har överlevt endast i arabisk version.
I ”Planisphaerium” tar Ptolemaios upp sitt intresse för stereografisk projektion av himmelssfären till ett plan. Ptolemaios projekterar dem från den södra himmelssfärspolen till ekvatorplanet. Denna projektion är den matematiska grunden till en ”astrolabel”.

Figur 70

En astrolabel är en två-dimentionell modell av den himmelska sfären. Namnet har sitt ursprung just i de grekiska orden ”astron” och ”lambanien”, vilket ungefär betyder ”den som fångar de himmelska kropparna”. Detta instrument var under lång tid det mest använda astronomiska instrumentet. Den var utformad som en mässingsdisk, vilket gjorde den mycket portabel och användbar – en slags forntida ”lap-top-dator”. Med detta instrument kunde man bestämma himlakroppars positioner, mäta nattlängd, dagslängd och årslängd, beräkna vilken del av himlen som var synlig vid en viss bestämd tid och även bestämma höjden över horisonten för vilket objekt som helst. Dess användningsområde var med andra ord omfattande.

Tetrabiblos

”Tetrabiblos” finns i en översättning från grekiskan till latin.
Det kan tyckas märkligt att en man som skrivit en sådan strikt bok som Almagest också författat denna bok i astrologi. Det var dock så att man under den tiden trodde stort på att himlakropparnas positioner bestämde många händelser som inträffade på jorden. Det var uppenbart att solen och månen påverkade jorden och då var det rimligt att anta att även de övriga planeterna gjorde det också.

I bokens första del behandlas de mer tekniska begreppen inom astrologin, medan den senare delen tar upp vilken påverkan himlakropparnas positioner har på jorden. Avslutningsvis finns också beskrivet hur människan påverkas av dessa positioner. Ptolemaios för en diskussion om vad som kan utläsas ur en människas horoskop. Han använder också sfärisk trigonometri till att bestämma livslängden. Något som fascinerade den mänskliga tanken var att olika himlakroppar associerades med olika livslängder. I Tetrabiblos sista kapitel finns en tabell över detta. Bland annat kan man läsa att för månen gäller 4 år medan det för solen är 19 år.

Han bryr sig dock inte om att besvara frågor om vad, hur och när händelser ska inträffa med hänsyn till himlakropparnas positioner vid ett visst givet datum. Detta tror man är en av anledningarna till att Tetrabiblos inte blev lika populär och berömd som Almagest.

Vad har Ptolemaios betytt för eftervärlden?

Almagest översattes av Boëthius på 500-talet, men hans översättning försvann. Det enda som fanns kvar av den grekiska litteraturen om världsalltet var Platons dialog Timaios, vilken var mycket primitiv om synen på världsalltet. Det finns en föreställning om människan som en mikrokosmos, en värld i miniatyr, som på alla punkter avspeglar makrokosmos, världsalltet. Den beskriver också världsalltets sfäriska form, planeternas inbördes ordning med dess omloppstider, samt viss astronomisk fakta. Att Taimos var den enda tillgängliga litteraturen blev ödesdigert för världsbilden under den tidiga medeltiden.

På 1100-talet blev Almagest översatt på nytt av Gerard från Cremona i Toledo från en tidigare upplaga av en arabisk översättning. Det finns tecken på att Almagest översatts tidigare direkt från grekiskan av en okänd översättare på Sicilien, där den östliga och västliga kulturen möttes.

Med den nya översättningen blev större delen av den grekiska astronomin tillgänglig för den latinska världen. Medeltidens astronomer kunde nu ta vid där Ptolemaios slutade och med hjälp av Almagest ta del av de tabeller och astronomiska instrument han hade använt sig av. Innan de dock kunde använda sig av Almagest var medeltidens astronomer tvungna att översätta flera matematiska beskrivningar eftersom Ptolemaios använt sig av komplicerade matematiska och geometriska metoder. Böcker de översatte var bland annat Euklides Geometri och Optik och Apollonios skrift om koniska sektioner.

Ptolemaios teori om himlakropparnas rörelse uppfattades av hans efterföljare som fysiskt existerande och gällde som sådant i århundraden, ända tills Kopernikus och Kepler ersatte det med ett mera naturligt förklaringssätt. Under hela medeltiden förblev tron på det geocentriska systemet orubbat. Den stora förtjänsten hos Kopernikus var, att han tillkännagav och i ett stort arbete framställde de vetenskapliga stöden för det heliocentriska systemet, som några av ”de gamla” framkastat som en lös hypotes. Kopernikus störtade det geocentriska systemet, eftersom han framställde solen i stället för jorden som centrum i solsystemet. Men han fasthöll vid den gamla åskådningen att himlakropparna rör sig i cirkulära eller nära cirkulära banor omkring sitt centrum.

