EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Kvaternioner
Från Hamilton till Gibbs

av

Ilko Radman

2005 - No 5

Kvaternioner
Från Hamilton till Gibbs

Ilko Radman

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Rikard Bøgvad

2005

EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Kvaternioner
Från Hamilton till Gibbs

av

Ilko Radman

2005 - No 5

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

Kvaternioner
Från Hamilton till Gibbs

Ilko Radman

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Rikard Bøgvad

2005

Inledning och resultat

I det här arbetet ska jag presentera Sir William Rowan Hamiltons (1805-1865) arbete med vektorgeometri med kvaternioner samt hur kvaternioner har mottagits av dåtida matematiker och matematiker efter Hamilton.

Först ger jag en inledning till problematiken kring och behovet till kvaternioner och presenterar på vilka grunder Hamilton kunde bygga sina upptäckter. Caspar Wessel arbetade med vektorgeometri i planet med komplexa tal och hans upptäckter var en inspirationskälla till Hamilton. Hamilton ville arbeta med vektorer i rummet och han ville skapa en metod att beskriva rummets geometri lika behändigt som Wessel visade att komplexa tal kunde användas i planet. Till det behövde han arbeta med tre dimensioner men han stötte på svårigheter då de vanliga räknelagarna inte räckte till. Det tog honom tretton år att övervinna dessa svårigheter. Problemen löstes genom att han införde en fjärde dimension. Hamilton fortsatte att utveckla sin vektorgeometri och var övertygad att all geometri kunde uttryckas med hjälp av kvaternioner. Han lyckades att göra det men alla tyckte inte att kvaternioner var nödvändiga. En annan matematiker J. Willard Gibbs kunde några år efter Hamiltons död presentera sin version av vektorgeometri utan att använda sig av komplexa tal och den var dessutom enklare att använda. Kvaternioner visade sig så småningom vara mindre bra än Gibbs vektorgeometri. Jämför vi Gibbs med modern litteratur ser vi att det är Gibbs sätt som vi lär oss. Men alla höll inte med Gibbs:

Tait om Gibbs:

> Prof. Willard Gibbs must be ranked as one of the retarders of Quaternion progress, in virtue of his pamphlet on *Vector Analyses;* a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann.
> [10] sid. vi

Jag har försökt att skriva detta arbete för alla som är intresserade oavsett av vilken nivå de ligger på i matematik.

Kvaternioner

I det här avsnittet ska jag förklara vad en kvaternion är och bakgrunden till dem. För att komma fram till kvaternioner måste jag gå ca 300 år tillbaks i tiden.

Tills denna tid hade matematikerna räknat tal d.v.s. talen som (geometriskt) beskriver punkter på en linje (genom längder).

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8,5 $\sqrt{99}$

På 1500 talet dök kvadratrötter ur negativa tal upp i lösningarna till tredjegrads och fjärdegrads ekvationer som upptäcktes av de italienska matematikerna Niccolo Fontana Tartaglia och Geromola Cardano. Även om man bara var intresserad av reella lösningar, ledde dessa formler ibland till sådana kvadratrötter som till en början accepterades mest som ett kalkylmässigt mellanled, men så småningom började de anses som viktiga och riktiga tal.
Namnet imaginära för sådana tal myntades av René Descartes på 1600-talet och man betraktade dem länge med stor misstänksamhet. Komplexa tal accepteras egentligen först efter att deras geometriska tolkning nedan som publicerades av Caspar Wessel 1799. Denna beskrivning återupptäcktes flera år senare, och spreds av Carl Friedrich Gauss. Den moderna definitionen som ett par av reella tal infördes först på 1800-talet av Hamilton. [1]

Wessels geometri och komplexa tal

Norrmannen och lantmätaren Caspar Wessel publicerade 1797 ett arbete om hur man representerar komplexa tal geometriskt. Arbetet och de liknande arbeten som andra gjort blev väldigt snabbt accepterat som en bas för ett nytt tänkande när det gäller komplexa tal.
Wessels mål med *On the Analytical Representation of Direcktion* var inte direkt relaterad till komplexa tal som sådana. Han tänkte att vissa geometriska koncept skulle vara mer begripbara om det fanns ett sätt att representera linjens längd och riktning i planet med ett enda algebraisk uttryck.
Wessel började med addition: Två riktade segment skulle adderas så att vi för dem samman på det viset att den andra börjar i den förstas ändpunkt, resultatet blir ett segment som går från startpunkten av den första till slutpunkten av den andra och detta segment kallas för summan av de ursprungliga segmenten (bilden nedan visar Wessels förklaring av additionen av raka segment vilket nästan överensstämmer med det moderna begreppet vektoraddition). Skillnaden är förstås att vektorer betraktas som ekvivalensklasser av riktade sträckor.

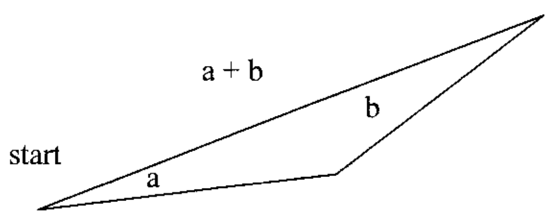
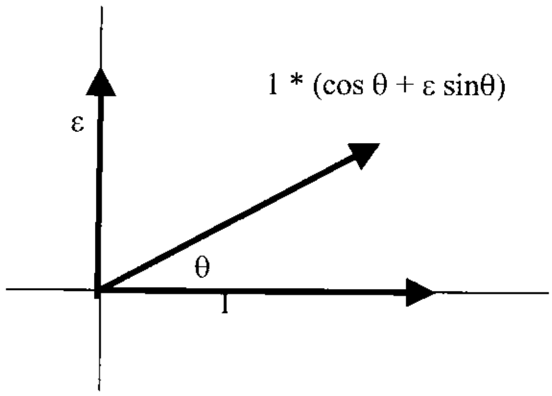


