# EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET


# Variationskalkyl

av


**Erik Flodén**



2006 - No 1



MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

# Variationskalkyl

Erik Flodén

---

Examensarbete i matematik 20 poäng

Handledare: Jan-Erik Björk

2006

# Innehåll

# Sammanfattning.

Inom ramen för detta examensarbete ryms både grundläggande teori och exempel på hur variationskalkylen används. Eulers differentialekvation härleds och som teoretisk höjdpunkt visas Legendrevillkoret. Förutom ett antal klassiska exempel ryms en liten studie av egenskaper för brachistochronen samt lösningen till några problem från ekonomin. Därmed är viss nödvändig teori klargjord samtidigt som det lämnats konkreta exempel på hur variationskalkylen används.

# Kapitel 1

# Introduktion och historik.

## 1.1 Introduktion.

Stoffet i denna introduktion härrör huvudsakligen från böckerna [1] och [2].

**Funktionalen.** Med en funktion menas, som bekant, ett variabelt värde beroende av andra värden. Man brukar kräva att argumentet $x$ för funktionen $f = f(x)$ tillhör en viss mängd av värden, till exempel att $x$ tillhör intervallet $[x_1, x_2]$. Med en funktional menas, snarlikt, ett variabelt värde som istället för att vara beroende av värden är beroende av funktioner. Argumentet för en funktional $I = I(y(x))$ är alltså en funktion $y = y(x)$, där $y = y(x)$ skall tillhöra en särskild klass av funktioner. Ett exempel på en sådan klass är till exempel klassen av kontinuerliga funktioner med kontinuerlig derivata som sammanbinder punkterna $a$ och $b$ i planet. Precis som varje speciellt värde $x = x_0$ entydigt bestämmer värdet $f(x_0)$, så förväntas varje tillåten funktion $y = y_0$ entydigt bestämma värdet $I(y_0)$. Några exempel på funktionaler är:
**1.** Längden $L$ av en kurva $y = y(x)$ mellan punkterna $a = (x_0, y_0)$ och $b = (x_1, y_1)$ i planet, är en funktional. För varje kurva $y = y(x)$ kan vi, så snart vi känner till dess ekvation, beräkna

$$L(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx. \qquad (1.1)$$

**2.** Arean $A$ som innesluts av en enkel sluten kurva uttryckt på den parametriska formen

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t),\ t_0 \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

är en funktional och kan uttryckas som

$$A(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

**3.** Enheterna som produceras i en fabrik ackumuleras i ett lager. Vid tiden $T$ skall företaget leverera produkterna som ackumulerats i lagret. Lagerkostnaden per enhet är $c_2$ och antalet enheter i lager vid en tidpunkt $t$ är $x(t)$. Den totala lagerkostnaden $K$ är en funktional

$$K(x(t)) = \int_0^T c_2 x(t) dt$$

beroende av den funktion $x(t)$ som beskriver hur lagerackumulationen sker.

**Variationskalkyl.** Inom olika tillämpningar som exempelvis ekonomi eller teoretisk fysik är det ofta nödvändigt att hitta minimum (eller maximum[1]) av en funktional. Vi söker då bland lämpliga funktioner $y = y(x)$ den som minimerar funktionalen $I = I(y)$. Ett enkelt exempel är att försöka minimera funktionalen (1.1) för att hitta den kortaste vägen mellan två punkter. Variationskalkylen är ett redskap för detta. I variationskalkylen är ofta utseendet för den minimerande funktionen det centrala resultatet, och funktionalens minsta värde av underordnat intresse.

Då variationskalkyl används för att finna minimum av en funktional, uppstår ofta tveksamhet om den optimerande kurvan verkligen ger ett minimum. [2] Att strikt matematiskt visa att så är fallet är komplicerat. Därför används ofta geometriska argument för att motivera att den funna kurvan verkligen ger minimum.

Genom att studera variationskalkyl får man mer än ett redskap för att lösa en stor klass av optimeringsproblem. De teoretiska svårigheter ämnet erbjuder; inte minst vad det gäller nödvändiga och tillräckliga egenskaper för minimerande kurvor, har lett till utvecklandet av ett flertal teoretiska element som är värda att lära känna. Variationskalkylens historia och ämnet så som det används idag utgör alltså ett fruktbart område, väl värt att studera.

[1] Här beskrivs egenskaper för minima av funktionaler. För att finna maximum av funktionalen $I(y)$, se på minimum för $-I(y)$.

[2] Detta är helt analogt med att de stationära lösningarna vid envariabel-optimering inte alla ger upphov till ett önskat minimivärde.

## 1.2 Historik.

Många klassiska problem kan formuleras som problem där den minimerande kurvan för en funktional söks, -så kallade variationsproblem.

Brachistochronproblemet är det problem i vilket utseendet för den kurva som ger den kortaste falltiden mellan två punkter skall bestämmas. Galileo jämförde redan på 1630-talet falltider längs cirkelbågen hos en stående cirkel med falltiderna längs polygoner inskrivna i cirklarna. Galileos mening tycks ha varit att en cirkelbåge ger kortast falltid. År 1696 lade John Bernoulli fram brachistochron-problemet och utmanade samtidigt världens matematiker att lösa det. Lösningen är en cykloid, och bland de som vid denna tid hittade lösningen finns Newton, Leibniz, l'Hospital och de båda bröderna Jacob och John Bernoulli. Denna episod brukar anses vara startpunkten för utvecklingen av variationskalkylen.

Ett annat klassiskt problem, som kan lösas med hjälp av variationskalkyl, är problemet att bestämma den största arean som kan inneslutas av en enkel sluten kurva med given omkrets. Lösningen, en cirkel, var känd redan av de gamla grekerna. Detta problem kallas för det isoperimetriska problemet, och det har gett namn till en hel klass av problem: I ett isoperimetriskt problem skall en funktional

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

minimeras under bivillkoret att en annan funktional

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx$$

skall anta ett på förhand givet värde.

**Teoretiska bidrag.** Bland de som sedan utvecklade variationskalkylen märks kanske främst Euler. Ett centralt resultat är den av honom år 1744 härledda differentialekvationen

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{1.2}$$

som nödvändigt gäller för den båge $y = y(x)$ som minimerar funktionalen

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$$

För ordinära funktioner av en variabel så gäller som bekant att

$$f'(x) = 0, \;\; f''(x) > 0$$

är tillräckligt för att funktionen $f$ skall anta ett minimum i punkten $x$. I sökandet efter tillräckliga egenskaper för minimerande kurvor så studerades variationskalkylens motsvarighet till andraderivatan, den så kallade andra variationen. Ett välkänt resultat av sådana studier är Legendres nödvändiga villkor om att en minimerande kurva är lokalt konvex: Egenskapen

$$F_{y'y'} \geq 0 \tag{1.3}$$

måste gälla längs den minimerande bågen.

Förutom Legendre så har bland andra Hilbert, Weierstrass och Jacobi lämnat viktiga bidrag till teorin om egenskaper hos minimerande kurvor. Hilberts invarianta integral används i en fältteori för att att visa mer eller mindre lokala tillräckliga villkor. Jacobis villkor handlar om att så kallade konjugatpunkter ej får finnas på minimerande kurvor. Weierstrass E-funktion kan ses som en utveckling av Legendres villkor, och är ett resultat som bygger på egenskaper hos den andra variationen. Tillsammans kan dessa element användas för att visa på tillräckliga egenskaper för en minimerande kurva.

**Variationskalkyl och ekonomi.** Med början under senare delen av 1920-talet kom publikationer där variationskalkyl tillämpas i ekonomiska problem. Roos, Evans, Hotelling och Ramsey är några av bidragsgivarna. Senare, under femtio- och sextiotalen, kom fokus mer att skjutas mot teorin om optimal kontroll, ett område närbesläktat med variationskalkylen.

# Kapitel 2

# Teoretisk grund.

Presentationen i detta kapitel är framförallt inspirerad av böckerna [2] och [3].

## 2.1 Eulers funktional.

Ett variabelt reellt värde $J$ kallas en *funktional* beroende av funktionen $y(x)$ om mot varje funktion $y(x)$, från en särskild klass av funktioner, svarar precis ett värde för $J$. Vi skriver $J = J(y(x))$.
Låt $F(x, y, z)$ vara en reellvärd kontinuerlig funktion av tre variabler $x, y, z$ och låt $y(x)$ vara en deriverbar funktion, från en särskild klass av funktioner, definierad på ett kontinuerligt intervall $[x_1, x_2]$. Bilda för varje funktion $y(x)$ den nya funktionen

$$x \mapsto F(x, y(x), y'(x)) \tag{2.1}$$

Vi kan nu definiera den reellvärda Eulerfunktionalen

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx.$$

## 2.2 J-derivatan.

Låt $y(x)$ vara en deriverbar funktion, och låt $h(x)$ vara en deriverbar funktion med $h(x_1) = h(x_2) = 0$, båda definierade på intervallet $[x_1, x_2]$. Givet Eulerfunktionalen $J(y)$ kan nu den så kallade $J$-derivatan för funktionsparet

$(h, y)$ bildas. J-derivatan betecknas $\delta J$:

$$\delta J = \lim_{a \to 0} \frac{J(y(x) + ah(x)) - J(y(x))}{a}.$$

J-derivatan kallas också för *den första variationen* av $J(y)$.

## 2.3 Extremalfunktionen.

Definition: Om $J$-derivatan för en funktion $y(x)$ är lika med noll för alla $h(x) \in \mathcal{C}^1$, med $h(x_1) = h(x_2) = 0$, så kallas $y(x)$ för en *extremalfunktion* till $J$.

## 2.4 Variationskalkylens fundamentallemma.

**Lemma.** Om en funktion $M(x)$ är kontinuerlig på ett intervall $[x_1, x_2]$ och om

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)h(x)dx = 0$$

för en godtycklig funktion $h(x) \in \mathcal{C}^1$, med $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , så är $M(x) = 0$ på intervallet $[x_1, x_2]$.

**Bevis.** Antag att i en punkt $x = x^*$ på intervallet $[x_1, x_2]$ så gäller att $M(x^*) \neq 0$. Vi kommer att visa att detta leder till en motsägelse.
Eftersom $M(x)$ är kontinuerlig och $M(x) \neq 0$ för $x = x^*$ så finns en omgivning $[x_1^*, x_2^*]$ till $x^*$ där $M(x)$ har konstant tecken. Om vi nu väljer $h(x)$ så att den också har konstant tecken i samma omgivning och i övrigt är lika med noll, så har vi att

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)h(x)dx = \int_{x_1^*}^{x_2^*} M(x)h(x)dx \neq 0.$$

Detta eftersom produkten $M(x)h(x)$ har konstant tecken på $[x_1^*, x_2^*]$ och i övrigt är lika med noll. En speciell funktion $h(x)$ som uppfyller detta är

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_1^*)^{2n}(x - x_2^*)^{2n} & \text{då } x \in [x_1^*, x_2^*] \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där n är ett positivt heltal. Vi noterar också att denna speciella funktion är $2n - 1$ gånger deriverbar samt uppfyller $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Vi har en motsägelse och följaktligen så är $M(x) = 0$ på intervallet.

## 2.5 Eulers differentialekvation.

Vi vill göra en undersökning av eventuella extremvärden till en funktional

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{2.2}$$

där tillåtna funktioner $y = y(x)$ alla har de fixa ändpunkterna

$$y(x_1) = x_1,\ y(x_2) = y_2.$$

Antag att $F(x, y, y')$ är av klassen $\mathcal{C}^2$, dvs att $F(x, y, y')$ har kontinuerliga partiella derivator upp till och med andra ordningen med avseende på samtliga argument.

