EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Från korda till sinus

av

Louis Thomas

2006 - No 3

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

Från korda till sinus

Louis Thomas

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Paul Vaderlind

2006

Sammanfattning

Detta arbete avser att behandla varför och hur trigonometrin utvecklades från dess begynnelse kring ca 180 f. Kr. och fram till ca 1100 – talet e. Kr.
Upphovet till områdets utveckling, grundar sig i att grekerna sökte en metod med vars hjälp det var möjligt att skapa en modell, vilken beskrev de fenomen som iakttogs på himlavalvet, d.v.s. planeternas rörelsemönster. Det var alltså studier inom astronomi som banade vägen för trigonometrin.

De första trigonometriska tabellerna skapades av den grekiske astronomen Hipparchus (kring 150 f. Kr). Det som utgjorde själva grunden i hans analyser var kordans längd i en cirkel med förutbestämd radie. Ur detta lyckades han ställa upp en del trigonometriska samband. Ungefär två hundra år senare fortsatte den grekiske astronomen Ptolemaios dessa studier. Han hade för avsikt att förbättra de metoder som utarbetats av Hipparchus, vilket han åstadkom i sitt mest kända verk, Almagest.
Detta verk utgjorde basen till i stort sett alla astronomiska studier fram till 1500 – talet. Även i Almagest beskrivs en stor del av de satser som sedan kom att bli de trigonometriska samband vi idag känner till.

I samband med Alexander den Stores intåg i norra Indien kring 320 f.Kr, sprids den grekiska kulturen och då även den grekiska matematiken till landet. På sikt ledde detta till att även Indierna stiftade bekantskap med de tankar och idéer som grekerna senare utarbetat inom trigonometrin. Indierna tog grekernas idéer ett steg längre genom att införa begreppet sinus och även här skapades en hel del olika trigonometriska tabeller och algoritmer, vilka var tänkta som hjälpmedel främst inom astronomin.

Runt 700 – talet började i många muslimska länder en omfattande översättning av naturvetenskapliga verk och annan litteratur från främst Grekland och Indien till Arabiska. På så sätt kom de muslimska länderna i kontakt med det som utarbetats av föregångarna från Grekland och Indien. Intresset var även här stort för astronomi då studier inom området var nödvändigt för de religiösa ritualer som den nya religionen påbjöd. Detta innebar att trigonometrin utvecklades ytterligare och sambanden cosinus, tangens, cotangens m.fl. etablerades.

Genom buddismen spreds under 700 – talet, även de indiska studierna till Kina, men få indikationer pekar på att något större bidrag till trigonometrin kom därifrån. Dock utfördes studier inom astronomin, vilket vidare ledde till en del trigonometriska tabeller.

Abstract

This study is about how and why trigonometry developed from its beginning, about 180 B.C until about 1100 A.D.
The main reason for the development within this area was the Greeks interest of understanding the planetary motions that they observed. This implies that studies in astronomy, was the reason for the development of trigonometry.

The first trigonometric tables were created by the Greek astronomer Hipparchus around 150 B.C. The basis in his analyses was the length of a chord inscribed in a circle of fixed radius. Trough examinations of the chords length in combination with a central angle, he succeeded to establish some trigonometric relations. About two hundred years later the Greek astronomer Ptolemaios continued the work of Hipparchus and took it even further in his work, the Almagest. This work of Ptolemaios made the foundation of all astronomic studies until the sixteenth century. The Almagest also describes some of the statements that today are used as trigonometric relations.

Due to Alexander the Greats invasion of northern India, around 320 B.C, the Greek culture and then even Greek mathematics, found its way to India. Because of this, Indians came aware of trigonometry. The Indians continued the development and introduced the sine. They also created a large amount of trigonometric tables and algorithms, which would help to perform the tasks of the astronomers.

Around the eighths century a massive translation off Greek and Indian scientific material was translated by the Muslims into Arabic. Because of this, the Muslims came in contact with trigonometry and made some contributions on the field as they introduced relations as cosine, tangent and cotangent. Like in the previous countries, the main reason to study trigonometry was the importance off astronomy.

In the eighths century Buddhism spread the mathematical works from India to China, but few indications show that the Chinese contributed much in the development of trigonometry. However they made studies in astronomy, which led to some trigonometric tables.

Innehållsförteckning

1 Inledning

De primära trigonometriska funktionerna är sinus, cosinus och tangens. Cotangens, secant och cosecant kallas för sekundära trigonometriska funktioner.[1] Trigonometri betraktas som läran om de trigonometriska funktionerna och deras användning vid beräkning av sidor och vinklar i trianglar.[2]
Det grekiska ordet trigonometri betyder triangelmätning [3] och användes förstagången i tryckt form år 1595 av Bartholomaeus Pitiscus(1561 – 1613).[4]

Dessa funktioner har spelat en viktig roll inom den utveckling som genom årens lopp skett inom matematiken, t.ex den metod som Euler (1707 – 1783) utvecklade för att definiera funktionen e^Z för komplexa z, för vilken gäller att om $z = x + iy$, så är $e^z = e^x \cdot e^{iy}$, där $e^{iy} = cos\, y + i\, sin\, y$. Andra områden som kan nämnas är exempelvis betydelsen inom mekaniken.

I detta arbete ska vi ta en vandring från tiden före Kristus fram till medeltidens början och se hur de första trigonometriska tabellerna skapades och hur utvecklingen inom området fortskred.

1.1 Mål

Syftet med detta examensarbete är att undersöka varför och hur plan trigonometri utvecklats fram till medeltidens början.

1.2 Avgränsning

Då området är väldigt omfattande har jag varit tvungen att begränsa innehållet i detta arbete. Därför kommer endast plan trigonometri att behandlas, med undantaget att begreppet sfärisk trigonometri kommer att omnämnas i löpande text, där det anses nödvändigt.

De delar som kommer att behandlas är främst trigonometrins utveckling i Grekland under tidsperioden 150 f. Kr. till 180 e. Kr.
Trigonometrin som utvecklades i Indien under tidsperioden 400 e. Kr. till 1100 – talet, samt utvecklingen i de Islamska länderna från 600 – talet till 1100 – talet.
Ett kort stycke i uppsatsen behandlar även trigonometrin i Kina under samma tidsepok som nämns ovan.

---

[1] Robert A. Adams sid 48

[2] Nordsteds Uppslagsbok sid 1336

[3] A.P. Juschkewitsch sid 296

[4] Victor J. Katz sid 401 – 402, A.P. Juschkewitsch sid 296

1.3 Metod

Tillvägagångssättet baserar sig främst på studier av olika böcker inom ämnet matematikens historia och matematikens utveckling. Dessutom har olika böcker inom ämnet geometri och analys använts. En mindre del av materialet är hämtat från olika uppslagsverk av allmän karaktär, samt från Internet.

1.4 Disposition

Jag har valt att lägga upp arbetet med utgångspunkt från olika kulturella områden, vilka bidragit till trigonometrins utveckling. Detta medför att texten ej är helt kronologisk. Jag har dock försökt att hålla mig till kronologisk ordning inom varje kulturellt område som här behandlas. Vardera kapitel avslutas med en diskussion, vari mina egna kommentarer eller förtydliganden som härrör kapitlet i fråga tas upp. I Appendix A har jag valt att redovisa satser som används i arbetet. Detta för att på ett effektivt sätt kunna referera till dem vid behov. I Appendix B illustreras en del exempel.

1.5 Diskussion kapitel 1

I kapitel 1.1 har jag använt mig av begreppet medeltiden. Det bör noteras att i europeisk historia anges medeltiden som tidsrymden mellan ca. år 400 e.Kr. till ca. 1500 – talet.
I nordisk historia menas tidsepoken från mitten av 1000 – talet till ca. 1520 – talet.[5]
I detta arbete åsyftas den nordiska innebörden. Detta innebär alltså att mitt arbete slutar där den nordiska medeltiden börjar.

I kapitel 1.2 har jag använt begreppet ”Islamska länder”. Det som ligger till grund för mitt ordval, är att den islamska (muslimska), kulturen haft störst inflytande på de områden som åsyftas. Det ska ej tolkas som så, att alla personer som omnämns i det kapitel som beskriver trigonometrins utveckling i de islamska länderna var muslimer.

[5] Nordsteds Uppslagsbok sid 820

2 Förord

Astronomi har under lång tid studerats av människor från i stort sett alla kulturer. Med astronomins hjälp var det möjligt att skapa kalendrar, vilket medförde att det blev lättare att t.ex. sköta effektiva jordbruk, fastställa tidpunkten då olika religiösa ritualer skulle utföras och att planera vardagens sysslor som av en eller annan grund måste utföras.
Astronomin behandlar som bekant världsalltets uppbyggnad och mekanismer.
För att på ett framgångsrikt sätt studera området behövs någon form av matematisk modell. Det var jakten på sådana modeller som ledde fram till trigonometrins födelse.

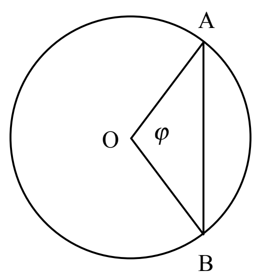
3 Terminologi

I detta kapitel presentera jag en del begrepp som kommer att användas i resten av arbetet.

3.1 Korda

Kordan är benämningen på den räta linje som sammanbinder två punkter på en cirkelbåge eller annan krokig linje.[6]

I figur 3.1 utgörs kordan av den räta linjen AB, där punkterna A och B ligger på cirkelbågen. Punkten O markerar cirkelns mittpunkt och vinkeln AOB betecknas φ.



Figur 3.1 visar kordan AB

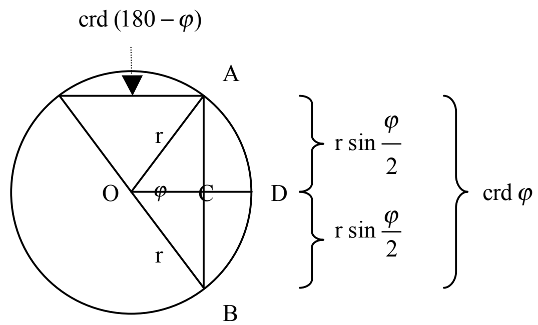
Med beteckningen $crd(\varphi^o)$ menas längden av kordan som svarar mot vinkeln φ^o.[7]
I figur 3.1 är då $crd(\varphi^o)$ längden av kordan AB.

---

[6] Nordsteds Uppslagsbok sid 675

[7] G.J. Toomer sid 17

3.2 Sambandet mellan korda och sinus



Figur 3.2 utgör underlag för att beskriva sambandet mellan korda och sinus

Låt vinkeln AOB i figur 3.2 vara φ.
Då utgör $\overline{AB}$ kordan för vinkeln φ, d.v.s. $crd(\varphi) = \overline{AB}$.
Låt $\overline{OA}$ och $\overline{OB}$ vara radien i cirkeln.
Låt C vara skärningspunkten mellan bisektrisen $\overline{OD}$ och kordan $\overline{AB}$.
$\overline{AC}$ bestäms då av sinus för vinkeln AOD, d.v.s. $\overline{AC} = r\,sin(\frac{\varphi}{2})$,
där r är radien .

Dubbleras vinkeln AOD så fås vinkeln AOB, d.v.s. φ.
Detta ger följande samband:

$$\overline{AB} = crd(\varphi) = \overline{AC} + \overline{CB} = 2r\,sin(\frac{\varphi}{2}) = d\,sin(\frac{\varphi}{2})$$

där d är diametern.

