



EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Mellintransformen

av

Gustaf Persson

2007 - No 6

Mellintransformen

Gustaf Persson

Examensarbete i matematik 10 poäng, påbyggnadskurs

Handledare: Rikard Bøgvad

2007

1. ABSTRACT

The Mellin transform is a close relative of the integral transforms of Laplace and Fourier. A major use of Mellin transforms is in asymptotic analysis. The paper starts with basic and fundamental properties of the Mellin transform. Then there is a discussion about the fundamental correspondence between asymptotic expansion of an original function and the singular expansion of its transform. The main application in this this paper is to use this fundamental correspondence to find the pole for the Riemann zeta function.

2. FÖRORD

Jag vill tacka min handledare Rikard Bøgvad som gav mig uppslaget för uppsatsen och vars hjälp och handledning gjort det möjligt att skriva arbetet. Jag vill också tacka Elias Amselem för givande samtal angående matematik och andra tekniska detaljer.

INNEHÅLL

1. Abstract	1
2. Förord	2
3. Definition av Mellintransformen	4
4. Vad är Mellintransformen bra för?	4
5. När existerar Mellintransformen?	5
6. Uppskattning av den fundamentala remsan	9
7. Beräkning av transformer	12
8. Likhet med Laplacetransformen och Fouriertransformen	16
9. Inversberäkningar	17
10. Transformens fundamentala egenskaper	22
11. Tillämpningar på Gamma och zeta funktionerna	29
12. Gammafunktionen	33
Referenser	37

3. DEFINITION AV MELLINTRANSFORMEN

Definition 1. Låt $f(x)$ vara lokalt integrerbar över $(0, +\infty)$ och $s \in \mathbb{C}$. Mellintransformen för $f(x)$ definieras då av

$$\mathcal{M}\{f(x); s\} = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx \quad (1)$$

Området för vilket Mellintransformen är definierad visar sig vara en remsa i det komplexa talplanet, se kapitel 5. Den största öppna remsan $\langle \alpha, \beta \rangle$ där integralen konvergerar kallas för den fundamentala remsan. I den fundamentala remsan är Mellintransformen analytisk.

4. VAD ÄR MELLINTRANSFORMEN BRA FÖR?

Mellintransformen har ett nära släktskap med Laplace och Fouriers integraltransformer. Det finns många tillämpningar där det visar sig att Mellinformen (1) är bättre att använda istället för Laplace eller Fouriertransformerna. Ett stort användningsområde för Mellintransformen är inom den asymptotiska analysen. En referens för detta är [2], ur vilken nedanstående beskrivning tagits. Mellintransformen används där för att beräkna asymptotiska uppskattningar av summor på formen

$$G(x) = \sum_k \lambda_k g(\mu_k x) \quad (2)$$

där $x \rightarrow 0$ eller där $x \rightarrow \infty$. Dessa summor kallas för harmoniska summor eftersom de representerar en linjär superposition av "harmonics" (där λ_k är amplituden och μ_k är frekvensen) för en basfunktion $g(x)$. Harmoniska summor dyker ofta upp i kombinatorisk matematik, i analysen av algoritmer och i olika datastrukturer. Mellinbehandlingen av harmoniska summor har där spelat en avgörande roll i framgången med att analysera algoritmer samt att utföra beräkningar för parametrar i kombinatoriska strukturer.

Principen är att det finns ett fundamentalt samband mellan individuella termer i den asymptotiska utvecklingen för en funktion antingen vid noll eller i oändligheten och för dess transformerade funktions singulära punkter. Det man kan säga är att asymptotisk utveckling för en funktion har ett fundamentalt samband med den transformerade funktionen $f^*(s)$.

Ett användningsområde för detta som jag har fördjupat mig i, är att med hjälp av Mellintransformen finna polen för Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$. Genom att beräkna Mellintransformen för funktionen $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ leder detta fram till Eulers Gamma och Riemanns zetafunktion. Det fundamentala sambandet mellan utvecklingen för funktionen $f(x)$ vid noll och den singulära utvecklingen för $\Gamma(s)$ och $\zeta(s)$ utnyttjas sedan för att finna polen för $\zeta(s)$.

5. NÄR EXISTERAR MELLINTRANSFORMEN?

Området för vilket Mellin transformen är definierad visar sig vara en remsa i det komplexa talplanet. Här introduceras $\langle \alpha, \beta \rangle$ som notation för den öppna remsan för komplexa tal $s = \sigma + it$ sådant att $\alpha < \sigma < \beta$ där σ och t är reella tal.

För att visa att Mellintransformen

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx < \infty \quad (3)$$

konvergerar på detta intervall skrivs den om som

$$f^*(s) = \int_0^1 f(x)x^{s-1}dx + \int_1^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx. \quad (4)$$

Om integralen $\int_a^\infty$ är generaliserad i ändpunkterna, kan man dela upp integralen i två bitar eller flera beroende på om det finns flera bitar som är generaliserade. Man kan sedan säga att integralen konvergerar om var och en av delarna gör det. Om den inte konvergerar är den divergent och följaktligen existerar den ej [1, s 308].

Definition 2. [1, s 301] Om gränsvärdet

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx \quad (5)$$

existerar, säg lika med A, säges den generaliserade integralen

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (6)$$

vara konvergent. Talet A kallas då dess värde. Om gränsvärdet inte existerar säger man att den generaliserade integralen är divergent.

Definition 3. [1, s 304] Om gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = A \quad (7)$$

existerar kallas den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)dx \quad (8)$$

konvergent med värdet A. Om gränsvärdet inte existerar kallas den divergent.

Sats 1. (*Jämförelsesatser*) [1, s 306]

Om

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (9)$$

för alla x i integrationsintervallet så gäller: a) om den generaliserade integralen med $g(x)$ som integrand är konvergent så är integralen med $f(x)$ som integrand också konvergent. b) om den generaliserade integralen med $f(x)$ som integrand är divergent så är integralen med $g(x)$ som integrand också divergent.

En viktig observation som kommer att användas i beräkningar för Mellintransformens existens på intervallet $\langle \alpha, \beta \rangle$ är att

Lemma 1.

$$\int_0^\infty |f(x)x^{s-1}|dx = \int_0^\infty |f(x)|x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx \quad (10)$$

där $s = \sigma + it$ och att $\operatorname{Re}(s) = \sigma$.

Bevis.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(x)x^{s-1}|dx &= \int_0^\infty |f(x)||x^{s-1}|dx = \\ &= \int_0^\infty |f(x)||x^{\operatorname{Re}(s)-1}|dx = \int_0^\infty |f(x)|x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx. \end{aligned}$$

Detta eftersom

$$\begin{aligned} |x^s| &= |e^{\log(x^s)}| = |e^{s \log(x)}| = |e^{(\sigma+it) \log(x)}| = |e^{\sigma \log(x)} e^{it \log(x)}| = \\ &= |e^{\sigma \log(x)}| |e^{it \log(x)}| = |e^{\sigma \log(x)}| |\cos(t \log(x)) + i \sin(t \log(x))| = \\ &= |x^\sigma| \sqrt{\cos^2(t \log(x)) + \sin^2(t \log(x))} = |x^\sigma| = x^\sigma = x^{\operatorname{Re}(s)}. \end{aligned}$$

I beräkningarna har Eulers formel samt trigonometriska ettan använts. Alltså enligt beräkningarna fås

$$|x^s| = x^\sigma = x^{\operatorname{Re}(s)}. \quad (11)$$

□

Nu undersöks när den första integralen i ekvation (4) existerar. Definiera mängden av talen A

$$\tau_{[0,1]} = \{A \in \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(x)|x^{A-1}dx < \infty\} \quad (12)$$

för vilka integralen

$$\int_0^1 |f(x)|x^{A-1}dx$$

konvergerar, och låt

$$\alpha = \inf \tau_{[0,1]}. \quad (13)$$

Antag att $A \in \tau_{[0,1]}$. Om $A' > A$ så följer av sats 1 att

$$\int_0^1 |f(x)|x^{A'-1}dx \leq \int_0^1 |f(x)|x^{A-1}dx < \infty,$$

d.v.s. $A' \in \tau_{[0,1]}$. Detta ger att för alla $A > \alpha$ så kommer $A \in \tau_{[0,1]}$, d.v.s. integralen

$$\int_0^1 |f(x)|x^{A-1}dx$$

konvergerar i intervallet $]\alpha, \infty[$. Av lemma 1 så är

$$\int_0^1 |f(x)x^{s-1}|dx = \int_0^1 |f(x)|x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx. \quad (14)$$

Om $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ så är integralerna (14) konvergenta. Av absolutkonvergens följer då också att integralen

$$\int_0^1 f(x)x^{s-1}dx$$

konvergerar.