Figure 1

Sedan fortsatte Wessel med multiplikation.
Enligt Wessel så skulle:

- Segment a och b:s produkt a*b blir ett nytt segment i planet.
- Produktsegmentets längd är produkten av de två ursprungliga segmentens längder.
- Om ritningen (se figure 2)är mätt med enhetssegment (han kallade den för "1") då måste produktsegmentens vinkel vara summan av de två ursprungliga segmenternas vinklar.
- Det finns ett segment ε (se figure2) som är vinkelrät till segmentet 1 och har längd 1.
- Wessel visar också att $\varepsilon^2 = -1$ så att ε kan uppfattas som $\sqrt{-1}$.
- Ett segment av längd 1 som bildar en vinkel med den positiva axeln kan nu beskrivas som $\cos\theta + \varepsilon \sin\theta$ och segment med längden A och vinkeln θ ger $A(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta) = a + \varepsilon b$



$A(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta) = a + \varepsilon b$

figure 2

Alltså Wessels algebraiska operationer på segment fungerar som den räkning med komplexa tal, som vi lärt oss.

- Addition och subtraktion för komplexa tal gäller

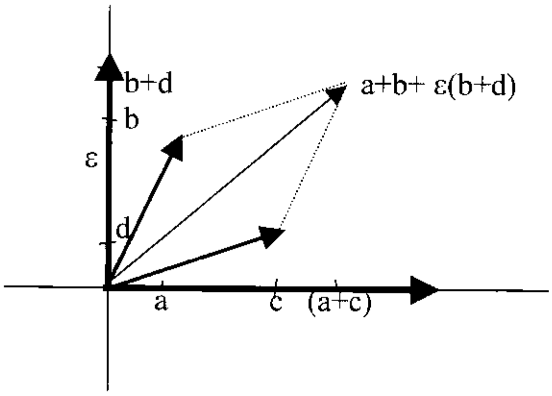


figure 3

$$(a + \varepsilon b) + (c + \varepsilon d) = a + c + \varepsilon(b + d)$$
(se figure 3)

respektive

$$(a + \varepsilon b) - (c + \varepsilon d) = a - c + \varepsilon(b - d).$$

- Även multiplikation av komplexa tal satisfierar Wessels axiom för multiplikation

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad + bc).$$

Enligt de Moivres formel: om $z = A(\cos\phi_1 + \varepsilon\cdot\sin\phi_1)$ och $w = B(\cos\phi_2 + \varepsilon\cdot\sin\phi_2)$ fås följande formel för multiplikation :

$$z*w = A(\cos\phi_1 + \varepsilon\cdot\sin\phi_1)*B(\cos\phi_2 + \varepsilon\cdot\sin\phi_2) = AB(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \varepsilon\cdot\sin(\phi_1 + \phi_2)$$

Detta innebär att vid multiplikation multiplicerar man absolutbeloppen och adderar argumenten, och vid division dividerar man absolutbeloppen och subtraherar argumenten precis som Wessels beskrivning ovan.

Wessel utvecklade också metoder att ta fram rötter av komplexa tal. [2] sid. 737

Vad är kvaternioner?

Med hjälp av komplexa tal kan man alltså studera geometriska problem i planet t.ex. vinklar, vridningar och speglingar. En fråga som uppstår är om det finns möjlighet att göra något liknande i det tredimensionella rummet? Hamilton som studerade problem inom fysik och förstod möjligheterna med att använda komplexa tal för tvådimensionella problem försökte därför konstruera liknande tal som skulle passa för rummet. Först definierade han (1833) komplexa tal som ordnade par (a, b) av två reella tal a och b, som man adderar och subtraherar enligt definitionen

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) * (c. d) = (ac - db, ad + bc)$$

Man kan även dividera (utom med nollan (0,0)). Därefter sätter Hamilton

$$(a,0) = a \text{ och } (0,1)= \sqrt{-1}$$

och kan sedan skriva

$$a + b\sqrt{-1}$$

istället för (a,b) .

Detta kanske egentligen var första gången som man visade att de komplexa talen verkligen fanns. I stället för mystiska rötter var de reella talpar. Uppmuntrad av framgången började Hamilton fundera på om det skulle gå att konstruera "hyperkomplexa tal" av formen a +bi + cj, som innehåller två imaginära enheter i och j. Det gällde att hitta en lämplig definition av produkten ij. Naturligtvis antogs att alla de vanliga räknelagarna gäller och man ska också kunna dividera med talen. Kring 1880 bevisade George Frobenius (1849-1917) att detta var omöjligt för dimension tre. Efter mycket experimenterande kom Hamilton fram till att det skulle vara bättre med tre imaginära enheter i, j och k, förutom den vanliga reella enheten. Alltså fyradimensionella tal, en dimension för mycket.

Hamilton berättade i ett brev till sin son:

> But on the16th day of the month (1843) which happened to be a Monday and a Council day of the Royal Irish Academy I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal...; and although she talked with me now and then, yet an undercurrent of thought was going on my mind, which gave at last a result...
>
> I pulled out on the spot a pocket-book, which still exists, and made an entry there and then. Nor could I resist the impulse – unphilosophical as it may have seen – to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental with the symbols i, j, k:
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

> which contains the solution of the Problem, but of course, as an inscription has long since mouldered away. [3] sid. 2

Han hade arbetat med problemet i 13 år och kunde alltså den 16 oktober 1843 ge en lösning. Vad han nämligen fann var en teori för kvadrupler. Talen kunde ses som

$$q = a + bi + cj + dk,$$

där a, b, c, är reella och i, j, k är de imaginära enheterna. Sådana uttryck kallas för **kvaternioner**. [3] sid. 2

Här presenteras Peters Guthrie Taits uppfattning om varför Hamilton använde sig av de fyra parametrarna.