Vi har alltså att

$$crd(\varphi) = 2r\,sin(\frac{\varphi}{2}) \Leftrightarrow \frac{1}{2r}crd(\varphi) = sin(\frac{\varphi}{2}) \tag{3.1}$$

Låter vi cirkeln i figur 3.2 vara enhetscirkeln fås att

$$crd(\varphi) = 2\,sin(\frac{\varphi}{2}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}crd(\varphi) = sin(\frac{\varphi}{2}) \tag{3.2}$$

Vidare fås att

$$\frac{1}{2}crd(2\varphi) = sin(\varphi)\,. \tag{3.3}$$

$\overline{CD}$ utgörs av differensen mellan radien och cosinus för vinkeln och kallas versus sinus.
I första kvadranten av en cirkel definieras versus sinus som

$$(r - r(\cos\varphi)$$

vilket med enhetscirkeln ger

$$(1 - \cos(\varphi)) \tag{3.4}$$

och i andra kvadranten som

$$r + r\sin(\varphi - 90^o)$$

vilket med enhetscirkeln ger

$$1 + \sin(\varphi - 90^o).^{8} \tag{3.5}$$

Vidare framgår av figur 3.2, m.h.a. Pythagoras sats att

$$crd(180 - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (2r\sin(\frac{\varphi}{2}))^2} =$$

$$= 2r\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\varphi}{2})} =$$

$$= 2r\sqrt{\cos^2(\frac{\varphi}{2})} = 2r\cos(\frac{\varphi}{2}). \tag{3.6}$$

Låter vi radien vara lika med 1 har vi att

$$crd(180 - \varphi) = 2\cos(\frac{\varphi}{2}).^{9} \tag{3.7}$$

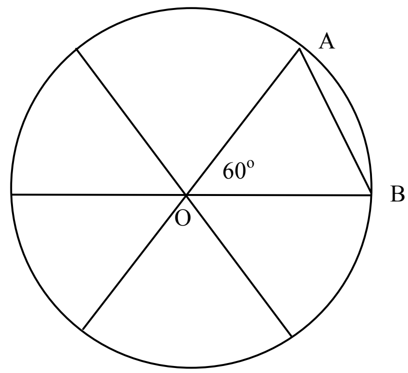
[8] A.P. Juschkewitsch sid 298

[9] Victor J. Katz sid 144

3.3 Grader minuter och sekunder

Den babyloniska perioden sträckte sig från ca 3000 f. Kr. till ca. 538 f. Kr.[10]

Det antas att det var här grunden lades till att dela in en cirkel i 360^o. Babylonierna delade in en cirkel i sex lika stora enheter. Varje enhet definierades av att kordans längd var lika lång som längden av cirkelns radie, se figur 3.3. Var och en av dessa sex enheter delades vidare in i ytterligare 60 delar eller grader. Totalt fås då $6 \cdot 60 = 360$ lika stora delar vilket ger 360^o.



Figur 3.3 visar cirkelns indelning i sex lika stora delar och där längden av radienrdien OA är lika lång som kordan AB. Vinkel AOB är 60^o.

En grad kan delas in i mindre enheter, vilka benämns minuter och sekunder. Det går 60 minuter på en grad och 60 sekunder på en minut.

[10] Nordstedst Uppslagsbok sid 85

3.4 Diskussion kapitel 3

Det bör nämnas att de beräkningar som här redovisas inte tar hänsyn till negativa resultat. Som exempel kan nämnas de rotutdragningar som görs i t.ex. ekvation (3.6). Orsaken till detta är att under den tidsepok som behandlas i detta arbete, så behandlades ej negativa tal. En negativ sträcka eller area ”existerade” inte i dåtidens begreppsvärld.

Uppgifterna om tidsepoken för den babyloniska kulturen varierar ganska kraftigt mellan olika litterära verk.

4 Grekland

Babylonier och Pythagorener hade gjort omfattanden studier av himlavalvet, men de saknade en matematisk modell som beskrev de fenomen de observerade på himlavalvet.
Den grekiske filosofen Platon (427 – 347 f. Kr.) ställde följande utmanande fråga till samtida matematiker och filosofer:
"Vilken regelbunden, perfekt likformig cirkulär rörelse skall tillåtas som hypotes, för att upprätthålla framträdandet av planeterna".
Med andra ord:
"Skapa en geometrisk modell som beskriver himlakropparnas rörelse, där kropparna rör sig med konstant cirkulär rörelse". [11]

Den vedertagna modellen över universums utseende på Platons tid grundade sig på den geocentriska världsbilden, d.v.s. att jorden var universums centrum.
Vidare antogs att jorden var omgiven av ett antal roterande skal eller sfärer av kristall.[12] Var och en av de kända sju himlakropparna (månen, solen, Merkurius, Venus, Mars, Jupiter och Saturnus), var fästa vid en egen sfär. Dessa roterade med konstant hastighet runt jorden.[13] De sju himlakropparna utgjordes av de så kallade Sju vandrarna[14] (på grekiska planeter). Den yttersta sfären utgjordes av fixstjärnsfären, varpå alla stjärnor var fästa.[15] Den utgjorde den bortre gränsen för universum och där upphörde universum att existera. Bortom den fanns ingenting, inte ens tomrum. Sfärerna utgjorde totalt ca. 50 stycken.[16]
Den geocentriska världsbilden delades dock inte av alla under denna tidsepok.
Ett exempel på detta är Aristarchus från Samos (310 – 230 f. Kr.). Han menade att jorden kretsar kring sin egen axel och att jorden dessutom kretsar kring solen.
Aristarchus sägs vara den första att introducera den heliocentriska världsbilden[17], d.v.s. att himlakropparna rör sig i banor kring solen.[18]

---

[11] Victor J. Katz sid 135 - 137

[12] www.home.swipnet.se/astronomisida/profiler.htm

[13] www.home.swpnet.se/arrack/hist/astrutv.html

[14] Victor J. Katz sid 135 -137

[15] http://130.238.79.99/ilmh/oskar/idehistv02.htm

[16] http://hem.passagen.se/hlesjo43/aristot.htm

[17] Nordsteds Uppslagsbok sid 61

[18] Nordsteds Uppslagsbok sid 501

4.1 Hipparchus

Hipparchus(190 – 125 f. Kr.) var en av forntidens största astronomer. Han lade grunden för den vetenskapliga astronomin och konstruerade den första stjärnkatalogen vilken innehöll drygt 1000 stjärnor.[19] Hans studier inom astronomi lade grunden till trigonometrin.[20] Han skapade en trigonometrisk tabell som täckte in kordans längd från $crd(7\frac{1}{2}^{o})$ till $crd(180^{o})$ i intervall av $7\frac{1^{o}}{2}$.

Hipparchus beräkningar av kordan baserades på en cirkel med radien *3438'*, (*3438* minuter). Orsaken till detta vara att han ville uttrycka radiens längd i samma enhet som cirkelns omkrets.

Uttrycks omkretsen i enheten minuter fås att cirkelns omkrets blir $360 \cdot 60 = 21600'$.

Han var medveten om att en cirkels omkrets kunde beräknas enligt $O = 2\pi r$, där O svarar mot cirkelns omkrets. Ur detta fås att

$r = \frac{21600'}{2\pi} \approx 3438'$ (avrundat till närmsta heltal).

Uttrycks radien i grader fås att

$r = \frac{360^{0}}{2\pi} \approx 57{,}3^{o}$, eller $57;18^{o}$ (57 grader och 18 sextiondelar, d.v.s. minuter).

Det antas att Hipparchus uttryckte längden av kordan i enheten grader, minuter och sekunder.

För att skapa tabellen som omnämns ovan, antas att han började med att bestämma värdet för $crd(60^{o})$.

Enligt figur 3.3 i kapitel 3, framgår att $crd(60^{o}) = \overline{AB}$, men $\overline{AB} = \overline{OA} = r$. Detta innebär att värdet för $crd(60^{o}) = 3438' = 57;18^{o}$. (4.1)

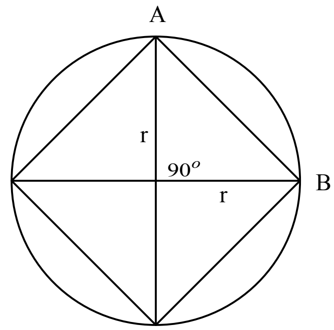
---

[19] Nordsteds Uppslagsbok sid 512

[20] J.F. Scott sid 42

4.1.1 Kordan för 90^o

För $crd(90^o)$ antas att han utgick från en kvadrat inskriven i en cirkel, se figur 4.1.



Figur 4.1 utgör underlag för att bestämma $crd(90^o)$.

Längden av kvadratens ena sida, AB, utgörs av $crd(90^o)$. Med hjälp av Pythagoras sats fås att

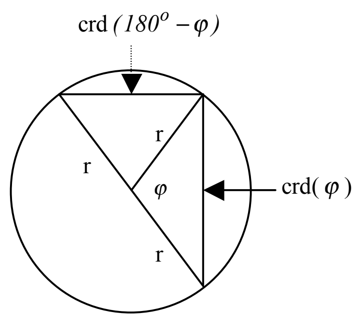
$$\overline{AB}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \text{ alltså att } \overline{AB} = r\sqrt{2}$$

vilket medför att

$$crd(90^o) = r\sqrt{2} = 3438'\sqrt{2} \approx 81;2^o . \qquad (4.2)$$

4.1.2 Kordan för $(180^o - \varphi)$

Vidare insåg Hipparchus att även $crd(180^o - \varphi)$ kunde bestämmas med hjälp av Pythagoras sats. Betrakta figur 4.2.



Figur 4.2 utgör underlag för att bestämma crd $(180^o - \varphi)$.

Vi får att

$$(2r)^2 = (crd(180^o - \varphi))^2 + (crd(\varphi))^2$$

vilket ger att

$$crd(180^o - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\varphi))^2} . \qquad (4.3)$$

4.1.3 Kordan för halva vinkeln

Han fortsatte sedan med att försöka få en formel vilken skulle göra det möjligt att uttrycka kordan för halva vinkeln.

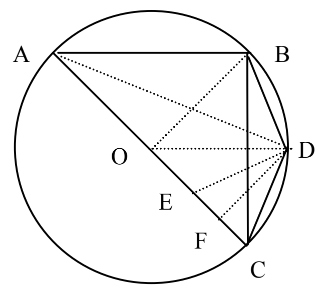


Fig. 4.3 utgör underlag för att bestämma $crd\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Låt $\varphi = \angle BOC$ i figur 4.3.
Låt $\overline{OD}$ vara en bisektris till $\angle BOC$.
Välj E på $\overline{AC}$ så att $\overline{AE} = \overline{AB}$.[21]
Låt $\overline{DF}$ vara vinkelrät mot $\overline{AC}$.
Vi har då att

$$\overline{AB} \text{ i } \Delta ABD = \overline{AE} \text{ i } \Delta ADE$$

och att

$$\overline{AD} \text{ i } \Delta ABD = \overline{AD} \text{ i } \Delta ADE .$$

Vidare är $\angle BAD = \angle DAE$ eftersom D är mittpunkt av cirkelbågen BC.
Enligt kriterium A.2(*ii*) i Appendix A, är då $\Delta ABD \cong \Delta ADE$, vilket vidare ger att

$$\overline{BD} = \overline{DE}.$$[22]

Eftersom D är mittpunkt på cirkelbågen BC gäller även att $\overline{DC} = \overline{DE}$.[23]
Vidare är $\overline{EF} = \overline{CF}$ ty $\overline{DF}$ är bisektris till $\overline{CE}$.
Enligt kriterium A.2(*i*) i Appendix A, är då $\Delta EDF \cong \Delta FDC$.[24]

Eftersom $\overline{DF}$ är vinkelrät mot $\overline{CE}$ så gäller att

$$\overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AE}) = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}(2r - crd(180^o - \varphi)). \quad (4.4)$$

Vidare är $\angle ADC = 90^o$ enligt kriterium A.3(*iii*) i Appendix A.

---

[21] Victor J. Katz sid 144 - 145

[22] James Gow sid 294 - 295

[23] Victor J. Katz sid 144 - 145

[24] James Gow sid 294 - 295

Eftersom $\overline{DF}$ är vinkelrät mot $\overline{FC}$ är även $\angle DFC = 90^o$.
Vidare är enligt figur 4.6, $\angle ACD = \angle DCF$.
Enligt kriterium A.1(*iii*) i Appendix A, är då ΔACD och ΔDCF likformiga.[25]

Vi har då att

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CF} \text{.}^{26} \tag{4.5}$$

Insätts (4.4) i (4.5) får vi att

$$\overline{CD}^2 = crd^2(\frac{\varphi}{2}) = 2r \cdot \frac{1}{2}(2r - crd(180^o - \varphi)) = r(2r - crd(180^o - \varphi)) \tag{4.6}$$

vilket ger att

$$crd(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(180^o - \varphi))}. \tag{4.7}$$

Med dagens notation av (4.6) fås

$$\overline{CD}^2 = (2r\sin(\frac{\varphi}{4}))^2 = r(2r - 2r\cos(\frac{\varphi}{2})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4r^2\sin^2(\frac{\varphi}{4}) = 2r^2(1 - \cos(\frac{\varphi}{2})). \tag{4.8}$$

Insätts $\varphi = 2\varphi$ i (4.8) och om vi låter radien var 1 fås

$$\sin^2(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1 - \cos\varphi}{2}$$

alltså formeln för halva vinkeln.
Utifrån dessa slutsatser var det möjligt för Hipparchus att beräkna $crd(180^o)$ till $crd(7\frac{1}{2}^o)$ med intervall på $7\frac{1}{2}^o$.
I Appendix B exempel B.1 illustreras tillvägagångssättet.