Nu undersöks när den andra integralen i ekvation (4) existerar. Eftersom $x^B \geq x^{B'}$ om $B' \leq B$ och $x \in [1, \infty[$, så följer på samma sätt som ovan att

$$\int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

konvergerar, då $\operatorname{Re}(s) < \beta$, där

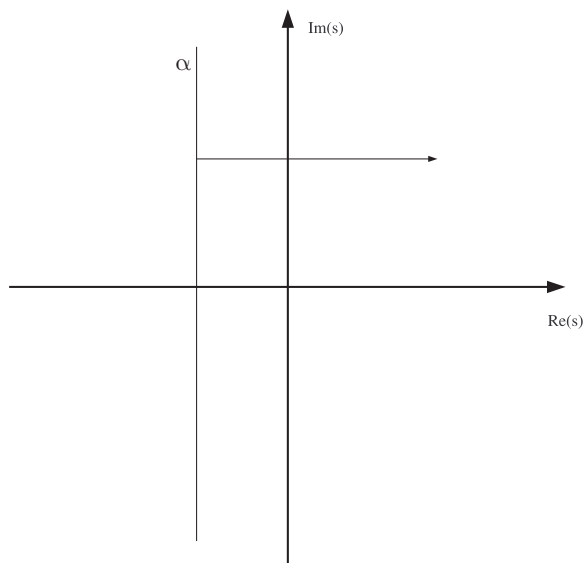
$$\beta = \sup\{B \in \mathbb{R} \mid \int_1^\infty |f(x)|x^{B-1}dx < \infty\}. \quad (15)$$

Sammanfattningsvis fås av dessa beräkningar en sats.

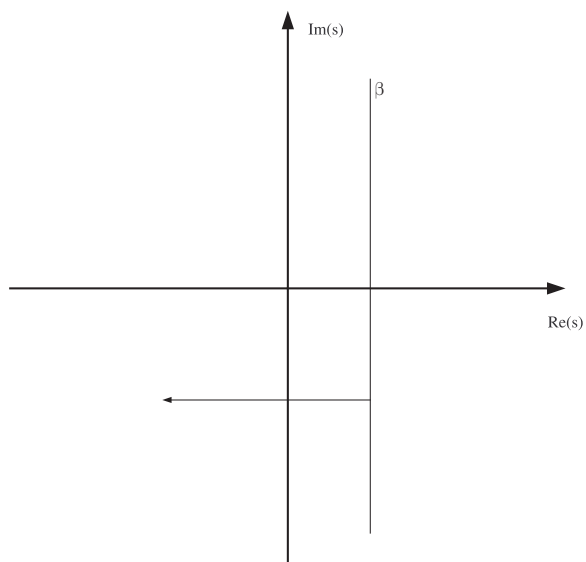
Sats 2. *Området för vilket Mellintransformen*

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx$$

existerar är en fundamental remsa $\langle \alpha, \beta \rangle$, där α, β ges av (13, 15).



FIGUR 1. *Området för α .*



FIGUR 2. *Området för β .*

6. UPPSKATTNING AV DEN FUNDAMENTALA REMSAN

Talen α och β kan vara svåra att finna. Enligt satsen nedan finns en lättare metod att uppskatta remsan för vilket Mellintransformen existerar.

Sats 3. *Villkoret*

$$f(x)_{x \rightarrow 0^+} = O(x^u) \quad (16)$$

och

$$f(x)_{x \rightarrow +\infty} = O(x^v) \quad (17)$$

när $u > v$ garanterar att $f^*(s)$ existerar i remsan $\langle -u, -v \rangle$. Den fundamentala remsan är alltså icke tom om $u > v$.

Här påminns om vad stort ordo är.

Definition 4. [5] Vi säger att funktionen $f(x)$ är stort ordo av x^n när $x \rightarrow a$ om $|f(x)| \leq C|x - a|^n$ i någon omgivning av a , där C är någon (tillräckligt stor) konstant. Detta skrivs vanligen

$$f(x) = O(x^n) \quad (18)$$

Existensen av Mellintransformen garanteras alltså för lokalt integrerbara funktioner där gradtalet för exponenten vid noll är strikt större än gradtalet för exponenten vid oändligheten. Monom x^c och konstanter har inte någon transform, som kan ses med lemma 2.

För beviset delas Mellintransformen

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx$$

i två delar

$$f^*(s) = \int_0^1 f(x)x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

Om man antar att $f(x)$ är integrerbar längst positiva reella axeln så måste den första integralen var begränsad vid noll och den andra integralen vid oändligheten.

Lemma 2.

$$\int_0^1 x^\gamma dx = \begin{cases} \text{konvergerar om} & \gamma > -1 \\ \text{divergerar om} & \gamma \leq -1 \end{cases} \quad (19)$$

$$\int_1^\infty x^\varrho dx = \begin{cases} \text{konvergerar om} & \varrho < -1 \\ \text{divergerar om} & \varrho \geq -1 \end{cases} \quad (20)$$

Lemma 3. Om $f(x) = O(x^u)$ när $x \rightarrow 0^+$ så gäller att $\tau_{[0,1]} \supset]-u, \infty[$.
D.v.s. om $\operatorname{Re}(s) > -u$ så konvergerar

$$\int_0^1 f(x)x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx.$$

Speciellt är $\inf \tau_{[0,1]} \leq -u$ (där $\tau_{[0,1]}$ definieras som den reella mängden av de α där integralen konvergerar, se ekvation (12)).