> Given any two vectors α, β there must be some multiplier or operator, which changes β into α. Writing q for this operator we have symbolically
>
> $$q\beta = \alpha$$
>
> A further consideration shows that this process of changing one vector into another involves *four* numbers. 1 There is the change of tensor [storlek]. 2 there is angle of rotation. 3 there is aspect of the plane in which the rotation takes place or the direction of the axis about which rotation takes place, and this requires two numbers for its determination. For this reason Hamilton called the multiplier q a *quaternion*. [4] sid. 31

Problemet är alltså att i moderna termer motivera varför en geometriskt motiverad multiplikation i R^3 måste involvera fyr- dimensionella kvantiteter eller fyra reella parametrar. Om det finns en bra produkt så ska speciellt varje tredimensionell vektor β kunna multipliceras med något så att det ger en godtycklig trdimensionell vektor α. Genom att multiplicera β med ett reellt tal kan vi först anta att längden på α och β är detsamma - en parameter, och om vi avsätter dem från origo kommer de att ligga på en sfär med centrum i origo. Det finns då en rotation längs en stor cirkel med en viss vinkel- en parameter till- q överför β i α. Denna rotation är beroende av två parametrar till, nämligen de som beskriver vilket plan som rotationen sker i.

För att kunna få bättre grepp vad en kvaternion är kan vi se på Hamiltons definition av kvaternioner:

Hamiltons framställning av kvaternioner

Låt Q beteckna ett uttryck:

$$Q = w + ix + jy + kz$$

Låt det kallas för kvaternion, där w, x, y och z är reella tal som kallas konstanterna i kvaternionen Q. Konstanterna kan var positiva, negativa eller noll.

Den imaginära delen är "ix + jy + kz" och den reella delen "w".

Ett annat Q′ sådant att

$$Q' = w' + ix' + jy' + kz'$$

och det är likhet mellan kvaternioner Q′ = Q, omm

$$w' = w, \quad x' = x \quad y' = y \quad z' = z.$$

Hamilton definierar addition eller subtraktion av kvaternioner på så sätt:

$$Q \pm Q' = w \pm w' + i(x \pm x') + j(y \pm y) + k(z \pm z')$$

Och multiplikation på så sätt:

$$\begin{aligned} \# \quad QQ' = \; & ww' + iwx' + jwy' + kwz' \\ & + ixw' + i^2xx' + ijxy' + ikxz' \\ & + jyw' + jiyx' + j^2yy' + jkyz' \\ & + kzw' + kizx' + kjzy' + k^2zz' = \\ = \; & ww' - xx' - yy' - zz' + i(wx' + xw' + yz' - zy') + \\ & \qquad + j(wy' + yw' + zx' - xz') + \\ & \qquad + k(wz' + zw' + xy' - yx') \end{aligned}$$

speciellt är de nio kvadratiska produkterna

$$i^2, \; ij, \; ik, \; ji, \; j^2, \; jk, \; ki, \; kj, \; k^2$$

som förekommer i # gäller (enligt def.)

$$ii = jj = kk = -1 \qquad \text{A}$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \qquad \text{B}$$

$$ji = -k \quad kj = -i, \quad ik = -j \qquad \text{C}$$

samma produkt av två olika imaginära enheter men med ombytta platser ger han alltså motsatt tecken t. ex ji = -ij.

Vidare visar han att multiplikation av kvaternioner är distributiv d.v.s. att följande räknelag gäller

$$Q(Q' + Q'') = QQ' + QQ'',$$

samt att addition och multiplikation är associativ men inte kommutativ. Alltså:

$$QQ' \neq Q'Q$$

är inte alltid sann ty t.ex. ji = -ij. Associativa lagen beskriver han som

$$Q * Q'Q'' = QQ' * Q'',$$

där * betecknar den sista multiplikationen idag skulle vi skriva

$$Q(Q'Q'') = (QQ')Q''.$$

Sedan ger han exempel på vilka identiteter som kan förekomma:

$$i * jk = [\, i * i = -1 = k * k \,]= ij*k,$$

$$j * ji = [\, j *-k = -i = -1 * i \,] =jj*i$$

[5] sid. 8

I följande citat definierar Hamilton hur den reella delen från den imaginära delen kan separeras i en kvaternion.

> "The separation of the real and imaginary parts of a quaternion is an operation of such frequent occurrence, and may be regarded as being so fundamental in this theory, that it is convenient to introduce symbols which shall denote concisely the two separate results of this operation. The algebraically real part may receive, according to the question in which it occurs all values contained on the one scale of progression of number from negative to positive, and shall from its symbol by prefixing, to the symbol of the quaternion, the characteristic Scal., or simply S., where no confusion seems likely to arise from using this last abbreviation. On the other hand, the algebraically imaginary part, being geometrically constructed by a straight line, or radius vector, which has, in general, for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called the vector part, or simply the vector of the quaternion; and may be denoted by prefixing the characteristic Vekt., or V. We may therefore say that a quaternion is in general the sum of its own scalar and vector parts, and may write
>
> $$Q= w + ix+ jy + kz$$
>
> $$Q = \mathrm{Scal.}\ Q + \mathrm{Vect.}\ Q = S.\ Q + V.Q$$
>
> $S.Q = w$ $\qquad\qquad$ $V\ Q = ix + jy + kz$
>
> or simply
>
> $$Q = SQ + VQ$$"

[5] sid. 13

Om detta säger Maxwell:

> "One of the most important features of Hamilton's method (methods of Quaternions) is the division of quantities into Scalars and Vectors." [6]

Kvaternioner som inte har någon reell del kallar Hamilton vektorer.
"Sett från ett geometriskt perspektiv har den algebraiska imaginära delen av kvaternionen sålunda en naturlig och enkel betydelse i rummet. Svårigheten överförs till vad den algebraiska realdelen egentligen är." Vektorer adderas enligt en geometrisk princip som är helt analog med sammansättningen av rörelse och krafter." "Realdelen adderas efter kända algebraiska regler som för positiva och negativa tal. Skalärer och vektorer kan bara adderas "formellt" genom att man skriver tecken + mellan dem.
[7] sid. 451

Hamilton ser inte vektorer som en del för sig utan en del av en kvaternion.