Slutord

Vi hävdar inte att vårt arbete är något komplett verk över Ptolemaios hela historia, om hans leverne och livsverk. Vi har inte heller fördjupat oss i hans teorier om solen, månen och planeterna att vi klarar att utföra egna beräkningar med hjälp av de mätdata som finns uppgivna i bland annat Almagest. Det är också möjligt att viktiga konklusioner han gjort, har förbisetts av oss.

Vårt arbete bör ses som en ”kortare” sammanställning av tillgänglig litteratur om Claudios Ptolemaios. Vi har läst om denne matematiker och astronom i övervägande positiva ordalag. Vissa författare hyllar honom med superlativer. Det finns dock kritiska röster som till och med hävdar att han bluffade.

Vi vill själva på intet sätt göra gällande att vi tror på att Ptolemaios har rätt i alla sina beräkningar. Vi tjusas dock av hans iver att få världsalltet förklarat genom matematiska modeller. Vi vet ju om ”Det *stora* felet”. Vi vet att solen och inte jorden är i centrum. Det är då inte konstigt att vissa av hans beräkningar inte stämmer överens med verkligheten. Han använde sig inte ens av någon kikare vid sina observationer av himlavalvet ty den var inte uppfunnen på den tiden.

Vi ser mellan fingrarna och känner beundran ändå. Vi ser honom som en man, som under årens lopp varit en fantastisk inspirationskälla till andra vetenskapsmäns vidare studier, då främst inom astronomin.

Gun och *Pernilla*

Figur 71

Litteraturförteckning

Berggren, J. Lennart och Jones, Alexander (2000). *Ptolemy´s Geography*. New Jersey och Storbritannien; Princeton University Press

Bonniers Compact Lexikon (1997). Ljuljana; Mladinska Knjiga

Comins, Neil F & Kaufmann III, William J (2002). *Discovering the universe.* New York; W. H. Freeman and company.

O´Conner, J. J. och Robertson, E. F. (1999). Claudius Ptolemy. Scotland; University of St. Andrews. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/¨history/Mathematicians/Ptolemy.html

Grasshoff, Gerd (1990). *The History of Ptolemy´s Star Catalogue.* Berlin, Heidelberg, New York; Springer-Verlag.

Katz, Victor J (1998). *A history of mathematics.* Addison-Wesley.

Meech, Karen (2000). Astrolabe History. Institute for AstronomyUniversity of Hawaii. http://www.ifa.hawaii.edu/tops/astl-hist.html

Mankiewicz, Richard (2001). *Matematiken genom tiderna.* Stockholm; Albert Bonniers Förlag AB.

Montgomery, Hugo (1995). *Medelhavsvärldens historia till omkring 400 e. Kr.*. Stockholm; Almqvist & Wiksell Förlag AB.

Neugebauer, Otto (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy, Part one.* Berlin, Heidelberg, New York; Springer-Verlag.

Neugebauer, Otto (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy, Part two.* Berlin, Heidelberg, New York; Springer-Verlag.

Neugebauer, Otto (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy, Part three.* Berlin, Heidelberg, New York; Springer-Verlag.

Newton, Robert R. (1978). *The crime of Ptolem*y. London, Maryland; The Johns Hopkins Press Ltd.

Nordling, Carl & Österman, Jonny (2001). *Physics Handbook.* Stockholm; Studentlitteratur.

Norman, Torbjörn; Stattin, Jan; Skrutkowska, Karin & Westin, Gunnar T (1997). *Människan Genom tiderna.* Stockholm; Bokförlaget Natur och Kultur.

Pederby, Bo (2003). *Libers historiska atlas.* Stockholm; Liber AB.

Perdersen, Olaf (1974). *A Survey of the Almagest.* Odense university press.

Smith, A. Mark (1996). *Ptolemy's Theory of Visual Perception: An English Translation of the Optics With Introduction and Commentary.* Philadelphia, Independence Square; The American Philosophical society.

Stillwell, John (1989). *Mathematics and It´s History*. New York; Springer-Verlag.

Thomas, Bertil (1993). *Naturvetenskapens milstenar.* Stockholm; Liber Utbildning AB.

Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy´s Almagest*. London; Gerald Duckworth & Co. Ltd.

Wikipedia, the free encyclopedia (2001). *Ptolemy*. http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy