EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tapetgrupper

av

Sabine Köhler

2005 - No 10

Tapetgrupper

Sabine Köhler

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Ralf Fröberg

2005

Inledning: En tapet är ett mönster i ett oändligt euklidiskt plan E^2 som upprepas. En tapetgrupp är en grupp av avbildningar där elementen inte förändrar mönstret. Det finns 17 tapetgrupper i planet, för tre dimensioner finns det över 200, och det finns bevis för att även högre dimensioner har ändligt antal mönsterupprepande grupper, men det ingår inte i det här arbetet, jag håller mig till två dimensioner. Våra förflyttningar är alla rigida, dvs bevarar Avstånd och vinklar.

Uppgift: Bevisa att det finns 17 tapetgrupper, det vill säga, visa att alla tapeter måste tillhöra någon av dessa grupper och att dessa grupper verkligen är olika. Att en tapet tillhör gruppen G betyder att G är gruppen av avbildningar som bevarar tapeten. Vi kommer under hela redogörelsen att röra oss i det Euklidiska planet E_2, så behöver det inte sägas igen.
För att göra detta börjar jag med att definiera diverse begrepp som behövs.

Definition 1: En isometri är en avbildning där två godtyckliga punkter A och B avbildas på $\varphi(A)$ och $\varphi(B)$ där avståndet mellan A och B är det samma som mellan deras avbildningar $\varphi(A)$ och $\varphi(B)$ d v s $|A-B|=|\varphi(A)-\varphi(B)|$. Isometrier kallas även för rigida rörelser. Alla våra element är sådana rörelser i planet.

En isometri avbildar en triangel på en triangel med parvis lika långa sidor. Då är trianglarna kongruenta, så även vinklarna är parvis lika stora. En isometri bevarar alltså vinklar.

Låt φ vara en isometri och anta att $\varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$=T. Då är också $\phi=\varphi-T$ en isometri och ϕ bevarar origo. Eftersom ϕ bevarar avstånd och vinklar är $\phi(cu)=c\phi(u)$ och $\phi(u+v)=\phi(u)+\phi(v)$, så ϕ är linjär. En isometri är alltså sammansatt av en linjär avbildning och en translation.

Definition 2: Grupp
En grupp är en mängd G som innehåller "multiplikation" och uppfyller dessa tre axiom.
(i) Multiplikationen är associativ, d vs $(xy)z=x(yz)$ för alla element i G.
(ii) Det existerar ett identitetselement, e i G, så att för varje element x i G gäller att $x*e=x=e*x$.
(iii) Varje element i G har ett inverselement x^{-1} som tillhör G så att $x^{-1}*x=e=x*x^{-1}$.
Mängden av alla isometrier i E^2 bildar en grupp med sammansättning av avbildningar som multiplikation.

Innan tapetgruppen definieras så inför jag lite beteckningar som gör det lättare. Vet man hur bilderna av $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ser ut så känner man till avbildningen , och har man en isometri $\varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ så är $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ på avståndet 1 från $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ eftersom isometrier bevarar avstånd, $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ligger därmed även på avstånd 1 från $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

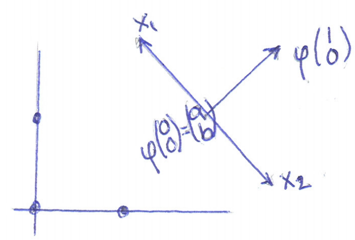
Om man börjar med $\varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, så ligger ju $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ på avståndet 1, om man vet var den ligger så har vi bara kvar att finna $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ för att bestämma avbildningen. Denna kan vara på två ställen, vilket är x_1 och x_2 i figuren (se figur 1a). Om vi antar att $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x_1$ så blir det som i figur 1b. För vilken annan punkt y som helst som har ett visst avstånd till punkten $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, så har bilden av y därmed samma avstånd till $\varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ det existerar endast en sådan punkt. Samma resonemang gäller även för $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x_2$.

Om vi fortsätter med det första fallet kan avbildningen beskrivas såhär (se bild 1c.)
Vrid först planet med vinkeln θ vilket görs med matrisen $O=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ gör sen en translation med vektorn $\varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, Avbildningen kan beskrivas som
$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=O\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ och lite enklare (O, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$) . O har i detta fallet determinant +1.

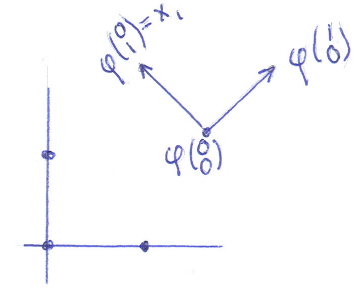
I det andra fallet ändrar man orienteringen (se bild 1d). Först vrider man planet vinkeln θ och speglar i linjen genom origo med vinkel θ till x-axeln, därefter translaterar man med vektorn $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ Detta kan skrivas som $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=O\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ men här är matrisen
$O=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ som har determinant –1.

Härmed ser vi att alla isometrier kan beskrivas som (O, T) där O antingen är $O=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ eller $O=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ och $T=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ är förflyttningar av origo.
Dessa matriser ingår i gruppen av ortogonalmatriser. Denna grupp brukar betecknas O_2.

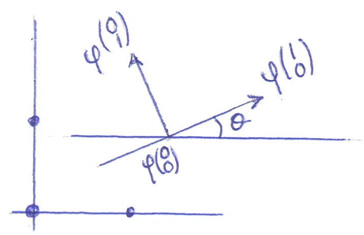
1 a)



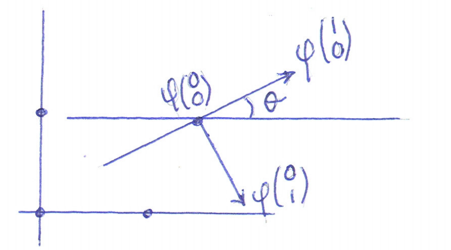
1 b)



1 c) fallet $x_1=\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



1 d) fallet $x_2=\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



För att se att isometrier utgör en grupp G så gäller att sammansättningen av två avbildningar som bevarar avstånden bevarar avstånd och inversen till en avbildning som bevarar avstånd bevarar avstånd. Identiteten är en isometri så G innehåller ett identitets element och sammansättningen av isometrier är associativ. Vi har alltså att för isometrier gäller

1) $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 g_2 \in G$
2) $g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G$
3) $(g_1 g_2)\, g_3 = g1(g_2\, g_3)$
4) $Id \in G$

När vi nu vet att isometrier utgör en grupp och att de kan skrivas som (O, T) så kan man reda ut hur multiplikationen ser ut. Den definieras på detta vis.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \rightarrow O_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + T_1 \rightarrow O_1(O_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + T_1) + T_2 = O_2O_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + O_2T_1 + T_2 =$$

$$(O_2O_1,\ O_2T_1+T_2) = (O_2,\ T_2)(O_1,\ T_1)$$

Om $T=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ svarar det mot avbildningar som bevarar origo. Om det är en ren translation beskrivs avbildningen som (I, T) där $O= I$ är identitetsmatrisen. Translationerna utgör en delgrupp av alla isometrier eftersom $(I, T_1)(I, T_2)=(I, T_1+T_2)$ vilket också är en ren translation. Dessa utgör en normal delgrupp och vi kan kalla den för H. Att en delgrupp är normal betyder att om $H \subseteq G$ så är $gHg^{-1}=H$ för alla $g \in G$ så är H . För att se att translationerna utgör en normal delgrupp ska det gälla att för (I, T) så ska $(O, T_1)(I, T)(O,T_1)^{-1}$ vara en translation för alla (O, T).