Han beskriver fler identiteter

$$1 = S + V; \qquad 1 - S = V; \qquad 1 - V = S$$

$$S * S = S; \qquad S * V = 0; \qquad V * S = 0; \quad V * V = V;$$

(*Som ovan*)
Här använder sig Hamilton av S och V som operationer på kvaternioner.

$$1 = S + V$$

innebär; eftersom

$$S*(Q)=w \quad \text{och} \quad V*Q =(ix + jy + kz) \quad \text{att}$$

$$1* (w + ix + jy + kz) = S * (w + ix + jy + kz) + V * (w + ix + jy + kz).$$

Här innebär t.ex. $S * V = 0$, att den skalära delen av en vektor är noll medan

$$S * S = S, \text{ innebär att}$$

den skalära delen av skalärdelen är skalär delen $S(S(Q)) = w= S(Q)$

Det var väldigt populärt att arbeta med operationer i början av 1800-talets England.

Konjugatet till kvaternionen

$$Q = SQ + VQ = w + ix + yj + zk$$

definierar Hamilton som:

$$Q` = SQ - VQ = w - ix - yj - zk$$

vilket kan jämföras med konjugatet för komplexa tal. Om

$$z = a + ib \text{ så är konjugatet } \bar{z} = a - ib$$

Hamiltons absolutbelopp (tensor) och invers.

Vi ger först Taits förklaring till Hamiltons *tensor:*
Sir William Hamilton has termed the length of the line in such cases, the Tensor of the vector.
Introduction to quaternions; Kelland/Tait

Hamilton:

> Another general decomposition of a quaternion, into factors instead of summands, may be obtained in the following way:-Since the square of a scalar is always positive, while the square of vector, the algebraical excess of the former over the latter square is always a positive number; if then we make
>
> 1) $$(TQ)^2 = (SQ)^2 - (VQ)^2$$
>
> and if we suppose TQ to be always a real and positive or absolute number, which we may call the *tensor* of the quaternion Q, we shall not thereby diminish the generality of that quaternion.

[5] sid. 13
Senare använder han också *tensorn* och skriver:

> If we call two quaternions *conjugate* when they have the same scalar part, but have opposite vector parts, then we may say that the product of two conjugate quaternions,
>
> $$SQ + VQ \quad \text{and} \quad SQ - VQ$$
>
> is equal to the square of their common tensor, TQ; from which it follows that conjugate vectors are the reciprocals of each other....

[5] sid. 14

Låt oss tolka formel 1) Hamilton antar först att

$$Q = w + ix + jy + kz$$

Sedan

$$(SQ + VQ)(SQ-VQ) = (SQ)^2 - (VQ)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

och Hamiltons definition ger då att:

$$\mathrm{TQ} = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

och

$$(\mathrm{TQ})^2 = (\mathrm{SQ} + \mathrm{VQ})(\mathrm{SQ}-\mathrm{VQ})$$

Om vi skriver om formeln så att

$$(\mathrm{TQ})^2 = \mathrm{Q}(\mathrm{SQ}-\mathrm{VQ})$$

där Q= (SQ + VQ) och dividerar med ekvationen med $(\mathrm{TQ})^2$ får vi

$$\frac{Q(SQ - VQ)}{(TQ)^2} = 1$$

Detta ger automatiskt att

$\frac{(SQ - VQ)}{(TQ)^2} = Q^{-1}$, den multiplikativa inversen till Q (utom då Q = 0).

Detta ger en allmän formel för inversen för alla kvaternioner. Den kan jämföras med formeln av invers för komplexa tal:

$$z = a + ib \quad \text{och} \quad \bar{z} = a - ib$$

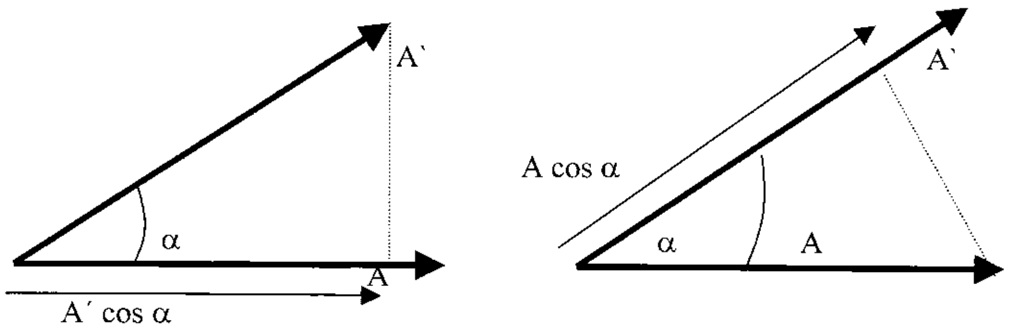
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z * \bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Detta skriver Hamilton inte i *On Quaternions...* men det är ett väldigt viktigt resultat dvs. ett utryck för en invers till kvaternioner. Det är emellertid som vi sett en enkel konsekvens av hans formler.

Skalärprodukt och vektorprodukt

Det viktigaste med Hamiltons arbete med kvaternioner är att de ger användbara algebraiska uttryck som är kopplade till vinklar, längder, areor, på det sättet fullföljs den idé som var hans ståndpunkt. I det här avsnittet ska jag presentera hur Hamiltons kvaternioner ger definitioner av det som vi senare känner till som skalärprodukt och vektorprodukt.

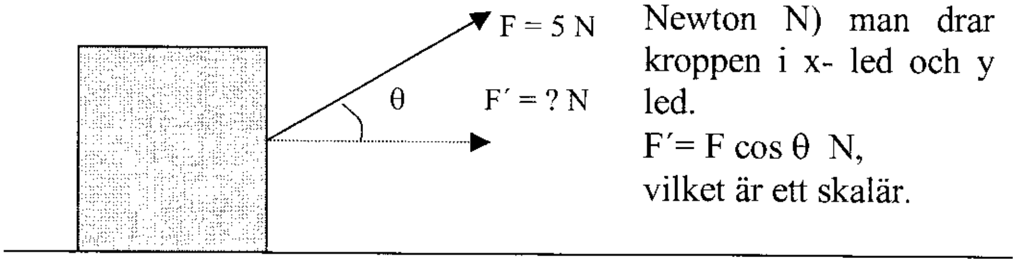
För att definiera skalärprodukt ska jag använda mig av citat från en bok har varit kurslitteratur på grundkursen i fysik:



The scalar (**dot**) product $A*A' = AA'\cos\alpha$ of two vectors is the product of one vector along the direction of the first, where A and A′ magnitudes of the vectors and α is the angle between them. The product is defined to be scalar and therefore does depend on the choice of coordinate axes.

[8] sid. 22;

För att illustrera detta bättre med ett exempel:



En typisk uppgift från fysik årskurs 1. Här ska man beräkna med hur stor kraft (F′ uttryckt i Newton N) man drar kroppen i x- led och y led.

$F' = F\cos\theta$ N,

vilket är ett skalär.

[8] sid. 22

Note that the order of the vectors does not matter; that is,

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}' = \mathbf{A}' * \mathbf{A}$$

The scalar product of the unit vectors **j, k, and I** are

(#) $$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$$

One can show that the scalar product is distributive, that is

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{A}' + \mathbf{A}'') = \mathbf{AA}' + \mathbf{AA}''$$

This allows us to express the scalar product solely in terms of the components of the two vectors:

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}' = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) * (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k})$$

becomes

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}' = (xx' + yy' + zz')$$

(#) Observera att i,j ock k påminner om Hamiltons beteckningar, de kommer därifrån. Jämför Gibbs beteckningar sid. 22 som överensstämmer med # och Hamiltons på sid. 8 där i, j, k var imaginära enheter.

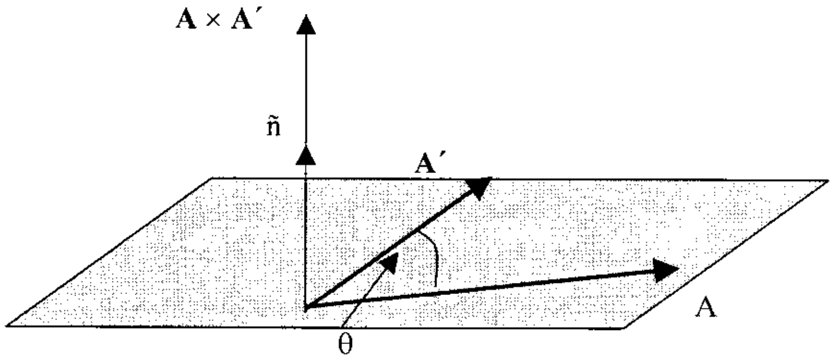
Vektorprodukt

Jag ska använda samma litteratur (*University Physics*) som ovan för att ge en definition för vektorprodukt:

The vector or cross product of two vectors **A** and **A′** is defined as

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}' = AA' \sin\theta\, \tilde{\mathrm{n}}$$

The product is defined to be a vector of magnitude $AA' \sin\theta$ that points in the direction of the unit vector $\tilde{\mathbf{n}}$ normal (perpendicular) to the plane of **A** and **A′**. The angle θ is the smaller angle between the vectors.



The definition of the cross product reflects the behaviour of many physical quantities, such as torque, angular momentum, and magnetic force on a moving charged particle. The vector product is non-commutative:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}' = - \mathbf{A} \times \mathbf{A}'$$

These products have the same magnitude but they point in opposite directions. One can show that the vector product is distributive:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A}' \times \mathbf{A}'') = \mathbf{A} \times \mathbf{A}' + \mathbf{A} \times \mathbf{A}''$$

In order for the definition of the vector product, including the right-hand- rule (se sid. 19), to be applied to the unit vectors **i, j,** and **k,** the co-ordinate system must be right-handed. As you imagine rotating the x-axis toward the y-axis, the right-hand-rule should give you the z-axis. For right-handed system, the vector products are

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$	$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$	$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$
$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$

The general expression for the vector product is $\mathbf{A} \times \mathbf{A}'$ in terms of the components is somewhat complicated:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{A}' &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) \\ &=(xy'\,\mathbf{k} - xy'\,\mathbf{j}) + (-yx'\,\mathbf{k} + yz'\,\mathbf{i}) + (zx'\mathbf{j} - zy'\,\mathbf{i})\end{aligned}$$

After collecting the terms, we find

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}' =(yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - yx')\mathbf{k}$$

If you happen to be familiar with determinants, note that the cross product is neatly expressed as

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

(Se ovan).

Hamiltons definition av skalärprodukt och vektorprodukt:

Givet alltså två vektorer, alltså kvaternioner med skalärdelen noll:

$\alpha = ix + jy + kz$ och

$\beta = ix' + jy' + kz'$

Om vi multiplicerar dem får vi:

$$\alpha * \beta = (ix + jy + kz) * (ix' + jy' + kz') =$$

$$= i^2xx' + ijxy' + ixkz' + jix\acute{y} + jjyy' + jkyz' + kix'z + kjy'z + kkzz' =$$

$$= -(xx' + yy' + zz') + i(yz' - y'z) + j(x'z - xz') + k(xy' - x'y)$$

I Hamiltons beteckningar är:

$$S.\alpha\beta' = -(xx' + yy' + zz')$$

Alltså skalärprodukten av α och β är skalärdelen av produkten av α och β som kvaternioner (med ombyta tecken).
(Jämför med definitionen sid. 14)

den skalära delen och

$$V.\ \alpha\beta = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$$

den vektoriella delen. Alltså är vektorprodukten vektordelen av produkten av α och α' som kvaternioner.

(Jämför med definitionen sid. 14)

För vektorer α och β med koordinater (x, y, z) respektive (x', y', z') i ett rätvinkligt och normerat koordinatsystem är skalärprodukten

$$xx' + yy' + zz'$$

och detta är lika med produkten

$$\alpha\beta = \cos(\alpha, \beta),$$

där (α, β),betecknar vinkeln mellan vektorerna α och β.

Vektorprodukten av α och β är

$$(yz' - y'z, x'z + xz', xy' - x'y).$$

Den formel som beskriver sambandet mellan skalärprodukt av två vektorer α och β, vektorernas längd α och β och vinkel mellan dem, (α, β) lyder i Hamiltons tappning:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2\alpha\beta\cos(\alpha, \beta)$$

Av den allmänna formeln ovan ser man genast att $\alpha\beta + \beta\alpha$ har vektordelen noll och skalärdelen fördubblas så produkten

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S(\alpha\beta) = -2(xx' + yy' + zz')$$

ty

$$S(\alpha\beta) = S(\beta\alpha) \Leftrightarrow S(\alpha\beta + \beta\alpha) = 2S(\alpha\beta)$$

och

$$V(\alpha\beta) = -V(\beta\alpha) \Leftrightarrow V(\alpha\beta + \beta\alpha) = 0$$

Hamilton ger också en geometrisk framställning av vektorprodukten

$$2V(\alpha\beta) = \alpha\beta - \beta\alpha = 2\gamma\, AB \sin(A, B)$$

- vektor v är vinkelrät mot α och β
- α, β och v har samma orientering i rummet som i, j, och k
- v:s längd är lika med arean av den parallellogram som α och β spänner upp
- denna area är lika med $\alpha\beta\cos(\alpha, \beta)$
- γ är en enhetsvektor som är lodrät mot det plan som innehåller vektorerna α och β
- γ är sådan att en högerhandsrotation lika med vinkeln (α, β)
- vinkeln (α, β) som utförs runt γ får riktningen α att sammanfalla med riktningen av β.

Om detta skriver Hamilton:

> The latter of the same two symbols, namely V. $\alpha\alpha'$, denotes, or may be constructed by a straight line, which is in direction perpendicular to both the lines denoted by α and α', being also such that the rotation round it from α to α' is positive; and bearing, in length, to the unit of length, the same ratio which the area of the *parallelogram under the two factor lines* bears to the unit of area.

$$\alpha = ix + jy + kz$$
$$\alpha' = ix' + jy' + kz'$$

Vad som menas med högerhandsrotationen är inte lätt att beskriva utan figurer (Hamiltons uppsats innehåller inga sådana) men man får utgå från det grundläggande vilkoret att en högerhandsrotation i rät vinkel runt k skulle få riktningen av i att sammanfalla med riktningen av j. Det är valet av basen i, j och k (i en bestämd ordningsföljd) som bestämmer vad som menas med högerhandsrotation. Se nedan

Högerhandsregeln bestämmer den positiva axelriktningen för k-axeln när du känner till riktningen på i- och j-axlarna i ett 3D-koordinatsystem. Högerhandsregeln bestämmer även den positiva rotationsriktningen runt en axel i 3D-rymd. Du kan bestämma den positiva axelriktningen för i-, j- och k-axlarna genom att placera högra handens baksida intill skärmen. Peka med tummen i samma riktning som den positiva i-axeln. Sträck ut pekfingret och långfingret enligt illustrationen och peka med pekfingret i samma riktning som den positiva Y-axeln. Långfingret anger nu riktningen för den positiva k-axeln.

Du kan bestämma den positiva rotationsriktningen kring en axel genom att peka med höger tumme i axelns positiva riktning och böja fingrarna enligt illustrationen. Fingrarna anger den positiva rotationsriktningen kring axeln

Hamilton fortsätter att hitta många geometriska samband, här är ytterligare ett:

> The *volume of the parallelepipedon* under any three coinitial lines, or the sextuple volume of the tetrahedron of which those lines are conterminous edges, may easily be shown, on the same principles, to be equal to the scalar of the product of the three vectors corresponding; this scalar S($\alpha\ \alpha'\alpha''$), which is equal to S(V($\alpha\alpha$)$'\alpha''$), being positive or negative according as α'' makes an obtuse or an acute angel with V. $\alpha\alpha'$. that is, according as the rotation round α'' from α' towards α is positive or negative.

Med detta menas:
Volymen av den parallellpiped som spänns upp av de tre vektorerna α α' och α''

$$\alpha = ix + jy + kz$$
$$\alpha' = ix' + jy' + kz'$$
$$\alpha'' = ix'' + jy'' + kz''$$

är

$$|(\alpha \times \alpha')\cdot \alpha''|$$

och kallar V(α,α',α'') för volymfunktionen av α, α' och α'', observera skillnaden mellan notationen "V" här och "V" som Hamilton använder för vektordelen av kvaternionen. Absolutbeloppet av volymfunktionen är alltså lika med parallellpipedens volym. Vidare är V(α,α',α'') positiv om (α,α',α'') är positivt orienterade (se sid. 19) och negativt om (α,α',α'') är negativt orienterade.
Vidare menas:

$$\mathrm{V}(\alpha,\alpha',\alpha'')=(\alpha \times \alpha')\cdot \alpha''$$

och betecknar detta tal med:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

och kallar det för determinanten av matrisen A (detA) där

$$\det A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

[11] sid. 111.

På samma sida i [8] sid. 16 fortsätter han med även ett viktigt samband som är känd för alla som sysslat med vektorer, nämligen hur man kan karakterisera ortogonala (H. kallar dem för rektangulära) vektorer.