**Sats.** En kurva $y(x) \in \mathcal{C}^2$ som ger extremum för funktionalen (2.2) är en lösning till differentialekvationen

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{2.3}$$

Differentialekvationen (2.3) är känd som *Eulers differentialekvation*, eller kort och gott; *Eulerekvationen.*

**Bevis:** Antag att ett extremum finns längs kurvan $y = y(x)$, och att $y(x)$ är två gånger deriverbar. Låt en funktion $h(x)$ med $h(x_1) = h(x_2) = 0$ vara ett tillskott [1] till $y = y(x)$. Vi definierar nu enparameterfamiljen

$$y(x, a) = y(x) + ah(x) \tag{2.4}$$

av jämförelsekurvor till $y(x)$. Med hjälp av funktionalen $J(y)$ och medlemmarna av familjen (2.4) definierar vi funktionen

$$\varphi(a) = J(y(x, a)),$$

som är reellvärd och av en variabel. Vi har att $a = 0$ ger familjemedlemmen $y = y(x)$ och att denna medlem ger extremum för funktionalen $J(y)$. Alltså följer att funktionen $\varphi(a)$ antar ett extremvärde för $a = 0$. Utifrån envariabelteori drar vi slutsatsen att $\varphi'(0) = 0$. Vi har att

$$\varphi(a) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x, a), y'_x(x, a))dx.$$

så att [2]

[1] Tillskottet $h(x)$ definieras som skillnaden mellan $y = y(x)$ och en speciell funktion $y^* = y^*(x)$, dvs som $h(x) = y(x) - y^*(x)$.

[2] Enligt känd sats så är derivering med avseende på a under integralen tillåten.

$$\varphi'(a) =$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,a), y'(x,a)) \frac{\partial}{\partial a} y(x,a) + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,a), y'(x,a)) \frac{\partial}{\partial a} y'(x,a)\Big] dx.$$

Eftersom
$$\frac{\partial}{\partial a} y(x,a) = \frac{\partial}{\partial a}(y(x) + ah(x)) = h(x)$$
och
$$\frac{\partial}{\partial a} y'(x,a) = \frac{\partial}{\partial a}(y'(x) + ah'(x)) = h'(x)$$
så följer att
$$\varphi'(a) =$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[h(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,a), y'(x,a)) + h'(x) \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,a), y'(x,a))\Big] dx.$$

Eftersom $\varphi'(0) = 0$ så har vi alltså relationen

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \Big[h(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) + h'(x) \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x))\Big] dx,$$

eller med förkortad notation:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \Big[F_y h(x) + F_{y'} h'(x)\Big] dx, \tag{2.5}$$

Partiell integration av integrandens andra term ger att

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'} h'(x) dx = [F_{y'} h(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{d}{dx} F_{y'}\Big) h(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big(-\frac{d}{dx} F_{y'}\Big) h(x) dx,$$

detta eftersom $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Förhållandet som ges av integralen (2.5) kan alltså också skrivas

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \Big[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\Big] h(x) dx.$$

Vi vill nu använda fundamentallemmat från föregående stycke. Faktorn $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})$ är kontinuerlig längs en maximerande båge $y(x)$, och $h(x)$ är godtycklig med egenskaper så som beskrivits i lemmat. De båda funktionerna uppfyller alltså lemmats krav. Vi kan dra slutsatsen att kurvan $y = y(x)$ som ger extremum för $J(y)$ är en lösning till differentialekvatioonen

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

## 2.6 Den minimerande funktionen är en extremal.

**Sats.** Antag att $y(x)$ minimerar funktionalen $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$. Då är $y(x)$ extremal.

**Bevis.** Låt

$$\varphi(a) = J(y + ah),$$

där tillskottet $h \in \mathcal{C}^1$ uppfyller $h(x_1) = h(x_2) = 0$.

Taylorutveckling med avseende på $a$ ger att

$$\varphi(a) - \varphi(0) = a\varphi'(0) + \frac{a^2\varphi''(\theta a)}{2!},$$

där $0 \leq \theta \leq 1$.

Då gäller

$$\delta J = \lim_{a\to 0} \frac{J(y + ah) - J(y)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{a\varphi'(0) + a^2\varphi''(\theta a)/2}{a} = \lim_{a\to 0}\Big(\varphi'(0) + a\varphi(\theta a)/2\Big) = \varphi'(0).$$

Enligt envariabelteori är $\varphi'(0) = 0$. Det är klart att $\delta J = 0$,vilket betyder precis att $y(x)$ är extremal.

## 2.7 Ett tillräckligt villkor. (Legendre I)

Bland funktionerna $t \mapsto x(t)$ sådana att $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$ undersöker vi nu extremalerna med avseende på funktionalen,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

där integrandfunktionen $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ antas vara strängt konvex med avseende på sina argument $(x, \dot{x})$.

Antag att $x(t)$ är en extremal samt att $X(t)$ är en annan godtycklig tillåten kurva. Antag också att för kurvornas ändpunkter gäller att

$$x(t_0) = X(t_0) = x_0,\ x(t_1) = X(t_1) = x_1.$$

Vi vill nu visa att $x(t)$ unikt minimerar $J(x)$.

Definiera först funktionen

$$h(t) = X(t) - x(t)$$

och därefter funktionen

$$\varphi(s) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x + sh, \dot{x} + s\dot{h})dt, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

där alltså $t \mapsto x(t) + sh(t)$ är en tävlande funktion för varje $s$ i intervallet $[0, 1]$

Derivering, med notationen $f(x, s) = f(t, x + sh, \dot{x} + s\dot{x})$, ger att

$$\varphi'(s) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds} f(x, s)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[\frac{df(x,s)}{dt}\frac{dt}{ds} + \frac{df(x,s)}{dx}\frac{d(x+sh)}{ds} + \frac{df(x,s)}{d\dot{x}}\frac{d(\dot{x}+s\dot{h})}{ds}\Big]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[f(x, s)_x h + f(x, s)_{\dot{x}}\dot{h}\Big]dt.$$

Beräkning ger andraderivatan

$$\varphi''(s) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds}\Big[f(x, s)_x h + f(x, s)_{\dot{x}}\dot{h}\Big]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(\frac{df(x,s)_x}{dx}\frac{d(x+sh)}{ds} + \frac{df(x,s)_x}{d\dot{x}}\frac{d(\dot{x}+s\dot{h})}{ds}\Big)h +$$

$$+\Big(\frac{df(x,s)_{\dot{x}}}{dx}\frac{d(x+sh)}{ds} + \frac{df(x,s)_{\dot{x}}}{d\dot{x}}\frac{d(\dot{x}+s\dot{h})}{ds}\Big)\dot{h}\Big]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(f(x,s)_{xx}h + f(x,s)_{x\dot{x}}\dot{h}\Big)h + \Big(f(x,s)_{\dot{x}x}h + f(x,s)_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}\Big)\dot{h}\Big]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[f(x,s)_{xx}h^2 + 2f(x,s)_{x\dot{x}}h\dot{h} + f(x,s)_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2\Big]dt.$$

Det gäller att den avslutande integrandfunktionen är större än noll, $\forall h \neq 0$. Detta eftersom $f$ är strängt konvex så att integrandfunktionens kvadratiska form är positivt definit. Det följer att $\varphi(s)$ är konvex, så att $x(t)$ är en unik extremal. Alltså minimerar $x(t)$ unikt $J(x)$.

På motsvarande sätt visas att om integrandfunktionen $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ är strängt konkav så maximerar en extremal ensamt funktionalen $J(x)$.

## 2.8 Eulerekvationen för några speciella fall.

Vi har alltså att en funktion $y(x)$ som minimerar funktionalen

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

måste vara extremal, det vill säga att $y(x)$ måste vara lösning till Eulerekvationen

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Denna andra ordningens differentialekvation kan också skrivas explicit som

$$F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0$$

I många speciella fall är inte integrandfunktionen $F$ beroende av samtliga tre argument $x, y$ samt $y'$. Nedan följer några fall:

### 2.8.1 F beror endast av y'; $F = F(y')$.

Eftersom

$$F_y = F_{xy'} = y'F_{yy'} = 0$$

så reduceras den explicita Eulerekvationen till

$$y''F_{y'y'} = 0.$$

Följaktigen är $y'' = 0$ eller $F_{y'y'} = 0$. Om $y'' = 0$, så är $y = C_1x + C_2$ och en lösning $y(x)$ tillhör en tvåparameterfamilj av räta linjer. Om ekvationen $F_{y'y'} = 0$ har en eller flera rötter $y' = k_i$ så är $y = k_ix + C$, som hör till en en-parameterfamilj av räta linjer. Dessa lösningar ryms i tvåparameterfamiljen ovan. Alltså: I fallet $F = F(y')$ så är extremalerna godtyckliga räta linjer

$$y = C_1x + C_2.$$

Nedan följer ett exempel på ett problem av denna typ.

**Exempel: Kortaste avståndet mellan två punkter.**

*Hitta den kurva i planet av minimal längd som sammanbinder punkterna $A$ och $B$.*

Antag att punkterna har koordinaterna $A = (x_1, y_1)$ respektive $B = (x_2, y_2)$, med $x_1 < x_2$. Längden av en kurva $y(x)$ mellan $x = x_1$ och $x = x_2$ ges av integralen

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

Vårt problem kan nu formuleras på följande sätt: Vi vill hitta en funktion $y(x)$ med $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ sådan att dess derivata minimerar integralen $I$.

Eftersom integrandfunktionen $F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$ inte beror explicit av vare sig $x$ eller $y$, så är den av typen $F = F(y')$ som just beskrivits och problemets lösning är en rät linje

$$y = C_1 x + C_2,$$

där konstaterna $C_1, C_2$ ges av villkoret att linjen skall passera genom punkterna $A$ och $B$.

Att extremalen ger en minimal längd följer av att ingen längsta sträcka mellan de två punkterna kan finnas.

### 2.8.2 F beror endast av y och y'; $F = F(y, y')$.

Eftersom

$$F_{xy'} = 0$$

i detta fall, så har den explicita Eulerekvationen utseendet

$$F_y - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'} = 0.$$

Om vi multiplicerar båda led med $y'$ så omvandlas vänsterledet till derivatan $\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'})$. Detta verifieras med beräkningen

$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) =$$

$$y' F_y + y'' F_{y'} - y'' F_{y'} - y'^2 F_{yy'} - y' y'' F_{y'y'} =$$
$$y'(F_y - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'}).$$

En integrering ger att

$$F - y' F_{y'} = C.$$

Denna relation kallas för *Eulerekvationens första integral.*

**Exempel: Minimala rotationsytor.**

*Givet två punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ i planet; bestäm den kurva som sammanbinder punkterna och som vid rotation runt x-axeln ger en yta av minimal area.*

Vi antar att den kurva $y(x)$ som löser problemet har $y \geq 0$ med $y_1 > 0, y_2 > 0$. Arean av rotationsytan kurvan $y(x)$ ger upphov till ges av integralen

$$I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Problemet består nu i att hitta den funktion $y(x)$ som minimerar I. Integrandfunktionen $f(y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$ beror endast av $y$ och $y'$, och därför implicerar Eulerekvationen så som just beskrivits att

$$f - y' f_{y'} = C_0,$$

som i detta speciella fall är detsamma som att

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Introduktion av parametern $y' = \sinh t$, ger $y = C_1 \cosh t$ och

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sinh t dt}{\sinh t} = C_1 dt,$$

som i sin tur ger att

$$x = C_1 t + C_2.$$

Följaktligen erhålls den önskade ytan genom rotation av en yta med den parametriska ekvationen

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = C_1 \cosh t.$$

Eliminering av parametern $t$ ger oss

$$y = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1}$$

som är en familj av kedjelinjer. [3] Konstanterna $C_1$ samt $C_2$ bestäms av att den sökta kurvan skall passera genom de givna ändpunkterna. [4]

[3]Namnet kedjelinje kommer av att det är denna form som en hängande kedja antar. Detta visas i avsnitt (3.3).

