EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Eudoxos arv

av

Kristina Sjösten

2005 - No 9

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

Eudoxos arv

Kristina Sjösten

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Paul Vaderlind

2005

Sammanfattning

I mitten av 1800-talet presenteras för första gången en analytisk definition av de reella talen. Den definitionen bygger på en idé som den store grekiske matematikern Eudoxos lade fram i sin proportionalitetslära redan c:a 400 år före Kristus.

Ungefär samtidigt med definitionen av de reella talen ges också en formell definition av integralen som ej bygger på derivatabegreppet. Kort därefter presenteras en analytisk definition av areabegreppet. Grundtanken för alla dessa definitioner är den samma som Eudoxos hade i sin uttömningsmetod.

Den här uppsatsen är ett försök till att redogöra för Eudoxos proportionalitetslära och hans uttömningsmetod samt beskriva den utveckling som följt i hans spår och varit av betydelse för de slutliga definitionerna av de reella talen, integral och area.

Innehåll

Kapitel 1

Hur det började

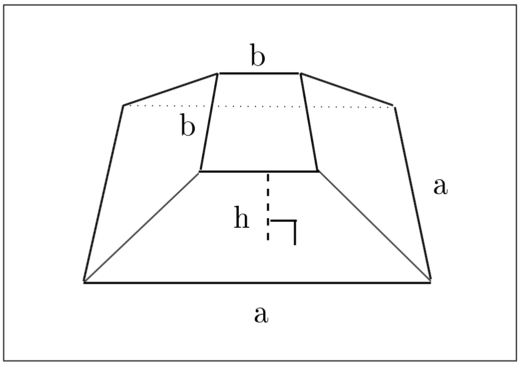
1.1 Egyptierna

Det vi vet om Egyptisk matematik idag står att läsa i två matematiska papyrusskrifter. Den ena är Rhindpapyrusen som skrevs omkring år 1650 f.kr. Den andra är det så kallade Moskvapapyrusen som är ungefär två hundra år äldre. I Moskvapapyrusen står det bland annat nedtecknat hur man räknar ut volymen av en avskuren pyramid med kvadratisk bas:

> Om det sägs: en avskuren pyramid med sex i vertikal höjd och med fyra i basen, med två i toppen. Du ska kvadrera denna fyra, med sexton som resultat. Du ska dubbla med åtta som resultat. Du ska kvadrera två med fyra som resultat. Du ska addera sexton åtta och fyra, med tjugoåtta som resultat. Du ska ta en tredjedel av sex, med 2 som resultat. Du ska ta tjugoåtta två gånger, med femtiosex som resultat. Och se, det är femtiosex. Du ska se att det stämmer.

Beräkning av volymen för en avskuren kvadratisk pyramid var särskilt intressant då deras sädesbehållare hade den formen. Deras nedskrivna matematik innehöll alltid konkreta exempel med angivna mått, den var alltså verbal och saknade bevis. I deras begreppsvärld fanns inte ens tanken på matematiska bevis. Matematiken växte fram ur empirisk erfarenhet. Men, utifrån den verbala framställningen i Moskvapapyrusen kan vi enkelt härleda formeln för volymen av en avskuren kvadratisk pyramid.

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) \tag{1.1}$$



Figur 1.1: Avskuren kvadratisk pyramid

där h är höjden, a är sidan på basen och b är sidan på toppen. Det framgår inte i skrifterna hur de kommit fram till formeln. Deras intresse stannade vid själva tillämpningen av matematiken. Det går heller inte att finna ett exempel på beräkningar av volymen av en riktig pyramid. Men när man har den algebraiska formeln för volymen av en avskuren pyramid med kvadratisk bas framför sig är det lätt att se att om man sätter b till noll så får man den korrekta formeln för volymen av en pyramid.

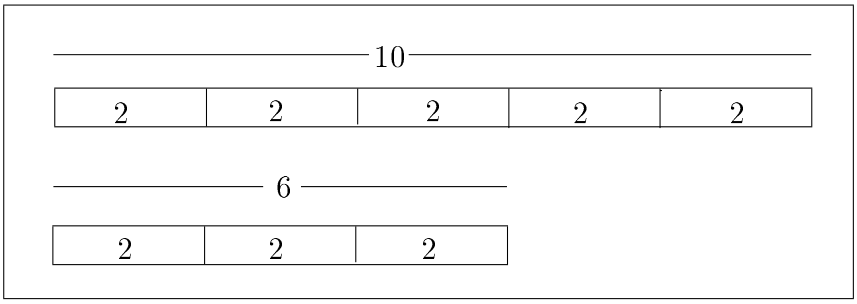
$$V = ha^2/3 \tag{1.2}$$

Även om det sambandet inte syns lika tydligt med den verbala framställningen så är det bland forskarna en allmänn uppfattning att egyptierna kände till formeln för volymen av en riktig pyramid.

1.2 Pytagoreerna

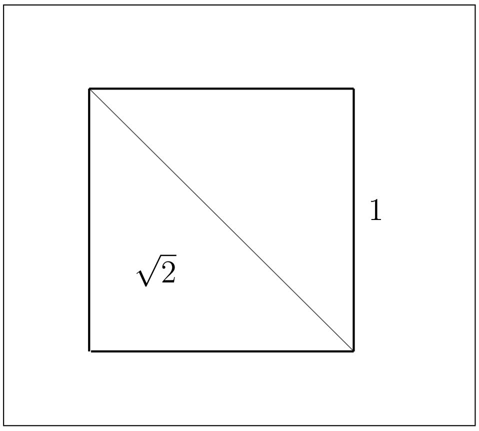
Den grekiska matematiken börjar sin snabba utveckling på 600-talet f.kr. med Thales och Pytagoras som båda tillbringat en del av sin ungdom i Egypten. Pytagoras grundade ett hemligt samfund med mystiska förtecken som ägnade sig åt både religion och filosofi. Det finns inga skrifter som berättar om Pytagoras eget arbete utan det vi vet om Pytagoreernas matematik får tillskrivas samfundet. Samfundet levde kvar efter Pytagoras död och kom att bli en skola med mottot 'allt är tal'. De trodde att allt kunde uttryckas med tal och att allt var uppbyggt av tal. De hade förstått att toner kan beskrivas i termer av förhållanden mellan tal och att stjärnbilder inte bara innehåller ett visst antal stjärnor utan också är en geometrisk figur som i sig kan beskrivas med tal. De såg förklaringar till alla företeelser i naturen genom samband mellan tal. Pytagoreerna arbetade inte med matematiska problem utan deras intresse var de matematiska principerna. De funderade hellre över talens väsen än att utföra matematiska beräkningar och arbetade hellre med abstrakta matematiskt bevis än konkreta matematiska problem.

Med tal menade pytagoréerna positiva heltal. En kvot, låt säga 5/3 var för dem inget tal utan benämningen på ett förhållande mellan två storheter. I den pytagoreska matematiken skiljde man inte på aritmetik och geometri, de tänkte sig att alla storheter, såsom längd, area volym, vinkel etc., kunde uttryckas med tal och dessutom att två storheter alltid var kommensurabla. Med detta menade de att för två storheter alltid existerar en tredje storhet, ett gemensamt mått, så att båda är heltalsprodukter av detta gemensamma mått. Till exempel är en meterstav och en sexdecimeterstav kommensurabla med det gemensamma måttet två decimeter.



Figur 1.2: Två kommensurabla storheter med det gemensamma måttet 2

Någon gång under 400-talet före Kristus förstod pytagoreerna att detta antagande inte stämmer. De upptäckte att somliga storheter inte var kommensurabla. När de betraktade en kvadrat fann de att diagonalen i kvadraten inte är kommensurabel med dess sida, alltså att det inte går att hitta ett gemensamt mått mellan de två storheterna. Då stora delar av pytagoreernas filosofi byggde på det faktum att två storheter alltid är kommensurabla så var många av deras tankegångar var nu att förkasta. De kunde till exempel inte längre använda sig av sin definition av proportionalitet.



Figur 1.3: Kvadrat med sidan 1

Upptäckten av inkommensurabla storheter skapade stor förvirring bland de pytagoreiska matematikerna. Plötsligt uppförde talen sig på ett sätt de inte hade räknat med. Pytagoreerna visste inte hur de skulle hantera denna situation och i förlängningen medförde det att man för tillfället lämnade talen åt sidan för att ägna sig åt ren geometri.

Kapitel 2

Eudoxos

> Jag skulle gärna brinna till döds likt Phaeton, om det vore priset för att nå solen och lära mig om dess form, dess storlek, och dess innehåll.
>
> *Eudoxos*[1]

2.1 Eudoxos

Den kris som uppkom i den grekiska matematiken i och med upptäckten av inkommensurabiliteten, kom att lösas av Eudoxos från Knidos. Han levde omkring år 408-355 före Kristus och var en vetenskapsman. Han var framför allt en av antikens största matematiker. Han gjorde även betydande insatser inom astronomi, filosofi och som geograf. Tyvärr finns inga av hans skrifter kvar. Mycket av det vi vet om Eudoxos arbeten inom matematik har framkommit i Euklides och Arkimedes verk. Arkimedes beundrade Eudoxos matematik och använde den flitigt.

Eudoxos föddes i Knidos och var grekisk medborgare. Han reste i sin ungdom till Sicilien för att studera medicin och vid 23 års ålder till Aten där han studerade fysik. Där deltog han också med stor sannolikhet i Platons föreläsningar i filosofi. Eudoxos tillbringade sedan ett år i Egypten för astronomiska studier varefter han reste till Cyzicus i nordvästra Asien där han grundade en skola som blev mycket populär. Omkring år 368 f.kr. reste Eudoxos, med

[1] Se C.B.Boyer, A history of mathematics sid 91

elever från sin skola, åter till Aten där han verkade vid Platons akademi. Detta var vid samma tid som Aristoteles kom till akademin vid en ålder av 17 år. Aristoteles omnämner Eudoxos idéer i sina verk , bland annat hans idé om planetsystemet. Senare återvände Eudoxos hem till Knidus där han tillbringade resten av sitt liv. Han ägnade sig åt undervisning och hade en betydande roll inom rättsväsendet.

Eudoxos två främsta bidrag till matematiken är för det första hans proportionalitetslära och för det andra vad som senare kom att kallas uttömningsmetoden. I sitt arbete med proportionalitetsläran kom han på ett sätt att jämföra storheter där det saknas betydelse om storheterna är kommensurabla eller ej. Hans teorier fick stor framgång på grund av att de var logiskt konsekventa med utförliga bevis, vilket matematikerna inom den samtida grekiska matematiken eftersträvade. Till skillnad från den tidigare egyptiska matematiken var grekerna inte lika intresserade av tillämpningen som av de abstrakta matematiska idéerna i sig.

2.2 Eudoxos proportionalitetslära

Proportionalitetsläran löste inte bara krisen med upptäckten av inkommensurabilitet utan kom också att ligga till grund för definitionen av de reella talen som gjordes av Richard Dedekind (1831-1916) i mitten av 1800-talet.

För pytagoréerna handlade frågan om två storheters förhållande till varandra om vilket gemensamt mått man kunde finna att jämföra dem med. När det sen visade sig att många förhållanden är inkommensurabla lägger Eudoxos fram ett sätt att beskriva storheters förhållanden som fungerar både för kommensurabla och inkommensurabla förhållanden.

Han börjar med att slå fast vad som skall menas med att två storheter har ett förhållande till varandra. Så här lyder definitionen som lite orättvist går under benämningen Arkimedes axiom[2]

> **Bok 5 definition 4:** Storheter har ett förhållande till varandra, då en multipel av den ena kan överstiga den andra.

Det är alltså bara storheter av samma sort som kan stå i förhållande till varandra, men det är inte väsentligt om de är kommensurabla eller ej. Till exempel sidan och diagonalen av en kvadrat har förhållande till varandra

[2] Heath, The thirteen Books of Euclid´s Element

men är ej kommensurabla. För att sedan kunna säga vilka storheter som har *samma* förhållande till varandra låter Eudoxos a och b vara två geometriska storheter av samma sort och c och d ett annat par av storheter av samma sort, men inte nödvändigtvis samma sort som det första. Och så säger han att a har samma förhållande till b som c har till d, alltså $a : b = c : d$ om det för givna heltal m och n gäller:

$$na > mb \Rightarrow nc > md, \tag{2.1}$$

och

$$na = mb \Rightarrow nc = md, \tag{2.2}$$

och

$$na < mb \Rightarrow nc < md \tag{2.3}$$

På det här sättet lyckas Eudoxos definiera när det råder likhet mellan två förhållanden, kommensurabla eller ej, utan att definiera själva förhållandet, för att undvika problemet med tal som inte är heltal. Man får ha i åtanke att $a : b$ inte betecknar en kvot som ett rationellt tal utan som ett förhållande mellan storheter. För grekerna var det förhållandet mellan storheter som var det intressanta. Eudoxos talar bara om när två storheter har förhållande men han säger inte vad ett förhållande *är* mer än att det är att betrakta som en sorts förhållande. Det finns heller ingen definition av begreppet storhet mer än att det är *en del* av en annan storhet. Definitionen av vilka storheter som har samma förhållande till varandra gav grekerna ett medel att jämföra storheter vare sig de är kommensurabla eller ej. Vi kan i dag säga att definitionen betyder att för varje rationellt tal m/n är kvoterna a/b och c/d båda två större än, båda två mindre än eller båda två lika med m/n.

Så här lyder definitionen i Elementa[3]

> **Bok 5 def.5:** Storheter sägs ha samma förhållande till varandra, den första till den andra och den tredje till den fjärde, om varje godtycklig multipel av den första och den tredje, och varje godtycklig multipel av den andra och den fjärde, den förra multipeln överstiger på samma sätt, är lika eller understiger på samma sätt som den senare multipeln.

[3] Heath, The thirteen Books of Euclid´s Element

Detta gav grekerna ett medel att handskas med inkommensurabla storheter, men de fortsatte att undvika irrationella tal. De betraktade inte $\sqrt{2}$ som ett tal eller som en längd utan som diagonalen i en kvadrat med sidan 1.

2.3 Eudoxos uttömmningsmetod

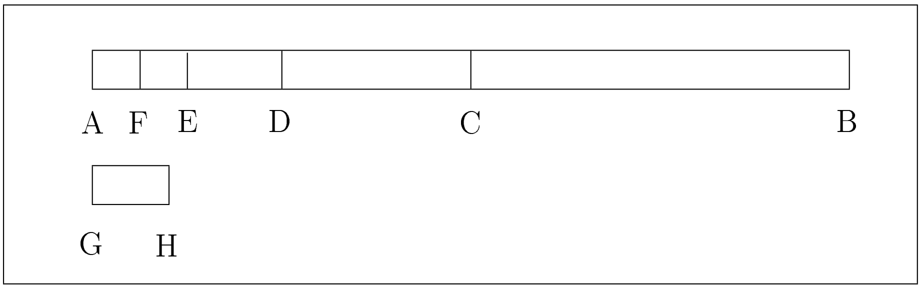
Uttömningsmetoden är det andra av Eudoxos två största bidrag till matematiken. Metoden kan på ett modernt sätt beskrivas så att man genom att tömma ut en figur, vars area eller volym man vill beräkna, med mindre figurer vars area eller volym man känner till. Om man önskar beräkna arean av en cirkel så börjar man med att skriva in en kvadrat i cirkeln och ritar sedan in trianglar med bas i kvadratens kanter och spets i cirkelns periferi och fortsätter på så sätt tills man så att säga har tömt ur cirkeln. Vi vet att area och volym inte var intressant som ett tal för grekerna och att deras intresse låg i hur saker står i förhållande till varandra. På frågan om i vilket förhållande a och b står till varandra så svarar grekerna: i samma förhållande som c och d. Men för enkelhetens skull kommer jag i alla fall i pedagogiskt syfte att tala om areor och volymer också.

Metoden bygger på en princip som Eudoxos är upphovsman till enligt Arkimedes som flitigt använde uttömningsmetoden i sina arbeten. Principen som står nedskriven i Elementa bok 10 sats 1 lyder ungefär så här.

> **Bok 10 sats 1:** Om man har två storheter givna och från den större tar bort minst hälften och från det som återstår tar bort minst hälften även där och fortsätter denna procedur tillräckligt många gånger så kommer slutligen att kvarstå en storhet mindre än den minsta av de två givna storheterna.[4]

Som exempel kan vi tänka oss en meterstav, AB och en decimeterstav, GH som de två givna storheterna. Vi börjar med att ta bort hälften av meterstaven, CB, och får en halvmeter kvar, AC. Utav den halvmetern tar vi bort hälften, DC, och får då kvar två och en halv decimeter, AD. Vi tar nu bort hälften av AD och får kvar en och en fjärdedels decimeter, AE. När vi nu tar bort hälften av AE så kommer det att kvarstå en bit på sex och en fjärdedels centimeter, AF d.v.s. en sträcka mindre än 1 decimeter vilken var den mindre av de två givna sträckorna. AF är alltså mindre än GH.

[4] Heath, The thirteen Books of Euclid´s Element



Figur 2.1: Meterstav och decimeterstav.

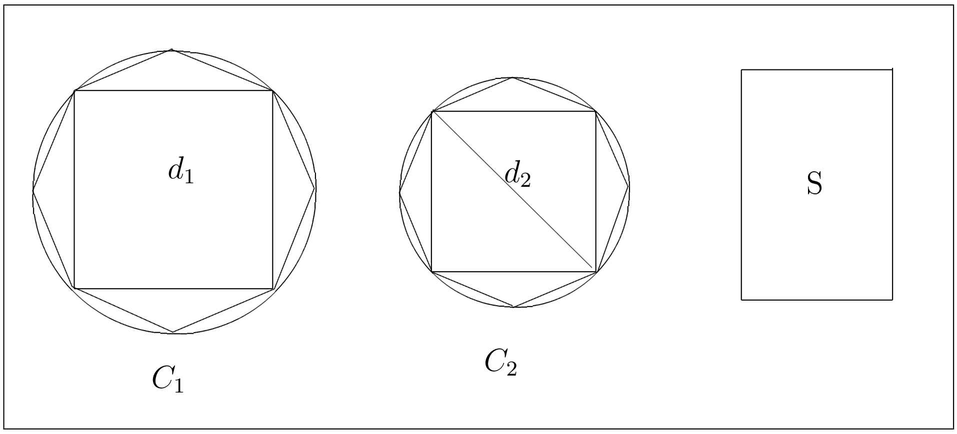
I vår moderna matematik skulle vi uttrycka det som att om man tillräckligt många gånger utför halveringar av en storhet så kommer man att efter ett godtyckligt antal halveringar få kvar en storhet mindre än någon given storhet. Detta kunde inte beskrivas matematiskt förrän gränsvärdesbegreppet infördes i matematiken på 1800-talet. Grekerna kunde acceptera en potentiell oändlighet i vilken man alltid kan dela en gång till oavsett hur stort antal delningar man tidigare gjort. Men de hade inte de begrepp som krävs för att använda oändligheten i matematiska bevis. Det stora begreppet i grekisk matematik är *förhållanden*. Uttömningsmetoden användes för att jämföra storheter med varandra. Bevisföringen byggde på ett begränsat antal delningar men visar att det till slut går att få en storhet kvar som är mindre än vilken given storhet som helst. Genom att visa att om den jämförande storheten antas vara större eller mindre så leder det till motsägelser. Låt oss nu titta på hur principen används i uttömningsmetoden.

2.3.1 Arean av en cirkel

Att söka arean av en figur var för grekerna det samma som att konstruera en kvadrat med samma area som figuren, inte att finna arean som ett tal. Istället för att direkt beräkna arean av en cirkel så jämförde de två cirklars areor och hur de stod i förhållande till varandra jämfört med förhållandet mellan areorna av två kvadrater. Hur detta gick till beskrivs i Elementa. Enligt den information vi fått från Arkimedes är den enkla slutsatsen[5] att det inte bör råda några tvivlel om att Eudoxos var den första som använde uttömningsprincipen för att bevisa nedanstående sats.

[5]Heath, A history of greek mathematics, vol.2

Bok 12 sats 2: Cirklar är till varandra såsom kvadraterna på deras diametrar.[6]



Figur 2.2: Två cirklar och en kvadrat att jämföra med

Alltså:

$$C_1 : C_2 = d_1^2 : d_2^2 \tag{2.4}$$

Där C_1 och C_2 betecknar två olika stora cirklars areor. Beviset börjar med att låta

$$C_1 : S = d_1^2 : d_2^2 \tag{2.5}$$

där S är en kvadrat vars area antingen är större eller mindre än C_2. Se illustration.

Vi antar först att S är mindre än C_2.

$$S < C_2 \tag{2.6}$$

Nu kommer vi till uttömmningsprincipen där de två givna storheterna är C_2 och $C_2 - S$. Delningen av den större storheten C_2 går till så att man skriver in en kvadrat i C_2 vilken är större än halva C_2. Därmed kan man tillämpa uttömningsprincipen. Vi får kvar området mellan kvadraten och cirkeln. Från det området tar vi bort trianglar med bas i kvadraternas kanter och spets i cirkelns periferi. De trianglarna utgör mer än hälften av det kvarvarande området. Nu forsätter vi att ta bort trianglar på detta sätt tills kvarvarande

[6]Heath, The thirteen Books of Euclid´s Element

område är mindre än $C_2 - S$. Den polygon som bildats i cirkeln är då större än S.

$$P_2 > S \tag{2.7}$$

Nu behöver vi använda tidigare sats i Elementa, nämligen sats 1 i bok 12.

> **Bok 12 sats 1:** Likformiga polygoner som är inskrivna i cirklar är till varandra såsom kvadraterna på deras diametrar.

Det vill säga att två polygoners areor, P_1 och P_2, med lika antal sidor, inskrivna i två cirklar, C_1 och C_2, förhåller sig till varandra på samma sätt som cirklarnas diametrar i kvadrat gör.

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 \tag{2.8}$$

För att använda den här satsen skriver vi nu in en polygon P_1 i C_1 med lika antal kanter som polygonen P_2 i C_2. Då gäller enligt satsen.

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 \tag{2.9}$$

Om vi lägger ihop det sambandet med antagandet vi gjorde i början att $C_1 : S = d_1^2 : d_2^2 (2.5)$ så får vi ut att

$$C_1 : S = P_1 : P_2 \tag{2.10}$$

. Men det strider emot grundantagandet som säger att S är mindre än C_2. För om S är mindre än C_2 så måste enligt 2.10 C_1 vara mindre än P_1 vilket ju är orimligt. En cirkels area kan inte vara mindre än arean av de polygoner som är inskrivna i den.

Om vi nu antar att S är större än C_2 och argumenterar på liknande vis får vi även då en motsägelse. S är alltså varken större eller mindre än C_2 och måste då vara lika med C_2, vilket fullbordar motsägelsebeviset.

Beviset känns väldigt klumpigt för oss men det är rigoröst och står på en stadig grund. Vi skulle naturligtvis vilja säga att för att beräkna arean av en cirkel kan man skriva in en polygon i den och då antalet hörn i den regelbundna inskrivna polygonen går mot oändligheten går skillnaden mellan polygonen och cirkeln mot noll. Vår grund för det antagandet ligger i gränsvärdesbegreppet. Grekerna hade inget gränsvärdesbegrepp att arbeta med men lyckades ändå konstruera ett logiskt hållbart bevis eftersom de tänkte sig ett ändligt antal delningar.

2.3.2 Volymen av en pyramid

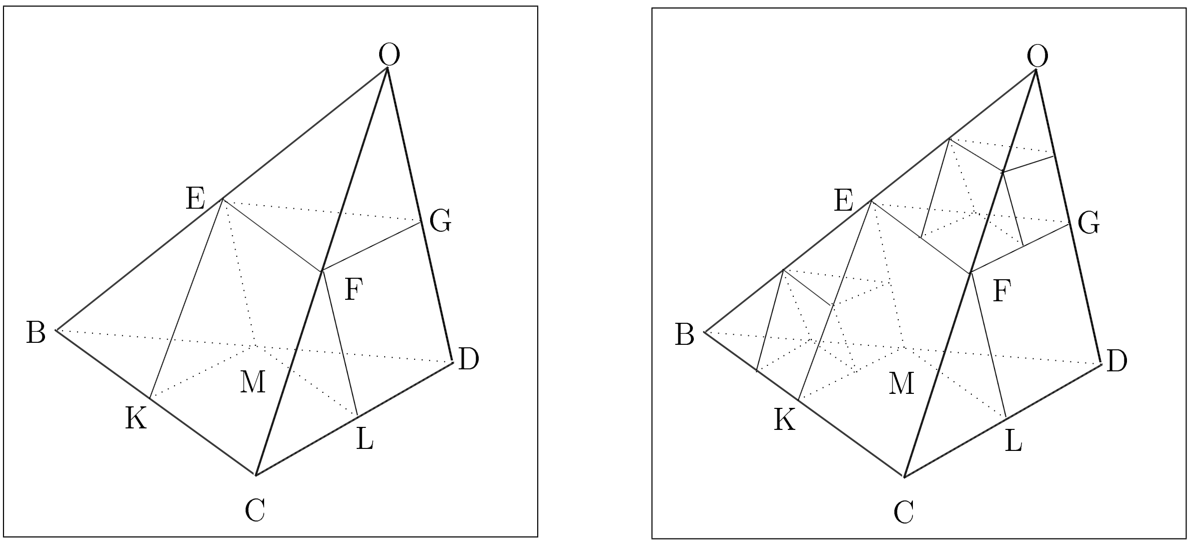
Enligt Arkimedes var det Demokritos som först beskrev det faktum att pyramiden är en tredjedel av ett prisma med samma bas. (Demokritos som är känd för sin atomteori tänkte sig att allt är uppbyggt av små odelbara entiteter.) Den förste som faktiskt bevisar det är Eudoxos.[7]

I Elementa finns det bevis som med största sannolikhet härstammar från Eudoxos. Satsen lyder:

> **Bok 12 sats 7:** Varje prisma med triangulär bas kan delas i tre pyramider, alla lika och med triangulära baser.[8]

Beviset bygger på en tidigare sats som säger att pyramider med triangulär bas och med samma höjd förhåller sig till varandra på samma sätt som deras respektive baser förhåller sig till varandra.

> **Bok 12, sats 5:** Pyramider som har samma höjd och har triangulära baser är till varandra såsom baserna.[9]



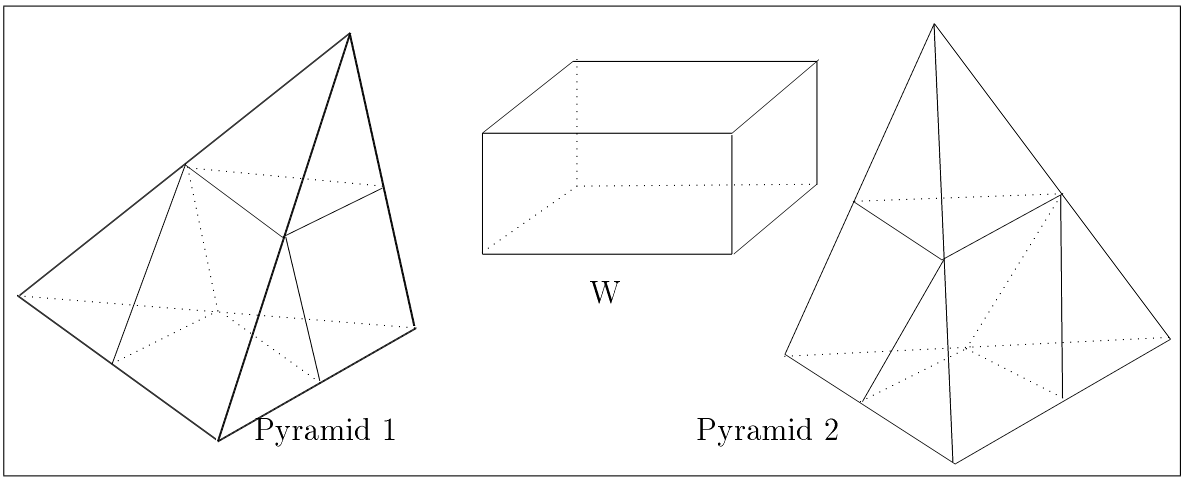
Figur 2.3: Eudoxos delning av pyramiden

[7]Tomas Heath, A history of Greek mathemathics
[8]Heat, The thirteen Books of Euclid´s Element
[9]Heath,The thirteen Books of Euclid´s Element

Beviset av denna sats är samma slags motsägelsebevis som det tidigare beskrivna för cirklar. Beviset följer nedan men först en beskrivning av det tjusiga med Eudoxos uttömning av pyramiden, nämligen hur han delar den, vilket framgår i sats 4 i bok 12. Eudoxos utgår ifrån en pyramid med triangulär bas. Han delar upp pyramiden dels i två lika stora pyramider, (EFGO) och (BKME) vilka är likformiga med hela pyramiden dels i två prismor, (KMCLEF)och (FGLDME). Uttömningen kan nu ske genom att ta bort prismorna som ju är större än halva pyramiden, (det visas i en tidigare sats). När man tagit bort prismorna återstår två pyramider utifrån vilka man tar bort två prismor på samma sätt. Slutligen kommer det enligt Eudoxos princip att återstå ett antal pyramider vars volym är mindre än någon given volym. Låt oss i pedagogiskt syfte tala om volymer och areor i stället för sakers förhållanden.