> To express that two proposed lines α, α' are rectangular, we may write the following *equation of perpendicularity.*
>
> $$\mathrm{S}.\ \alpha'\,\alpha = 0 \quad \text{or} \quad \alpha\alpha' + \alpha'\,\alpha = 0.$$

Slutligen, att 2 eller 3 vektorer är linjärt beroende kan utryckas/kontrolleras med följande:

> To express that two lines are similar or opposite in direction, we may write the following *equation of coaxality*, or of parallelism,
>
> $$\mathrm{V}\alpha.\alpha' = 0 \quad \text{or} \quad \alpha\,\alpha' - \alpha'\alpha = 0$$
>
> And to express that three lines are in or parallel to one common plane, we may write the *equation of coplanarity*,
>
> $$\mathrm{S}(\mathrm{V}.\alpha\,\alpha'\alpha'') = 0 \quad \text{or} \quad \alpha\,\alpha'\alpha'' - \alpha''\alpha'\alpha = 0$$

> either because the volume of the parallelepipedon under the three lines then vanishes, or because one of the three vectors is then perpendicular to the vector part of the product of the
> other two.

Med detta menas:
Om de tre vektorerna α α' och α'' är linjärt beroende så är

$$V(\alpha,\alpha',\alpha'')=0$$

och

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 .$$

[11] sid. 117.

(som ovan sid. 16)

Hamilton visade alltså att hans kvaternioner verkligen var ett geometriskt användbart verktyg som t.ex. vid volymberäkning och han presenterade många användbara samband i *On Quaternions* och i andra verk.

Tait om Hamilton:

> The special form of thanks which would have been most grateful to a man like Hamilton is to be shewn by practical developments of his magnificent Idea. The award of this form of thanks will, I hope, not be long delayed. [10] sid. viii

Kvaternioner kunde också bli en sorts kult, med ivriga och hätska försvarare.
Tait om Gibbs:

> Prof. Willard Gibbs must be ranked as one of the retarders of Quaternion progress, in virtue of his pamphlet on *Vector Analyses;* a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann.
> [10] sid. vi

Tait om kvaternioner efter Hamilton:

> It is disappointing to find how little progress has recently been made with the development of Quaternions. One cause, which has been especially active in France, is that workers at the subject have been more intent of modifying the notation, or the mode of presentations of the fundamental principles, than on the extending the applications of the Calculus. [10] sid.vi

Ovan kan vi se att Hamiltons kvaternioner skapade blandade känslor i själva verket en kamp om hur de nya begreppen skulle användas. Tait var en av dem som ville konservera Hamiltons sätt att beskriva vektorgeometrin. Gibbs beskrev vektorgeometrin utan att använda sig av kvaternioner och de imaginära axlarna. Här följer Gibbs teori:

Gibbs och vektorgeometri

I det här avsnittet ska jag presentera hur vektorgeometri kan ses utan kvaternioner.

> It was, however Josiah Willard Gibbs (1839-1903) at Yale University and Oliver Heaviside (1850-1925) in England who independently realised, after reading of Tait and Maxwell, that the full algebra of quternions was not necessary for discussing physical concepts. It was only two types of product of vectors, the dot product [skalärprodukt] and the cross product [vektorprodukt] that were needed. Gibbs published his version of vector analysis privately in 1881and 1884 and lectured on the subject for many years at Yale, while Heaviside first published his method in papers on electricity in 1882 and 1883. It is to the former, however, that our modern notations of A * B and A x B, for the dot product and the cross product, respectively, are due. With the formal publication of Gibbs' *Vector Analysis* in a 1901 work derived from his lectures, it was clear to the physics community that vectors, rather than quternions, were to remain important mathematically, their use in physics soon died a quiet death. [2] sid. 686

Gibbs vektorer

Gibbs definierade vektor och skalär på detta viset:

> "A *vector* is a quantity which is considered as possessing direction as well as magnitude."

> "A scalar is a quantity which is considered as possessing magnitude but not direction."

Vector Analysis sid.1 J. Willard Gibbs; Constable and Company Limited 1960

Vidare tänker jag presentera ytterliggare några definitioner som vi kan hitta i Gibbs *Vector Analysis*:

> "Two vectors are said to be equal when they have the same magnitude and the same direction"
> "A vector **A** is said to be equal zero when its magnitude *A* is zero
>
> $$\mathbf{A} = 0 \text{ if } A = 0\text{"}$$

Scalar multiplication:

"A vector is said to be multiplied by a positive scalar when its magnitude is multiplied by that scalar and its direction is left unaltered".
"If A be the vector and x the scalar the product of x and **A** is denoted as usual by x **A or** x**A**"
"This multiplication by a scalar is called *scalar multiplication*, and the associative law

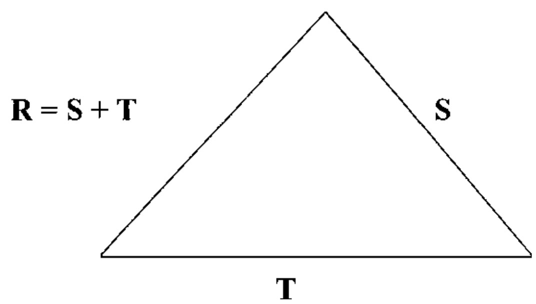
$$x\,(y\mathbf{A}) = (xy)\,\mathbf{A} = y\,(x\mathbf{A})\text{"}$$

"The negative sign,-, prefixed to a vector reverses its direction but leaves its magnitude unchanged"
"A unit vector is one whose magnitude is unit. Any vector **A** may be looked upon as the product of a unit vector **a** in its direction by the positive scalar A, its magnitude

$$\mathbf{A} = A\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,A$$
$$\mathbf{a} = \frac{1}{A}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}/A\text{"}$$

Addition and Subtraction

"Let **S** be one vector and **T** be the other.