Hur ser då $(O,T_1)^{-1}$ ut? Välj (O_1, T_2) så att $(O_1, T_2)(O, T_1)=(I, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})$ (vilket är enhetselementet) och lös ut (O_1,T_2) på detta sätt:

$(O_1, T_2)(O, T_1)=(O_1O,\ O_1T_1+T_2)$ detta ger oss att $O_1O=I$, d v s $O_1=O^{-1}$ och $O_1T_1+T_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ vilket ger att $T_2=-O_1T_1$ alltså är $(O, T_1)^{-1}=(O^{-1}, -O^{-1}T_1)$. Nu är det bara att räkna.
$(O, T_1)(I, T)(O,T_1)^{-1}=(O, T_1)(I, T)(O^{-1}, -O^{-1}T_1)=(O, T_1)(O^{-1}, -O^{-1}T_1+T)=$
$(I, -T_1+OT+T_1)=(I, OT)$
som är en translation och vi har härmed visat att translationer utgör en normal delgrupp i gruppen av isomorfier.
För normala delgrupper H gäller att man kan definiera kvotgruppen G/H som består av elementen gH med multiplikationen $g_1Hg_2H=g_1g_2H$, och eftersom gruppen av translationer är normal så kan vi utföra denna kvotning. Avbildningen $G\rightarrow G/H$ ser ut så här: $(O,T)\rightarrow O$ bilden är den så kallade punktgruppen.

Definition 3: Tapetgrupp
Tapetgrupper är en delgrupp till gruppen av isometrier som uppfyller följande två krav. G är en tapetgrupp om delgruppen H av translationer i G genereras av två icke-parallella (eller skeva) translationer och G/H (dess punktgrupp låt oss kalla den J) ska vara ändlig.

Definition 4: Isomorfi:Om G_1 och G_2 är två grupper och man har en funktion $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ så är ϕ en isomorfi om den är bijektiv och $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ för alla element a, b i G_1, då säger man att G_1 är isomorf med G_2. Två tapeter identifieras som lika om de har isomorfa tapetgrupper.

När vi nu har dessa begrepp måste vi reda ut vilka element som tapetgrupperna innehåller. Det är på elementen vi kan se till vilken grupp en tapet tillhör, och det är genom dessa som vi kan se hur många grupper som existerar och varför de är olika. Vilka är då de möjliga elementen i tapetgrupperna.

Definitioner av tapetgruppernas element:
1 Rotation:
Låt P vara en punkt i planet, och låt θ vara en vinkel mellan 0 och 2π, då är rotationen θ motsols runt punkten P en rotation. Matrisen O för rotationer har determinant +1, orienteringen förändras inte. En rotation som bevarar origo skrivs $(O,\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})$

2 Translation: Detta är förflyttningar av origo. Alla punkter flyttas med samma vektor $\boldsymbol{a}$. I definitionen av tapetgrupper finns två skeva translationer. Translationer har oändlig ordning.

3 Reflektion:
Om man har en reflektion så speglas alla punkter vinkelrätt mot en viss linje till en punkt på samma avstånd från linjen. I matrisnotation skrivs reflektioner som $(O, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})$ där O ändrar orienteringen och har determinant –1, om vi väljer att placera origo på reflektionslinjen.

4 Glidreflektionselement:
Först speglar man i en viss linje, sen translaterar man parallellt med denna linje. Glidreflektioner har oändlig ordning.

För dessa fyra definitioner gäller att rörelserna ska göra att vi återkommer till samma mönster som tidigare, och vi måste visa att dessa element är de enda möjliga.

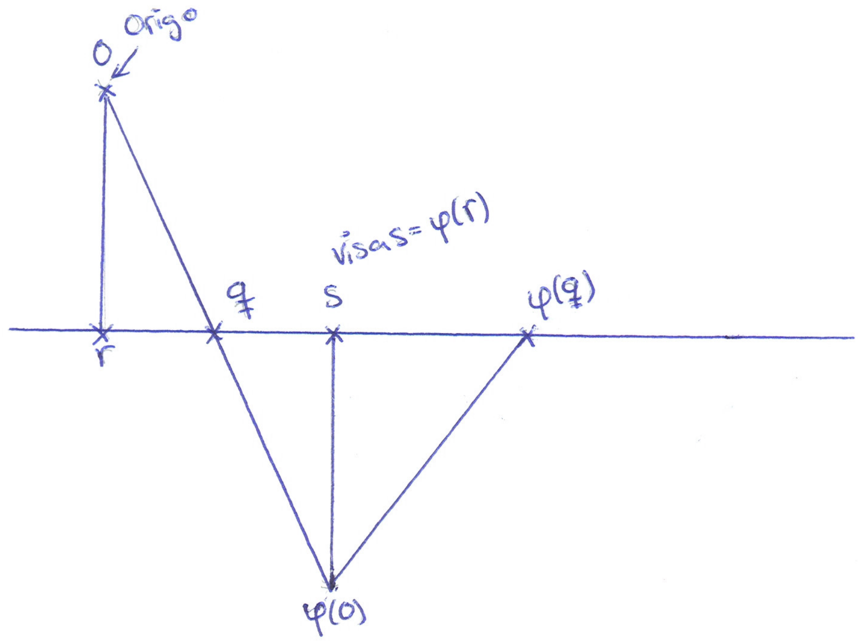
Sats 1: Elementen i tapetgrupper utgörs av translationer, rotationer, reflektioner och glidreflektioner.
Bevis av sats 1: Vi kan skriva en isometri på formen (O, T), så att *X avbildas på OX+T.*
O kan som vi tidigare sett skrivas på två sätt:

1) $O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ vars determinant är +1, och ger direkt isometri.
2) $O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ vars determinant är -1, och kastar om orienteringen.

Vi börjar med att gå igenom fall 1. Antag att O är som i fall 1, och att det finns en punkt som avbildas på sig själv, en fixpunkt, och välj denna punkt till origo. Då kan den skrivas $\left(O, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ och är en rotation φ. En fixpunkt är lösningen till $OX+T= X \Rightarrow (O\text{-}I)X= -T$ så om $det(O\text{-}I)\neq 0$ så finns en lösning och därmed en fixpunkt. Är $det(O\text{-}I)=0$ så saknas fixpunkt om $T\neq 0$. I fall 1 så är $det\ (O\text{-}I)= \begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1 + \sin^2\varphi = 2 - 2\cos\varphi$. Om $2-2\cos\varphi=0$ så är $\varphi=0$, d v s ingen rotation och kan skrivas (I, T), vilket är en translation. Alla punkter flyttas med T, $X \mapsto X+T$. Härmed har vi att en direkt isometri är antingen en rotation eller translation.

Fall 2: Antag att det finns en fixpunkt och välj denna till origo. Då skrivs avbildningen $\left(O, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, där $O = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$,vilket är en reflektion i linjen genom origo med lutning $\varphi/2$.
Saknas fixpunkt så välj ett godtyckligt origo och låt q vara mittpunkt mellan 0 och $\varphi(0)$.
Om 0, q, $\varphi(q)$ ligger på en linje bevaras hela linjen av avbildningen. Om ψ är speglingen i denna linje är $\psi\varphi$ en direkt transformation som bevarar linjen så $\psi\varphi$ är alltså en translation $\psi\varphi=T$ och $\varphi=\psi^{-1}T=\psi T$ är en glidreflektion.
Om 0, q, $\varphi(q)$ inte ligger på en linje, så låt r och s vara ortogonala projektioner av 0 respektive $\varphi(0)$ på linjen genom punkterna q och $\varphi(q)$ (se bild 2). Vi måste visa att $s=\varphi(r)$. Triangeln $\Delta q\varphi(0)\varphi(q)$ är likbent eftersom avståndet mellan q och $\varphi(0)$ och avståndet mellan 0 och q också är lika med avståndet mellan $\varphi(0)$ och $\varphi(q)$ eftersom φ är en isometri. Trianglarna $\Delta 0qr$ och $\Delta\varphi(0)\varphi(q)s$ är kongruenta (men motsatt orienterade). Detta gäller även för $\Delta 0qr$ och $\Delta\varphi(0)\varphi(q)\varphi(r)$ så $s=\varphi(r)$. Låt g vara glidreflektionen som avbildar $\Delta 0qr$ på $\Delta\varphi(0)\varphi(q)\varphi(r)$. då fixerar $g^{-1}\varphi$ punkterna origo, q och r så $g^{-1}\varphi=id$ och $\varphi=g$.

2



Det behövs en sats för att veta vilka de ändliga punktgrupperna är.

Sats 2: En ändlig delgrupp av O_2 är antingen en cyklisk grupp av rotationer som genereras av en rotation $2\pi/n$, eller en grupp av ordning $2n$ som genereras av en rotation $2\pi/n$ och en spegling genom fixpunkten. Den senare kallas dihedrala gruppen med 2n element och betecknas D_n

Bevis av sats 2:

Om gruppen endast består av direkta isometrier så måste den bestå av rotationer kring origo. Den genereras av den minsta rotationen θ. Om någon rotation α inte är en multipel av θ så är $\alpha=k*\theta+\beta$, där β är mindre än θ vilket ger en motsägelse eftersom θ skulle vara den minsta rotationen.

Antag att gruppen innehåller en isometri φ som inte är direkt. Denna måste då vara en reflektion i en linje genom origo. Låt H vara delgruppen av rotationer i G. H är då cyklisk och gruppen innehåller elementen $Id, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, \varphi, R\varphi, R^2\varphi, \ldots, R^{n-1}\varphi$ där R är den minsta rotationen. Vi ska nu visa att det inte finns några andra element i gruppen.

Antag att det finns en annan reflektion ψ i gruppen. Då är $\psi\varphi$ en rotation, eftersom determinanten av en reflektion är –1 och då blir två reflektioner en rotation, eftersom determinanter är multiplikativa och (-1)(-1)=1. Så $\psi\varphi=R^m$ för något m, och då är $\psi=R^m\,\varphi^{-1}=R^m\,\varphi$.

Vi behöver en sats som säger att vid en isomorfi av två tapetgrupper går rotationer på rotationer, translationer på translationer och så vidare för att kunna klassificera in alla tapeter i sina respektive grupper.

Sats 3: Rotationer går på rotationer, translationer på translationer, reflektioner på reflektioner, glidreflektioner på glidreflektioner vid en isomorfi av två tapetgrupper.

Bevis av sats 3: Låt $\varphi: G\rightarrow G_1$ vara en isomorfi mellan tapetgrupper, då är enhetselementet e i G det enda som avbildas på e_1 (enhetselementet i G_1) vilket visar att ordningen av ett element g i G har samma ordning som dess bild $\varphi(g)$ i G_1.

Translationer och glidreflektioner har oändlig ordning medan rotationer och reflektioner har ändlig ordning, därför måste translationer antingen avbildas på translationer eller glidreflektioner. Låt τ vara en translation och antag att $\varphi(\tau)$ är en glidreflektion. Vi ska nu visa att detta ger en motsägelse om inte translationer avbildas på translationer och glidreflektioner på glidreflektioner.

Välj en translation som inte kommuterar med $\varphi(\tau)$ det vill säga $\varphi(\tau)\tau_1 \neq \tau_1\varphi(\tau)$, vilken translation som helst som inte är parallell med glidreflektionens linje duger, t ex en som är vinkelrät mot denna linje. Det finns ett g så att $\varphi(g) = \tau_1$ och då måste g antingen vara en translation eller glidreflektion. Elementet g^2 (se bild 3b) är en translation eftersom reflektionen i glidreflektioner har ordning 2 och två på varandra följande translationer är en translation (se bild 3a). Två translationer kommuterar, så $g^2\tau = \tau g^2$ vilket medför att $\varphi(\tau)\tau_1{}^2 = \tau_1{}^2\varphi(\tau)$. Men $\tau_1{}^2$ är vinkelrät mot glidreflektionens linje eftersom τ_1 är det, så $\tau_1{}^2$ kommuterar inte med $\varphi(\tau)$ och vi har en motsägelse. Därmed måste bilden av en translation vara en translation.

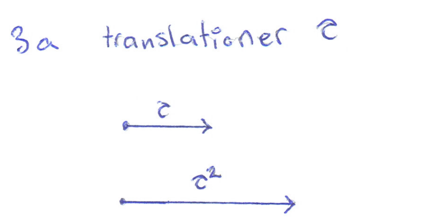
Eftersom vi härmed ser att translationer alltid går på translationer så måste glidreflektioner gå på glidreflektioner. Bilden av en glidreflektion måste vara en glidreflektion eftersom om $\varphi(g)=\tau$ där τ är en translation så har vi att $\varphi^{-1}(\tau)=g$, φ^{-1} är en isomorfi och att bilden av en translation skulle vara en glidreflektion har vi redan visat är omöjlig.