[4]Det finns i själva verket en två eller ingen kedjelinje som passerar genom båda ändpunkterna. Se boken [1] för en utförlig beskrivning.

## 2.9 Funktionaler beroende av två funktioner.

Antag att vi har en mer generell funktional på formen

$$I(y_1, y_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx,$$

där funktionerna $y_1, y_2$ har ändpunktsvillkoren

$$y_1(x_1) = y_{11}, y_1(x_2) = y_{12},$$

$$y_2(x_1) = y_{21}, y_2(x_2) = y_{22}.$$

För att hitta nödvändiga villkor för en extremal så varierar vi en av funktionerna $y_1$ eller $y_2$, samtidigt som den andra hålls fix. På så sätt omvandlar vi $I(y_1, y_2)$ till en funktional beroende av endast en funktion $y_i$, där $i = 1$ eller $i = 2$;

$$I(y_1, y_2) = \tilde{I}(y_i).$$

Detta är samma typ av funktional som i tidigare avsnitt, och genom att i tur och ordning variera $y_1$ och $y_2$ så får vi

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'}, \; i = 1, 2.$$

Detta är det system av Eulerekvationer som en maximerande funktional måste uppfylla.

# Kapitel 3

# Isoperimetriska problem.

Ett isoperimetriskt problem är ett problem där en funktional $f(x)$ skall minimeras samtidigt som den minimerande funktionen $x = x(t)$ skall uppfylla villkoret att en annan funktional $g(x)$ antar ett på förhand givet värde.

I kapitlet visas två versioner av det ursprungliga isoperimetriska problemet följt av problemet att bestämma formen av ett hängande rep av given längd.

## 3.1 Legendre-multiplikatorer.

Detta stycke följer boken [4].

Antag att vi vill maximera

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\ dt \tag{3.1}$$

under sidovillkoren

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t, x, \dot{x})\ dt = L, \tag{3.2}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,$$

där $f$ och $g$ är två gånger kontinuerligt differentierbara, och $L$ är en given konstant.

Varje tillåten funktion $x(t)$ uppfyller (3.2), så för ett sådant $x$ gäller

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\ dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big[ f(t, x, \dot{x}) - \lambda g(t, x, \dot{x}) \Big]\ dt + \lambda L, \tag{3.3}$$

Den vänstra integralen antar extremvärden på exakt samma ställen som integralen på den högra sidan. Konstanten $\lambda$ kan väljas så att (3.2) är uppfylld. Eulerekvationen för integralen på den högra sidan är

$$f_x - \lambda g_x = \frac{d}{dt}\Big(f_{\dot{x}} - \lambda g_{\dot{x}}\Big). \tag{3.4}$$

## 3.2 Det isoperimetriska problemet.

### 3.2.1 Version ett.

Detta stycke följer boken [4].

Vi söker i planet den kurva $y = y(x)$ av den givna längden $L$ som uppfyller ändpunktsvillkoren

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

och maximerar arean mellan kurvan och x-axeln ($y > 0$ antas).

Arean mellan $y(x)$ och x-axeln ges av integralen

$$\int_0^1 y\ dx.$$

Eftersom $y$ är av längden L, så gäller att

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Den sammansatta integrandfunktionen

$$y - \lambda\sqrt{1 + (y')^2}$$

har Eulerekvationen

$$1 = -\frac{d}{dx}\Big(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\Big).$$

En integrering ger att

$$x = -\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} + C.$$

Efter att $y'$ lösts ut algebraiskt så framkommer att

$$y' = \frac{x - C}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C)^2}}$$

Låt $u = \lambda^2 - (x - C)^2$, med $du = -2(x - C)\ dx$. Då gäller

$$y(x) = \int y'(x)\ dx = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + D$$

så att

$$(y - D)^2 + (x - C)^2 = \lambda^2.$$

Detta innebär att en del av en cirkel är extremal. Konstanterna $C, D$ och $\lambda$ bestäms entydigt av kurvans längd $L$ tillsammans med dess ändpunkter. Vi ser att extremalen är unik. Eftersom en största area måste finnas[1] har vi att denna extremal ger den maximala arean.

### 3.2.2 Version två.

Detta stycke följer boken [5].

Nedan löses en något annorlunda variant av det ursprungliga isoperimetriska problemet med hjälp av Greens formel:

*Bland alla enkla slutna kurvor av längden L i planet, hitta den kurva som innesluter den största arean.*

Antag att den parametriska representationen

$$x = x(t),\ \ y = y(t)$$

av varje tävlande kurva är kontinuerligt derivbar med avseende på $t$. Antag dessutom att den parametriska representationen beskriver varje given kurva som positivt orienterad map t samt att $t_0, t_1$ och $(x_0, y_0)$ alla har samma värden för varje tävlande kurva.

Enligt Greens formel [2] innesluter dessa kurvor en area som ges av integralen

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})dt.$$

Kurvorna är alla av samma längd $L$ som ges av

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

[1] Av geometriska skäl kan existensen av en största area anses uppenbar.

[2] Arean ges enligt Green av $\int_{x_0}^{x_1} -ydx$, $\int_{x_0}^{x_1} xdy$ eller $1/2 \int_{x_0}^{x_1} xdy - ydx$. Givet parametriseringen $x = x(t), y = y(t)$ så kan den sista areaformeln formuleras $1/2 \int_{x_0}^{x_1} (x\dot{y} - y\dot{x})dt$.

Vi söker nu bland dessa kurvor de som maximerar arean och samtidigt är av längden $L$.

Den utvidgade integrandfunktionen är

$$F^* = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Denna funktion måste uppfylla följande system av Eulerekvationer:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}} = 0,$$

det vill säga systemet

$$\frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}) = 0.$$

En integration map $t$ ger att

$$y - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_1,$$

$$x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_2.$$

Lös ut $(y - C_1)$ och $(C_2 - x)$ och kvadrera varje ekvation separat. Addera de då erhållna ekvationerna. Då framkommer att

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$$

Vi har visat att den maximerande kurvan måste vara en cirkel.

## 3.3 Formen av ett hängande rep med given längd.

Detta stycke följer boken [5].

*Bestäm formen av ett rep av längden $L$ som hänger mellan två fasta punkter. Repet är helt flexibelt och har konstant massa per längdenhet.*

Denna lösning bygger på följande fysikaliska princip: I ett stabilt system i jämvikt så minimeras den potentiella energin, samtidigt som systemet uppfyller sina övriga villkor.

Antag att repet hänger i ett vertikalt plan. Låt $y = y(x)$ vara en medlem av den familj av alla möjliga former repet kan anta, med fixa ändpunkter och av längden $L$. [3] Koordinaten $x$ mäts i horisontalplanet och $y(x)$ anger avståndet mellan $x$ och ett annat tänkt horisontellt orienterat plan. Om $\sigma$ är repets konstanta massa per längdenhet, så är energipotentialen relativt $y = 0$ för ett element av längden $ds$ i punkten $(x, y)$ given av $gy\sigma\ ds$ där $g$ är konstanten för gravitationens acceleration. Följaktligen så är den totala energipotentialen för systemet given av

$$I = \sigma g \int_0^L y ds = \sigma g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}dx,$$

där $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ är repets fasta ändpunkter med $x_1 < x_2$.

Enligt principen om minimal potentiell energi så ges den stabila konfigurationen för repet av den speciella funktion $y = y(x)$ som minimerar integralen $I$ och för vilken den totala båglängden

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

samtidigt har värdet L. Vi söker därför Eulerekvationen till integrandfunktionen

$$F^* = \sigma g y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}.$$

Eftersom denna funktion är oberoende av $x$ så reduceras Eulerekvationen enligt stycke 2.8.2 till

$$y'\frac{\partial F^*}{\partial y'} - F^* = C_1, \tag{3.5}$$

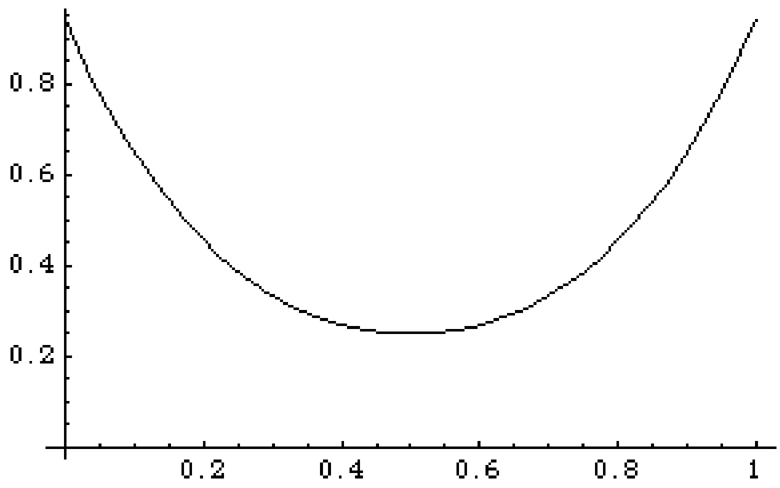
där $C_1$ är en konstant. Vilket, med den för detta problem speciella $F^*$ är detsamma som

$$(\sigma g y + \lambda)(\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2}) = C_1,$$

och vi ser att föregående förhållande uppfylls av funktionen

$$y = -\frac{\lambda}{\sigma g} - \frac{C_1}{\sigma g}\cosh\frac{\sigma g(x - C_2)}{C_1}$$

[3] Vi bortser från de lösningar där y inte är en enkelvärd funktion.




Figur 3.1: Kedjelinjen $\frac{1}{4}\cosh 4(x-\frac{1}{2}), 0 \leq x \leq 1$, ritad med Mathematica.

där $C_1$ och $C_2$ är integrationskonstanter. Vi har alltså att repet hänger i en kedjelinje (därav namnet). Konstanterna $C_1, C_2, \lambda$ kan alltid tilldelas värden så att kurvan $y(x)$ passerar genom punkterna $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ samtidigt som kurvans längd är L.[4]

[4]Detta visas i boken [1].

# Kapitel 4

# Brachistochronproblemet, -en liten undersökning.

Inspirationen till detta avsnitt härrör delvis från boken [2].

*Hitta en kurva som sammanbinder punkterna $A$ och $B$ i rummet så att en partikel som rör sig längs denna kurva från $A$ når $B$ på kortaste möjliga tid, då man bortser från friktion och resistans i mediet.*

Placera koordinatsystemets origo i punkten A, med x-axeln horisontell och y-axeln vertikalt riktad neråt. Farten för partikeln är $ds/dt = \sqrt{2gy}$, och följaktligen; tiden när denna punkt når $B(x_1, y_1)$ efter start i $A(0,0)$ är

$$t(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Vårt problem är alltså att hitta en funktion $y(x)$ som minimerar $t(y, y')$.

Eftersom integranden $F = F(y, y')$ inte beror explicit av $x$, så reduceras Eulerekvationen så som beskrivits i avsnitt ( 2.8.2), så gäller att

$$F - y' F_{y'} = C.$$

I detta speciella fall kan detta förhållande skrivas som

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C_0,$$

som kan förenklas till $1/\sqrt{y(1 + y'^2)} = C_0$, eller $y(1 + y'^2) = C_1$.
Om vi introducerar parametern $t$ och sätter $y' = \cot t$, får vi

$$y = \frac{C_1}{1 + \cot^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

Vi söker nu x:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\cot t} = 2C_1 \sin^2 t \; dt = C_1(1 - \cos 2t)dt,$$

så att

$$x = C_1(t - \frac{\sin 2t}{2}) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Ekvationen för kurvan uttryckt på parametrisk form är alltså

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \; y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Om vi nu observerar att $C_2 = 0$ (sätt t=0), och modifierar parametern genom att sätta $2t = t_1$, så ser vi att vi har en familj av cykloider uttryckt på den vanliga formen

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \; y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1),$$

där $C_1/2$ är radien för den rullande cirkel, som kan bestämmas från villkoret att cykloiden skall passera genom punkten $B(x_1, y_1)$ [1]. Vi kan dra slutsatsen att brachistochronen måste vara en cykloid.

## 4.1 Egenskaper hos den snabbaste fallkurvan.

I föregående avsnitt visades att brachistochronen, den snabbaste fallkurvan, måste vara en cykloid. Vi skall nu visa existensen av, och några egenskaper för, en sådan kurva mellan punkterna $(0, H)$ och $(a, 0)$. Vi låter koordinatsystemet vara orienterat med y-axeln vertikalt riktad uppåt, och skriver den minimerande cykloida kurvan på den parametriska formen

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t - \sin t) \\ y(t) &= H + A(\cos t - 1). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vi konstaterar att $y(0) = H$ och $x(0) = 0$ så att kurvans första punkt $(0, H)$ är den önskade.

Vi ser nu som kortast på kurvans utseende i denna ändpunkt. Derivatorna med avseende på tiden $t$, $0 < t < \pi$, för systemet (4.1) är

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(1 - \cos t) \; > 0 \\ \dot{y} &= \quad -A \sin t \; < 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] I boken [1] visas att exakt en sådan cykloid finns för varje ändpunkt B.

och vi ser som förväntat att $y$ minskar samtidigt som $x$ ökar med ökande $t,\ 0 < t < \pi$. Taylorutveckling ger att nära $t = 0$ så är

$$x(t) \approx A\frac{t^3}{6},$$

$$H - y(t) = -A(1 - \cos t) \approx -A\frac{t^2}{2},$$

så att kvoten $dy/dx$ för $t = 0$ ges av

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} -A\frac{(\Delta t)^2}{2} \Big/ A\frac{(\Delta t)^3}{6} = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{3}{\Delta t} = -\infty,$$

och vi ser att vår minimerande kurva stupar lodrätt neråt x-axeln i punkten $(0, H)$.

Vi vill nu visa att det finns en tidpunkt $t$ där cykloiden passerar genom punkten $(a, 0)$. Insättning av punkten $(a, 0)$ i (4.1) ger upphov till ekvationssystemet

$$\begin{cases} a &= A(t - \sin t) \\ H &= A(1 - \cos t) \end{cases} \tag{4.3}$$

där värdena för $A$ och $t$ är okända. Vi vill nu visa att detta system har en lösning. Vi ser på kvoten

$$\frac{a}{H} = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

och definierar funktionen

$$g(t) = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}.$$

Enligt Taylors formel så är

$$\sin t = t - t^3 R_1,\ \cos t = 1 - t^2 R_2$$

med de, nära $t = 0$, begränsade resttermerna

$$R_1 = \frac{\cos \theta_1 t}{3!},\ 0 \le \theta_1 \le 1,$$

och

$$R_2 = \frac{\cos \theta_2 t}{2!},\ 0 \le \theta_2 \le 1.$$

Eftersom $R_2 \neq 0$ nära $t = 0$ så har vi gränsvärdet

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 R_1}{t^2 R_2} = \lim_{t \to 0} t\frac{R_1}{R_2} = 0.$$

När $t$ närmar sig $t = 2\pi$ så har vi

$$\lim_{t \to 2\pi} g(t) = \lim_{t \to 2\pi} \frac{2\pi}{1 - \cos t} = \infty.$$

Funktionen $g(t)$ är alltså kontinuerlig på intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$ med värdemängden $0 \leq g(t) \leq \infty$. Vi ser att speciellt ingår värdet $a/H$ i värdemängden så att systemet (4.3) har en lösning. Att (4.3) har en lösning innebär i sin tur att det finns en tidpunkt $t = t_0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, för vilken den cykloid som genereras av en cirkel med radien $A$ passerar punkten $(a, 0)$.

## 4.2 Brachistochronens lutning i punkten $(a, 0)$.

I föregående stycke visade vi att det finns ett $t = t_0$, $0 \leq t_0 \leq 2\pi$, då den tidsminimerande cykloida kurvan passerar genom punkten $(a, 0)$. Vi studerar nu lutningen av Brachistochronen för några fall med skilda $t_0$.

**Fallet $\boldsymbol{t_0 = \pi}$.** Av utseendet hos den cykloida minimerande kurvan framgår att

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \leq 0,$$

om och endast om $0 \leq t_0 \leq \pi$. Vi ser nu på det speciella fallet $t_0 = \pi$. Systemet (4.3) antar för detta $t$ utseendet

$$\begin{cases} a = \pi A \\ H = 2A \end{cases} \tag{4.4}$$

som i sin tur ger att

$$a = \frac{\pi}{2} H.$$

Vi har för detta a $y'(a) = 0$, det vill säga att brachistochronen gör en mjuklandning.

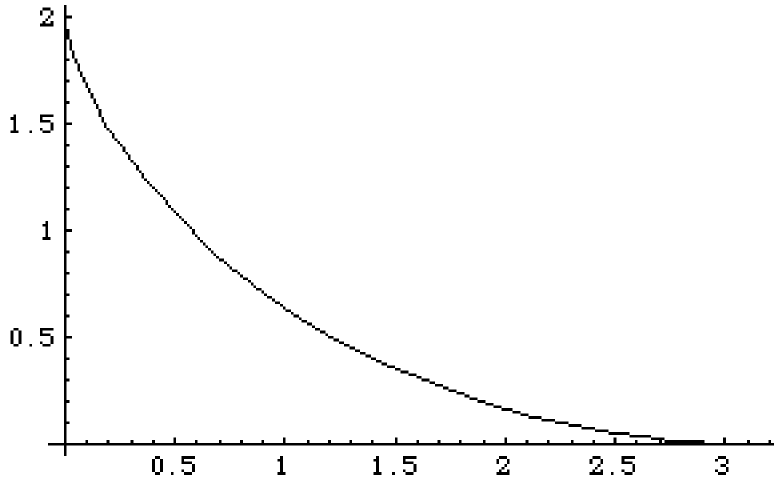
**Fallet $\boldsymbol{t_0 < \pi}$.** Om $t_0$ istället är mindre än $\pi$ så gäller att

$$a < \frac{\pi}{2} H$$

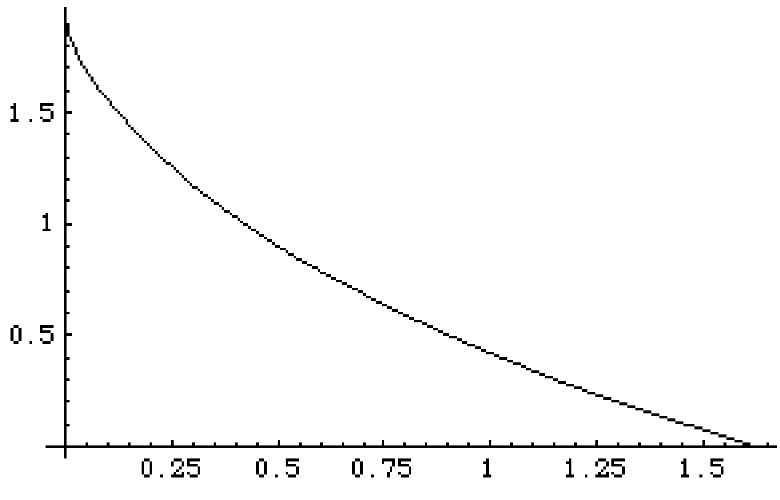
så att $y'(a) < 0$, och brachistochronen sluttar fortfarande nedåt när den når punkten $(a, 0)$.

**Fallet $\boldsymbol{t_0 > \pi}$.** Om $t_0$ avslutningsvis är större än $\pi$ så gäller istället att

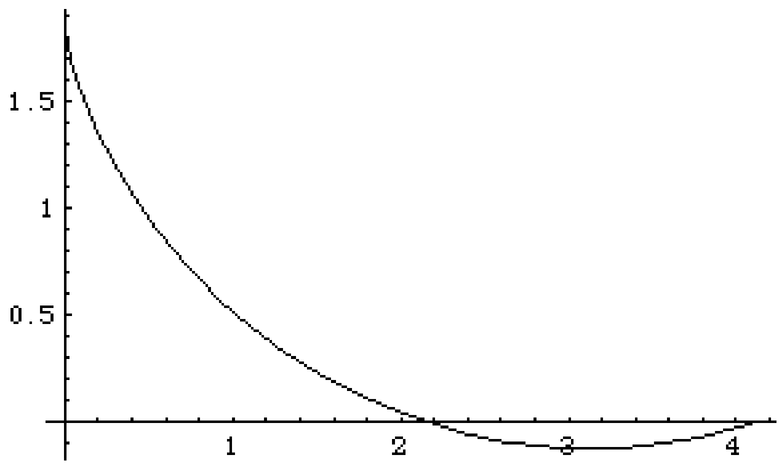
$$a > \frac{\pi}{2} H,$$




Figur 4.1: Brachistochronen för fallet $a = \frac{\pi}{2}H$ med $H = 2$.




Figur 4.2: Brachistochronen för fallet $a < \frac{\pi}{2}H$ med $H = 2$.




Figur 4.3: Brachistochronen för fallet $a > \frac{\pi}{2}H$ med $H = 2$.

med följden att derivatan $y'(a) > 0$. Vi har alltså att ändpunkten (a,0) inte har kurvans minsta y-värde. Istället ligger ett segment av den minimerande kurvan under x-axeln.

## 4.3 Falltiden längs brachistochronen.

Väl känd fysik och den parametriska formen (4.1) för den snabbaste fallkurvan ger att

$$v^2 = 2g(H - y) = 2gA(1 - \cos u).$$

Vi har att

$$\begin{aligned} ds/du &= \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} \\ &= \sqrt{A^2(1 - \cos u)^2 + A^2 \sin^2 u} \\ &= A\sqrt{2(1 - \cos u)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dessutom är

$$dt = \frac{ds}{v} = A\frac{\sqrt{2(1 - \cos u)}}{\sqrt{2gA}\sqrt{1 - \cos u}}du = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{g}}du,$$

så att den totala falltiden $\mathcal{T}$ ges av

$$\mathcal{T} = \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{A}{g}}\, du = \sqrt{\frac{A}{g}}\, u_0, \tag{4.6}$$

där $u_0$ är lösningen till systemet (4.3). Om vi ser på fallet $u_0 = \pi$, där $A = H/2$ så att

$$\mathcal{T} = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}\pi.$$

## 4.4 Ett litet optimeringsproblem.

Det är klart att den snabbaste fallkurvan mellan två punkter är en cykloid. Vi vill nu bland kurvor med gemensamma ändpunkten $(a, 0)$ hitta kurvan med startpunkten $(0, H)$ som ger den kortaste falltiden. Vi söker alltså det $H$ som minimerar falltiden. Olika $H$ i systemet (4.6) ger olika värden på radien $A$, respektive sluttiden $u_0$. Med hjälp av (4.3) ser vi att

$$A = \frac{a}{u_0 - \sin u_0}$$

så att (4.6) kan anta formen

$$T = \sqrt{\frac{A}{g}}\, u_0 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \frac{u_0}{\sqrt{u_0 - \sin u_0}}.$$

Vi vill därför nu hitta det $u$ som minimerar funktionen

$$\mathcal{T}(u) = \frac{u}{\sqrt{u - \sin u}}, \tag{4.7}$$

med derivatan

$$\mathcal{T}'(u) =$$
$$\frac{\sqrt{u - \sin u} - u(u - \sin u)^{-1/2}(1 - \cos u)/2}{(u - \sin u)} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{u - \sin u}} - \frac{u(1 - \cos u)}{2(u - \sin u)^{3/2}}.$$

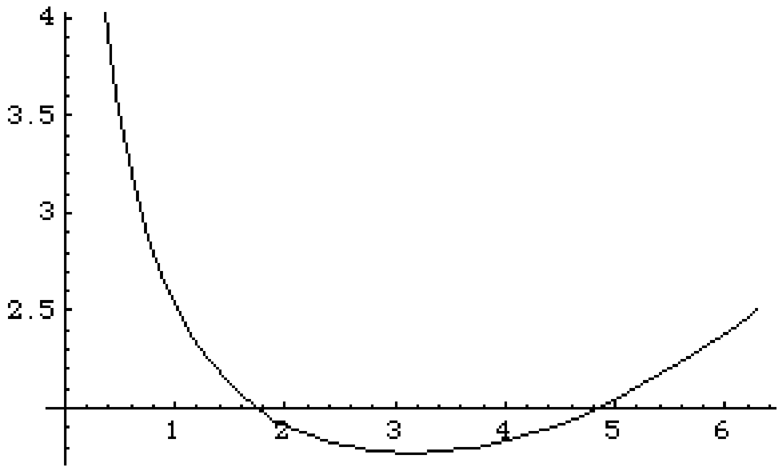
Vi väljer att studera $\mathcal{T}(u)$ numeriskt. En utskrift mellan $0.1 \leq u \leq 2\pi$ visar att det är troligt att $\mathcal{T}(u)$ har minimum för $u = \pi$.[2]

Att $\mathcal{T}(\pi)$ är ett minimum verifieras med insättning av detta värde i funktionens derivata. Grafens utseende troliggör att detta är derivatans enda nollställe.

I intervallet $0 < u \leq \pi$ är $\mathcal{T}(u)$ sammansatt av kontinuerliga begränsade funktioner, vilket innebär att också denna funktion är kontinuerlig och begränsad. Funktionen kan bete sig oväntat för små $u$. [3]

[2] Programmet Mathematica med kommandot Plot[u/(Sqrt[u - Sin[u]]), u, .1, 2Pi]

[3] Det är känt att $u > \sin u$, då $u > 0$ så att nämnaren är skild från noll då $u \neq 0$.




Figur 4.4: $\mathcal{T}(u) = u/\sqrt{u - \sin u}, 0.1 \leq u \leq 2\pi$.

Direkt insättning av $u = 0$ är inte möjligt, ty

$$\frac{u}{\sqrt{u - \sin u}}\Big|_{u=0} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0}$$

Nära noll är det inte heller möjligt att göra en utskrift av $\mathcal{T}(u)$. Enligt Taylor så är

$$\sin u \approx u - u^3/6$$

för tillräckligt små $u$ så att

$$\frac{u}{\sqrt{u - \sin u}} \approx \frac{\sqrt{6}\ u}{\sqrt{u^3}}$$

nära $u = 0$. Då gäller

$$\lim_{u \to 0} \mathcal{T}(u) = \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{6}\ u}{\sqrt{u - \sin u}} =$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{6}\ u}{\sqrt{u^3}} = \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{u}} = \infty$$

Detta innebär att inga missade minimivärden för små värden på $u$ finns. Det går alltså att acceptera $\mathcal{T}(\pi)$ som strängt minimivärde i intervallet $0 \leq u \leq 2\pi$.

Detta visar att bland fallkurvorna från någon punkt på y-axeln till punkten $(a, 0)$ på x-axeln så är cykloiden som har lutningen noll i ändpunkten den snabbaste.[4]

[4]Detta är inget strängt bevis. Det är troliggjort att det förhåller sig så.

# Kapitel 5

# Dynamisk ekonomi.

## 5.1 Ett problem från ekonomin.

Stoffet i detta avsnitt följer boken [4].

Ett företag har fått en order i vilken $B$ produktenheter skall levereras vid tiden $T$. Företaget söker en produktionsplan för att kunna leverera vid specificerat leveransdatum till minimal kostnad. Vi tänker oss att kostnaden för tillverkning av produktenheter ökar linjärt med produktionstakten och att lagerkostnaden per enhet är konstant per tidsenhet. Vi låter $x(t)$ beteckna lagret som ackumulerats vid tiden $t$. Då har har vi $x(0) = 0$ och skall uppnå $x(T) = B$. Lagernivån vid en given tidpunkt är den samlade tidigare produktionen. Förändringshastigheten för mängden enheter i lager är produktionstakten $dx/dt = x'(t)$. Följaktligen är företagets kostnad vid en tidpunkt $t$

$$[c_1 x'(t)]x'(t) + c_2 x(t) = c_1 [x'(t)]^2 + c_2 x(t),$$

där den första termen är den totala produktionskostnaden -produkten av kostnaden för tillverkning av produktenheter och produktionsnivån; den andra termen är den totala kostnaden för lagerhållning; och $c_1, c_2$ är positiva konstanter. Företagets mål är att hitta en produktionstakt $x'(t)$ och en lagerackumulation $x(t)$ för $0 \le t \le T$ som minimerar

$$\int_0^T \Big[c_1 [x'(t)]^2 + c_2 x(t)\Big] dt, \tag{5.1}$$

som uppfyller villkoren

$$x(0) = 0,\ x(T) = B,\ x'(t) \ge 0.$$

### 5.1.1 Ett första förslag till lösning.

En möjlig plan vore att hålla en konstant produktionstakt, nämligen $x'(t) = B/T$. Detta ger

$$x(t) = \int_0^t \frac{B}{T} ds = \frac{Bt}{T},$$

vilket ger den samlade kostnaden

$$\int_0^T \Big[c_1\Big(\frac{B}{T}\Big)^2 + c_2\frac{Bt}{T}\Big]dt = c_1\frac{B^2}{T} + c_2\frac{BT}{2}.$$

Detta kan vara en godtagbar plan, men vi vet inte om denna plan minimerar kostnaden.

### 5.1.2 Fallet utan lagerkostnad.

Anta att lagerkostnaden är noll: $c_2 = 0$. Eftersom $c_1$ är en positiv konstant så kan vi ekvivalent lösa problemet att minimera

$$\int_0^T \Big[x'(t)\Big]^2 dt \tag{5.2}$$

under villkoren

$$x(0) = 0,\ x(T) = B,\ x'(t) \geq 0.$$

Integrandfunktionen $x'(t)^2$ är endast beroende av $x'$ och Eulerekvationen reduceras till [1]

$$-2x'' = 0, \text{ eller ekvivalent; } x'' = 0.$$

Två integreringar ger att

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

där $c_1, c_2$ är integrationskonstanter. Värdena för dessa konstanter ges av problemets ändpunktsvillkor. Vi har att

$$x(0) = 0 = c_2,\ x(T) = B = c_1 T + c_2$$

som ger att lösningen till Eulerekvationen med dessa ändpunktsvillkor är

$$x(t) = \frac{Bt}{T},\ 0 \leq t \leq T.$$

Om det finns en lösning till detta problem så måste det vara denna.

[1] Analogt med fallet $F = F(y')$, avsnitt 2.8.1.

### 5.1.3 Ett något mer generellt fall.

Vi söker nu en kurva som minimerar funktionalen (5.1). Eftersom $F_x = c_2$ och $F_{x'} = 2c_2x'$ så är Eulerekvationen för (5.1)

$$c_2 - 2c_1x'' = 0$$

eller ekvivalent

$$x''(t) = \frac{c_2}{2c_1}. \tag{5.3}$$

Två integrationer ger att

$$x(t) = \frac{c_2t^2}{4c_1} + k_1t + k_2$$

där integrationskonstanterna $k_1, k_2$ ges av ändpunktsvillkoren

$$x(0) = 0 = k_2,\ x(T) = B = \frac{c_2T^2}{4c_1} + k_1T + k_2.$$

Följaktligen är

$$k_1 = \frac{B}{T} - \frac{c_2T}{4c_1},\ k_2 = 0$$

så att

$$x(t) = \frac{c_2t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T},\ 0 \le t \le T, \tag{5.4}$$

är vår eftersökta extremal.

Vi undersöker nu om (5.4) uppfyller villkoret $x' \ge 0$. Från Eulerekvationen (5.3) följer direkt att $x'' > 0$ så att $x$ är en växande funktion av $t$. Följaktligen är $x'(t) \ge 0$ för alla $t$ endast om initialvillkoret $x'(0) = k_1 \ge 0$ gäller. Detta innebär att (5.4) uppfyller villkoret $x'(t) \ge 0$ förutsatt att

$$B \ge \frac{c_2T^2}{4c_1}.[2] \tag{5.5}$$

Alltså är (5.4) lösning till problemet om den totala produktionen $B$ är tillräckligt stor i förhållande till den tillgängliga tidsperioden $T$ samtidigt som lagerkostnaden $c_2$ är tillräckligt liten relativt kostnaden $c_1$ per producerad enhet.

[2]Att detta villkor inte uppfyllts skulle innebära att produktionstakten initialt var negativ. Att vi inledningsvis skulle förstöra produktenheter är inte möjligt eftersom $x(0) = 0$, -inga enheter är ännu tillverkade.

### 5.1.4 Utgifterna kontinuerligt reducerade.

Vi kan i föregående exempel istället anta att utgifterna kontinuerligt reduceras över tiden med den kontinuerliga takten $r$. [3] Vi ser inledningsvis på problemet att minimera funktionalen

$$\int_0^T e^{-rt}\Big[c_1[x'(t)]^2 + c_2 x(t)\Big]dt,$$

med sidovillkoren

$$x(0) = 0,\ x(T) = B.$$

Beräkning ger att $F_x = e^{-rt}c_2$ och $F_{x'} = 2e^{-rt}c_1 x'(t)$ så att Eulerekvationen är

$$e^{-rt}c_2 - \frac{d}{dt}\Big(2e^{-rt}c_1 x'(t)\Big) = 0.$$

Derivatan utvecklad är

$$\frac{d}{dt}F_{x'} = -2re^{-rt}c_1 x'(t) + 2e^{-rt}c_1 x''(t)$$

som efter förenklig ger Eulerekvationen

$$x''(t) = rx'(t) + \frac{c_2}{2c_1} \tag{5.6}$$

Vi noterar att eftersom $x'$ är ickenegativ [4] så är högerledet av (5.6) positivt. Följaktligen så är $x'' > 0$ för en optimal plan; i den optimala planen är produktionstakten strängt växande. För att lösa Eulerekvationen (5.6) konstaterar vi inledningsvis att integrandfunktionen varken är beroende av $x$ eller $t$. Gör variabelbytet $x' = u$, så att $x'' = u'$. Detta ger en första ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter:

$$u' = ru + \frac{c_2}{2c_1}.$$

Denna ekvation har lösningen

$$x' = u = k_1 e^{rt} - \frac{c_2}{2rc_1},$$

där $k_1$ är en integrationskonstant. Integration ger

$$x(t) = \frac{k_1 e^{rt}}{r} - \frac{c_2 t}{2rc_1} + k_2.$$

[3] För en förklaring av faktorn $e^{-rt}$, se s10 i boken [4].