[25] Victor J. Katz sid 144 - 145

[26] James Gow sid 294 - 295

4.2 Ptolemaios

Även Claudius Ptolemaios(100 – 178 e. Kr.) gjorde omfattande studier av himlavalvet för att skapa en modell över dess beteende. Han var även framgångsrik på andra områden inom naturvetenskap. Ett verk som han skrev kallas ”Megesti syntaxis”, vilket kan översättas till ”Den största samlingen”. Detta verk omfattar 13 böcker vilka ger en detaljerad matematisk beskrivning av den grekiska modellen för universum. Verket ersatte alla tidigare texter inom området och hans teorier levde kvar ända fram till 1500 – talet. I stort sett alla böcker som behandlade astronomi, både i den islamska världen och i den kristna delen av världen baserades på hans skrifter.
Då verket översattes från grekiska till arabiska kom det att kallas Al-Megisti i de islamska länderna.
Då verket översattes från arabiska till Latin, fick det namnet Almagest.[27]
I Almagest används både plan och sfärisk trigonometri. En stor inspirationskälla för den plana trigonometrin var det som utarbetats av Hipparchus,[28] för den sfäriska hämtade Ptolemaios stora delar från Menelaus (ca. 100 f. Kr.) skrifter.[29]
Bl.a. beskrev Ptolemaios metoder vilka gjorde det möjligt att bestämma $crd(180^o)$ till $crd(\frac{1^o}{2})$ med en intervallängd av $\frac{1^o}{2}$.
Till skillnad från Hipparchus delade Ptolemaios in diametern i 120 lika stora delar. Längden av kordan kunde då uttryckas som antalet delar av diametern.
Enligt figur 3.3 är då kordan som svarar mot 60^o (sträckan AB), 60 delar av diameterns 120 delar.

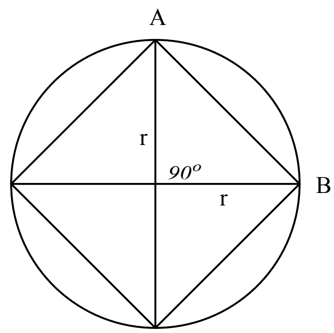
För att uttrycka kordans längd som svarar mot en given vinkel, kommer jag att använda notationen $crd(\varphi^o) = a;b,c^p$, där a är antalet hela delar av diametern, b är antal minuter av diametern och c är antal sekunder av diametern.
Symbolen ^{p} syftar här till delar av diametern (partes).

[27] Victor J. Katz sid 145 - 146

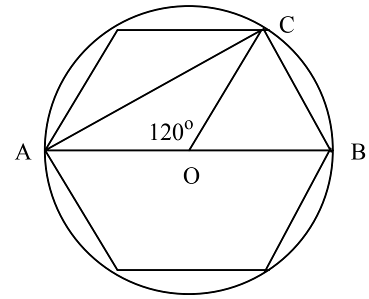
[28] James Gow sid 274 samt J.F. Scott sid 43

[29] Victor J. Katz sid 152 - 153

4.2.1 Kordan för 90^o och 120^o



Figur 4.4 utgör underlag för att bestämma $crd(90^o)$



Figur 4.5 utgör underlag för att bestämma $crd(120^o)$

För att beräkna kordan av 90^o antas att han använde sig av att längden av en kvadrats sida inskriven i en cirkel utgör den sökta kordan, se figur 4.4.
Med hjälp av Pythagoras sats att

$$crd(90^o) = \overline{AB} = \sqrt{60^2 + 60^2} \approx 84,8526 \approx 84;51,10^p .$$

Betraktar vi figur 4.5 har vi enligt kriterium A.3(*iii*) i Appendix A, att $\angle ACB = 90^o$ vilket med Pythagoras sats ger $crd(120^o)$.

$$crd(120^o) = \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2\overline{AO})^2 - (\overline{CB})^2} . \tag{4.9}$$

Vidare är $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = 60$ ty alla dessa sträckor utgörs av cirkelns radie.

Vidare är $\angle BOC = 60^o$. Vi har då att $\angle COB = \angle OCB = 60^o$ ty ΔCBO är likbent.

Vi får då att även $\overline{CB} = 60$.

Alltså är

$$crd(60^o) = \overline{CB} = 60;0,0^p . \tag{4.10}$$

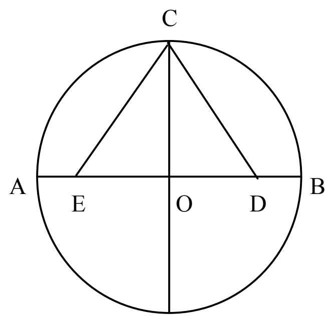
Insätts $\overline{CB}$ i ekvation (4.9) fås att

$$\overline{AC} = \sqrt{(2\cdot 60)^2 - (60)^2} = \sqrt{(2\cdot 60)^2 - (2\cdot 30)^2} = 2\sqrt{60^2 - 30^2} \approx 103,9224$$

Vilket ger att $crd(120^o) \approx 103;55,23^p$.

4.2.2 Kordan för 36^o och 72^o

För att beräkna kordan för 36^o och 72^o antas att han använde sig av satserna II-6, XIII-9 och XIII-10 i Euklides Elementa.
Nedan redogörs för hur han kan tänkas gått tillväga.



Figur 4.6 utgör underlag för att beräkna $cdr(36^o)$ och $cdr(72^o)$

Cirkeln i figur 4.6 har $\overline{AB}$ som diameter och dess centrum är O.

Låt den räta linjen $\overline{OC}$ vara ortogonal mot $\overline{AB}$.

Låt D vara mittpunkten av $\overline{OB}$.

Låt $\overline{DE}$ ha samma längd som $\overline{DC}$ och drag den räta linjen $\overline{EC}$.

Utitfrån detta ville Ptolemaios visa att:

$\overline{OE}$ är sidan i en liksidig tiohörning och att

$\overline{EC}$ är sidan i en liksidig femhörning.

Detta skulle innebära att:

$crd(36^o)$ är längden av $\overline{OE}$ samt att

$crd(72^o)$ är längden av $\overline{EC}$.

Enligt Elementa II-6 har vi att:

$$\overline{BE}\cdot\overline{EO}+\overline{OD}^2=\overline{DE}^2=\overline{DC}^2$$

med Pythagoras sats fås då att

$$\overline{BE}\cdot\overline{EO}+\overline{OD}^2=\overline{OC}^2+\overline{OD}^2$$

d.v.s.

$$\overline{BE}\cdot\overline{EO}=\overline{OC}^2=\overline{OB}^2 \tag{4.11}$$

Enligt Elementa VI-Def. 3, har $\overline{BE}$ nu delats i punkten O enligt det gyllene snittet, (förhållandet $\dfrac{\overline{EO}}{\overline{OB}}$ utgörs av det gyllene snittet).

Ur Elementa XIII-9 fås att sidan av en liksidig sexhörning och en liksidig tiohörning, vilka är inskrivna i samma cirkel, delar mötespunkterna av hela linjesegmentet i gyllene snittet. Det längre linjesegmentet utgörs av en sida i sexhörningen och det kortare linjesegmentet utgör sidan i en liksidig tiohörning.

Eftersom $\overline{OB}$ är radien i cirkeln så har vi enligt figur 3.3 att $\overline{OB}$ är längden av en liksidig sexhörning och då även det längre linjesegmentet. Detta innebär i sin tur att $\overline{EO}$ är sidan i en liksidig tiohörning.

Vidare fås ur Elementa XIII-10 att om en liksidig femhörning är inskriven i en cirkel så är kvadraten av sidan till femhörningen lika med summan av kvadraten av sexhörningens sida och kvadraten av tiohörningens sida, vilka alla är inskrivna i samma cirkel.

Förhållandet mellan sidorna av en femhörning, en sexhörning och en tiohörning kan då uttryckas som

$$(\textit{sidan av femhörningen})^2 \\ = (\textit{sidan av sexhörningen})^2 + (\textit{sidan av tiohörningen})^2 . \qquad (4.12)$$

Enligt Pythagoras sats fås från figur 4.6 att:

$$\overline{EC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{EO}^2 ,\ (\overline{OC} = \overline{OB} \text{ ty båda är radie}).$$

Eftersom detta villkor stämmer överens med ekvation (4.12) så är $\overline{EC}$ femhörningens sida och satsen i Elementa XIII-10 kan användas.

Sätter vi $\overline{OB} = r$ och $\overline{EO} = x$ har vi enligt (4.11) att

$$(x + r)x = r^2,$$

där den positiva roten för x är

$$x = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1). \tag{4.13}$$

samt att

$$\overline{EC}^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2(\sqrt{5} - 1)^2$$

vilket ger att

$$\overline{EC} = \frac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. \tag{4.14}$$

Ur ekvation (4.13) fås att

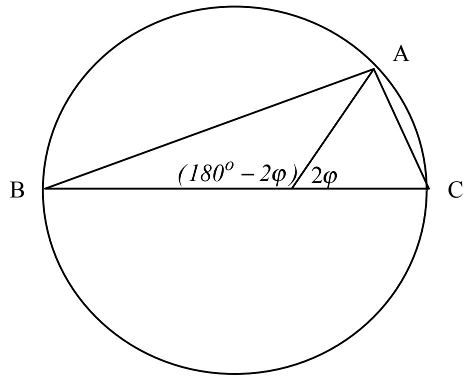
$$crd(36^o) = \frac{1}{2}60(\sqrt{5} - 1) \approx 37{,}083 \approx 37;4{,}55^p. \tag{4.15}$$

och ur ekvation (4.14) fås att

$$crd(72^o) = \frac{1}{2}60(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approx 70{,}536 \approx 70;32{,}3^p. \tag{4.16}$$

4.2.3 Trigonometriska ettan

Ptolemaios kom även fram till det samband som vi idag kallar trigonometriska ettan.



Figur 4.7 utgör underlag för trigonometriska ettan

Betrakta figur 4.7.

Låt $\overline{BC}$ vara diagonalen i en cirkel.

Låt $\overline{AC}$ vara kordan till vinkeln 2φ och $\overline{AB}$ kordan till vinkeln $(180^o - 2\varphi)$.

Enligt kriterium A.3(*iii*) i Appendix A är $\angle BAC = 90^o$.

Med Pythagoras sats fås då att

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (crd(180^o - 2\varphi))^2 + (crd(2\varphi))^2 . \qquad (4.17)$$

Vidare fås med ekvation (3.2) att

$$\frac{1}{2}crd(\varphi) = sin(\frac{\varphi}{2}) \Rightarrow \frac{1}{2}crd(180^o - 2\varphi) = sin(90^o - \varphi) = cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow crd(180^o - 2\varphi) = 2\,cos(\varphi) \qquad (4.18)$$

och med ekvation (3.3) att

$$crd(2\varphi) = 2\,sin(\varphi) . \qquad (4.19)$$

Låter vi radien vara 1, d.v.s. $\overline{BC} = 2$ och sätter in ekvation (4.18) och (4.19) i (4.17) får vi att

$$4 = (2\,cos(\varphi))^2 + (2\,sin(\varphi))^2$$

d.v.s.

$sin^2\,\varphi + cos^2\,\varphi = 1$ vilket vi känner igen som trigonometriska ettan.

Låt oss nu återgå till då radien är 60 och beräkningarna avser kordans längd. Med ekvation (4.17) kan vi t.ex. beräkna $cdr(108^o)$ ur värdet för $cdr(72^o)$.