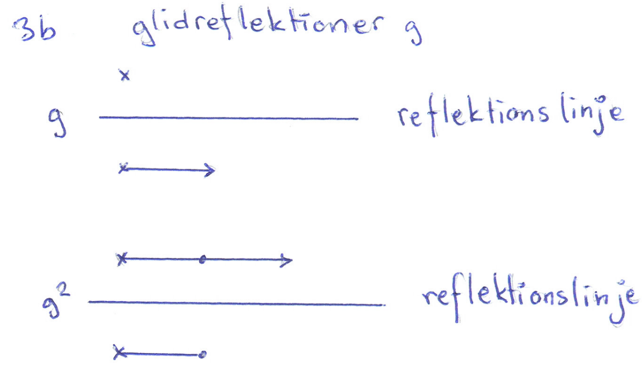
Vi måste även visa att bilden av en reflektion är en reflektion.

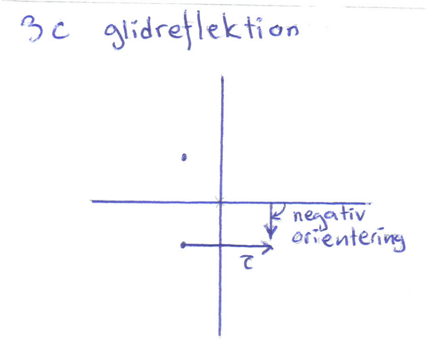
Reflektioner har ordning 2 och därför måste bilden $\varphi(g)$ av en reflektion antingen vara en reflektion eller en rotation på ett halvt varv som även dem är av ordning två, dessa är de enda element som har ordning två.

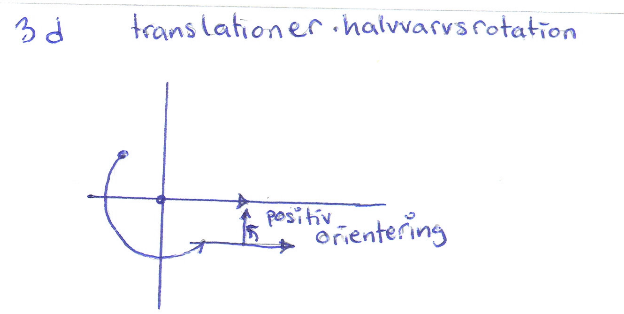
Antag att g är en reflektion och att bilden $\varphi(g)$ är en vridning ett halvt varv, vi ska nu visa att detta leder till en motsägelse. Låt $g \in G$ vara denna reflektion vars bild $\varphi(g)$ är en 180 graders vändning och välj en translation τ i G som inte är vinkelrät mot reflektionslinjen i g, t ex en translation parallell med reflektionsaxeln. Då är τg en glidreflektion. Vi har redan visat att bilden av translationer går på translationer och att bilden av glidreflektioner går på glidreflektioner och därmed måste $\varphi(\tau g)$ också vara en glidreflektion. Men $\varphi(\tau g) = \varphi(\tau)\varphi(g)$ där $\varphi(\tau)\varphi(g)$ produkten av en translation och en halvvarvsrotation som är en annan halvvarvsrotation runt en annan punkt (se bild 3c och d), och vi har därmed en motsägelse och reflektioner måste därmed svara mot reflektioner. Antag att en vridning g ett halvt varv avbildas på en reflektion h, så $\varphi(g)=h$, då är $\varphi^{-1}(h)=g$, men $\varphi^{-1}(h)$ är en reflektion vilket är en motsägelse och vi har att rotationer avbildas på rotationer.

Det enda som återstår nu är rotationer som inte har ordning 2 och dessa måste då svara mot rotationer av samma ordning som sig själva eftersom ordningen bevaras.









Rotationer: Två eller flera likadana rotationer ger en rotation eller identitetsavbildningen. Man skulle kunna tro att det fanns oändligt många rotationer, att man kan göra en tapet där man återkommer till samma symmetri efter att ha roterat $9/2\pi$ eller $17/2\pi$ eller vilken vinkel som helst och därmed skulle det finnas oändligt många tapetgrupper, men det går faktiskt inte och detta inte endast för att definitionen säger att tapetgrupper ska ha en ändlig punktgrupp. Detta har att göra med att man inte kan lägga ett pussel bestående av lika antal hörningar för vilka hörningar som helst, detta kan endast göras med 3-hörniga, 4-hörniga och 6-hörniga figurer. Man kan också argumentera om att det i mönstret är definierat en vektor $\boldsymbol{a}$ av kortast längd och roterar man mönstret i en icke tillåten vinkel finner man en vektor kortare än $\boldsymbol{a}$ och mönstret blir förvridet eftersom det var själva vektorn $\boldsymbol{a}$ som man skulle finna där, man kommer helt enkelt inte tillbaks till det tidigare mönstret. Så vad vi behöver nu är en sats som redogör för alla de möjliga rotationerna. Man säger att rotationer kan ha ordningen 2, 3, 4 eller 6, eftersom det är efter så många rotationer som man återkommer till mönstret på. Innan vi visar rotationernas ordning behövs en sats om att punktgruppen verkar på mönstret.

Låt L vara banan av origo, det vill säga alla punkter som origo avbildas på är element i L.
Sats 4: Punktgruppen J verkar på mönstret L, d v s ett element i L avbildas på ett element i L av J.
Bevis av sats 4: Om x är en punkt i mönstret så finns en translation (I, X) i G. OmO ligger i J har vi ett element (O, T) i G. Translationsgruppen är en normal delgrupp så $(O, T)(I, X)(O, T)^{-1}$ är en translation vars produkt blir (I, OX). Alltså finns translationen (I, OX) i translationsdelgruppen och därmed verkar punktgruppen på mönstret L.

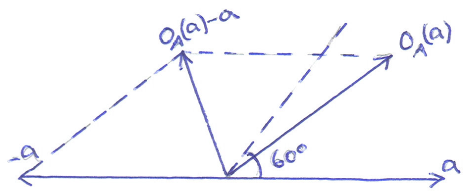
När vi vet detta kan vi utreda vilka ordningar rotationerna kan anta.
Sats 5: Låt G vara en tapetgrupp och låt P vara origo för en rotation ρ i G. Då har ρ ordning 2, 3, 4, eller 6.