[4] Att $x' \geq 0$ antogs då vi ville lösa (5.1). Detta innebär att vi ej förstör producerade enheter.

Ändpunktsvillkoren

$$x(0) = 0 = \frac{k_1}{r} + k_2, \; x(T) = B = \frac{k_1 e^{rT}}{r} - \frac{c_2 T}{2rc_1} + k_2$$

ger värden för integrationskonstanterna

$$k_2 = \frac{-k_1}{r}, \; k_1 = \frac{r(B + c_2 T/2rc_1)}{(e^{rT} - 1)}.$$

Följaktligen är vår sökta lösning extremalen

$$x(t) = \frac{(B + c_2 T/2rc_1)(e^{rt} - 1)}{(e^{rT} - 1)} - \frac{c_2 t}{2rc_1}, \; 0 \le t \le T, \tag{5.7}$$

förutsatt att $x'(t) \ge 0$ följs. Vi kontrollerar detta: Eftersom $x'' > 0$ så vet vi att $x' \ge 0$ förutsatt att $x'(0) \ge 0$. En enkel beräkning ger att $x'(0) \ge 0$ om och endast om

$$B \ge (e^{rT} - 1 - rT)c_2/2r^2 c_1.$$

Om denna olikhet gäller så uppfyller alltså (5.7) villkoret $x' \ge 0$ så att detta är den optimala lösningen.

### 5.1.5 Monotont växande produktionskostnad.

Vi fortsätter med antagandet att produktionskostnaden är en monotont växande konvex funktion $g(x')$ av produktionstakten $x'$. Vi har då

$$g(0) = 0, \; g' \ge 0, \; g'' > 0 \text{ för } x \ge 0.$$

Den kvadratiska produktionskostnaden (5.1) är tydligt ett specialfall av detta fall. För att minimera funktionalen

$$\int_0^T e^{-rt}\Big[g(x') + c_2 x(t)\Big] dt,$$

med sidovillkoren

$$x(0) = 0, \; x(T) = B,$$

ger beräkning att

$$F_x = e^{-rt} c_2, \; F_{x'} = e^{-rt} g'(x'),$$

$$\frac{d}{dt} F_{x'} = -re^{-rt} g'(x') + e^{-rt} g''(x') x''.$$

Eulerekvationen är alltså ekvivalent med

$$g''(x'(t))x''(t) = rg'(x'(t)) + c_2 \tag{5.8}$$

Samtliga termer förutom $x''$ i (5.8) vet vi är ickenegativa. Det följer att även $x''$ är ickenegativ, så att en optimal produktionstakt är strängt växande med avseende på tiden fram till tidpunkten $T$ då $B$ enheter samlats.

## 5.2 Gruvan -ett isoperimetriskt problem.

Stoffet i detta avsnitt är inspirerat av boken [4].

Antag att en gruva innehåller en mängd A av utvinningsbar malm. Låt $x(t)$ vara den samlade utvunna mängden vid tiden $t$. Antag att vinsten ges av funktionalen

$$\int_0^T e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)}dt. \tag{5.9}$$

Dessutom gäller att

$$A = \int_0^T \dot{x}(t)\ dt,\ x(0) = 0,\ x(T) = A.$$

Detta är ett isoperimetriskt problem, och ett sådant är möjligt att lösa med Lagrange-multiplikatorer så som beskrivet i avsnitt (3.1).

Vi ser på maximum för

$$\int_0^T \left[e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)} - \lambda\dot{x}(t)\right]\ dt \tag{5.10}$$

Den sammansatta integrandfunktionen är i detta speciella fall

$$e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)} - \lambda\dot{x}(t)$$

så att Eulerekvationen (3.4) antar utseendet

$$0 = \frac{d}{dt}\left[e^{-rt}\frac{1}{2\sqrt{\dot{x}(t)}} - \lambda\right].$$

En integrering ger att

$$C_0 = e^{-rt}\frac{1}{2\sqrt{\dot{x}(t)}} - \lambda,$$

så att

$$e^{-rt} = 2(C_0 + \lambda)\sqrt{\dot{x}(t)},$$
$$e^{-2rt} = 4(C_0 + \lambda)^2\ \dot{x}(t). \tag{5.11}$$

Ytterligare en integrering ger att

$$-\frac{e^{-2rt}}{2r} = 4(C_0 + \lambda)^2\ x(t) + C_1,$$

så att
$$x(t) = \frac{1}{4(C_0+\lambda)^2}\Big(-C_1 - \frac{e^{-2rt}}{2r}\Big).$$
Eftersom $x(0) = 0$ så gäller
$$0 = -C_1 - \frac{1}{2r}$$
vilket ger att
$$x(t) = \frac{1}{8r(C_0+\lambda)^2}\Big(1 - e^{-2rt}\Big).$$
Eftersom $x(T) = A$ så gäller
$$A = \frac{1}{8r(C_0+\lambda)^2}\Big(1 - e^{-2rT}\Big)$$
det vill säga att
$$(C_0+\lambda)^2 = \frac{1-e^{-2rT}}{8rA}$$
och det är klart att
$$x(t) = \frac{A}{1-e^{-2rT}}\Big(1 - e^{-2rt}\Big) \tag{5.12}$$
löser detta problem.

Funktionalen (5.9) har integrandfuntionen
$$f = e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)}$$
för vilken det gäller att
$$f_{\dot{x}\dot{x}} = -e^{-rt}\frac{1}{4\dot{x}^{3/2}} < 0.$$
Vi ser att integrandfunktionen är konkav med avseende på $\dot{x}$ så att vår lösning ger maximum. [5]

[5]Enligt sats (6.4.2) gäller nödvändigt för minimum av $\int_0^T -f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$ att $-f_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$. Det innebär att vid maximum av funktionalen $\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$ gäller $f_{\dot{x}\dot{x}} \leq 0$.

## 5.3 Ett problem med variabel ändpunkt.

Stoffet i detta avsnitt är inspirerat av boken [4].

### 5.3.1 Belöning i ändpunkten.

Vi har ett kontrakt: En gruva skall tömmas på sitt innehåll av $B$ ton malm och detta skall vara klart till tidpunkten $T$. I ändpunkten finns en bonus, sådan att ju större mängd malm som lämnas obruten desto större blir bonusen. Detta innebär att det kan löna sig att inte bryta all malm så som kontraktet lovar. Vi låter inte ändpunkten $x(T) = B$ vara given när vi söker maximum. Istället söker vi funktionen $x(t)$ tillsammans med dess ändpunkt $x(T) = A$ sådana att intäkterna maximeras.

**Ett generellt fall.** Vi ser inledningsvis på problemet att hitta maximum av

$$\int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt + G\Big(x(T)\Big), \tag{5.13}$$

givet $x(0) = 0$ och bonusfunktionen $G = G(x(T))$, där $x(T)$ är variabel.

Antag att $x^*(t)$ är den optimala lösningen, och att $x(t)$ är en medtävlande kurva. Definiera

$$h(t) = x(t) - x^*(t)$$

och se på funktionen

$$\varphi(a) = \int_0^T F(t, x^* + ah, \dot{x}^* + a\dot{h})\ dt + G\Big(x^*(T) + ah(T)\Big).$$

Det gäller att

$$\varphi'(a) = \int_0^T \Big[hF_x(t, x^* + ah, \dot{x}^* + a\dot{h}) + \dot{h}F_{\dot{x}}(t, x^* + ah, \dot{x}^* + a\dot{h})\Big]\ dt +$$

$$+h(T)G_x\Big(x^*(T) + ah(T)\Big).$$

Partiell integration tillsammans med egenskapen $h(0) = 0$ ger att

$$\int_0^T F_{\dot{x}}\dot{h}(t)\ dt = \Big[F_{\dot{x}}h(t)\Big]_0^T - \int_0^T \Big(\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\Big)h(t)\ dt =$$

$$= F_{\dot{x}}h(t)|_{t=T} - \int_0^T \Big(\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\Big)h(t)\ dt.$$

Funktionen $\varphi(a)$ har maximum för $a = 0$. Envariabelteori ger att $\varphi'(0) = 0$ så att

$$0 = \int_0^T \Big[F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\Big]h(t)\ dt + F_{\dot{x}}h(t)|_{t=T} + h(T)G_x\Big(x^*(T)\Big). \tag{5.14}$$

Jämförelsekurvor som ger upphov till $h(T) = 0$ är tillåtna. För sådana kurvor antar förhållandet (5.14) utseendet

$$0 = \int_0^T \Big[F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\Big]h(t)\ dt$$

och vi ser att Eulerekvationen gäller längs $x^*$.[6]

Detta innebär att

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0$$

och det följer att (5.14) har utseendet

$$0 = F_{\dot{x}}h(t)|_{t=T} + h(T)G_x\Big(x^*(T)\Big)$$

så att i ändpunkten $t = T$ gäller

$$h(t)\Big[F_{\dot{x}} + G_x\Big] = 0,\ \forall h(t),$$

så att i kurvans ändpunkt gäller utöver Euler att

$$F_{\dot{x}} + G_x = 0.$$

Sammanfattningsvis så uppfyller en maximerande kurva $x^*(t)$ villkoren

$$i.\ \ F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0 \quad \text{(Euler)}$$

$$ii.\ F_{\dot{x}}|_{t=T} + G_x|_{t=T} = 0.$$

**Åter i gruvan.**

Vi är åter i gruvan från inledningen av stycket (5.3.1). Vi söker kurvan $x = x(t)$, och dess ändpunkt $x(T) = A$, sådana att vi maximerar

$$\int_0^T e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)}\ dt + M\Big(B - x(T)\Big) \tag{5.15}$$

[6] Detta följer av fundamentallemmat, avsnitt 2.4.

givet $x(0) = 0$. $B$ är total råvarutillgång och $M$ är en positiv konstant. Bonusfunktionen $M\Big(B - x(T)\Big)$ är alltså linjär i $x(T)$.

Inledningsvis noterar vi att för mycket små $M$ så är ändpunkten $x(T) \approx B$ och för mycket stora $M$ så gäller istället $x(T) \approx 0$.

För $x(t)$ gäller enligt föregående stycke följande två villkor:

$$\begin{aligned} &i. \quad \frac{d}{dt}\frac{e^{-rt}}{2\sqrt{\dot{x}(t)}} = 0 \quad \text{(Euler)} \\ &ii. \quad \frac{e^{-rT}}{2\sqrt{\dot{x}(T)}} - M = 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Av $i$ följer [7] att för maximerande $x(t)$ gäller

$$x(t) = \frac{A}{1 - e^{-2rT}}\Big(1 - e^{-2rt}\Big), \tag{5.17}$$

där $A = x(T)$. Derivering ger att

$$\dot{x}(t) = \frac{2rA}{1 - e^{-2rT}}e^{-2rt},$$

så att i $t = T$ gäller

$$\dot{x}(T) = \frac{2r\ x(T)}{1 - e^{-2rT}}e^{-2rT}. \tag{5.18}$$

Av villkor $ii$ så följer att

$$\dot{x}(T) = \frac{e^{-2rT}}{4M^2}$$

vilket tillsammans med (5.18) ger att

$$\frac{2r\ x(T)}{1 - e^{-2rT}}e^{-2rT} = \frac{e^{-2rT}}{4M^2},$$

eller efter att $x(T)$ lösts ut:

$$x(T) = \frac{1 - e^{-2rT}}{8M^2 r}.$$

Maximum för detta problem ges följaktligen av

$$x(t) = \frac{1}{8M^2 r}(1 - e^{-2rt}), \tag{5.19}$$

förutsatt att $x(T) \leq B$. [8]

[7] Detta är samma räkning som leder fram till ekvationen 5.12, med skillnaden att $\lambda = 0$.