Bevis av sats 5 i Euklides elementa bok 12

Låt oss kalla volymen av pyramid 1 för py_1 och volymen av pyramid 2 för py_2 och basen av pyramid 1 för b_1 och basen av pyramid 2 för b_2. Satsens



Figur 2.4: Två pyramider och ett godtyckligt stort rätblock W

påstående är att: såsom basen till pyramid 1 förhåller sig till basen av pyramid

2 så förhåller sig volymen av pyramid 1 till volymen av pyramid 2. Alltså:

$$b_1 : b_2 = py_1 : py_2 \tag{2.11}$$

Om det inte förhåller sig på det viset så kan vi anta att b_1 förhåller sig till b_2 såsom py_1 förhåller sig till en volym som antingen är större eller mindre än py_2. Alltså:

$$b_1 : b_2 = py_1 : W \tag{2.12}$$

där W är en volym som antingen är större eller mindre än py_2. Beviset går ut på att visa att om vi antar att ekvation 2:12 gäller så får vi en motsägelse både när vi antar att W är större än py_2 och när vi antar att W är mindre än py_2. Och ut i från det kan vi sluta oss till att W är lika med volymen av pyramid två och därmed är satsens påstående bevisat. Vi skall följa beviset med antagandet att

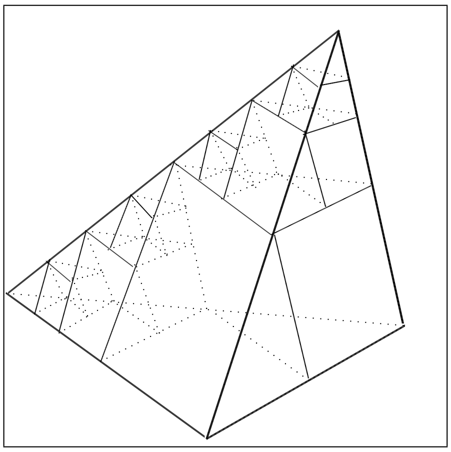
$$W < py_2 \tag{2.13}$$

När Eudoxos använder uttömningsprincipen i beviset utgår han ifrån två storheter, den ena är volymen av pyramid 2, py_2, och den andra är skillnaden mellan volymen av pyramid 2 och W, $py_2 - W$. Enligt principen kommer det då att efter tillräckligt många halveringar av py_2, som är den större av de två storheterna, kvarstå en storhet som är mindre än $py_2 - W$, (se sats 1 bok 10 ovan).

Vi börjar med att dela pyramiden i två mindre likadana pyramider och två likadana prismor enligt den vänstra figuren i figur 2:3 på så sätt att de två prismorna är större än de två små pyramiderna. Sedan delar vi de två pyramiderna på samma sätt och fortsätter delningen tills nästan hela pyramiden består av likformiga prismor och en liten del av pyramiden består av ett stort antal små pyramider vars volym är mindre än volymen av skillnaden mellan py_2 och W. Alltså:$(py_2 - V(prismor_2)) < (py_2 - W)$. De inskrivna prismorna i py_2 är då större än W.

$$V(prismor_2 > W \tag{2.14}$$

Beviset fortsätter med en delning py_1 på samma sätt och lika många gånger som py_2. Av tidigare sats, (sats 4 i bok 12) vet man att för pyramider med triamgulära baser och samma höjd gäller att deras baser förhåller sig till varandra på samma sätt som inskrivna prismors volym förhåller sig



Figur 2.5: Upprepad delning av pyramiden

till varandra, på grund av likformighet. Låt $V(prismor1)$ och $V(prismor2)$ beteckna volymen av de inskrivna prismorna i pyramid 1 respektive pyramid 2. Då vi nu har delat både py_2 och py_1 kan vi gå vidare med följande samband

$$b_1 : b_2 = V(prismor1) : V(prismor2) \tag{2.15}$$

Fortsättningsvis är enligt antagande i början av beviset

$$b_1 : b_2 = py_1 : W \tag{2.16}$$

och om vi lägger ihopp 2:14 och 2:15 så får vi

$$py_1 : W = V(prismor1) : V(prismor2) \tag{2.17}$$

De inskrivna prismorna är ju naturligtvis mindre än pyramiden de är inskrivna i

$$V(prismor) < py_1 \tag{2.18}$$

och enligt 2:16 så är då även

$$V(prismor2) < W \tag{2.19}$$

, vilket är en motsägelse till 2:14.

Om vi nu går igenom beviset en gång till men med antagandet att $W > py_2$ så kommer vi att få en motsägelse då också. Vi får alltså en motsägelse när vi antar att $b_1 : b_2 = py_1 : W$ både när vi antar att W är större än och mindre är p_2. Alltså måste $b_1 : b_2 = py_1 : p_2$ och beviset är fullbordat.

En mer modern matematisk beskrivning av metoden kan göras så här.Om vi betraktar det inskrivna prismat (FGDLME) i figur 2:3 vars höjd är halva pyramidens höjd och vars basarea är 1/4 av pyramidens basarea, så ser vi att volymen av ett av det inskrivna prismorna är lika med 1/8 av pyramidens basarea gånger pyramidens höjd. Eftersom vi har två sådana prismor så blir deras totala volym lika med 1/4 av pyramidens basarea gånger pyramidens höjd.

$$V = \frac{1}{4}Ah \tag{2.20}$$

Vidare blir volymen av de fyra prismorna inskrivna i de två mindre pyramiderna lika med basarean av den stora pyramiden gånger höjden av den samma delat med fyra i kvadrat, eftersom de två mindre pyramiderna har halva den stora pyramidens höjd och deras basarea är 1/4 av den stora pyamidens basarea. Detta ger

$$2 * \frac{1}{4} * \frac{A}{4} * \frac{h}{2} = \frac{Ah}{4^2}. \tag{2.21}$$

När vi fortsätter delningarna så får vi efter n delningar 2^n små pyramider och 2^n par av små prismor. Varje pyramid har höjden $h/2^n$ och basarea $A/4^n$ och alla 2^n par av små prismor en total volym av

$$Ah\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n+1}}\Big). \tag{2.22}$$

och summan inom parantesen går mot 1/3 då termerna går mot oändligheten. Grekerna hade inte nåt fram till förståelsen av summation av oändliga serier utan arbetade med det bevis som de behärskade, nämligen motsägelsebevis.

Kapitel 3

Från Arkimedes till 1600-talet

3.1 Arkimedes

Arkimedes (287-212 f.kr.) använde uttömningsmetoden i mycket av sitt arbete och det är i hans skrifter vi fått reda på att det är Eudoxos som är dess upphovsman. Att det fanns en konstant inblandad i beräkningar av areor och omkretsar av cirklar var känt redan av Egyptierna. Genom att förfina uttömningsmetoden kunde Arkimedes beräkna värdet av π med en noggrannhet som än idag räcker inom ingenjörsvetenskapen. Nämligen

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \tag{3.1}$$

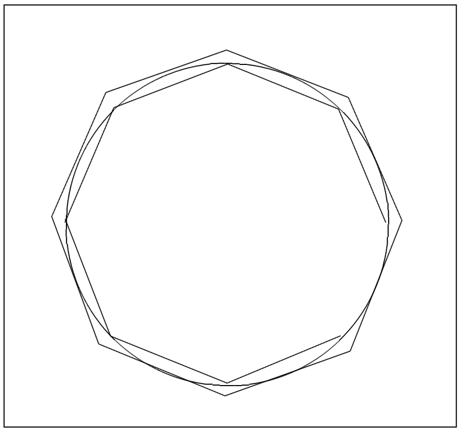
Vilket framgår i sats 3 i hans *Measurment of the circle*[1].

> Omkretsen av varje cirkel är tre gånger större än diametern och överskrider det med mindre än en sjunde-del av diametern och med mer än tio sjuttioen-delar.

Arkimedes förfining av uttömningsmetoden består i att han inte bara skriver in en polygon i cirkeln utan också omskriver cirkeln med en polygon med lika många kanter som den inskrivna. Han utarbetar en slags algoritm för att beräkna omkretserna på polygonerna och får på så sätt ut approximationen av π.

Redan innan Arkimedes kunde man beräkna arean av ett cirkelsegment med hjälp av uttömningsmetoden, men Arkimedes var den första som beräknade arean av ett parabelsegment. Han visar att ett parabelsegment är fyra

[1] Archimedes, Dijksterhuis, E.J.



Figur 3.1: Arkimedes förfining av uttömningsmetoden.

tredjedelar av en triangel med samma bas och vertex genom att upprepade gånger skriva in trianglar mellan parabeln och den redan inskrivna figuren. Vid varje steg av inskrivningen kommer summan av de senast inskrivna trianglarna att överstiga arean av det område av parabeln som ännu inte är fylld med trianglar varvid uttömningsmetoden är tillämpbar. Han forsätter med att visa att arean av de senast inskrivna trianglarna alltid är en fjärdedel av arean av de trianglar som skrevs in i steget före. Om A är arean av den först inskrivna triangeln så kommer processen att leda till en serie

$$A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + ... \tag{3.2}$$

där han ser att värdet kommer att gå mot

$$A\frac{4}{3} \tag{3.3}$$

då termerna går mot oändligheten. Men eftersom oändliga serier sågs med ogillande vid den tiden avslutar han serien med en restterm och bevisar att värdet han fått fram är korrekt med hjälp av ett motsägelsebevis.

Arkimedes använder uttömningsmetoden i sina arbeten med en mängd olika kurvlinjära figurer, såsom parabler och ellipser, och volymer av koner och sfärer. Han löste många problem som hör analysen till, och hans arbeten inspirerade många senare matematiker att gå vidare mot integralkalkyl. För Arkimedes var varje beräkning ett fall för sig. Det skall dröja till 1600-talet innan en generell metod att beräkna areor och volymer utvecklas och lägger grund för integralkalkyl. Så småningom skall också ett gränsvärdesbegrepp utvecklas som gör det möjligt med mer direkta bevis än de tunga motsägelsebevisen.

3.2 Medeltiden

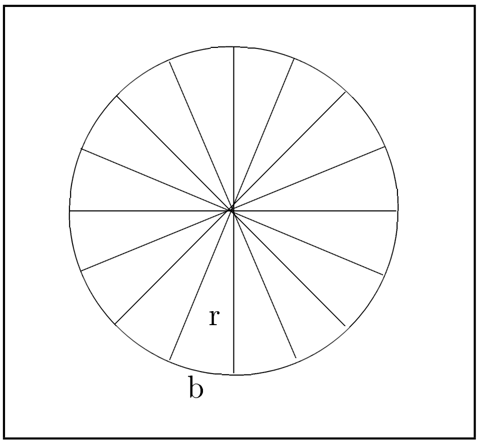
Nicole Oresme (1323-1382) var en av de första som kom på idén att rita en graf över hur saker varierar. Oresme skrev att vi tänker oss allt mätbart som kontinuerliga kvantiteter och så ritade han en hastighet-tid graf för en kropp med konstant acceleration. Han såg då att hastigheten utgjorde en rät linje och att arean under kurvan var en rätvinklig triangel. Detta blev en grafisk representation av det samband som kallades Mertons lag, medelhastighetsteoremet. Mertons lag säger att en kropp som rör sig med konstant acceleration tiden t tillryggalägger samma sträcka som en kropp som rör sig med en konstant hastighet, hälften av den förres sluthastighet, tillryggalägger under samma tid. Oresme förklarar aldrig varför arean under kurvan är den tillryggalagda sträckan, och mycket av hans arbeten föll i glömska under medeltiden. Men Galileo var en av dem som inspirerades av hans arbeten. Rent begreppsmässigt var det ett slags början till funktionsbegrepp och integrering.