Bevis av sats 5: Alla rotationer i G har ändlig ordning enligt definitionen. Vi kan kalla mönstret för L. Om vi har en rotation av ordning q, då är en rotation av denna ordning $2\pi/q$ motsols. Denna rotationsmatris A skrivs

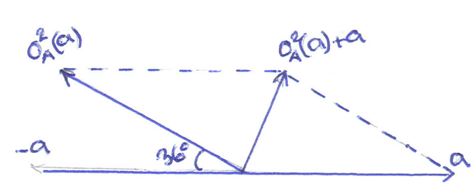
$$A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \end{bmatrix} \text{ och ligger i } J$$

Låt $\boldsymbol{a}$ vara vektorn i mönstret av kortast längd i L av G. J verkar på L så $O_A(\boldsymbol{a})$ ligger i L. Antag $q>6$, då är $2\pi/q < 60°$. $O_A(\boldsymbol{a})$-$\boldsymbol{a}$ är då en vektor i L som är kortare än $\boldsymbol{a}$ (se bild 2a). Om q=5 så är vinkeln mellan $O_A^{\,2}(\boldsymbol{a})$ och $\boldsymbol{a}$ 36° (se bild 4b), då blir vektorn $O_A^{\,2}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}$ kortare än $\boldsymbol{a}$ och ligger i L vilket motsäger definitionen av $\boldsymbol{a}$. Härmed är det visat att rotationer endast har ordning 2, 3, 4 eller 6.

4a)



4b



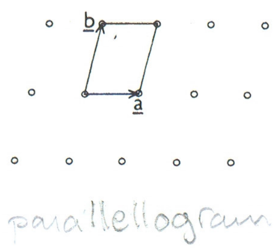
<u>Translationer:</u> I en tapetgrupp måste det finnas två translationsriktningar enligt definitionen och dessa ska vara lineärt oberoende. D v s, det måste finnas två riktningar man kan gå för att återfinna symmetrin. Ett randigt mönster med endast en riktning för att återfinna symmetri tillhör därmed ingen tapetgrupp. Definiera $\boldsymbol{a}$ som den kortaste translationen i tapetgruppen och $\boldsymbol{b}$ som den näst kortaste som är skev med $\boldsymbol{a}$. Två eller flera likadana translationer följt av varandra ger en translation.

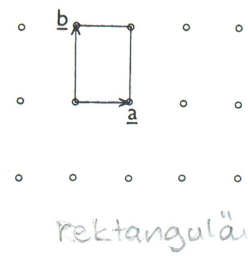
Sats 6: L är mönstret som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ det vill säga L består av alla linjära kombinationer $\boldsymbol{a}$m+$\boldsymbol{b}$n där m och n är hela tal.
Bevis av sats 6: $(I, T) \rightarrow T$ är en isomorfi mellan T och R^2 som överför translationsgruppen H på T, och då är L en delgrupp av R^2 och varje punkt m$\boldsymbol{a}$+n$\boldsymbol{b}$ tillhör L. Då kan vi dela upp planet i $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ parallellogram. Om vi tar en punkt x som ligger i L men inte i parallellogrammönstret så välj ut det parallellogram som innehåller x och har hörnan c som ligger närmast x. Då är $\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ vektorn, den är inte $\boldsymbol{a}$ och inte $\boldsymbol{b}$ och dess längd är kortare än $\boldsymbol{b}$. Men $\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{c}$ ligger i L eftersom både x och c gör det. $|\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{c}| < \boldsymbol{a}$ går inte , om $|\boldsymbol{a}| \leq |\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{c}| < |\boldsymbol{b}|$ så är $\boldsymbol{a}$ oberoende av $\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{c}$ vilket motsäger valet av $\boldsymbol{b}$, därmed kan inte ett sådant x existera och därför ser vi att L byggs upp av m$\boldsymbol{a}$+n$\boldsymbol{b}$.

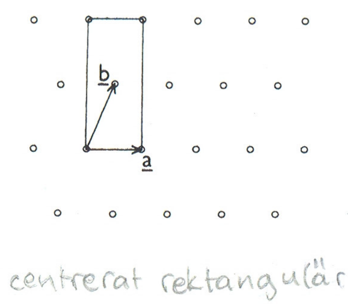
När vi nu har sett att man kan dela upp planet i parallellogrammer så kan vi klassificera dem i fem olika mönster beroende på vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Vektorn $\boldsymbol{a}$ är som tidigare den kortaste och $\boldsymbol{b}$ den näst kortaste eller lika korta som är skev mot $\boldsymbol{a}$. Vi har att $|\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ och vi har följande möjligheter.
1) $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ (parallelogram)
2) $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ (rektangulär)

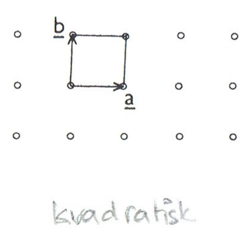
3) $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ (centrerat rektangulär)
4) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ (kvadratisk)
5) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ (hexagonal)

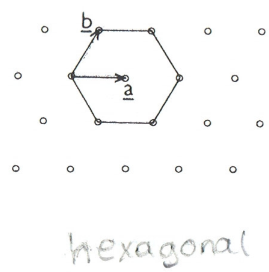
Fallet då $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ är det samma som att vi har ett centrerat rektangulärt mönster vars basvektorer är ***a-b*** och ***a+b***. För att se hur dessa ser ut titta på bild 5a-f.

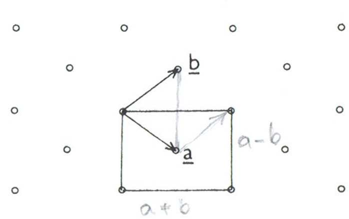












För att kunna visa att två tapeter har samma tapetgrupp behöver vi en sats.
Sats 7: Om två tapetgrupper är isomorfa så är deras punktgrupper isomorfa.
Bevis av sats 7: Låt G, G_1 vara två tapetgrupper med translationsdelgrupper H och H_1 och punktgrupper J och J_1. Om $\varphi: G \rightarrow G_1$ är en isomorfi så är $\varphi(H)=H_1$ enligt sats 3 och därför ger φ en isomorfi från G/H till G_1/H_1. Punktgrupperna är därmed isomorfa eftersom punktgruppen J är isomorf med G/H och punktgruppen J_1 är isomorf med G_1/H_1.

Kapitel 2: identifiera de olika tapetgrupperna

I förra kapitlet kom vi fram till de olika elementen och deras egenskaper. I detta kapitel ska vi se vilka element som kan samverka i de olika tapetgrupperna, och därmed få fram vilka dessa grupper är. T ex går det inte om man har ett kvadratiskt translationsmönster att komma tillbaks till samma symmetri genom att rotera ett 6:e dels varv, d v s dessa element kan inte existera i samma grupp.
Notation: För bilderna och benämningen på de olika grupperna behöver vi lite notation. Det finns fler sätt att skriva ner elementen till tapetgrupperna och jag använder detta.
Vi har p som står för primitiv vilket betyder att mönstret som bygger upp tapeten är en parallellogram, c står för centrerat mönster, s för spegling, g står för glidreflektion. Siffrorna 1, 2, 3, 4, 6, står för rotationer där 1 är identiteten alltså rotation ett helt varv runt, 2 ett halvt varv, 3 ett 3: e dels varv och så vidare. Står det två s bredvid varandra betyder det att det finns två axlar som mönstret speglas mot. Vektorn ***a*** lägger vi utmed x-axeln så ***b*** blir skev med x-axeln. De är definierade som tidigare. J är punktgruppen, H är translationsgruppen och L är mönstret. A_θ är rotationsmatrisen för vinkeln θ och B_φ är reflektionsmatrisen som speglar en linje som går genom origo och lutar vinkeln $\varphi/2$ mot positiva *x*-axeln.