[8] Se 5.23 för en kommentar.

### 5.3.2 Variabel ändpunkt utan belöning.

Vi vill hitta maximum av

$$\int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt$$

givet $x(0) = 0$, där $x(T)$ är variabel.

Detta är specialfallet av (5.13) med bonusfunktionen $G \equiv 0$.

Det följer att för en maximerande kurva $x(t)$ gäller villkoren

$$i.\ \ F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0 \quad \text{(Euler)} \tag{5.20}$$

$$ii.\ F_{\dot{x}}|_{t=T} = 0.$$

**Tillbaka i gruvan en tredje gång.**

I avsnittet (5.3.1) söktes kurvan som maximerar integralen (5.15). Vi omformar nu detta problem till ett variabel-ändpunkt-problem utan bonus i ändpunkten: Vi söker $x = x(t)$, med $x(0) = 0$ som maximerar

$$\int_0^T e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)}\ dt - Mx(T) + MB = \tag{5.21}$$

$$\int_0^T e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)}\ dt - M\int_0^T \dot{x}(t)\ dt + MB =$$

$$\int_0^T \Big(e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)} - M\dot{x}(t)\ \Big)dt + MB.$$

Vi söker ekvivalent maximum till

$$\int_0^T \Big(e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)} - M\dot{x}(t)\ \Big)dt.$$ [9]

Enligt föregående stycke så uppfyller en maximerande kurva $x(t)$

$$i.\frac{d}{dt}\Big(\frac{e^{-rt}}{2\sqrt{\dot{x}(t)}} - M\Big) = 0 \quad \text{(Euler)} \tag{5.22}$$

[9]Det avslutande uttrycket kan tolkas som att det betalas en avgift som beror av momentana brytningstakten $\dot{x}(t)$.

$$ii.\ \frac{e^{-rT}}{2\sqrt{\dot{x}(T)}} - M = 0.$$

Villkoret $i$ ger att

$$\frac{e^{-rt}}{2\sqrt{\dot{x}(t)}} - M = C_0$$

så att i ändpunkten gäller

$$\frac{e^{-rT}}{2\sqrt{\dot{x}(T)}} - M = C_0.$$

Villkoret $ii$ ger nu att $C_0 = 0$. Då gäller att

$$\frac{e^{-rt}}{2\sqrt{\dot{x}(t)}} = M$$

eller

$$\frac{e^{-rt}}{2M} = \sqrt{\dot{x}(t)}$$

och det följer att

$$\frac{e^{-2rt}}{4M^2} = \dot{x}(t).$$

En integrering ger att

$$x(t) = -\frac{e^{-2rt}}{8M^2 r} + C_1.$$

Eftersom $x(0) = 0$ så gäller att

$$C_1 = \frac{1}{8M^2 r}$$

och den maximerade kurvan har återigen visat sig vara

$$x(t) = \frac{1}{8M^2 r}(1 - e^{-2rt}).$$

### 5.3.3 Tolkning av resultatet.

**Tömd gruva.**

Av Eulerfunktionen (5.16) följer att

$$\sqrt{\dot{x}} = C_0 e^{-rt}$$

och givet en tömd gruva så gäller för vinsten $V = V(B)$ att

$$V(B) = \int_0^T e^{-rt}\sqrt{\dot{x}(t)}\ dt = C_0 \int_0^T e^{-2rt}dt = C_0\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big].$$

Vi vet att

$$\dot{x} = C_0^2 e^{-2rt}$$

så att

$$B = \int_0^T \dot{x}\ dt = C_0^2 \int_0^T e^{-2rt}dt = C_0^2\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big].$$

Det följer att

$$C_0 = \sqrt{B}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{-1/2}$$

så att vinsten ges av

$$V(B) = \sqrt{B}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{-1/2}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big] = \sqrt{B}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2}.$$

Slutsats: Om vi vill maximera vinstfunktionen (5.15) och det gäller att

$$MB > \sqrt{B}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2}$$

så är det mer lönsamt att inte bryta någon malm.

**Allmänt.**

Låt $B$ beteckna mängden malm i gruvan. En helt tömd gruva ger, enligt föregående avsnitt, vinsten

$$V(B) = \sqrt{B}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2}$$

Om vi har den totala mängden $B$ ton och fram till tiden $T$ bryter $\beta$ ton ($\beta \leq B$) så ges vinsten istället av

$$V(\beta) = \sqrt{\beta}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2} + M(B-\beta).$$

Vi vill nu maximera $V(\beta)$ med avseende på $\beta$. För ett maximerande $\beta$ gäller $V'(\beta) = 0$ så att

$$\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2} = M$$

det vill säga att

$$\sqrt{\beta} = \frac{1}{2M}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2}$$

så att

$$\beta = \frac{1}{4M^2}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big] \leq B.$$

Detta innebär att

$$4M^2B \geq \Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big].$$

Slutsats: Vid maximal vinst gäller nödvändigt

$$B \geq \Big[\frac{1-e^{-2rT}}{8M^2r}\Big]. \tag{5.23}$$

Detta betyder att för $x(t)$, som formulerad i (5.19), gäller att $x(T) \leq B$ vid optimal brytning.

### 5.3.4 Konkav vinstfunktion.

Vinstfunktionen har liksom tidigare utseendet

$$V(\beta) = \sqrt{\beta}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2} + M(B-\beta).$$

Det gäller att

$$V'(\beta) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2} - M,$$

så att

$$V''[\beta] = -\frac{1}{4\beta^{3/2}}\Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2} < 0$$

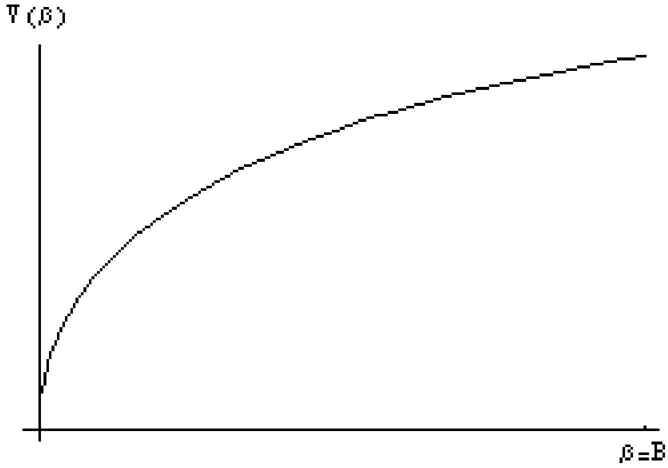
och vi ser att vinstfunktionen $V(\beta)$ är konkav.

$\mathbf{V'(B) \geq 0}$. Antag att $V'(B) \geq 0$. Då gäller att

$$2M\sqrt{B} \leq \Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2}.$$

Eftersom $V' > 0$ för alla $\beta$ så antar $V(\beta)$ inte maximum i intervallet $0 \leq \beta < B$. Istället maximerar $\beta = B$ funktionen $V(\beta)$.
Slutsats: Vid

$$2M\sqrt{B} \leq \Big[\frac{1-e^{-2rT}}{2r}\Big]^{1/2}$$




Figur 5.1: $V(\beta)$ med $V'(B) \geq 0$.

så töms hela gruvan.

$\mathbf{V'(B) < 0}$. Eftersom $V'(0) > 0$ och $V'(B) < 0$ så följer, givet en kontinuerlig $V'(\beta)$, att i intervallet $0 < \beta < B$ finns ett $\beta$ sådant att funktionen $V(\beta)$ maximeras.
Slutsats: Vid

$$2M\sqrt{B} > \left[\frac{1 - e^{-2rT}}{2r}\right]^{1/2}$$

så finns ett uttag $\beta$, $(\beta < B)$, sådant att vinsten maximeras. Det innebär att inte hela gruvans innehåll bryts.

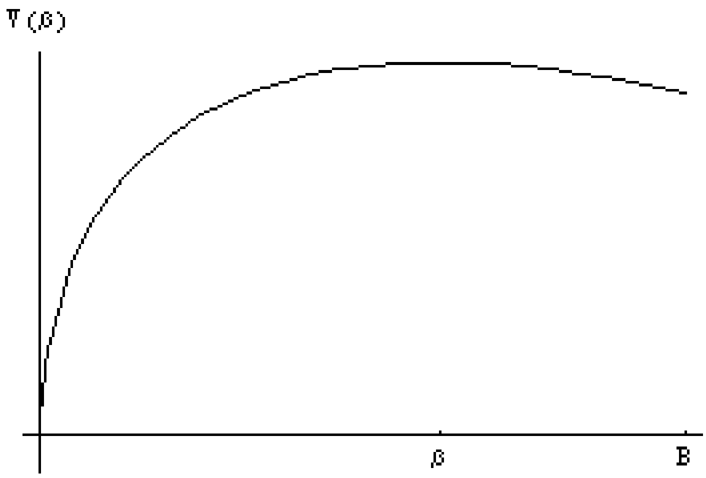
Kommentar: Vi kan se $M$ som en parameter som styr mängden bruten malm $\beta$. Ett ökande $M$ ger ett minskande $\beta$. En ökad brytning ger upphov till en ökad sysselsättning. Detta innebär att om vi vill öka sysselsättningen så minskar vi M. Eftersom

$$\beta = \frac{C_0}{M^2}$$

så ger en relativt liten förändring av $M$ upphov till en motsatt och större förändring av $\beta$. Se på ökningen från $M_0$ till $M_1$: Vi har att

$$\frac{M_1}{M_0} < \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^2 = \frac{C_0}{M_0^2}\frac{M_1^2}{C_0} = \frac{\beta_0}{\beta_1}.$$

Detta resonemang skulle kunna utvidgas till ett vidare perspektiv, exempelvis till att gälla sysselsättningen i ett samhälle. Klart är naturligtvis att bonusfunktioner som dämpar produktionen också minskar sysselsättningen.




Figur 5.2: $V(\beta)$ med $V'(B) < 0$.

Föregående resonemang pekar mot att det är relativt effektivt att stimulera produktionen genom att ta bort dämpande bonusar. Detta givet den mycket enkla bonusfunktionen i exemplet med gruvan.

# Kapitel 6

# Nödvändiga och tillräckliga villkor.

Detta avsnitt följer boken [3].

## 6.1 Differentierbarhet -ett alternativ till J-derivatan.

### 6.1.1 Definition av linjär och kvadratisk funktional.

**Definition.** Funktionalen $L(y(x))$ kallas linjär om den den uppfyller följande villkor:

$$L(ay(x)) = aL(y(x)), \text{för alla konstanter } a,$$
$$L(y_1(x) + y_2(x)) = L(y_1(x)) + L(y_2(x)).$$

**Exempel.** Funktionalen

$$L(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \Big(p(x)y + q(x)y'\Big)dx$$

är en linjär funktional.

**Definition.** En funktional som uppfyller villkoren

$$B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$$

$$B(ax, z) = aB(x, z)$$

$$B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z)$$
$$B(x, az) = aB(x, z)$$

för alla tillåtna funktioner $x, y, z$ och alla konstanter $a$ kallas för en bilinjär funktional.

**Definition.** Om vi sätter $y = z$ i en bilinjär funktional så som nyss definierats så får vi ett uttryck som kallas för en kvadratisk funktional.