3.3 En oändlig mängd odelbara smådelar och infinitesimaler

3.3.1 Kepler

På 1500-talet blev översättningar av Arkimedes verk tillgängliga. De blev en stor insperationskälla för en hel del matematiker, bland annat Johann Kepler (1571-1630). Kepler tänkte sig arean av en cirkel som summan av ett stort antal smala trianglar med spets i cirkelns mitt och bas i cirkelns periferi, vilket är det samma som radien gånger omkretsen delat med två, $A = rO/2$.

Keplers intresse för astronomi ledde honom genom planeters banor och omloppstider till areaberäkningar. Han upptäckte att en planet som rör sig kring solen rör sig i en elliptisk bana där solen befinner sig i en av ellipsens brännpunkter. Från solen tänker man sig en linje ut till planeten som befinner sig på ellipsens kant. Den area som uppkommer då linjen sveper över ellipsens



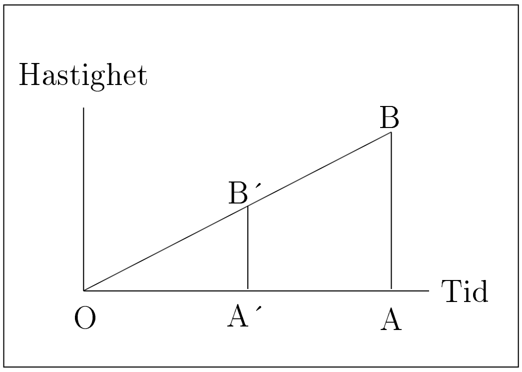
Figur 3.2: Cirkel indelad i tårtbitar

yta då planeten rör sig är proportionell mot den förlupna tiden. För att beräkna arean delade han upp ellipsen i sektorer.

Nu började tankarna på att dela upp områden i ett oändligt antal smådelar att ta form ordentligt. Kepler och många andra samtida matematiker tyckte att Arkimedes indirekta bevis var alltför klumpiga och ville ha en mer direkt bevisföring. Kepler försökte hitta uppdelningar som gav snabbare lösningar. Han delade t.ex. in en sfär i oändligt små pyramider med spets i mitten och bas i periferin. På så vis kunde han direkt visa att volymen av sfären är lika med ytarean gånger radien delat på tre.

3.3.2 Galilei

Galileo Galilei (1564-1642) som var intresserad av likformigt accelererad rörelse lade fram ett argument för hur man man visar att arean under kurvan i ett tid/hastighets-diagram är lika med sträckan. Anta att ett objekt rör sig med den konstanta accelerationen $32m/s^2$ och då blir hastigheten $32t$. Låt A'B' representera en momentan hastighet vid en viss tidpunkt och även en infinitesimal, tillryggalagd sträcka. Galilei tänker sig då att hela OAB är uppbyggd av linjer typ A'B' och därmed blir hela OAB den totala sträckan, som ju är AB*OA/2. Och eftersom AB=$32t$ och OA=t så blir sträckan lika med $16t^2$.



Figur 3.3: Hastighet och tid diagram

3.3.3 Cavalieri och början till integralen

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) tänkte sig geometriska figurer som uppbyggda av ett oändligt antal odelbara smådelar av en dimension lägre, till skillnad från Kepler som föredrog infinitesimaler, alltså små delar av samma dimension. Cavalieri betraktade alltså en area som uppbyggd av ett oändligt antal odelbara linjer av typen x och y i illustration 3.4 och en kropp som ett oändligt antal odelbara plan. Men han gör aldrig klart om dessa odelbara linjer och plan har tjocklek eller ej. Cavalieri fick mycket kritik för att hans arbeten inte var särsklilt rigorösa.

Cavalieri är mest känd för dels sin egen Cavalieris sats som lyder:

> Om två kroppar har samma höjd, och om man delar dessa kroppar med plan parallella med deras baser och på samma avstånd från baserna och planen alltid är i samma storleksförhållande så är också volymerna av kropparna i sammma storleksförhållande.[2]

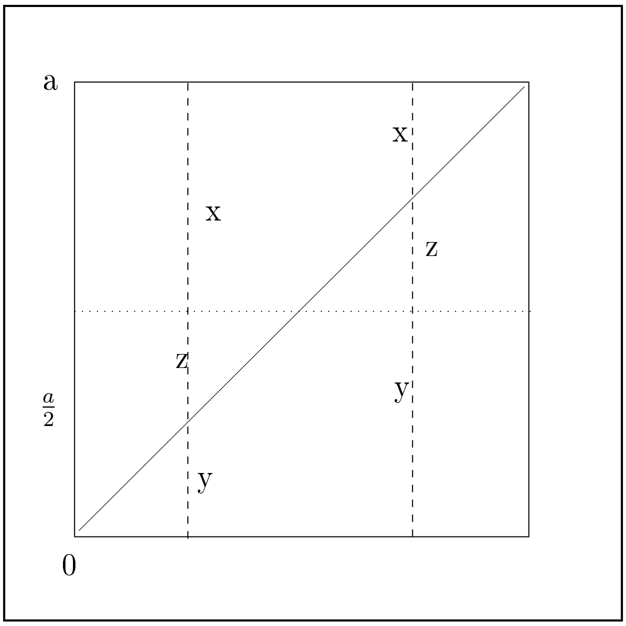
Och dels för att han lyckas bestämma det vi kallar

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{3.4}$$

för n upp till 9.

Själv talar han inte om integraler utan om *o.l.*, omnes lineae, alltså *alla linjer* och *o.p.* för *alla plan* och *o.c.* för *alla kuber*.

[2] The historical development of the calulus, Edwards, C.H.



Figur 3.4: En figur är uppbyggd av odelbara linjer, x och y. z är sträckan mellan mittlinjen och diagonalen

För att bestämma sambandet för $n = 2$ utgår han[3] ifrån en kvadrat som han delat i diagonalen där de tänkta vertikala linjerna i den övre triangeln benämns y och linjerna i den undre triangeln benämns x. Kvadratens kant är a och lika med y+x och . Han sätter

$$\sum a^2 = \sum (x+y)^2 \tag{3.5}$$

och utvecklar kvadraten och får

$$\sum x^2 + 2\sum xy + \sum y^2 = \sum a^2 \tag{3.6}$$

som av symmetriskäl är lika med

$$2\sum x^2 + 2\sum xy = \sum a^2 \tag{3.7}$$

och för att hitta xy så sätter han $x = a/2 + z$ och $y = a/2 - z$. Då är

$$\sum xy = \sum (\frac{1}{4}a^2 - z^2) = \frac{1}{4}\sum a^2 - \sum z^2. \tag{3.8}$$

[3]Bevisgången hämtad från Struiks modernisering av orginalbevis, A source book in mathematics 1200-1800, Struik, D.J.

Utifrån figuren ser vi att $\sum z^2 = \frac{1}{4}\sum x^2$ och således

$$2\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum a^2 - \frac{1}{2}\sum x^2 = \sum a^2 \qquad (3.9)$$

och därmed

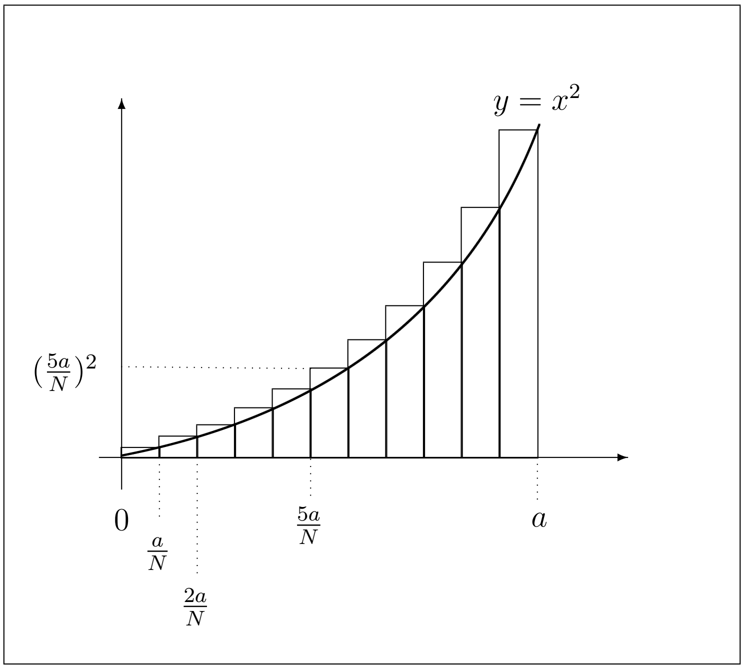
$$\sum x^2 = \frac{1}{3}\sum a^2 \qquad (3.10)$$

och summan av alla kvadrater på a är det sammma som kuben på a.

$$\sum_0^a x^2 = \frac{1}{3}\sum_0^a a^2 = \frac{1}{3}a^3 \qquad (3.11)$$

Utifrån dessa geometriska samband fortsättet Cavalieri att finna resultat för formeln 3.4 upp till $n = 9$ utan att ställa upp den generella formeln.

Flera matematiker, bland andra Fermat, Pascal och Robertval, försöker nu mer eller mindre rigoröst att bevisa Cavalieris slutsats (ekvation 3.4). De gör detta genom att utgå ifrån den grekiska principen om uttömning.