Nu kommer vi att gå igenom de fem olika mönstren *L* i turordning och se vilka tapetgrupper, låt oss kalla dem *G*, som finns i varje.
1) Parallellogram: I detta fall består punktgruppen av en delgrupp av $\{\pm I\}$.
Vi finner två tapetgrupper i detta mönster den första är **p1**, där punktgruppen består av $\{I\}$, dess element är på formen (I, T) där $T=$ ***a***m+***b***n och m, n är hela tal.
Den andra tapetgruppen **p2** har punktgrupp $\{\pm I\}$ och innehåller därmed en rotation ett halvt varv. Låt oss fixera punkten som rotationen roterar kring till origo så att $(-I, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})$ ligger i *G*, detta är elementen som inte är translationer. Elementen grupp $H(-I, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})$ser ut på följande vis:

$(I, T)(-I, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = (-I\, I, -I\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+T)=(-I, T)=(-I, \boldsymbol{a}m+\boldsymbol{b}n)$ vilket är alla halv varvs rotationer kring punkterna ½(***a***m+***b***n).
2) Rektangulärt: I detta mönster kommer vi att finna fem tapetgrupper. Det finns fyra element i *J*, identiteten, halvvarvs rotation, reflektion i x-axeln och i y-axeln. J består därmed av en delgrupp av $\{I, -I, B_0, B_\varphi\}$ och vi är intresserade av grupper som skiljer sig från de tidigare grupperna **p1** och **p2**.
I den första gruppen **ps** är $J = \{I, B_0\}$ så *G* har en reflektion som vi kan välja utmed en horisontell linje (som är parallell med *x*-axeln).
I den andra gruppen **pg** är $J=\{I, B_0\}$ som i **ps** men den saknar reflektioner, då måste den innehålla en glidreflektion som följer en horisontell linje och vi väljer en punkt på denna linje som origo. Om man gör samma glidreflektion två gånger så får man en translation, så vår glidreflektion är på formen (B_0, 1/2k***a***) för något k där k är ett heltal. Om k är ett jämnt tal så

är $(-1/2k\boldsymbol{a}, I)$ en translation i G och reflektionen $(B_0, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = (I, -1/2k\boldsymbol{a})(B_0, 1/2k\boldsymbol{a})$ tillhör G vilket motsäger att det inte fanns några reflektioner. Därför är k ett udda tal och $(B_0, 1/2\boldsymbol{a})=(I, -1/2(k-1)\boldsymbol{a})(B_0, 1/2k\boldsymbol{a})$ ligger i G. De element i G som inte är translationer är på formen $(I, \boldsymbol{a}m+\boldsymbol{b}n)(B_0, 1/2\boldsymbol{a})=(B_0, (m+1/2)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})$. Dessa är glidreflektioner som går genom mönsterpunkter eller ligger mittemellan två mönsterpunkter. Längden av varje glidreflektion är en udda multipel av $1/2\boldsymbol{a}$. Om vi tittar på punktgruppen $J=\{I, B_\pi\}$ bytes bara horisontellt ut mot vertikalt och vi får samma grupp som **pg**.
Nu utgår vi från att punktgruppen innehåller hela $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$
I den tredje gruppen **p2ss** innehåller G en reflektion både horisontellt och vertikalt.
Den fjärde gruppen **p2sg** innehåller en reflektion horisontellt men inte vertikalt. Då måste B_π ge en glidreflektion vertikalt i G. Om vi väljer punkten där horisontalspeglingen korsar glidreflektionslinjen till origo och det vi kom fram till för **pg,** så kan vi anta att $(B_0, 0)$ och $(B_\pi, 1/2\boldsymbol{b})$ ligger i G. Produkten $(B_\pi, 1/2\boldsymbol{b})(B_0, 0)= (-I, 1/2\boldsymbol{b})$ vilket är halvvändning kring $1/4\boldsymbol{b}$. mängderna H, $H(B_0, 0)$, $H(B_\pi, 1/2\boldsymbol{b})$ och $H(-I, 1/2\boldsymbol{b})$ utgör G. Den första mängden, H, är translationerna. Den andra mängden har utseende $(I, m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})(B_0, 0)=(B_0, m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})$. När m=0 så är isometrin en reflektion horisontellt som går genom mönsterpunkter eller mittemellan dessa. Om $m\neq0$ så blir speglingarna glidreflektioner vars translationsdel är $m\boldsymbol{a}$. Den tredje mängden $H(-I, 1/2\boldsymbol{b})$ innehåller elementen $(B_\pi, m\boldsymbol{a}+(n+1/2)\boldsymbol{b})$ vilket är alla vertikala glidreflektioner som går genom mönstrets punkter eller mittemellan dessa. Translationsdelen för varje glidreflektion är en udda multipel av $1/2\boldsymbol{b}$. Den sista mängden $H(-I, 1/2\boldsymbol{b})$ utgörs av alla halvvändningar kring punkterna $1/2m\boldsymbol{a}+1/2(n+1/2)\boldsymbol{b}$. Byter vi ut horisontellt med vertikalt får vi en grupp som är isomorf med **p2gs.**