Vi får att

$$crd(108^o)^2 + crd(72^o)^2 = 120^2$$

vilket ger att

$$crd(108^o)^2 = 120^2 - crd(72^o)^2 = 120^2 - (70{,}536)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow crd(108^o) \approx 97{,}0807 \approx 97;4{,}51^p\,.\text{[30]} \tag{4.20}$$

[30] J.F. Scott sid 46-48

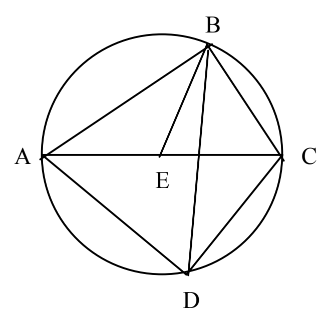
4.2.4 Ptolemaios sats

Ptolemaios nästa steg var att åstadkomma en formel så han kunde beräkna kordan ur differensen mellan två vinklar, d.v.s. $cdr(\alpha - \beta)$.

Detta skulle göra det möjligt att t.ex. beräkna $cdr(12^o)$ ur värdet för $cdr(72^o)$ och $cdr(60^o)$.

Ptolemaios sats lyder ” För en godtycklig fyrhörning vilken är inskriven i en cirkel, gäller att produkten av fyrhörningens diagonaler är lika med summan av produkterna av fyrhörningens motstående sidor”.
Tillämpas satsen på figur 4.8 gäller att

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$



Figur 4.8 Utgör underlag för Ptolemaios sats

Välj E på $\overline{AC}$ så att

$$\angle ABE = \angle DBC \,. \tag{4.21}$$

Då gäller att

$$\angle ABE + \angle EBD = \angle ABD$$

och att

$$\angle DBC + \angle EBD = \angle EBC$$

vilket med (4.21) ger att

$$\angle ABD = \angle EBC \,.$$

Vidare fås för cirkelbågen AB enligt kriterium A.3(*ii*) i Appendix A att

$$\angle BDA = \angle BCA \,.$$

Då fås att ΔABD och ΔEBC är likformiga enligt kriterium A.1(*iii*) i

Appendix A.

$$\because \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{EC} \tag{4.22}$$

enligt kriterium A.1(*i*) i Appendix A.

Vidare fås för cirkelbågen BC enligt kriterium A.3(*ii*) i Appendix A att

$$\angle BAC = \angle BDC .$$

Då fås att ΔABE och ΔDBC är likformiga enligt kriterium A.1(*iii*) i Appendix A.

$$\because \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \tag{4.23}$$

enligt kriterium A.1(*i*) i Appendix A.

Då motstående sidors produkt i fyrhörningen adderas fås från (4.22), (4.23) och figur 4.8 att

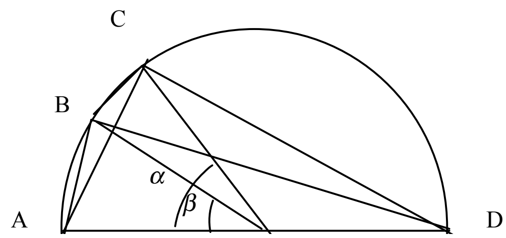
$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{BD} \cdot \overline{EC} = \overline{BD}(\overline{AE} + \overline{EC}) = \overline{BD} \cdot \overline{AC} \tag{4.24}$$

vilket visar satsen.[31]

[31] Victor J. Katz sid 148

4.2.5 Subtraktionssatsen för sinus, additionssatsen för cosinus

För att härleda en formel för uttrycket $crd(\alpha-\beta)$ använde han sig av föregående sats.



Figur 4.9 utgör underlag för differensformeln.

Enligt figur 4.9 har vi att

$$\overline{AC}=crd(\alpha)$$

$$\overline{AB}=crd(\beta)$$

$$\overline{BC}=crd(\alpha-\beta)$$

$$\overline{BD}=cdr(180-\beta)$$

$$\overline{CD}=cdr(180-\alpha)$$ [32]

$$\overline{AD}=120\,.$$

Insätts detta i (4.24) får vi

$$crd(\beta)\cdot crd(180-\alpha)+120crd(\alpha-\beta)=crd(180-\beta)\cdot crd(\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120crd(\alpha-\beta)=(crd(\alpha)\cdot crd(180-\beta))-(crd(\beta)\cdot crd(180-\alpha))\,.$$

Enligt ekvation (3.1) samt (3.7) är det detsamma som

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,.$$

Han hade alltså erhållit subtraktionssatsen för sinus.

På motsvarande sätt fås att

$$120crd(180^o-(\alpha+\beta))=crd(180^o-\alpha)\cdot crd(180^o-\beta)-crd(\alpha)\cdot crd(\beta)$$

---

[32] J.F. Scott sid 48 - 49

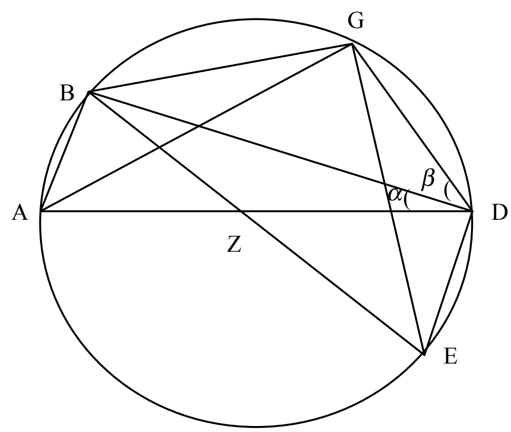
vilket med dagens notation är samma sak som

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

d.v.s. additionssatsen för cosinus. [33]

4.2.6 Additionssatsen för sinus

Även för att härleda en formel för uttrycket $crd(\alpha+\beta)$ använde han sig av Ptolemaios sats.



Figur 4.10 utgör underlag för additionsformeln.

Betrakta figur 4.10.
Låt diametern i cirkeln $ABGDE$ vara $\overline{AD}$.
Låt cirkelns mittpunkt vara Z.
Låt $\angle ADB=\alpha$ och $\angle BDG=\beta$.
Låt vinklarna α och β vara givna.
Då är

$$\overline{AB} = crd(\alpha) \text{ given} \tag{4.25}$$

och

$$\overline{BG} = crd(\beta) \text{ given.} \tag{4.26}$$

Utifrån detta ville Ptolemaios visa att $\overline{AG}=crd(\alpha+\beta)$ kunde bestämmas.

Drag diametern BZE.

Har då att $\overline{AD}=\overline{BE}=120$. (4.27)

Drag $\overline{BD},\overline{DG},\overline{GE}$ och $\overline{DE}$.

Enligt kriterium A.3(*iii*) i Appendix A är $\angle BGE=90^o$, vilket medför att $\overline{GE}$ kan bestämmas m.h.a. Pythagoras sats.
Vi får att

---

33 Victor J. Katz sid 148

$$\overline{GE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{BG}^2 \Rightarrow \overline{GE} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{BG}^2} = \sqrt{120^2 - (crd(\beta))^2} \ . \qquad (4.28)$$

Enligt kriterium A.3(*iii*) i Appendix A är $\angle ABD = 90^o$, vilket medför att $\overline{BD}$ kan bestämmas m.h.a. Pythagoras sats.
Vi får att

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{120^2 - (crd(\alpha))^2} \qquad (4.29)$$

Enligt kriterium A.3(*iii*) i Appendix A är $\angle BDE = 90^o$, vilket medför att $\overline{DE}$ kan fås m.h.a. Pythagoras sats.
Vi får att

$$\overline{DE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{BD}^2 = 120^2 - \left(\sqrt{120^2 - (crd(\alpha))^2}\right)^2 = (crd(\alpha))^2$$

alltså

$$\overline{DE} = crd(\alpha) = \overline{AB} \ . \qquad (4.30)$$

Vidare fås m.h.a. Ptolemaios sats att

$$\overline{BE} \cdot \overline{GD} + \overline{BG} \cdot \overline{DE} = \overline{BD} \cdot \overline{GE} \ . \qquad (4.31)$$

Dessutom är (4.31) ekvivalent med

$$\overline{AD} \cdot \overline{GD} + \overline{BG} \cdot \overline{AB} = \overline{BD} \cdot \overline{GE} \qquad (4.32)$$

ty $\overline{BE} = \overline{AD}$ enligt (4.27) och $\overline{DE} = \overline{AB}$ enligt (4.30).

Med Ptolemys sats fås även att

$$\overline{AB} \cdot \overline{GD} + \overline{BG} \cdot \overline{AD} = \overline{BD} \cdot \overline{AG} \qquad (4.33)$$

Löses ekvationen (4.32) m.h.a. (4.33) fås att

$$\overline{AG} = \frac{1}{\overline{AD}}\left(\overline{BG} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{GE}\right). \qquad (4.34)$$

Insätts (4.27), (4.26), (4.29), (4.25) och (4.28) i (4.34) fås att

$$\overline{AG} = crd(\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{1}{120}\left(crd(\beta)\sqrt{120^2 - (crd(\alpha))^2} + crd(\alpha)\sqrt{120^2 - (crd(\beta))^2}\right). \qquad (4.35)$$

[34]

Med ekvation (3.2) och att $\varphi = 2\alpha$ samt att $\theta = 2\beta$, fås att (4.35) kan uttryckas som

$$sin(\varphi + \theta) = sin\varphi\, cos\theta + cos\varphi\, sin\theta ,$$

d.v.s. dagens additionssats för sinus.

[34] G.J. Toomer sid 53 - 54

4.2.7 Kordan för 1^o och $1/2^o$

Utifrån de metoder Ptolemaios hittills förfogade över, kunde han bl.a. bestämma värdet av $crd(12^o)$, $crd(6^o)$, $crd(3^o)$, $crd(\frac{3}{2}^o)$ och $cdr(\frac{3}{4}^o)$, i Appendix B avsnitt B.3 visas hur ovanstående värden kan beräknas.

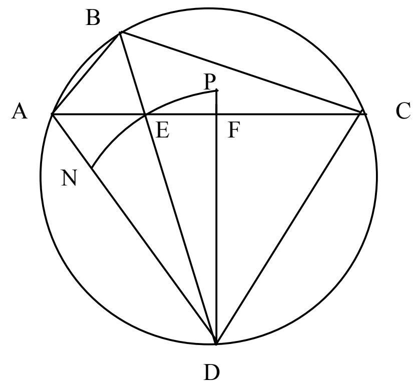
Han hade dock ännu ingen metod för att bestämma värdet av $crd(\frac{1}{2}^o)$.

För att åstadkomma detta försökte han först att hitta ett närmevärde till $crd(1^o)$ utifrån de värden han beräknat för $crd(\frac{3}{2}^o)$ och $cdr(\frac{3}{4}^o)$.

Därefter kunde han, med formeln för $crd(180^0 - \varphi)$ och formeln för $crd(\frac{\varphi}{2})$, bestämma värdet av $crd(\frac{1}{2}^o)$, (härledning av ovan angivna formler redovisas i avsnitt 4.1.2 resp. 4.1.3).

Nedan redogörs för hur Ptolemaios kan tänkas ha resonerat kring ovanstående problematik. Första redogörs för hur Ptolemaios kan ha gått tillväga för att bestämma $crd(1^o)$ och sedan hur han använde sig av detta resultat för att bestämma $crd(\frac{1}{2}^o)$.

Betrakta figur 4.11.



Figur 4.11 utgör underlag för att visa att förhållandet mellan den längre kordan BC, och den kortare kordan AB, är mindre än förhållandet mellan deras respektive båglängder. Denna slutsats används sedan för att bestämma *crd(1º).*

Låt ABCD vara en cirkel.

Drag korda $\overline{AB}$ och kordan $\overline{BC}$.

Låt $\overline{AB} < \overline{BC}$.

Ptolemaios ville visa att

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < \frac{arcBC}{arcAB}$$, där *arc* betyder båglängden.[35]

Drag kordan $\overline{AC}$.

Drag bisektrisen $\overline{BD}$ så att $\angle ABC$ bisektreras.

Låt $\overline{BD}$ skära linjen $\overline{AC}$ i punkten *E*.

Drag $\overline{AD}$ och $\overline{DC}$.

Drag $\overline{DF}$ så att $\overline{DF}$ är vinkelrät mot $\overline{AC}$ i punkten *F*, där punkten *F* är placrad på $\overline{AC}$.[36]

[35] G.J. Toomer sid 54

[36] James Gow sid 295

Vi har då att

$\angle ABD = \angle DBC$ vilka är randvinklar till $arcAD$ resp. till $arcDC$.