Figur 3.5: area

Betrakta en kurva $y = x^2$ (se figur 3:5). För att beräkna arean under kurvan i området $x = 0$ till $x = a$ så ritade man in N stycken rektanglar, varje med bredden a/N och höjden $(na/N)^2$. Arean av den första rektangeln blir då $(a/N) * (a/N)^2$, arean av den andra blir $(a/N) * (2a/N)^2$ och så vidare. Slutligen har vi summan av arean av alla rektanglar under kurvan som blir

$$\frac{a}{N} \cdot \left(\frac{a}{N}\right)^2 + \frac{a}{N} \cdot \left(\frac{2a}{N}\right)^2 + \frac{a}{N} \cdot \left(\frac{3a}{N}\right)^2 + ... + \frac{a}{N} \cdot \left(\frac{Na}{N}\right)^2 \tag{3.12}$$

vilket på ett snyggare sätt kan skrivas som

$$\left(\frac{a}{N}\right)^3 (1 + 2^2 + 3^2 + ... + N^2) \tag{3.13}$$

och denna summa visste man kunde skrivas som

$$\left(\frac{a}{N}\right)^3 \left(\frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}\right) \tag{3.14}$$

som i sin tur är lika med

$$a^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}\right). \tag{3.15}$$

Eftersom de valde ett väldigt stort N, för att få en så bra aproximation på arean under kurvan som möjligt, så förstod de att de två sista termerna inom parentesen i ekvation 3.11 närmar sig noll och kan bortses ifrån. Slutsatsen blir då att arean av de inskrivna rektanglarna under kurvan $y = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = a$ närmar sig $a^3/3$ då antalet inskrivna rektanglar går mot oändligheten.

Dessa tankegångar är ett steg på vägen mot integralkalkyl. Man börjar nu lägga de indirekta bevisen bakom sig och blickar mot bevis med oändliga summationer av odelbara småbitar eller infinitesimaler. Ett gränsvärdesbegrepp börjar så smått ta form.

3.4 Talen

Ett förhållande mellan två storheter var för grekerna ett geometriskt fenomen och kunde inte uppfattas som ett tal på grund av deras definition av vad ett tal är för något. De tre första definitionerna i Elementas bok 7 som behandlar tal är:

- En *enhet* är det som genom allting kallas ett.

- Ett *tal* är mängd bestående av enheter.
- Ett tal är *en del* av ett tal, det mindre av det större, när det mäter det större.

Den definitionen av tal gjorde det inte möjligt att betrakta något annat än heltal som tal.

År 1077 skrev den arabiske matematikern Omar Khayyam (1048?-1122) *Commentary on the difficulties to be found in the introductions to Euclid´s book* i vilken han formulerar en idé om att man kan betrakta storheters förhållande inte bara geometriskt. Han beskriver förhållande mellan två storheter A och B genom att betrakta en storhet G som har samma förhållande till någon vald enhet såsom A har till B och då skall vi förstå G :

> inte som en linje, en yta, en kropp eller ett tidsintervall, utan som en storhet vilken ej är materiell och vilken tillhör domänen tal, men icke absoluta och äkta tal, för förhållandet mellan A och B är ofta icke mätbart, det vill säga att det kanske inte är möjligt att hitta två tal som har samma förhållande.[4]

Ingen följde upp Omar Khayyams idéer om dessa icke absoluta tal. Den geometriska presentation av inkommensurabla storheter som gjordes av Eudoxos kom successivt att övergå i ett intuitivt begrepp om de irrationella talen men en definition kom inte förrän i slutet av 1800-talet.

På 1500-talet kunde man obehindrat räkna med irrationella tal men många var av den uppfattningen att de irrationella talen bara var symboler utan eget innehåll som var beroende av geometriska storheter. Men det fanns de som hävdade att de var oberoende entiteter. En av dem var den belgiske matematikern Simon Stevin (1548-1620). Han försökte beskriva de irrationella talen genom att approximera dem med rationella tal i form av decimalbråk.

[4] History of mathematics History of problems sid 47, The Inter-IREM Commission

Kapitel 4

Integral- och infinitesimal-kalkylens upptäckt

4.1 Integral- och infinitesimal-kalkylens upptäckt

Det som händer i integralens utveckling nu på 1600- och 1700-talet är att matematiker börjar söka formella metoder att handskas med de oändligt små storheter som funnits intuitivt i många matematikers tankar. Det var Isaac Newton(1642-1727) och Gottfried Wilhelm Liebniz(1646-1716) som lyckade väva ihop areaberäkningar, infinitesimaler och tangenter med gränsvärdestänkande, algebra, funktioner och geometri. De fann också generella metoder att finna areor och tangenter och de såg deras inversa samband, mycket tack vare att de uppfann en notation att beskriva de geometriska bilderna med. Det matematiska språket blev mindre snårigt med symboler istället för ord och matematiken blev lättare att överblicka.

4.2 Newton

Isaac Newton kommer på en metod att hitta den momentana förändringen hos en variabel med avseende på en annan. Han antar en kurva och att arean under den kurvan ges av

$$z = ax^m, \tag{4.1}$$

där m är ett hel- eller rationellt tal. Han betecknar den infinitesimala ökningen i x med o. Arean under kurvan mellan 0 och $x + o$ betecknar han med

$$z + oy = a(x + o)^m. \tag{4.2}$$

Han utvecklar högerledet med binomialsatsen och subtraherar (4.1) från (4.2), dividerar med o och bortser från de termer som fortfarande innehåller o, och får till slut

$$y = max^{m-1} \tag{4.3}$$

Han visar också omvänt att om kurvan är $y = max^{m-1}$ så är arean under kurvan $z = ax^m$. I och med detta har han alltså kommit fram till vad vi i dag kallar analysens huvudsats. Man visste redan att arean kan beräknas med summation av infinitesimaler. Nu har Newton visat att arean också kan fås fram genom att omvända metoden att få fram förändringen av x i förhållande till y i det förlopp kurvan representerar. Alltså, summation är lika med omvänd differentiering. Med andra ord, en funktion $f(x)$ är lika med integralen av dess derivata. $f(x) = \int f'(x)dx$

Newton vidareutvecklar idéerna och lägger fram det som kallas Fluxionsmetoden. Newton var som bekant en stor fysiker. Han betraktade variablerna som om de var genererade av kontinuerlig rörelse av punkter, linjer och plan snarare än ett bygge av infinitesimaler. Han kallar variablerna x och y för fluenter och deras rörelse för fluxion, vilken han betecknar med $\dot{x}$ och $\dot{y}$. En kurva uppstår på så vis utav att en horisontell och en vertikal linje rör sig. Vad Newton nu frågar sig är hur man givet förhållandet mellan två fluenter x och y tar reda på förhållandet mellan deras fluxioner $\dot{x}$ och $\dot{y}$. Newton betraktar variablernas rörelse i tiden, låter o vara ett oändligt litet tidsintervall och $\dot{x}o$ och $\dot{y}o$ blir då de oändligt små ökningar i x och y. För att hitta förhållandet mellan $\dot{x}$ och $\dot{y}$ går Newton till väga på samma sätt som tidare. Givet $y = x^n$ sätter han

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n, \tag{4.4}$$

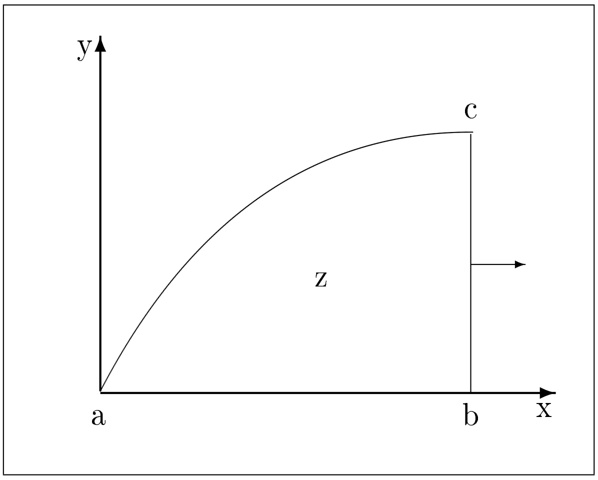
utvecklar högerledet med binomialsatsen, subtraherar $y = x^n$, dividerar med o, bortser från alla termer som fortfarande innehåller o och får fram att

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}. \tag{4.5}$$

Och där har vi förhållandet mellan $\dot{x}$ och $\dot{y}$ som vi med modern notation skriver

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \tag{4.6}$$

Newton visste att om man givet hastigheten ville söka den tillryggalagda sträckan så är det samma sak som att söka arean under kurvan som



Figur 4.1: Arean z under kurvan uppstår genom en linjes bc:s rörelse.

hastigheten representeras av. Han betraktade situationen på följande vis. En kurva ac genereras av fluenterna, alltså x och y koordinaternas rörelse. Låt z beteckna arean under kurvan. Då genereras z av en linje paralell med y-axeln, bc som rör sig åt höger. Alltså är fluxionen av arean lika med bc gånger fluxionen av densamma. Vilket betecknas $\dot{z} = y\dot{x}$ vilket är det samma som

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y. \tag{4.7}$$

Eftersom z representerar arean,A, under kurvan $y = f(x)$ så kan vi med modern notation skriva

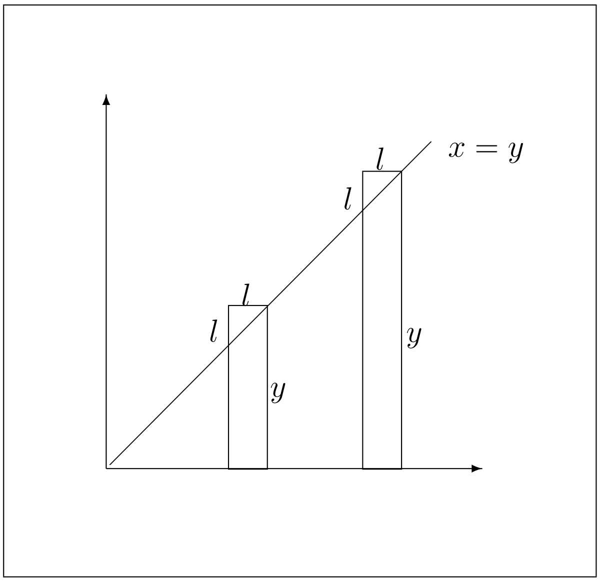
$$\frac{dA}{dx} = f(x) \tag{4.8}$$

vilket också är ett sätt att uttrycka analysens huvudsats.

Newton har kommit på ett sätt att med hjälp av anti-differentiering beräkna arean under en given kurva. Hans metod är generell och det faktum att han själv inser det och att han ser det inversa sambandet mellan att hitta tangent och att hitta arean, gör att vi här ser infinitesimal- och integral-kalkylen upptäckt. Newton kunde integrera.