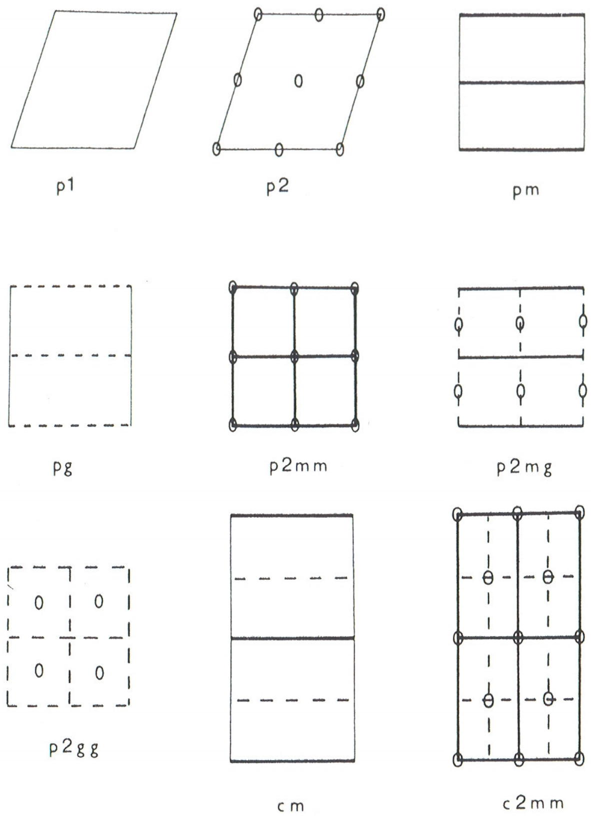
3) Centrerat rektangulärt: Ortogonaltransformationerna O_2 som bevarar L är de samma som i det rektangulära fallet och därmed måste punktgruppen vara en delgrupp av $J=\{I, -I, B_0, B_\pi\}$, men det finns två nya grupper i detta mönster.
Den första är **cs**, där vi antar att $J=\{I, B_0\}$ och att $(B_0, T=\boldsymbol{v})$ ger B_0 i G. Detta är antingen en reflektion eller glidning horisontellt. Välj en punkt på reflektions eller glidreflektionslinjen till origo så att $2\boldsymbol{v}$ är en multipel av $\boldsymbol{a}$ och den vertikala riktnigen bestäms av vektorn $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ och vi får två fall.
Det första är att om $2\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{a}$ och k är jämn så tillhör reflektionen $(B_0, 0)=(I, -1/2k\boldsymbol{a})(B_0, 1/2k\boldsymbol{a})$ G. Elementen i G som inte är translationer har formen $(B_0, m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})=(B_0, (m+1/2)\boldsymbol{a}+1/2n(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))$. Om n är jämn och $m=-1/2n$ så får vi alla horisontella reflektioner genom mönsterpunkterna. Om n är jämn och $m\neq-1/2n$ så blir dessa reflektionslinjer till glidreflektionslinjer. Translationsdelen i varje glidreflektion är en multipel av $\boldsymbol{a}$. Slutligen, om n är udda så har vi glidreflektioner vars linjer ligger mittemellan två mönsterpunkter. Translationsdelen till dessa glidreflektioner är en udda multipel av $1/2\boldsymbol{a}$
Det andra fallet är om k är udda så ligger $(B_0, ½(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))=(I, -1/2(k+1)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(B_0, 1/2k\boldsymbol{a})$ i G. Detta är en reflektion och flyttar vi origo till reflektionslinjen så kommer vi tillbaks till det tidigare fallet. Byter vi ut $J=\{I, B_0\}$ mot $J=\{I, B_\pi\}$ så får vi en grupp isomorf med **cs**.
Den andra gruppen i detta mönster är **c2ss** vars punktgrupp är $J=\{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Som vi såg i fallet innan ger B_0 och B_π reflektioner i G.

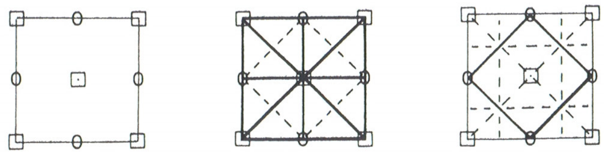
4) Kvadratiskt: För detta mönster är de ortogonala transformationerna O_2 som bevarar L dihedralgruppen av ordning åtta (D_4) som genereras av $A_{\pi/2}$ och B_0 och är vars punktgrupp är en del grupp av denna. För att finna nya grupper måste $A_{\pi/2}$ vara med i J.
Vi hittar tre nya grupper i detta mönster. Den första är **p4**, vars punktgrupp genereras av $A_{\pi/2}$, d v s den innehåller fjärdedelsrotationer.

Den andra gruppen är **p4ss** vars J genereras av $A_{\pi/2}$ och B_0. B_0 ges av en reflektion i G.
Den tredje gruppen är **p4gs**. Vi antar att J genereras av $A_{\pi/2}$ och B_0, men att B_0 inte ger en reflektion i G. Välj den fixa punkten för rotation av ordning 4 till origo så att $(A_{\pi/2}, 0)$ tillhör G och låt $(B_0, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ ge B_0 i G. $(B_0, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})^2=(B_0, 2\lambda\boldsymbol{a})$ vilket ger att 2λ är ett heltal.
Om 2λ är ett jämnt tal så ligger reflektionen $(B_0, \mu\boldsymbol{b})= (B_0, -\lambda\boldsymbol{a})(B_0, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ i G och vi har en motsägelse eftersom B_0 inte skulle ge en reflektion. Därför måste 2λ vara udda och
$(B_0, 1/2\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=(I, (1/2-\lambda)\boldsymbol{a})(B_0, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ vara ett element i G.
Vi har även att $(A_{\pi/2}, 0)(B_0, 1/2\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=(B_{\pi/2}, 1/2\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a})$ och $(B_{\pi/2}, 1/2\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a})^2=(I, (1/2-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$ vilket ger att ½-μ är ett heltal, och vi ser att glidreflektionen
$(B_0, 1/2\boldsymbol{a}+1/2\boldsymbol{b})=(I, (1/2-\mu)\boldsymbol{b})(B_0, 1/2\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ ligger i G.
Dessa åtta mängder utgör G:
$H(I, 0)$,
$H(-I, 0)$,
$H(B_0, ½(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$,
$H(B_\pi, ½(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$,
$H(A_{\pi/2}, 0)$,
$H(A_{3\pi/2}, 0)$,
$H(B_{\pi/2}, ½(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$,
$H(B_{3\pi/2}, ½(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$.
Man kan undersöka deras geometriska egenskaper på detta sätt: Om vi har ett element från mängden $H(B_{\pi/2}, ½(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$, så kan den skrivas på formen
$(B_{\pi/2}, (m+1/2)\boldsymbol{a}+(n+1/2)\boldsymbol{b})=(B_{\pi/2}, ½(m+n+1)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+1/2(m-n)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}))$. Om $m+n+1=0$ så får vi alla reflektioner som lutar 45° mot horisontallinjen och går mittemellan två mönsterpunkter.
Om $m+n+1\neq 0$ och $m-n$ är ett udda tal så blir samma reflektionslinjer till glidreflektionslinjer.
Om $m+n+1\neq 0$ och $m-n$ är ett jämnt tal har vi glidreflektioner vars linjer går genom mönsterpunkter.
Om vi istället tittar på mängden $H(-I, 0)$ ser vi att den innehåller alla halvrotationer
$(-I, m\boldsymbol{a}+ n\boldsymbol{b})$ med centrum i punkterna $½(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})$) och så vidare genom alla mängder.