Eftersom randvinklarna är lika stora så är även båglängderna lika stora, vilket medför att

$$\overline{CD} = \overline{AD} \tag{4.36}$$

Euklides VI-3 säger att:

> Om en vinkel bisektreras av en rät linje vilken skär basen, så gäller att förhållandet mellan basens segment och övriga sidor i triangeln är lika.

Eftersom BE bisektrerar $\angle ABC$ i ΔABC, så gäller enligt Euklides VI-3 att

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \tag{4.37}$$

men

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < 1$, ty enligt villkor ovan är $\overline{AB} < \overline{BC}$.

Vi har då att

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} < 1 \Leftrightarrow \overline{AE} < \overline{CE}.\text{[37]} \tag{4.38}$$

Genom att betrakta ΔAFD och ΔDEF i figur 4.11 framgår att $\overline{AD} > \overline{DE} > \overline{DF}$.

Drag den räta linjen $\overline{DP}$ genom punkten *F*.

Låt $\overline{DE}$ vara lika lång som $\overline{DP}$.

Eftersom $\overline{DE} > \overline{DF}$ så hamnar punkten *P* rakt ovanför punkten *F*.

Låt vidare punkten *N* ligga på $\overline{AD}$ och låt $\overline{DN}$ vara lika lång som $\overline{DE}$.

Drag cirkelbågen *NEP* och låt *D* vara dess mittpunkt.

Låt *D* vara mittpunkten i cirkeln *NEP* med radie *DE*.

Vi har då att $\overline{DE} = \overline{DN} = \overline{DP}$ ty de utgör radien i cirkel *NEP*.[38]

---

[37] G.J. Toomer sid 54

[38] James Gow sid 295

Vidare är

$$\frac{arean\Delta DEF}{arean\Delta DEA} < \frac{sektor\, areanDEP}{sektor\, areanDEN} \tag{4.39}$$

ty arean av ΔDEF < arean av sektor *DEP*

och arean av ΔDEA > arean av sektor *DEN.*

Enligt Euklides VI-I gäller att:

> I trianglar med samma höjd är förhållandet mellan ena triangelns area och den andra triangelns area, lika med förhållandet av basen i den första triangeln och basen i den andra triangeln.

$\overline{DF}$ utgör höjden i ΔDEF och i ΔDEA.

$\overline{EF}$ utgör basen i ΔDEF och $\overline{EA}$ utgör basen i ΔDEA

Arean för $\Delta DEF = \frac{1}{2}\overline{EF}\cdot\overline{DF}$ och arean för $\Delta DEA = \frac{1}{2}\overline{EA}\cdot\overline{DF}$.

Enligt Euklides VI-I får vi då att:

$$\frac{arean\Delta DEF}{arean\Delta DEA} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EA}}\,. \tag{4.40}$$

På motsvarande sätt fås att:

Arean för sektor $DEP = \frac{1}{2}\angle FDE\cdot\overline{DP}^2$ och arean för sektor $DEN = \frac{1}{2}\angle EDA\cdot\overline{DP}^2$

vilket ger att:

$$\frac{arean\, sektor\; DEP}{arean\, sektor\; DEN} = \frac{\angle FDE}{\angle EDA} \tag{4.41}$$

Enligt (4.39), (4.40) och (4.41) har vi nu att:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{EA}} < \frac{\angle FDE}{\angle EDA} \tag{4.42}$$

Genom addition av förhållanden, se A.4(*i*) i Appendix A,
fås från (4.42) att:

$$\frac{\overline{EF}+\overline{EA}}{\overline{EA}} < \frac{\angle FDE+\angle EDA}{\angle EDA} \tag{4.43}$$

men

$$EF + EA = FA \text{ och } \angle FDE + \angle EDA = \angle FDA \tag{4.44}$$

Insätts (4.44) i (4.43) fås

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{EA}} < \frac{\angle FDA}{\angle EDA} \tag{4.45}$$

M.h.a. (4.36) fås med kriterium A.3(*iv*) i Appendix A att

$$\angle ACD = \angle CAD$$

Detta innebär att ΔACD är likbent med lika stora basvinklar,
vilket medför att $\overline{DF}$ är en bisektris till $\overline{AC}$.

Med (4.45) fås då att

$$\frac{2\overline{FA}}{\overline{EA}} < \frac{2\angle FDA}{\angle EDA} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{EA}} < \frac{\angle CDA}{\angle EDA} \tag{4.46}$$

Genom subtraktion av förhållanden, se A.4(*ii*) i Appendix A,
fås från (4.46)

$$\frac{\overline{CA} - \overline{EA}}{\overline{EA}} < \frac{\angle CDA - \angle EDA}{\angle EDA} \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} < \frac{\angle CDE}{\angle EDA} \tag{4.47}$$

ty $\overline{CE} = \overline{CA} - \overline{EA}$ enligt figur.

Enligt (4.37) gäller även att

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \tag{4.48}$$

Dessutom är förhållandet mellan cirkelbågar och de vinklar som ger upphov till respektive cirkelbåge lika om de härrör samma cirkel.
Detta ger att

$$\frac{\angle CDB}{\angle BDA} = \frac{arc\, BC}{arc\, BA} \tag{4.49}$$

Vidare är enligt figur 4.11

$$\angle CDE = \angle CDB \text{ och } \angle EDA = \angle BDA \tag{4.50}$$

Insätts (4.48) och (4.50) i (4.47) fås

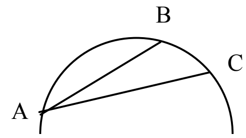
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} < \frac{\angle CDB}{\angle BDA} \tag{4.51}$$

Insätts (4.49) i (4.51) fås

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < \frac{arc\, BC}{arc\, AB} \tag{4.52}$$

vilket var det Ptolemaios ville visa.

Betrakta nu figur 4.12.



Figur 4.12 utgör underlag för att bestämma *crd(1°)*

Låt $\overline{AB} < \overline{AC}$

Låt $crd(\frac{3^o}{4}) = \overline{AB}$ och $crd(1^o) = \overline{AC}$.

Enligt (4.49) har vi nu att

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{arc\ AC}{arc\ AB} \Leftrightarrow arc\ AC = \frac{4}{3} arc\ AB\,.$$

Men enligt (4.52) har vi att (med beteckning enligt figur 4.12)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} < \frac{arc\ AC}{arc\ BA} \Leftrightarrow \overline{AC} < \frac{arc\ AC}{arc\ BA} \cdot \overline{BA}$$

vilket ger att

$$\overline{AC} < \frac{4}{3} \cdot \overline{BA}\,. \tag{4.53}$$

Insätts värdet $crd(\frac{3^o}{4}) = 0;47,8^p$ (enligt B.3 i Appendix B), i (4.53) fås att

$$\overline{AC} < \frac{4}{3} \cdot 0;47,8^p = 1;2,50^p\,.$$

Låt nu $crd(1^o) = \overline{AB}$ och $crd(1\frac{1}{2}) = \overline{AC}$ i figur 4.12.

Vi får då enligt samma metod som ovan att

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1} = \frac{arc\,\overline{AC}}{arc\,\overline{AB}} \Leftrightarrow arc\,\overline{AC} = \frac{3}{2} \cdot arc\,\overline{AB}$$

och att

$$\overline{AC} < \frac{3}{2}\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} > \frac{2}{3}\overline{AC}. \tag{4.54}$$

Insätts värdet $crd(1\frac{1}{2}) = 1;34,15^p$ (enligt B.3 i Appendix B), i (4.54) fås att

$$\overline{AB} > \frac{2}{3} \cdot 1;34,15^p = 1;2,50^p$$

Vi har alltså att $crd(1^o)$ är både större och mindre än $1;2,50^p$.
Ptolemaios approximerade därför värdet av $crd(1^o)$ till $1;2,50^p$.

Låter vi $\varphi = 1^o$ fås med ekvation (4.3) att

$$crd(180 - \varphi) = crd(179^o) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(1^o))^2}$$

och med ekvation (4.7) att

$$crd(\frac{\varphi^o}{2}) = crd(\frac{1^o}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(179^o))} \approx 0;31,25^p,$$

där $r = 60$ ty radien.[39]

[39] G.J. Toomer sid 55 - 56

4.3 Diskussion kapitel 4

Tyvärr har alla ursprungliga handlingar som skapats av Hipparchus gått förlorade.[40]

I kapitel 4.2.1 är beräkning av $crd(90^o)$ med, trots att det redan beskrivits i kapitel 4.1.1. Orsaken till detta är att visa att värdet för $crd(\varphi)$ blir olika beroende på vilken längd som används för radien.

Ptolemaios beskrev i stort sett alltid en algoritm för olika beräkningar i Almagest. Dessa algoritmer kan översättas till moderna trigonometriska formler.[41]
Det bör dock noteras att då Ptolemaios metoder jämförs med dagens, måste man tänka på att hans korda tabeller baserar sig på en radie av 60.
Detta medför att de tabellerade värdena måste justeras till den korrekta radiens längd, då värdena används i praktiken.[42]
Exempel B.2 i Appendix B illustrerar detta.

Man skulle tro att efterföljare snabbt skulle anamma de metoder som bl.a. Hipparchus och Ptolemaios utarbetat, inte bara för studier inom astronomin, utan även i samband med andra beräkningar. Dock visar historiska dokument som finns bevarade från grekernas tid att efterkommande generation inte använde sig av de nya metoderna. De använde sig istället av euklidisk geometri.[43]

---

[40] Victor J. Katz sid 145

[41] Victor J. Katz sid 152

[42] Victor J. Katz sid 149

[43] Victor J. Katz sid 157

5 Indien

Tidpunkten då ett skriftspråk utvecklades i Indien är mycket oklart, men det anses säkert att det fanns flera hundra år f. Kr.[44]

Även efter det att skriftspråket utvecklats överfördes traditioner muntligt från generation till generation. Dessa traditioner var i huvudsak av religiöst ursprung, men även andra kulturella läror överfördes på detta sätt, så som t.ex. astronomi och matematik. För att lättare kunna memorera de muntliga traditionerna berättades de i poetisk versform. Dessa verser kallas Stanzas.

Trots att många av verserna i dagsläget är nedskrivna, så är de svåra att tolka. Detta medför att det är svårt att få en klar bild över den utveckling som ägde rum i Indien inom bl.a. matematiken.

Kunskapen om astronomi var en av de faktorer som gav härskarna i Indien deras makt, eftersom de med dess hjälp påstods kunna se in i framtiden och därigenom kunna påverka olika beslut. De som hade till uppgift att bevara kunskaperna var oftast präster. Även de stärkte sina positioner eftersom makthavarna använde sig av dem som rådgivare. Prästerna skulle även utveckla noggranna kalendrar vilka användes inom t.ex. jordbruk, navigation och för att kunna bestämma tidpunkten för olika religiösa ceremonier.

År 327 f. Kr. gör Alexander den Store sitt intåg i norra Indien. I samband med det sprids delar av den grekiska kulturen och så även den grekiska matematiken inom landet.

5.1 Trigonometrin i medeltidens Indien

Under de kommande århundraden efter Alexander den Stores intåg i Indien, studerades de grekiska verk som bl.a. behandlade matematik. Detta ledde till att indierna så småningom kom i kontakt med trigonometrin och vidareutvecklade dessa idéer. Precis som i grekland, var det även här intresset för astronomi som var den drivande kraften bakom trigonometrin.

Istället för att beräkna kordans längd för en given vinkel, övergick indierna till att uttrycka halva kordans längd av dubbla vinkeln (vilket jag fortsättningsvis kommer att benämna sinus).[45] Detta medförde att man fick ett uttryck som gav sambandet mellan en vinkel och en sida i en rätvinklig triangel,[46] se även figur 3.2.

Paitamahasiddhanta är ett verk som skrevs omkring år 400. Det betraktas som det tidigaste indiska verk med trigonometriskt innehåll. Vem som författat detta verk är dock i dagsläget okänt.[47]

---

[44] http://sv.wikipedia.org/wiki/Skrivkonsten_i_Indien

[45] Victor J. Katz sid 210 - 212

[46] A.P. Juschkewitsch sid 163

[47] Victor J. Katz sid 212 - 213

5.1.1 Aryabhata

Ett verk, vilket skrevs av Aryabhata år 499, heter Aryabhatiya. Det är den tidigaste skrift från Indien som behandlar trigonometri, där man vet vem författaren var.

Boken består av fyra delar och 123 Stanzas. Stanza 12 anger en metod med vars hjälp man kan konstruera en sinustabell (eftersom det är en Stanza så är den alltså skriven på versform). Med hjälp av den metod som anges i versen är det möjligt att konstruera en sinustabell som sträcker sig från $3\frac{3}{4}^o$ till 90^o i intervall om $3\frac{3}{4}^o$,

(se kommentar i avsnitt 5.2 till varför initialvärdet var $3\frac{3}{4}^o$).

Tillvägagångssättet baseras på en cirkel med radien $3438'$,[48] alltså samma längd som Hipparchus använde.

Med sinus menade Aryabhata delar av radien. Så är t.ex

$sin(60^o) = \frac{1}{2}crd(120^o) = 2977$ minuter, eller 2977 delar av de 3438 delarna radien är indelad i.

Detta ska då tolkas som att $sin(60^o) = \frac{2977'}{3438'}$.[49]

Själva uträkningarna beskrivs inte i Aryabhatiya,[50] men i Victor J. Katz bok sidan 212 finns en algoritm angiven, vilken beskriver det förfarande som anges i Stanza 12.

Nedan redogörs för den algoritmen.

Låt S_1 motsvaras av längden på den båge som uppstår om medelpunktsvinkeln är $3\frac{3}{4}^o$ i en cirkel vars radie är $3438'$,där $3\frac{3}{4}^o = 3^o 45' = 225'$.

---

48 Juschkewitsch sid 165

49 J.F. Scott sid 50

50 A.P. Juschkewitsch sid 165

Vi har då att

$S_1 = 3^o 45' = 255'$ vilket är det första värde för sinus som anges i versen.

Låt det andra värdet som anges i versen vara S_2 d.v.s. sinus för $7^o 30'$, (eftersom intervallen är $3\frac{3}{4}^o$).

S_2 kan då beräknas enligt följande:

Subtrahera S_1 från $S_1 \Rightarrow 225 - 225 = 0$

Dividera S_1 med $S_1 \Rightarrow \frac{225}{225} = 1$

Subtrahera dessa värden från *225*, d.v.s. från $S_1 \Rightarrow 225 - (0 + 1) = 224 = \Delta_2$

Addera S_1 och $\Delta_2 \Rightarrow 225 + 224 = 449 = S_2$

Låt det tredje värdet som anges i versen vara S_3 d.v.s. sinus för $11^o 15'$.

S_3 kan då beräknas enligt följande:

Subtrahera Δ_2 från $S_1 \Rightarrow 225 - 224 = 1$

Dividera S_2 med $S_1 \Rightarrow \frac{449}{225} = 2$ (avrundat till närmsta heltal).

Subtrahera dessa värden från, d.v.s. från $S_1 \Rightarrow 225 - (1 + 2) = 222 = \Delta_3$

Addera S_2 och $\Delta_3 \Rightarrow 449 + 222 = 671 = S_3$

De värden som ovan angivits som Δ_n där $n=2, 3, ...$ kallas sinusdifferenser och anger differensen mellan ett sinusvärde och det efterföljande sinusvärdet.

Ovanstående tillvägagångssätt kan uttryckas som

$$S_{n+1} = S_n + \Delta_{n-1} - \frac{S_n}{225} \tag{5.1}$$

där

$$\Delta_{n-1} = S_n - S_{n-1} \tag{5.2}$$

Insätts (5.2) i (5.1) fås att

$$S_{n+1} = S_n + S_n - S_{n-1} - \frac{S_n}{225} \tag{5.3}$$

Ekvation (5.3) anger då det nästkommande sinusvärdet, vilket alltså kan beräknas m.h.a. de föregående.

Tillämpas (5.3) fås för
n=1

$$S_2 = 225 + 225 - 0 - \frac{225}{225} = 449$$ d.v.s. sinus enligt Stanza 12 för $7^o 30'$.

n=2

$$S_3 = 449 + 449 - 225 - \frac{449}{225} \approx 671$$

n=3

$$S_4 = 671 + 671 - 449 - \frac{671}{225} \approx 890$$

Generellt gäller att *n*:te sinusvärdet, alltså S_n (sinus av $n \times 3^o 45'$) kan beräknas enligt

$$S_n = S_{n-1} + (S_1 - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}}{S_1}) . \tag{5.4}$$ [51]

Enligt (5.4) kan vi då t.ex. beräkna värdet för *n=5* enligt nedan:

$$S_5 = 890 + \left(225 - \frac{225 + 449 + 671 + 890}{225} \right) \approx 1105$$

Nedan anges en tabell som kan ställas upp genom att använda sig av Aryabhatas metod.

[51] Victor J. Katz sid 213

Vi kan med hjälp av ovanstående algoritm ställa upp följande tabell [52]

Vinkeln i grader och minuter samt hela minuter	Sinus enligt Stanza 12	Sinus/3438’ Avrundat till 4 decimaler	Sinus differensen Δ_n	Sinus värde enligt miniräknare
$3^{o}45' = 225'$	225	0.0654	225 – 0 = 225	0.0654
$7^{o}30' = 450'$	449	0.1306	449 – 225 = 224	0.1305
$11^{o}15' = 675'$	671	0.1952	671 – 449 = 222	0.1951
$15^{o} = 900'$	890	0.2589	890 – 671 = 219	0.2588
$18^{0}45' = 1125'$	1105	0.3214	1105 – 890 = 215	0.3214
$22^{0}30' = 1350'$	1315	0.3825	1315 – 1105 = 210	0.3827
$26^{0}15' = 1575'$	1520	0.4421	1520 – 1315 = 205	0.4423
$30^{o} = 1800'$	1719	0.5	1719 – 1520 = 199	0.5
$33^{0}45' = 2025'$	1910	0.5556	1910 – 1719 = 191	0.5556
$37^{0}30' = 2250'$	2093	0.6088	2093 – 1910 = 183	0.6088
$41^{0}15' = 2475'$	2267	0.6594	2267 – 2093 = 174	0.6593
$45^{0} = 2700'$	2431	0.7071	2431 – 2267 = 164	0.7071
$48^{0}45' = 2925'$	2558	0.7519	2558 – 2431 = 154	0.7518
$52^{0}30' = 3150'$	2728	0.7935	2728 – 2558 = 143	0.7934
$56^{0}15' = 3375'$	2859	0.8316	2859 – 2728 = 131	0.8315
$60^{0} = 3600'$	2978	0.8662	2978 – 2859 = 119	0.8660
$63^{0}45' = 3825'$	3084	0.8970	3084 – 2978 = 106	0.8969
$67^{0}30' = 4050'$	3177	0.9241	3177 – 3084 = 93	0.9239
$71^{0}15' = 4275'$	3256	0.9471	3256 – 3177 = 79	0.9469
$75^{0} = 4500'$	3321	0.9660	3321 – 3256 = 65	0.9659
$78^{0}45' = 4725'$	3372	0.9808	3372 – 3321 = 51	0.9808
$82^{0}30' = 4950'$	3409	0.9916	3409 – 3372 = 37	0.9914
$86^{0}15' = 5175'$	3431	0.9980	3431 – 3409 = 22	0.9979
$90^{0} = 5400'$	3438	1.0	3438 – 3431 = 7	1.0

I Stanza 10 återges de 24 sinusdifferenserna vilka är angivna i ovanstående tabell.

En del av dessa värden avviker dock något från de värden som fås ifall algoritmen ovan följs strikt. Dessa avvikelser kan bero på att bråktalen som fås vid beräkningarna fördelades olika mellan de framräknade sinusvärdena vid olika tillfällen.[53]

[52] A.P. Juschkewitsch sid 166

[53] Victor J. Katz sid 213

5.1.2 Varahamihira

Varahamihira levde under 500 – talet. Hans mest kända verk är Pancasiddhantika, De fem astronomiska verken.[54] Han konstruerade liknande tabeller som den som beskrivs i Aryabhatiya, men i tillägg hade han även med värdena för cosinus.[55] Han beskrev även sambanden

$$sin(\varphi) = cos(90^o - \varphi),$$

$$sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi) = 1$$

och

$$sin^2(\varphi) = \frac{1 - cos(2\varphi)}{2}\ .$$[56]

[54] www.iranchamber.com

[55] Victor J. Katz sid 214

[56] www-groups.dcs.st-and.ac.uk

5.1.3 Brahmagupta

Före 1100 – talet förekommer inga indiska texter innehållande sinustabeller med intervall tätare än $3\frac{3}{4}^o$. Indierna utvecklade istället approximationstekniker för att beräkna dessa värden.

Under 600 – talet utvecklade Brahmagupta en interpolationsmetod, vilken bygger på de värden som finns tabulerade i Aryabhatas Stanza 10.
I moderna notation kan den beskrivas med hjälp av nedanstående algoritm.

Låt x_i vara den *i*:te vinkeln som ligger till grund för det värde som återges i Stanza 10.

Låt φ vara en vinkel som inte är en multipel av $3\frac{3}{4}^o$.

Låt D_i vara den *i*:te sinusdifferensen som anges i Aryabhatas tabell.

Låt $h = 3\frac{3}{4}^o$, vilket då motsvarar intervallängden i Aryabhatas tabell.

Med Brahmaguptas approximationsmetod fås då att

$$sin(x_i + \varphi) = sin(x_i) + \frac{\varphi}{2h}(D_i + D_{i+1}) - \frac{\varphi^2}{2h^2}(D_i - D_{i+1}). \tag{5.2}$$

För att t.ex. beräkna $sin(20^o)$ lägger vi märke till att $20 = 18\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}$ där $18\frac{3}{4} = x_5$.

Då fås att

$$sin(20^o) = sin(18\frac{3}{4}^o + 1\frac{1}{4}^o) =$$

$$= sin(18\frac{3}{4}^o) + \frac{1\frac{1}{4}}{2(3\frac{3}{4})}(215 + 210) - \frac{(1\frac{1}{4})^2}{2(3\frac{3}{4})^2}(215 - 210)$$

$$= 1105 + \frac{1}{6}(425) - \frac{1}{18}(5) = 1176 \tag{5.3}$$

där en cirkel med radien $3438'$ använts.[57]

[57] Victor J. Katz sid 213 - 214

5.1.4 Bhaskara II

Bhaskara II var verksam under 1100-talet.
Han verkar ha betraktat sinus som kvoten mellan en cirkelbåges längd och dess radie. I ett av hans verk skriver han att $sin(1^o) = \frac{10}{573}$.

Antagligen kom han fram till detta enligt följande:

En cirkels omkrets uttryckt i grader är 360^o, vilket motsvarar $360 \cdot 60 = 21600'$ minuter.

Även längden av cirkelns radie uttryckte han i minuter, vilket då enligt tidigare blir $3438'$.

Uttrycker vi cirkelbågens längd som $b = \frac{\varphi}{360} \cdot O$, där b är bågens längd, φ är vinkeln i grader och O är cirkelns omkrets så fås att

$$b = \frac{1}{360} \cdot 21600.$$

Betraktas sinus enligt ovan som en kvot mellan cirkelbågens längd och radien fås

$$sin(1^o) = \frac{b}{r} = \frac{1}{360} \cdot \frac{21600}{3438} = \frac{10}{573}$$, där r är cirkelns radie.[58]

---

[58] J.F. Scott sid 51

5.2 Diskussion kapitel 5

Eftersom Hipparchus utgick från en cirkel med radien *3438´*, vilket även de indiska matematikerna gjorde, (enligt Katz), så hävdar Katz att detta är ett tungt argument för att indierna influerats av Hipparchus snarare än av Ptolemaios.

Enligt Juschkewitchs bok ”Mathematik im Mittelalter” sid 166, så är anledningen till att de indiska tabellerna har initialvärdet $3\frac{3}{4}^{o}$, att sinus för mindre vinklar approximerades med båglängden för den aktuella vinkeln, eftersom det ligger inom ramen för mät noggrannheten.
Detta kan mycket väl vara riktigt, men min personliga tanke är dock att orsaken var att de utgick från Hipparchus ideer.
Eftersom sambandet mellan $crd(\varphi)$ och sinus är att $crd(\varphi) = 2r\,sin(\frac{\varphi}{2})$,
och hälften av $7\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4}$, så verkar det rimligt att det var Hipparchus idèer som låg till grund för detta. Dock har jag inte hittat några belägg för det, utan det är endast vad jag tror.