4.3 Leibniz

Wilhelm Gottfried Leibniz(1646-1716) intresserade sig för serier av summor



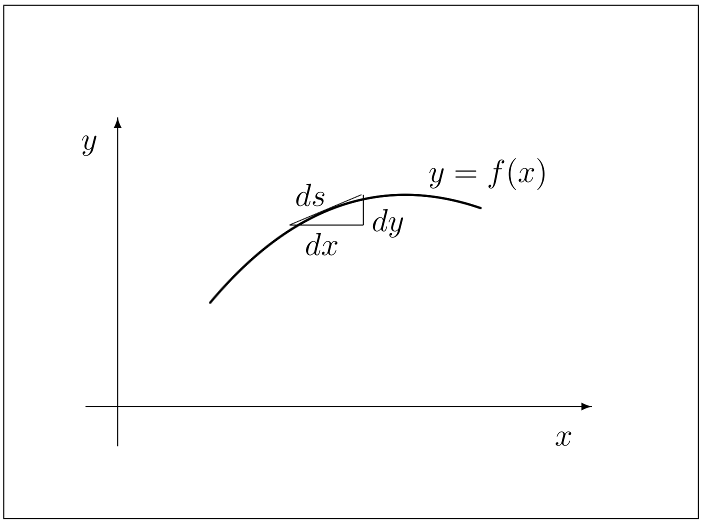
Figur 4.2:

och differenser av tal, vilket kom att ligga till grund för hans arbete med kalkyl. Han upptäckte att det finns ett inverst samband mellan summor och differenser i en serie. Om serien är $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ och differenserna mellan termerna $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ då är summan av alla differenser lika med differensen mellan den sista och den första termerna i den första serien. Alltså

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + ...(a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0 \quad (4.9)$$

Leibniz överförde idén till geometrin genom att tänka sig termerna i den första serien som y-värden av en funktion och differensserien som skillnader mellan två närliggande y-värden. Han tänkte sig att x representerade ordningen av termen i serien och y var värdet. Skillnaden mellan ordningarna betecknas med dx och är lika med 1 mellan varje på varandra följande term. Den faktiska skillnaden i värde mellan två på varandra följande termer betecknas med dy. Sedan låter han omn.(omnia på latin är summa) stå för summa och betecknar dy med l. Leibniz konstaterar nu att omn.$l = y$ om serien börjar vid noll. Nu vill han beräkna omn.yl. Han tänker sig en funktion $y = x$, där summan av alla yl för små l utgör arean under kurvan. Vi ser att arean under kurvan $y = x$ är $\frac{y^2}{2}$ och kan konstatera att det gäller för omn.yl. Alltså att $\int y dy = \frac{y^2}{2}$.

Leibniz hade här förstått att skillnaden dx är invers till summan omn., så att differetiering av en area ger en längd. Han tänkte sig först att d minskade dimensionen och att omn. ökade dimensionen. Men han förstod sedan att



Figur 4.3: Leibniz differentialtriangel

omn. är fråga om en summation av rektanglar. Leibniz utvecklade notationen och började skriva $\int$ i stället för omn. och började använda dx och dy som godtyckligt små skillnader. Han utgick ifrån geometriska framställningar när han tolkade differentieringen så man kan inte riktigt kalla det derivata. Det var differentialtriangeln som Leibniz använde sig av. Se bild 4.2. Han jämför däri förhållandet mellan dx och dy med andra förhållanden i figuren. Han definierar tangenten som en linje mellan två närliggande punkter.

Leibniz ger så småningom en generell regel för $dx^n = nx^{n-1}$ och $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ och påpekar själv att detta gäller generellt. Han kommer fram till att man summerar rektanglar under kurvan för att få arean och säger att man kan bortse från de små trianglar som blir kvar, eftersom de är oändligt små jämfört med rektanglarna.

4.4 Allmänt om integral- och infinitesimal-kalkylens upptäckt

Det Newton och Leibniz båda kommer på är det generella inversa sambandet mellan differetiering och integrering, nämligen det faktum att om man först differentierar en funktion och sedan integrerar den så får man tillbaka den ursprungliga funktionen. De utvecklade båda en helt ny metod som inte bara var en förlängning av grekernas arbeten. Att de började använda symboler borde varit av avgörande betydelse för upptäckten av det inversa sambandet. Den stora skillnaden mellan deras tankar var att Newton såg på area-problem som en fråga om skillnad i t.ex hastighet. Han betraktade det hela ur en fysikers synvinkel. Leibniz å sin sida tittade direkt på summationen och utgick därifrån.

Kepler med flera som höll på med infinitesimaler var mest intresserade av resultaten och ägnade sig inte mycket åt bevisföring. De tänkte hela tiden att det var möjligt att med gamla grekiska metoder à la Arkimedes rigoröst bevisa de nya areaberäkningarna. Leibniz hade inte några riktiga definitioner av dx och dy, och inte heller Newtons metoder är rigorösa. Den kalkyl som Newton och Leibniz nu upptäckt innehåller helt nya begrepp och metoder som kräver nya definitioner

Kapitel 5

1800-talet

5.1 Gränsvärdesbegreppet

Man började nu att söka stringens i den nya kalkylens bevis. Funktionsbegreppet definieras ordentligt för första gången, av bland annat Leonhard Euler (1707-1783). En av de första som formulerar det moderna kontinuitetsbegreppet är Bernard Bolzano (1781-1848). Och det så för kalkylen viktiga gränsvärdesbegreppet definieras av Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Fritt översatt[1] till svenska låter hans definition så här

> När de successiva värdena av en variabel obegränsat närmar sig ett fixt tal, så att de slutligen skiljer sig från detta tal med ett godtyckligt litet belopp, kallas det sista (fixa värdet) för gränsvärdet av de andra successiva värdena. Till exempel är ett irrationellt tal gränsvärdet av åtskilliga rationella tal, vilka ger större och större approximativa värden av det.

Det är också Cauchy som med hjälp av gränsvärdesbegreppet slutligen definierar infinitesimaler. Han säger att α är en infinitesimal om α är en variabel vars numeriska värde går mot noll. Därefter kan han definiera derivatan av en funktion som ett gränsvärde av en differenskvot. I korthet säger definitionen att om Δx och Δy betecknar oändligt små skillnader och vi sätter $\Delta x = i$, så gäller att

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \tag{5.1}$$

[1] The historical development of the calculus, Edwards, C.H.

5.2 Integralens definition

Nu var de nödvändiga begreppen definierade för att kunna ge integralen en egen definition, även om tanken av ett gränsvärdet fortfarande var av geometrisk karaktär. Hitills har integralen betraktats som inversen av derivata. Cauchy ser ett behov av egen generell definition av integralen eftersom det med derivatans definition blir klart att derivatan inte kan existera i en diskontinuerlig punkt medan integralen kan. Han börjar med en funktion $f(x)$, kontinuerlig på ett intervall $[x_0, X]$. Detta intervall delar han upp i n delintervall med hjälp av punkterna $x_0, x_1..., x_n = X$. Utifrån delningen ställer han upp följande summa

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \tag{5.2}$$

genom att addera areorna utav rektanglarna uppkommna av delintervallen. Alltså, rektanglar med bas $[x_{i-1}, x_i]$ och höjd $f(x_{i-1})$. Cauchy vill definiera integralen som gränsvärdet utav denna summa då n går mot oändligheten och delintervallen därmed närmar sig noll. Han visar detta genom att göra ytterligare delningar av varje delintervall och få en summa som består av summan av summan av alla delintervall. Cachy fortsätter med definitionen

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \tag{5.3}$$

Och med hjälp av medelvärdessatsen bevisar Cauchy sedan att

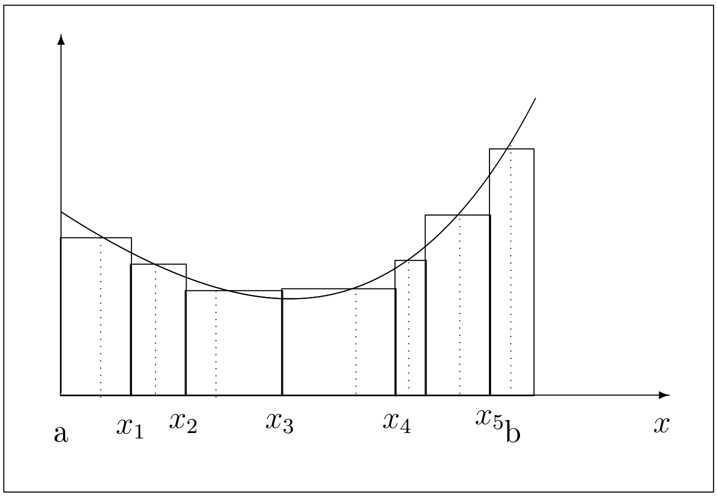
$$F'(x) = f(x) \tag{5.4}$$

Cauchy definierade och bevisade existensen av integraler för varje kontinuerlig integrand. Nu fanns också behovet av att titta på integraler för mer oregelbundna funktioner. George Bernhard Riemann (1826-1866) arbetade med ytterligar generaliseringar av integralen. Han började med att ändra lite på Cauchys definition av integralen. Ett intevall $[a, b]$ delade han upp i n delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ och satte $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. Nu betraktade han summan

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_{i-1} + \epsilon_i \delta_i) \tag{5.5}$$

där ϵ_i ligger mellan 0 och 1. Denna summa blir mer generell än Cauchys för att Riemann på detta sätt tillåter funktionens argument, $(x_{i-1} + \epsilon_i \delta_i)$, att anta vilket värde som helst inom delintervallet, $[x_{i-1}, x_i]$. Han definierar nu integralen som gränsvärdet av summan S oavsett hur man väljer intervallet,δ_i, och ϵ_i.