**Exempel.** Uttrycket
$$B(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} x(t)y(t)dt$$
är en bilinjär funktional om $x, y$ är kontinuerliga funktioner på intervallet $[x_1, x_2]$. Motsvarande kvadratiska form är

$$A(x) = B(x, x) = \int_{x_1}^{x_2} x^2(t)dt.$$

### 6.1.2 Definition av differentierbarhet för funktionaler.

**Definition.** Funktionalen J(y) är differentierbar om tillskottet

$$\Delta J = J(y(x) + h(x)) - J(y(x))$$

kan skrivas på formen
$$\Delta J = \varphi_1(h) + \epsilon\|h\|,$$
där $\varphi_1(h)$ är en linjär funktional och $\epsilon \to 0$ så snart $\|h\| \to 0$. $\varphi_1(h)$ kallas den första variationen av $J(y)$ och betecknas $\delta J$.

**Definition.** Funktionalen $J(y)$ är två gånger differentierbar om tillskottet

$$\Delta J = J(y(x) + h(x)) - J(y(x))$$

kan skrivas på formen

$$\Delta J = \varphi_1(h) + \varphi_2(h) + \epsilon\|h\|^2,$$

där $\varphi_1(h)$ är en linjär funktional, $\varphi_2(h)$ är en kvadratisk funktional, och där $\epsilon \to 0$ när $\|h\| \to 0$. Den kvadratiska funktionalen $\varphi_2(h)$ kallas den andra variationen av funktionalen $J(y)$ och betecknas $\delta^2 J$.

## 6.2 Ett första nödvändigt villkor.

**Sats.** Ett nödvändigt villkor för funktionalen $J(y)$ skall anta ett minimum för kurvan $y = \hat{y}$ är att

$$\delta^2 J(h) \geq 0 \tag{6.1}$$

för $y = \hat{y}$ och alla tillåtna $h$.

**Bevis.** Enligt definition har vi att

$$\Delta J(h) = \delta J(h) + \delta^2 J(h) + \varepsilon \|h\|^2, \tag{6.2}$$

där $\varepsilon \to 0$ när $\|h\| \to 0$. Enligt satsen (2.6) är $\delta J(h) = 0$ för $y = \hat{y}$ och alla tillåtna $h$ [1]. Följaktligen antar (6.2) formen

$$\Delta J(h) = \delta^2 J(h) + \varepsilon \|h\|^2 \tag{6.3}$$

för $y = \hat{y}$. För tillräckligt små $\|h\|$ kommer tecknet för $\Delta J(h)$ att vara detsamma som tecknet för $\delta^2 J(h)$. Antag nu att $\delta^2 J(h_0) < 0$ för någon tillåten $h_0$. Då har vi för alla $\alpha \neq 0$, oavsett hur små, att

$$\delta^2 J(\alpha h_0) = \alpha^2 \delta^2 J(h_0) < 0.$$

Följaktligen kan (6.3) göras negativ för godtyckligt små $\|h\|$. Denna motsägelse bevisar satsen.

## 6.3 Ett tillräckligt villkor.

**Definition.** En kvadratisk funktional $\varphi_2(h)$ är positivt definit om det finns en konstant $k > 0$ sådan att

$$\varphi_2(h) \geq k\|h\|^2$$

för alla h.

**Sats.** Ett tillräckligt villkor för att funktionalen $J(y)$ skall anta ett minimum för $y = \hat{y}$ är, förutsatt att den första variationen $\delta J(h) = 0$ för $y = \hat{y}$, är att dess andra variation $\delta^2 J(h)$ är positivt definit för $y = \hat{y}$.

**Bevis.** För $y = \hat{y}$ har vi $\delta J(h) = 0$ för alla tillåtna h, och sålunda är

$$\Delta J(h) = \delta^2 J(h) + \varepsilon \|h\|^2,$$

[1] I själva verket återstår att visa att $\delta J(h)$ så som definerad i avsnitt 2.2 är linjär.

där $\varepsilon \to 0$, när $\|h\| \to 0$. Dessutom gäller för $y = \hat{y}$ att

$$\delta^2 J(h) \geq k\|h\|^2$$

för någon konstant $k > 0$. Alltså finns något tillräckligt litet $\varepsilon_1$ sådant att $|\varepsilon| < \frac{1}{2}k$ då $\|h\| < \varepsilon_1$. Det följer att

$$\Delta J(h) = \delta^2 J(h) + \varepsilon\|h\|^2 > \frac{1}{2}k\|h\|^2 > 0$$

då $0 < \|h\| < \varepsilon_1$. Detta innebär precis att $J(y)$ har minimum för $y = \hat{y}$.

## 6.4 Legendres andra villkor.

### 6.4.1 Lemma.

Ett nödvändigt villkor för att den kvadratiska funktionalen

$$\delta^2 J(h) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx, \tag{6.4}$$

definierad för alla funktioner $h(x) \in \mathcal{D}_1(a,b)$,[2] sådana att $h(a) = h(b) = 0$ skall vara ickenegativ är att

$$P(x) \geq 0, \ (a \leq x \leq b). \tag{6.5}$$

**Bevis.** Antag att (6.5) inte gäller, antag till exempel att $P(x_0) = -2\beta$ $(\beta > 0)$ i någon punkt $x_0$ i $[a,b]$. Då existerar, eftersom $P(x)$ är kontinuerlig, ett $\alpha > 0$ sådant att $a \leq x_0 - \alpha, \ x_0 + \alpha \leq b$, och

$$P(x) < -\beta, \ (x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha).$$

Vi konstruerar nu en funktion $h(x) \in \mathcal{D}_1(a,b)$ sådan att funktionalen (6.4) är negativ. Låt

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(x-x_0)}{\alpha} & \text{för } x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Då har vi att

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx = \tag{6.7}$$

[2] Se appendix för definition.

$$\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} P\frac{\pi^2}{\alpha^2}\sin^2\frac{2\pi(x-x_0)}{\alpha}dx + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} Q\sin^4\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha}dx < -\frac{2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha \tag{6.8}$$

där

$$M = \max_{a\leq x\leq b}|Q(x)|. \tag{6.9}$$

För tillräckligt små $\alpha$ så antar högerledet av (6.8) negativa värden och följaktligen antar också (6.4) negativa värden med funktionen $h(x)$ så som definierad i (6.6). Därmed är lemmat visat.

### 6.4.2 Sats. (Legendre II)

Ett nödvändigt villkor för att funktionalen

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx,\ y(a) = A,\ y(b) = B$$

skall ha ett minimum längs kurvan $y = y(x)$ är att olikheten

$$F_{y'y'} \geq 0$$

(Legendre-villkoret) gäller i varje punkt av kurvan.

**Bevis.** Låt $F(x,y,y')$ ha partiella derivator upp till grad två med avseende på alla dess argument. Vi ser nu på en funktional av formen

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx, \tag{6.10}$$

definierad för kurvor $y = y(x)$ med ändpunkterna $y(a) = A,\ y(b) = B$.

Först ger vi funktionen $y(x)$ ett tillskott $h(x)$ med ändvillkoren $h(a) = h(b) = 0$. Därefter skriver vi, med hjälp av Taylors sats, tillskottet till $J(y)$ som

$$\Delta J(h) = J(y+h) - J(y) =$$

$$\int_a^b (F_y h + F_{y'}h')dx + \frac{1}{2}\int_a^b(\overline{F}_{yy}h^2 + 2\overline{F}_{yy'}hh'(x) + \overline{F}_{y'y'}h'^2)dx, \tag{6.11}$$

där överstrykningen $\overline{F}_{yy}$ betecknar att derivatan beräknats längs en mellanliggande kurva

$$\overline{F}_{yy} = F_{yy}(x, y+\theta h, y'+\theta h'),\ (0<\theta<1)$$

och på motsvarande sätt för $\overline{F}_{yy'}$ och $\overline{F}_{y'y'}$

Om vi ersätter $\overline{F}_{yy}, \overline{F}_{yy'}$ och $\overline{F}_{y'y'}$ med derivatorna $F_{yy}, F_{yy'}$ och $F_{y'y'}$ evaluerade i punkten $(x, y, y')$ så kan vi istället skriva (6.11) som

$$\Delta J(h) = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h')dx + \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} hh'(x) + F_{y'y'} h'^2)dx + \varepsilon, \tag{6.12}$$

där $\varepsilon$ kan skrivas som

$$\frac{1}{2}\int_a^b (\varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hh'(x) + \varepsilon_3 h'^2)dx.$$

Eftersom derivatorna $F_{yy}, F_{yy'}$ och $F_{y'y'}$ alla är kontinuerliga så följer att $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ när $\|h\|_1 \to 0$. [3] Första termen i högerledet av (6.12) är $\delta J(h)$ och den andra termen, som är kvadratisk i $h$, är den andra variationen $\delta^2 J(h)$. Alltså har vi för funktionalen (6.10) att

$$\delta^2 J(h) = \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} hh'(x) + F_{y'y'} h'^2)dx. \tag{6.13}$$

Vi vill nu skriva detta uttryck på en annan form. Partiell integration, tillsammans med ändvillkoren $h(a) = h(b) = 0$, ger att [4]

$$\int_a^b 2F_{yy'} hh'dx = -\int_a^b \Big(\frac{d}{dx} F_{yy'}\Big) h^2 dx$$

Med hjälp av denna likhet kan (6.13) skrivas som

$$\delta^2 J(h) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx, \tag{6.14}$$

där

$$P = P(x) = \frac{1}{2} F_{y'y'},\ Q = Q(x) = \frac{1}{2}\Big(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\Big).$$

I lemmat i stycke 6.4.1 visades att ett nödvändigt villkor för att en funktional på formen (6.14) skall vara icke-negativ är att $P(x) \geq 0$.
I sats (6.2) visades att ett nödvändigt villkor för att en funktional J(y) skall ha ett minimum är att dess andra variation $\delta^2 J(h)$ är icke-negativ. Därmed är satsen (Legendre II) visad.

[3] Detta med normen $\|h\|_1$ definierad som $\|h\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} \|h\| + \max_{a \leq x \leq b} \|h'\|$.

[4] Se på $\int_a^b fh'dx = [fh]_a^b - \int_a^b f'hdx$ , där $f = F_{yy'}h$.

# Kapitel 7

# Appendix.

## 7.1 Några klasser av funktioner.

1. $\mathcal{C}$ eller $\mathcal{C}(a,b)$ består av alla kontinuerliga funktioner definierade på det slutna intervallet $[a,b]$. Normen i $\mathcal{C}$ definieras som

$$\|y\|_0 = \max_{a\leq x\leq b} |y(x)|.$$

2. $\mathcal{C}^1$ eller $\mathcal{C}^1(a,b)$ består av alla funktioner definierade på det slutna intervallet $[a,b]$ som är kontinuerliga och har kontinuerlig förstaderivata. Normen definieras som

$$\|y\|_1 = \max_{a\leq x\leq b} |y(x)| + \max_{a\leq x\leq b} |y'(x)|.$$

3. $\mathcal{C}^n$ eller $\mathcal{C}^n(a,b)$ består av alla funktioner definierade på det slutna intervallet $[a,b]$ som är kontinuerliga och har kontinuerliga derivator upp till och med ordning n. Normen definieras som

$$\|y\|_n = \Sigma_{i=0}^{n} \max_{a\leq x\leq b} |y^i(x)|.$$

# Kapitel 8

# Referenser.

[1] Bliss, G. A. *Calculus of variations.* Open Court Publishing, Chicago, 1944
[2] Elsgolc, L.E. *Calculus of variations.* Pergamon Press, New York, 1961
[3] Gelfand and Fomin *Calculus of Variations.* Dover Publications, New York, 1963
[4] Kamien M.I. och Schwartz N.L. *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management. 2nd ed.* Elsevier, Amsterdam, 1992
[5] Weinstock, R. *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering.* Dover Publications, New York, 1952