Enligt Katz utgick Brahmagupta från en cirkel med radien *3438´* vid sina beräkningar, men enligt J.F. Scott baserade Brahmagupta sina trigonometriska beräkningar på en cirkel med radien *3270´*. Kanske kan det ha varit så att han använde olika längder på radien vid olika tillfällen.

Med hjälp av Brahmaguptas interpolationsmetod, erhöll vi för $sin(20^{o}) = 1176'$.
För att få det vi idag kallar $sin(20^{o})$ måste vi dividera *1176* med *3438*.

6 Islamska väldet

Under första hälften av 600 – talet föddes en ny civilisation, Islam, på den arabiska halvön. Muslimerna menade att det var guds vilja att utforska nya områden och att forskning var en väg som ledde till Gud. Därför uppmanade ledarna i dessa länder till studier inom bl.a. naturvetenskap.[59]
Det var även av stor vikt att kunna lokalisera åt vilket håll Meka låg, så att böner kunde utföras på ett korrekt sätt, då som bekant ansiktet under den bedjande stunden skall vara vänt mot Meka.[60] Det var även viktigt att veta den exakta tidpunkten på dygnet, eftersom bönerna skulle utföras vissa bestämda tider på dygnet, oavsett var den bedjande personen i fråga befann sig. Som en följd av detta vidareutvecklades trigonometrin.

Under 700 – talet började en massiv översättning av de Babylonska, Grekiska och Indiska verken, från originalspråken till Arabiska.[61] De som hade till uppgift att översätta verken tillfogade i vissa fall utförliga förklaringar och kommentarer.[62]
I slutet av 900 – talet var de flesta av Euklides, Archimedes, Diophantus, Ptolemaios och många andra verk översatta.
I samband med dessa översättningar sammanfattades matematiken från olika håll i världen.[63]

6.1 Trigonometrin i det islamska väldet

I de islamska länderna utvecklades trigonometrin till en egen gren inom matematiken och begrepp som tangens, cotangens och cosecant introducerades (tangens hade använts i Kina under 700 – talet, vilket vi återkommer till i kapitel 7). I regel användes ovan nämnda begrepp inte i samband med cirklar, utan för att jämföra förhållandet mellan sidorna i rätvinkliga trianglar.[64]

I de litterära översättningar som gjordes, förekom under lång tid beräkningar vilka utgick från längden av kordan, d.v.s. det synsätt som grekerna introducerat, parallellt med det indiska begreppet sinus. Så småningom övergick man dock till att helt använda det av indierna introducerade sinus.[65]

---

[59] Victor J. Katz sid 238 - 239

[60] A.P. Juschkewitsch sid 296

[61] Victor J. Katz sid 239

[62] A.P. Juschkewitsch sid 296

[63] Victor J. Katz sid 239

[64] A.P. Juschkewitsch sid 296

[65] Victor J. Katz sid 275

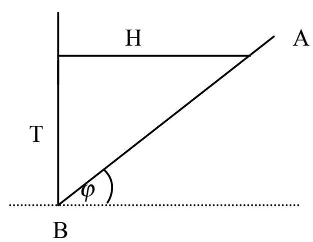
6.1.1 Al-Habas al-Hasib

Tangens, cotangens, secant och cosecant debuterade i islamska verk under 800 – talet, troligtvis av Ahmad ibn Abdallah al-Marwazi Habas al-Hasib (770 – 870).[66]

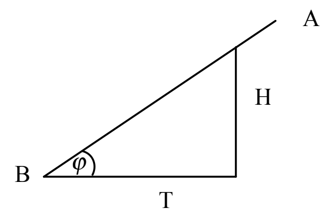
Vi ska nu se på ett exempel som illustrerar hur han gick tillväga för att beskriva tangens och cotangens.

Exempel 6.1.1

Betrakta figur 6.1.a som ligger till grund för hur tangens kan beskrivas.



Figur 6.1.a. Utgör underlag för tangens



Figur 6.1.b. Utgör underlag för cotangens

Hans tillvägagångssätt bygger på att uttrycka längden av den skugga som uppstår då solen träffar en pelare, där pelaren och dess underlag bildar en rät vinkel. Pelaren, skuggan och solens stråle bildar då en rätvinklig triangel.

Låt H vara en pelare som är fastsatt i en husvägg, där H är parallell med horisontalplanet och vinkelrät mot husväggen.

Låt solens stråle vara $\overline{AB}$ med infallsvinkel φ.

Låt T vara den skugga som uppstår på husväggen då solen träffar pelare H.

Låt H och T bilda en rät vinkel.

För olika infallsvinklar fås då olika längder av skuggan T.

Med hjälp av detta fick Al-Hasib sambandet

$$\frac{T}{H} = \frac{sin(\varphi)}{sin(90^o - \varphi)} = \frac{sin(\varphi)}{cos(\varphi)} = tan(\varphi) \Leftrightarrow T = H\, tan(\varphi)\,.$$

Vidare satte Al-Hasib längden av H till 1 vilket gav att

$$T = tan(\varphi)\,.$$

[66] Victor J. Katz sid 275

Figur 6.1.b illustrerar hur ett uttryck för cotangens kan ställas upp.

Låt *H* vara en pelare som är fastsatt i marken. Låt pelaren och marken bilda en rät vinkel.

Låt solens stråle vara $\overline{AB}$ och dess infallsvinkel vara φ.

Låt vidare *T* vara den skugga som uppstår på marken då solen träffar pelare *H*.

Utifrån detta kom Al-Hasib fram till följande samband

$$\frac{T}{H} = \frac{sin(90^o - \varphi)}{sin(\varphi)} = \frac{cos(\varphi)}{sin(\varphi)} = \frac{1}{tan(\varphi)} = cot(\varphi) \Leftrightarrow T = H\,cot(\varphi).$$

Sätts *H* till 1 får vi

$$T = cot(\varphi).$$ [67]

6.1.2 Al-Battani

Al-Battani levde under senare delen av 800 – talet.[68] Ett av hans verk, Islah al-Magesti, vilket kan översättas till Den fulländade Almagest,[69] var tänkt som en förbättring av Ptolemaios Almagest.[70]
Här översatte han alla beräkningar av kordans längd, d.v.s. uttryck av formen $crd(\varphi)$, till sinus, sinuskomplementet till 90^o (dagens cosinus), samt till sinus versus. För sinus versus mellan 90^o och 180^o använde han definitionen som anges i (3.5). Anledningen till detta vara att han inte använde sig av negativa tal.

Dessutom beskrev han sambanden mellan de trigonometriska funktioner vi använder oss av idag, vilka med dagens notation kan uttryckas enligt nedan.

Betrakta figur 6.2 och låt $\overline{OA} = 1$.

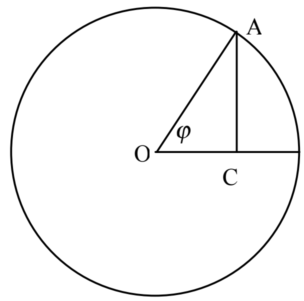
---

[67] A.P. Juschkewitsch sid 296 - 297

[68] Victor J. Katz sid 275

[69] A.P. Juschkewitsch sid 298

[70] Victor J. Katz sid 275



Figur 6.2 utgör underlag för sambandet mellan de trigonometriska funktionerna enligt al-Battani

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = sin(\varphi), \qquad \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = cos(\varphi), \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{sin(\varphi)}{cos(\varphi)} = tan(\varphi)$$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{cos(\varphi)}{sin(\varphi)} = cot(\varphi), \qquad \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{1}{sin(\varphi)} = csc(\varphi) \Rightarrow sin(\varphi) = \frac{1}{csc(\varphi)}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{1}{cos(\varphi)} = sec(\varphi) \Rightarrow cos(\varphi) = \frac{1}{sec(\varphi)}$$

Med hjälp av Pythagoras sats och trigonometriska ettan fick han även

$$csc^2(\varphi) = \frac{1}{sin^2(\varphi)} = \frac{sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi)}{sin^2(\varphi)} = 1 + cot^2(\varphi) \Rightarrow csc(\varphi) = \sqrt{1 + cot^2(\varphi)}$$

$$sec^2(\varphi) = \frac{1}{cos^2(\varphi)} = \frac{cos^2(\varphi) + sin^2(\varphi)}{cos^2(\varphi)} = 1 + tan^2(\varphi) \Rightarrow sec(\varphi) = \sqrt{1 + tan^2(\varphi)}$$

6.1.3 Abu-l-Wafas

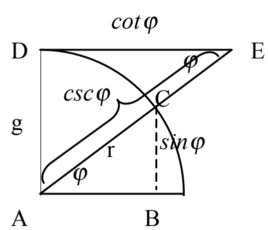
Abu-l-Wafas levde under senare hälften av 900 – talet. Han skrev ett väldigt systematiskt verk , Kitab al-kamil, vilket kan översättas till Den fullständiga boken, i vilken han beskrev samtliga trigonometriska samband utifrån linjer i en cirkel. Han beskrev då också tangens som en linje vilken tangerar en cirkel, istället för som tidigare, beskriva tangens utifrån en rätvinklig triangel. Radiens längd i cirkeln satte han till 1.[71]

[71] A.P. Juschkewitsch sid 298

6.1.4 Al-Biruni

Al-Biruni (973 – 1055), tillbringade många år i Indien. Han lärde sig Sanskrit och fullförde år 1031 ett detaljerat verk över Indien, vari han även beskrev Indisk astronomi och matematik.[72]
I ett av hans verk, Kanon des Masud, vilket kan översättas till Masuds verk, sammanställer han egna astronomiska observationer och beräkningar med de som gjorts av hans föregångare.
Verket tillägnade al-Biruni sultanen Masud av Ghazni,[73] (ligger i nuvarande Afghanistan).

Betrakta figur 6.3.



Figur 6.3 utgör underlag för sambandet mellan sinus och cosecant

Låt g vara längden av en pelare.

Låt $\angle CAB = \varphi$.

Vi har då att även $\angle AED = \varphi$, ty de är varandras alternatvinklar.

Då gäller att

ΔABC och ΔAED är likformiga enligt kriterium A.1(*iii*) i Appendix A.

Detta ger sambandet

$$\frac{g}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{r} \iff \frac{r}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{g} \iff \frac{r}{\overline{BC}} = csc(\varphi) \iff \frac{r}{r\,sin(\varphi)} = csc(\varphi) \iff$$
$$\iff \frac{1}{sin(\varphi)} = csc(\varphi)$$

På liknande sätt beskrev han de samband vilka även al-Battani kommit fram till,[74] se kapitel 6.1.2.

[72] Victor J. Katz sid 275

[73] A.P. Juschkewitsch sid 301

[74] Victor J. Katz sid 275 - 276

6.2 Diskussion Kapitel 6

Uttrycken tangens och sekant infördes år 1583 av Thomas Fink. Cotangens och cosinus introducerades av E. Gunter år 1620.[75]

I Victor J. Katz är Al-Birunis dödsår angivet till 1055, men i A.P. Juschkewitsch anges det till 1048.

[75] A.P. Juschkewitsch sid 297

7 Medeltidens Kina

Under Han dynastin (206 – 200 e. Kr.),[76] gjordes en del reformationer inom dåtidens skolväsen. De baserade sig på de resultat eleven framvisade istället för vilken social bakgrund eleven hade. Litteraturen som användes i skolorna var i stort sett uteslutande inhemska verk. Ett ökat krav, att hålla ordning på skatter, jordbruk och att skapa kalendrar ledde till att tjänstemän ställde högre krav på omgivningen i fråga om matematiska kunskaper och kunnande inom astronomi. Detta bidrog till att styret i Kina uppmanade till studier inom de båda ämnena. Dessvärre introducerades sällan nya metoder att lösa givna problem, då influensen utifrån var ringa. Trots detta skolades en hel del kreativa matematiker och astronomer i medeltidens Kina. Under 700 – talet använde Kinesiska astronomer sig av välutvecklade trigonometriska metoder för att beräkna olika vinklar och längder. Ett problem var att de aldrig riktigt förstod hur solen och månen rörde sig.
Under 700 – talet växte sig buddismen stark i Kina och därmed kom även buddistiska munkar från Indien. De hade med sig idéer från Grekland, vilka kommit till Indien via Alexander den Stores erövrings tåg. Kejsaren i Kina anställde Indier för att lära ut matematik och astronomi.