Nästa steg i utvecklingen av integralteorin är Riemannsummor för begränsade funktioner f på intervallet $[a, b]$. Man delar intervallet i delintervall, $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ osv. och konstruerar rektanglar utifrån en punkt på kurvan i delintervallet, (de streckade linjerna på figur). Geometriskt kan Riemansum-



Figur 5.1: Riemansumma

man tolkas som summan av rektangelareorna och om intervallen görs små så kommer värdet att ligga nära integralen av f. Beroende på hur man väljer punkt på kurvan i delintervallet så får man: en övre summa U som ger en överskattning av arean och en undre summa L som ger en underskattning av arean. Termerna *övre integral* och *undre integral* introduceras för U och L och vi skriver det som

$$U = \overline{\int_a^b} f(x)dx \quad och \quad L = \underline{\int_a^b} f(x)dx \tag{5.6}$$

Integralen har ju sedan den introducerades på 1600-talet gått hand i hand med areabegreppet, som fram till slutet av 1800-talet varit helt intuitivt och inte haft någon precis definition. Giuseppe Peano (1858-1932) var den första som gav en formell matematisk definition av arean. Sedan Eudoxos och hans uttömningsmetod har det tagits för givet att en area av en plan figur S är summan av arean av alla polygoner som kan skrivas in i S och arean av en polygon är arean av summan av alla trianglar den innehåller. Peano tar Eudoxos princip om uttömning som grund för en formell definition av arean. Han definierar en *inre area* $a_i(S)$ av S den minsta övre gräns av arean av alla polygoner som S kan innehålla, och en *yttre area* $a_o(S)$ som den största nedre gräns av arean av alla polygoner som kan innehålla S. Om $a_i(S) = a_o(S)$ så är värdet lika med arean.

5.3 Dedekinds snitt

Richard Dedekind (1831-1916) var professor vid Brunswicks tekniska högskola. Då han 1858 höll föreläsningar i kalkyl förstod han att det inte fanns någon logisk grund för de reella talen. För att kunna visa att något närmar sig ett gränsvärde fanns då bara geometriska metoder. Dedekind ställer sig då frågan vad som menas med geometrisk kontinuitet, och kommer fram till att det faktum som gör en linje kontinuerlig är följande princip:

> Om den räta linjens alla punkter indelas i två klasser av beskaffenheten att varje punkt i den första klassen ligger till vänster om varje punkt i den andra klassen, så existerar en och endast en punkt som frambringar denna indelning av alla punkter i två klasser, denna klyvning av den räta linjen i två delar.[2]

Han för sedan över resonemanget till tal för att kunna framställa en definition av de reella talen. Han tänker sig en uppdelning av de rationella talen i två klasser, A_1 och A_2, så att varje tal a_1 i A_1 är mindre än varje tal a_2 i A_2. Han kallar denna uppdelning ett snitt och betecknar det med (A_1, A_2).

Vissa snitt kommer att generera antingen ett största element i A_1 eller ett minsta element i A_2 och då representerar snittet ett rationellt tal. Men så finns också snitt som inte kommer att representera ett rationellt tal, där A_1 inte kommer att ha ett största element eller A_2 ett minsta element. Då skapar vi ett nytt irrationellt tal α som helt definieras av snittet (A_1, A_2). Om vi till exempel i den första klassen tar alla negativa rationella tal och alla positiva rationella tal vars kvadrat är mindre än två, och i den andra klassen tar alla andra rationella tal, då kommer det snittet ej att representera ett rationellt tal, utan $\sqrt{2}$. De reella talen representeras av mängden av alla snitt av det

[2]Irrationella tal, Richard Dedekind, Sigma vol. 4

rationella talområdet. Dedekind undersöker sambandet mellan två snitt för att visa att det reella talområdet är i följd ordnat och han visar områdets kontinuitet. Han skriver om detta i sin *Stetigkeit und irrationale Zahlen* som kom ut 1872.

Om vi nu går tillbaka och tittar på Eudoxos definition av geometrisk proportionalitet så ser vi att Dedekinds definition av de reella talen är vad man kan säga en finputsning av Eudoxos definition.

Eudoxos definierar för varje två par av storheter a, b och c, d, att $a : b = c : d$ om det för givna heltal m och n gäller:

$$na > mb \Rightarrow nc > md, \tag{5.7}$$

och

$$na = mb \Rightarrow nc = md, \tag{5.8}$$

och

$$na < mb \Rightarrow nc < md \tag{5.9}$$

Om nu a och b är inkommensurabla storheter så delar definitionen de rationella talen m/n i två distinkta mängder, nämligen mängden L för vilka (5:7) gäller, eller $m : n < a : b$, och mängden U för vilka (5:9) gäller, eller $m : n > a : b$. Eudoxos definierar dock aldrig inkommensurabel storhet. I Dedekinds definition kan man översätta de inkommensurabla storheterna a och b med irrationella tal.

I Eudoxos proportionalitetslära fanns grunden till en definition av de reella talen, men det skulle ta två tusen år innan det till slut var Richard Dedekind som tog fram, putsade av och byggde på Eudoxos verk. Det fanns nu ett behov av nya definitioner i och med utvecklingen av nya begrepp, framförallt då gränsvärdesbegreppet. Vilken sorts tal var egentligen ett gränsvärde, frågade man sig. Definitionen av de reella talen var ett led i vad som kom att kallas analysens aritmisering. Analysen hade för tidigare matematiker handlat om kontinuerliga storheter, såsom längder, areor och volymer. Dedekind och hans samtida strävade nu efter aritmetiska beskrivningar av analysen. Och däri var definitionen av reella tal av största betydelse.

Kapitel 6

Några egna reflektioner

Många texter om Eudoxos börjer ungefär så här:

> Eudoxos från Knidos är en av de största matematikerna genom tiderna och förmodligen den största på sin tid i Grekland.

Och ändå är det få människor som har hört talas om honom. Hans proportionalitetsdefinition och hans uttömningsprincip låg som grund för uppfattningen av reella tal och area i två tusen år innan begreppen började formaliseras. Och i de formaliserade definitionerna vi hittar i den moderna matematiken finns samma grundtanke som Eudoxos hade. Om vi tittar på den moderna definitionen av när en funktion är integrerbar så gäller att *f är integrerbar om det till varje reellt tal $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ som satisfierar*

$$\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x), \tag{6.1}$$

och som är sådana att

$$I(\Psi) - I(\Phi) < \epsilon. \tag{6.2}$$

Det här är, tycker jag, helt i analogi med Eudoxos bevis av *arean* av en cirkel. Han säger att det finns storheter med känd area som är större och mindre än cirkeln och att vi kan göra skillnaden mellan dessa storheter och cirkeln så små som vi vill och därmed måste cikeln ha en area. Tanken är den samma men det som skiljer är att Eudoxos saknade formella metoder att beskriva tanken med. Han kunde inte beskriva en oändligt liten storhet och en gränsövergång på ett formellt sätt. Men, jag finner likheterna mellan uttömmningsprincipen och en modern definition av gränsvärde slående. En funktion $f(x)$ har gränsvärde A då $x \to \infty$ om det för varje reellt tal $\epsilon > 0$

finns ett $\omega, x > \omega$, gäller att skillnaden mellan $f(x)$ och A är mindre än ϵ. Om $f(x)$ står för uttömningen av cirkeln där x är antalet halveringar och A är arean av cirkeln och ϵ står för skillnaden mellan cirkeln och en annan tänkt storhet. I enlighet med uttömningsprincipen har vi då två storheter nämligen A och ϵ efter tillräckligt många halveringar av cirkeln, alltså tillräkligt stora x så kommer skillnaden mellan cirklen och de uttömda bitarna vara mindre än ϵ.

Problemet med Eudoxos metod är att vi i många fall bara kan få en approximation av värdet på arean. Nu när vi kan visa på en gränsövergång blir ju värdet istället ett exakt gränsvärde. Eudoxos metod har naturligtvis en annan stor brist nämligen att man måste ha en förmodan, ett påstående som kan bevisas. Det går inte att upptäcka något nytt med metoden. Med en generell metod för integrering kan vi utifrån vissa givna krav räkna ut alla areor.

Definitionen av de reella talen i slutet av 1800-talet verkar vara mer eller mindre är en kopia av det Eudoxos presenterade i sin definition av likhet av förhållande mellan storheter för över två tusen år sedan. Man förstår att han var enormt före sin tid med tanke på vilken tid som gått och vilken mängd matematik som behövt växa fram innan *förhållandet* i sig och *storhetsbegreppet* kunde ges en formell definition. Kanske är det så också att formaliseringen inte växte fram förrän det fanns ett direkt behov av en definition av reella tal i samband med att gränsvärdesbegreppet började ta form och man arbetade med *godtyckliga* tal vid beskrivning av bland annat integral.

Sedan Eudoxos matematik har det varit samma grundtanke om beräkning av ytor och volymer. Man fyller ut arean eller volymen med mindre bitar vars area eller volym är enklare. Ett undantag finns förstås i Newtons syn på integrering som handlade mer om rörelse. Han såg på matematiken mer utfrån en fysikers perspektiv och frågar sig vad integralen beskriver mer än att se på den som ren matematik. Och kanske är det där någonstans som svaret på varför Eudoxos inte är mer känd än han är med tanke på vilken betydelse hans arbeten haft för efterkommande matematiker och deras arbeten. Eudoxos var visst en vetenskapsman men han beskrev inte, (så vitt vi vet) sin matematik med tonvikt på tillämpningen som till exempel Arkimedes gjorde. Det faktum att inga av hans skrifter finns kvar bidrar naturligvis till att han kom i skymundan av Arkimedes och Euklides från vilka det finns väl bevarade böcker med matematik som utövat stort inflytande på efterförljande matematiker.

Litteraturförteckning

[1] James R. Newman; *Sigma*, Viktor Pettersons bokindustri AB, Stockholm, 1959

[2] C.H.Edwards, Jr.;*The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag New York Inc., 1979

[3] Morris Kline; *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* Oxford university press, New York 1972

[4] Carl B. Boyer; *A History of Mathematics*, John Wiley & sons, inc. New York 1968

[5] The Inter-IREM Commission; *History of Mathemathics History of Problems*, ©ellipses / édition marketing S.A., Paris 1997

[6] D. J. Struik (edited by); *A source book in mathemathics, 1200-1800*, Harvard university press, Cambridge, Massachusetts 1969

[7] Victor J. Katz; *A History of Mathemathics an introduction*, Second edition, Addison-Weley Educational Publishers, Inc. 1998

[8] D.E. Smith; *History of Mathematics*, Volym 2, Dover publications Inc. New York 1958

[9] T. L. Heath; *The thirteen books of Euclid´s elements Volym 1 och 3* Cambridge university press 1908

[10] Web site; Mactutor History of Mathemathics, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/