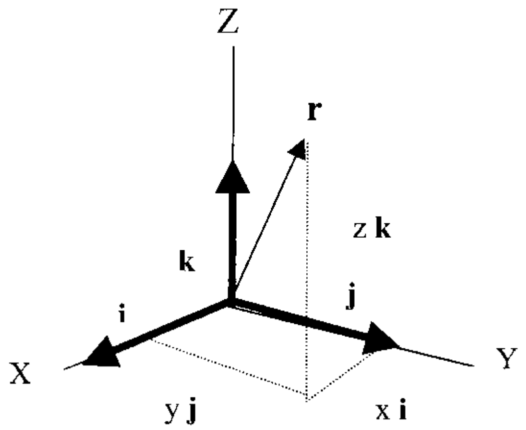


The stroke **R** is called the *resultant* or *sum* of the two strokes **S** and **T** to which it is equivalent".
"A vector is said to be subtracted when it is added after reversal of direction. Symbolically,

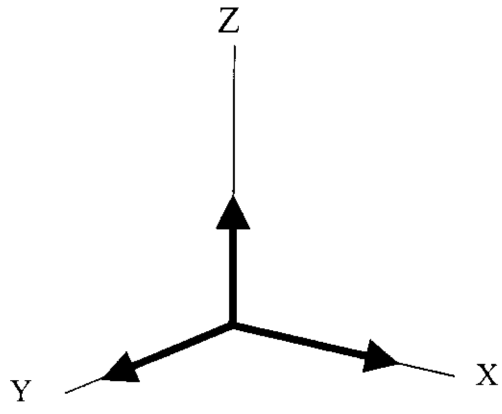
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (\mathbf{-B})$$

The laws which govern addition, subtraction, and scalar multiplication of vectors are identical with those governing these operations in ordinary scalar algebra".

"The Three Unit Vectors i, j, k.



Right-handed



Left-hended

The three letters **i, j, k** will be reserved to denote three vectors of unit length drown respectively in the directions of the X-, Y-, Z- axes of right-handed rectangular system. In terms of these vectors may be expressed as

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\text{"}$$

Direct and skew products of vector

"The direct product of two vectors **A** and **B** is the scalar quantity obtained by multiplying the product of the magnitude of the vectors by the cosine of the angle between them as

$$\mathbf{A} * \mathbf{B}$$

This is read **A** dot **B**. If *A* be the magnitude of **A** and *B* that of **B**, then by definition "

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

"(4) The scalar product of the three fundamental unit vectors **i, j, k** are evidently

$$\mathbf{i} * \mathbf{i} = \mathbf{j} * \mathbf{j} = \mathbf{k} * \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{j} * \mathbf{k} = \mathbf{k} * \mathbf{i} = 0\text{"}$$

"If two vectors **A** and **B** are expressed in terms of the tree unit vectors **i, j, k** as

$$\mathbf{A} = A1\mathbf{i} + A2\mathbf{j} + A3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = B1\mathbf{i} + B2\mathbf{j} + B3\mathbf{k}$$

Then

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = (A1\mathbf{i} + A2\mathbf{j} + A3\mathbf{k}) * (B1\mathbf{i} + B2\mathbf{j} + B3\mathbf{k})$$
$$= A1B1\ \mathbf{i} * \mathbf{i} + A1B2\ \mathbf{i} * \mathbf{j} + A1B3\ \mathbf{i} * \mathbf{k}$$
$$+ A2B1\ \mathbf{j} * \mathbf{i} + A2B2\ \mathbf{j} * \mathbf{j} + A2B3\ \mathbf{j} * \mathbf{k}$$
$$+ A3B1\ \mathbf{k} * \mathbf{j} + A3B2\ \mathbf{k} * \mathbf{j} + A3B3\ \mathbf{k} * \mathbf{k}$$

By means of (4) this reduces to

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = A1B1 + A2B2 + A3B3\text{''}$$

Gibbs definition av skalär- och vektorprodukt skiljer sig alltså inte mycket ifrån definitioner i *University Physics* se sid. 13-15. Detta kan jämföras med teori i Gibbs *Vector Analysis* sid. 62-66. Som vi ser, teori som vi använder idag skiljer sig inte så mycket den teori som Gibbs kom fram till 1900, kanske för att han själv undervisade i ämnet och ville ha ett enklare sätt att förmedla kunskapen om vektorgeometri. Det viktiga var att Gibbs frikopplade de geometriskt användbara begreppen som vektorer, skalärprodukt och vektorprodukt från deras koppling till kvaternioner, som ju också innehöll mycket annat geometriskt oanvändbart stoft.

KÄLLFÖRTECKNING

[1] www.wikipedia.org/wiki/komplexa-tal. 12-12-2004

[2]Viktor J. Katz (2002) *A History of Mathematics* en introduction; Addison Wesley Longman

[3]Bernt Lindström (1988) *När räknelagarna fick namn* ur Elementa 71:1

[4]Philip Kelland och Peter Guthrie Tait (1904) *Introduction to quaternions*;; tredje upplaga; London Macmillan and co.

[5]W. R. Hamilton (1843) *On quaternions or on a new system of imagineries in algebra.*

[6]James Clerk Maxwell (1854) *A treatise on electricity and magnetism* Constable and Company

[7]Bo Göran Johansson; (2004) *Matematikens historia* ; Studentlitteratur.

[8]Harris Benson (1995) *University Physics*; Revised edition; John Wiley & Sons, Inc

[9]Willard Gibbs (1960) *Vector Analysis* J.; Constable and Company Limited

[10]Peter Guthrie Tait (1890) *An elementary treatise on quaternions;* Tredje upplagan; Cambrige University Press

[11]Anders Tengstrand (1994) *Lineäralgebra med vektorgeometri;* Studentlitteratur.