7.1 Trigonometrin i medeltidens Kina

År 718 skrevs ett verk i astronomi, Chiu-chih-li, vilket kan översättas till Nio Planeter, av en grupp studenter ledda av Chutan Hsita. Det baserade sig i stort sett på uppgifter från Indien. I verket finns bl.a. en omfattande del som beskriver konstruktionen av en sinustabell med en intervallängd av $3^o 45'$. Vid konstruktionen av tabellen har en cirkel med radien 3438’ använts.

7.1.1 Yi Xing

I början av 700 – talet under Tang dynastin inleddes en omfattande studie som gick ut på att bestämma längden av den skugga som uppstår av en pelare, med längden 8 foot. Mätresultaten analyserades sedan av chefs astronomen Yi Xing (683 -727). Hans mål var att använda resultaten för beräkningar av dagens och nattens längd och att kunna förutse eklipser, oavsett var någonstans observatören befann sig. Han skrev ned resultaten i en tabell, vilken kom att bli den första nedskrivna tangens tabellen. Tabellen innehåller skuggans längd, för varje heltal, av en 8 foot lång pelare i en vinkel från 1 till 79 grader. Funktionen kan tecknas $s(\varphi) = 8\tan(\varphi)$, där φ varierar mellan 1 till 79 och s betecknar skuggans längd. Det är inte känt hur Yi Xing beräknade värdena i tabellen, men utifrån jämförelser av hans arbete och indiska skrifter, tror man idag att han interpolerade resultaten i Chiu-chih li. Utifrån detta kunde han beräkna skuggans längd med en formel som motsvaras av

$$s(\varphi) = 8\frac{\sin(\varphi)}{\sin(90-\varphi)} \quad .$$

[76] Nordstedt sid 486

7.2 Diskussion kapitel 7

Någon vidareutveckling av Yi Xings tangens tabell fortsatte aldrig i Kina. Trigonometriska metoder förekommer inte mer i några kinesiska dokument förrän under 1600 – talets Ming dynasti, då sjövägen öppnades mot västvärden av portugiserna.[77]

[77] Victor J. Katz sid 193 - 197

8 Källförteckning

Victor J. Katz
History of Mathematics An Intorduction second edition
November 1998

Nordsteds Uppslagsbok
Åttonde omarbetade upplagan
1982

Robert A. Adams
Calculus: A complete course 3rd ed

James Gow
A Short History of Greek Mathematics
1968

J.F. Scott
A History of Mathematics
1958

A.P. Juschkewitsch
Geschichte der Mathematik im Mittelalter
1964

Eves. H
An Introduction to the History of Mathematics
Fjärde upplagan

G.J. Toomer
Ptolemaios's Almagest
1984

http://faculty.ed.umuc.edu/~swalsh/UM/M108Ch6.html

www.home.swipnet.se/astronomisida/profiler.htm

www.home.swpnet.se/arrack/hist/astrutv.html

http://130.238.79.99/ilmh/oskar/idehistv02.htm

http://hem.passagen.se/hlesjo43/aristot.htm

http://sv.wikipedia.org/wiki/Skrivkonsten_i_Indien

www.iranchamber.com

www-groups.dcs.st-and.ac.uk

Appendix A

Här redovisas de satser jag använt i arbetet

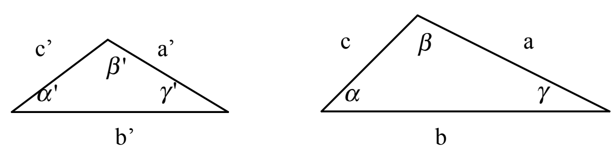
A.1 Likformighetskriterier

Två trianglar är likformiga om ett av nedanstående villkor är uppfyllt

(i) Sidorna är proportionella d.v.s. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

(ii) En vinkel i ena triangeln är lika stor som en vinkel i den andra triangeln och förhållandet mellan sidorna till den vinkeln är lika stort, d.v.s. $\alpha = \alpha', \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$

(iii) Två vinklar i ena triangeln är lika stora som motsvarande vinklar i den andra triangeln, d.v.s. $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$



A.2 Kongruens kriterier

Två trianglar är kongruenta om för båda trianglar något av nedanstående villkor är uppfyllt

(i) Motsvarande sidor i trianglarna är lika långa $\rightarrow S, S, S$

(ii) Två sidor och mellanliggande vinkel i ena triangeln är lika som i den andra triangeln $\rightarrow S, V, S$

(iii) Två vinklar och mellanliggande sida i ena triangel är lika som i den andra triangeln $\rightarrow V, S, V$

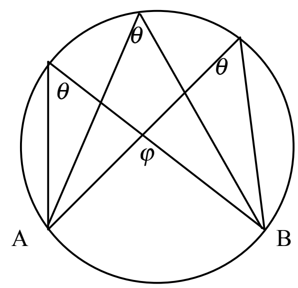
A.3 Randvinkelsatsen

(i) Medelpunktsvinkeln φ är dubbelt så stor som randvinkeln θ till samma cirkelbåge

(ii) Alla randvinklar θ till samma cirkelbåge är lika stora

(iii) Av *(i)* följer att randvinkeln till en halv cirkelbåge är 90^o

(iv) Av *(ii)* följer att om två eller flera båglängder är lika stora, så är även deras respektive randvinklar lika stora.



Figur A.3. Randvinklar till cirkelbågen AB

A.4 Addition och subtraktion av förhållanden

(i) Uttryck för addition av förhållanden.

Om det gäller att förhållande $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

så gäller att $\left(\frac{a+b}{b}\right) = \left(\frac{c+d}{d}\right)$

(ii) Uttryck för subtraktion av förhållanden.

Om det gäller att förhållande $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

så gäller att $\left(\frac{a-b}{b}\right) = \left(\frac{c-d}{d}\right)$

Appendix B

Exempel B.1

Nedan visas hur man med hjälp av de resultat Hipparchus utarbetat kan bestämma

$crd(180^o)$ till $crd(7\frac{1}{2}^o)$ med en intervallängd av $7\frac{1}{2}^o$.

Enligt ekvation (4.1) har vi att

$$crd(60^o) = 57{,}3^o = 57;18^o.$$

Enligt ekvation (4.2) har vi att

$$crd(90^o) = r\sqrt{2}.$$

Enligt ekvation (4.3) har vi att

$$crd(180^o - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\varphi))^2}.$$

Enligt ekvation (4.7) har vi att

$$crd(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(180^o - \varphi))}$$

Utifrån detta får vi med $\varphi = 60^o$ att

$$crd(180^o - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\varphi))^2} = \sqrt{(2r)^2 - (crd(60^o))^2} = crd(120^o)$$

och att

$$crd(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(180^o - \varphi))} = \sqrt{r(2r - crd(120^o)} = crd(30^o).$$

Med $\varphi = 30^o$ fås

$$crd(180^o - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\varphi))^2} = \sqrt{(2r)^2 - (crd(30^o))^2} = crd(150^o)$$

och att

$$crd(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(180^o - \varphi))} = \sqrt{r(2r - crd(150^o)} = crd(15^o).$$

Med $\varphi = 15^o$ fås

$$crd(180^o - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\varphi))^2} = \sqrt{(2r)^2 - (crd(15^o))^2} = crd(165^o)$$

och att

$$crd(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(180^o - \varphi))} = \sqrt{r(2r - crd(165^o)} = crd(7\frac{1}{2}^o).$$

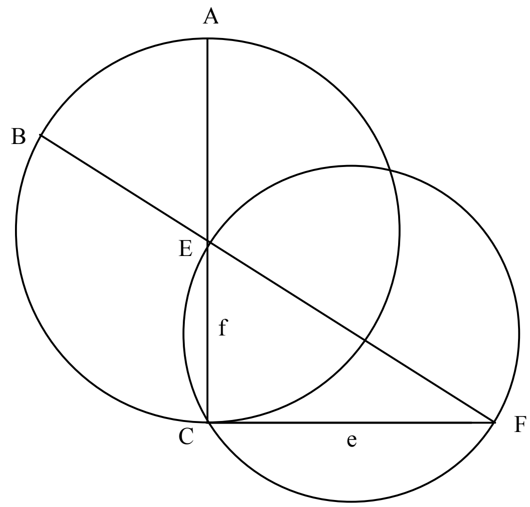
Med $\varphi = 7\frac{1}{2}^{0}$ fås

$$crd(180^o - \varphi) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\varphi))^2} = \sqrt{(2r)^2 - (crd(7\frac{1}{2}^o))^2} = crd(173\frac{1}{2}^o)$$

o.s.v.

Exempel B.2

Vi vill beräkna den skugga som uppstår då solen belyser en pelare av längden 60 . Antag att solen står 36^o under zenit, se figur B.2.



Figur B.2 utgör underlag för att bestämma sträckan $\overline{CF}$

Givet:

B är solens position.

Vi har då att $\angle AEB = 36^o$.

$\overline{CE}$ är pelaren med längden 60.

Sökt:

$\overline{CF}$ d.v.s. längden av skuggan.

Lösning:

$\angle CEF = \angle AEB = 36^o$ ty vertikalvinklar.

Han betraktade $\overline{CF}$ som kordan av den cirkel som omsluter ΔECF.

Medelpunktsvinkeln i cirkel $ECF = 72^o$ enligt kriterium A.3(*i*) i Appendix A.

Vi har vidare att $\overline{CF} = crd(72^o)$ och $\overline{CE} = crd(180^o - 72^o)$, se figur 3.2.

Vidare är $crd(72^o) = 70;32,3^p$ enligt (4.16)

och $crd(108^o) = 97;4,56^p$ enligt (4.20).

Eftersom han sökte skuggans längd då $\overline{CE} = 60$, reducerade han det framräknade värdet med förhållandet $\dfrac{60}{97;4,56^p}$

varför han erhöll värdet $\dfrac{60}{97;4,56^p} \cdot 70;32,3^p = 43;36^p$.[78]

[78] Katz sid 149 - 150

B.3 Beräkning av några värden för kordan

Nedanstående kan användas som underlag till kapitel 4.2.7

Följande värden har bestämts tidigare:

$crd(36^o)$ enligt avsnitt 4.2.2

$crd(60^o) = 60$ ty radien

$crd(72^o)$ enligt avsnitt 4.2.2

$crd(108^o)$ enligt avsnitt 4.2.3

$crd(120^o)$ enligt avsnitt 4.2.1

$crd(\alpha - \beta)$ enligt avsnitt 4.2.5

$crd(180^o - \varphi)$ enligt avsnitt 4.1.2

$crd(\frac{\varphi^o}{2})$ enligt avsnitt 4.1.3

Beräkning av $crd(12^o)$ m.h.a. $crd(\alpha - \beta)$

$$crd(72^o - 60^o) = crd(12^o) = \frac{(crd(72^o) \cdot crd(120^o)) - (crd(60^o) \cdot crd(108^o))}{120}$$

Beräkning av $crd(6^o)$ m.h.a. $crd(180^o - \varphi)$ och $crd(\frac{\varphi^o}{2})$

$$crd(180^o - 12^o) = crd(168^o) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(12^o))^2}$$

$$crd(\frac{12^o}{2}) = crd(6^o) = \sqrt{r(2r - crd(168^o))}$$

Beräkning av $crd(3^o)$ m.h.a. $crd(180^o - \varphi)$ och $crd(\frac{\varphi^o}{2})$

$$crd(180^o - 6^o) = crd(174^o) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(6^o))^2}$$

$$crd(\frac{6^o}{2}) = crd(3^o) = \sqrt{r(2r - crd(174^o))}$$

Beräkning av $crd(\frac{3^o}{2})$ m.h.a. $crd(180^o - \varphi)$ och $crd(\frac{\varphi^o}{2})$

$$crd(180^o - 3^o) = crd(177^o) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(3^o))^2}$$

$$crd(\frac{3^o}{2}) = \sqrt{r(2r - crd(177^o))}$$

Beräkning av $crd(\frac{3^o}{4})$ m.h.a. $crd(180^o - \varphi)$ och $crd(\frac{\varphi^o}{2})$

$$crd(180^o - \frac{3^o}{2}) = crd(178\frac{1^o}{2}) = \sqrt{(2r)^2 - (crd(\frac{3^o}{2}))^2}$$

$$crd(\frac{3^o}{4}) = \sqrt{r(2r - crd(178\frac{1^o}{2}))}$$