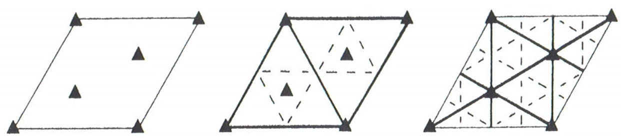
5) Hexagonalt: Här innehåller punktgruppen av en delgrupp av dihedralagruppen (D_6) av ordning 12 som genereras av $A_{\pi/3}$ och B_0. Det är bara grupper med rotationer av ordning 3 och 6 som ger oss nya grupper. I detta mönster hittar vi 5 nya grupper.
Den första är **p3** vars J genereras av $A_{2\pi/3}$.
Den andra är **p3s1** där J genereras av $A_{2\pi/3}$ och B_0.
Den tredje är **p31s** som kan beskrivas så här. Om vi antar att J genereras av $A_{2\pi/3}$ och $B_{\pi/3}$, så välj den fixa punkten för rotationen av ordning 3 som origo så att $(A_{2\pi/3}, 0)$ tillhör G och låt $(B_{\pi/3}, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ ge $B_{\pi/3}$ i G.
$(B_{\pi/3}, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})^2=(I, (\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))$ så $\lambda+\mu$ är ett heltal. Vi har även att
$(A_{2\pi/3}, 0)(B_{\pi/3}, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=(B_\pi, \lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\mu\boldsymbol{a})$ och $(B_\pi, \lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\mu\boldsymbol{a})^2 = (I, \lambda(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))$ vilket ger oss att λ är ett heltal. Därmed är både λ och μ heltal och reflektionen
$(B_{\pi/3}, 0)=(I, -\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})(B_{\pi/3}, \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ tillhör G. Elementen i G är på formen (O, T) där O är matriserna I, $A_{2\pi/3}$, $A_{4\pi/3}$, $B_{\pi/3}$, B_π och $B_{5\pi/3}$. Gå igenom dessa element geometriskt på t ex detta vis $(B_\pi, m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})=(B_\pi, (m+1/2n)\boldsymbol{a}+1/2n(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))$ när $n=0$ är det en reflektion i en vertikal linje och om $n\neq 0$ så är det en glidreflektion i en vertikal linje e t c.
Den fjärde gruppen är **p6** vars J genereras av $A_{\pi/3}$.
Slutligen är den femte gruppen **p6ss** vars J genereras av $A_{\pi/3}$ och B_0.

De 17 tapetgrupperna.

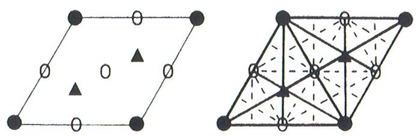




p4 p4mm p4gm



p3 p3m1 p31m



p6 p6mm

Kapitel 3: visa att de 17 tapetgrupperna är olika.

För att visa att dess grupper är olika använder vi oss i ett första steg av sats 7 som säger att för isomorfa tapetgrupper så är punktgrupperna J isomorfa. De olika grupperna tillhör dessa J.

G	J	G	J
p1	trivial	**p4**	Z_4
p2	Z_2	**p4ss**	D_4
ps	Z_2	**p4gs**	D_4
pg	Z_2	**p3**	Z_3
p2ss	$Z_2 \times Z_2$	**p3s1**	D_3
p2sg	$Z_2 \times Z_2$	**p31s**	D_3
p2gg	$Z_2 \times Z_2$	**p6**	Z_6
cs	Z_2	**p6ss**	D_6
c2ss	$Z_2 \times Z_2$		

Genom denna undersökning ser vi att **p1**, **p4**, **p6**, **p6ss** inte har samma punktgrupp som någon av de andra tapetgrupperna och då vet vi att de inte är isomorfa med någon annan grupp förutom sin egen.

Vi går igenom vad de olika grupperna innehåller för element, och går igenom dem med vilken deras punktgrupp är och vilken rotation de innehåller.

Utan rotation:

p1- trivial

$J=Z_2$:

ps- en reflektion

pg- en glidreflektion

cs- en reflektion

90° rotationer.

$J=Z_4$
p4- ingen reflektion
$J=D_4$
p4ss- reflektion horisontellt och vertikalt
p4gs- reflektion horisontellt och glidreflektion vertikalt.

180° rotationer.
$J=Z_2$
p2- ingen reflektion eller glidreflektion
$J=Z_2\times Z_2$
p2ss- reflektion horisontellt och vertikalt
p2sg- reflektion horisontellt, glidreflektion vertikalt
c2ss- reflektion horisontellt och vertikalt
p2gg- glidreflektion horisontellt, glidreflektion vertikalt

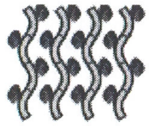
120° utan 60° rotation
$J=Z_3$
p3- ingen reflektion
$J=D_3$
p31s- reflektion horisontellt
p3s1- reflektion horisontellt, lutandes 60° och 300° mot positiva x-axeln.

120° med 60° rotation.
$J=Z_6$
p6- ingen reflektion
$J=D_6$
p6ss- med reflektion horisontellt och vertikalt

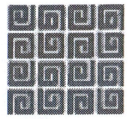
När man plockar ut de olika elementen får man ut några grupper till eftersom sats 3 säger att de olika elementen går på element av samma typ, men t ex **ps** och **cs** vet vi ännu inte om de är verkligen är olika. Men det kan man se så här. Om vi ter en glidreflektion i **ps** och skriver den som en reflektion följt av en translation så tillhör både reflektionen och translationen **ps**. Däremot så innehåller **cs** glidreflektioner vars delar inte ingår i gruppen. Titta t ex på glidreflektionen $(B_0,\ 1/2\boldsymbol{a}+1/2(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))=(I,\ 1/2\boldsymbol{a})(B_0,\ 1/2(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))$ och därför ser vi att **ps** inte kan vara isomorf med **cs**. På liknande sätt visar man att **p2ss** och **c2ss** inte är isomorfa.

p1

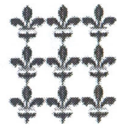
pg



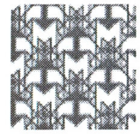
p2gg



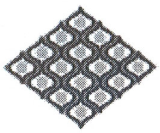
ps



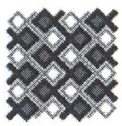
cs



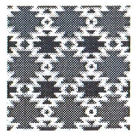
c2ss



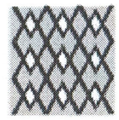
p2sg



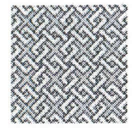
p2ss



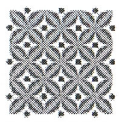
p2



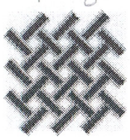
p4



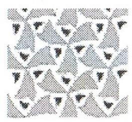
p4ss



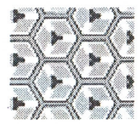
p4gs



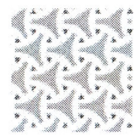
p3



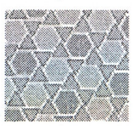
p3s1



p31s



p6



p6ss