Bevis.

$$\int_0^1 |f(x)|x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx \leq M \int_0^1 x^{u+\operatorname{Re}(s)-1}dx.$$

Den sista integralen konvergerar, enligt lemma 2, när $u+\operatorname{Re}(s)-1 > -1$
 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(s) > -u$. □

Lemma 4. Om $f(x) = O(x^v)$ när $x \rightarrow \infty$ så gäller att $\tau_{[1,\infty]} \supset]-\infty, -v[$. D.v.s. om $\operatorname{Re}(s) < -v$ så konvergerar

$$\int_1^\infty f(x)x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx.$$

Speciellt är

$\sup \tau_{[1,\infty]} \geq -v$ (där $\tau_{[1,\infty]}$ definieras som den reella mängden av de β där integralen konvergerar).

Bevis.

$$\int_1^\infty |f(x)|x^{\operatorname{Re}(s)-1}dx \leq M \int_1^\infty x^{u+\operatorname{Re}(s)-1}dx.$$

Den sista integralen konvergerar, enligt lemma 2, när $u+\operatorname{Re}(s)-1 < -1$
 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(s) < -v$. □

Dessa två beräkningar ger att bägge integralerna konvergerar och Mellintransformen existerar om $\operatorname{Re}(s) > -u$ och $\operatorname{Re}(s) < -v$. Dessa begränsningar på s definierar två halvplan. Den första ett vänstra halvplan och den andra ett högra halvplan. Skärningen av dessa två halvplan ger den fundamentala remsan.

$$\langle -u, -v \rangle$$

Exempel 1. För funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \tag{21}$$

får man, om man Laurentutvecklar vid noll, i skivan $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1)^n.$$

Detta ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1)^n = 1 - x + x^2 + \dots = O(1) = O(x^0)$$

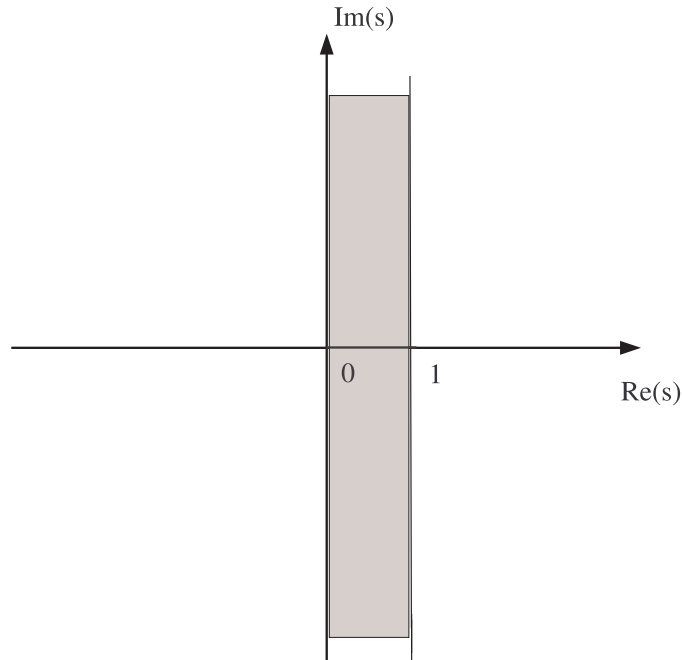
då $x \rightarrow 0^+$.

För utvecklingen i oändligheten, i området $|x| > 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1}{x(1-(-\frac{1}{x}))} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n (-1)^n = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{(-1)}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = O(x^{-1}) \end{aligned}$$

då $x \rightarrow \infty$. Detta ger enligt sats 3 att intervallet blir

$$\langle -u, -v \rangle = \langle 0, 1 \rangle.$$



FIGUR 3. Intervallet $\langle 0, 1 \rangle$ för funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

7. BERÄKNING AV TRANSFORMER

Exempel 2. [4, s 345 - 354] *Beräkning av transformen för $f(x) = \frac{1}{(x+1)}$ där den fundamentala remsan är $\langle 0, 1 \rangle$ enligt exempel (1).*

Enligt definitionen av Mellintransformen

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(x+1)}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{(x+1)} dx = \lim_{\substack{\rho \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_\varepsilon^\rho \frac{x^{s-1}}{(x+1)} dx .$$

Använd att

$$\begin{aligned} z^{s-1} &= (re^{i\theta})^{s-1} = (e^{\log(re^{i\theta})})^{s-1} = \\ &= e^{(s-1)\log(re^{i\theta})} = e^{(s-1)(\log(r)+i\theta)} \end{aligned}$$

där $z = re^{i\theta}$, och vi väljer här den gren av logaritmen som är definierad för $0 < \theta < 2\pi$, alltså inte på positiva reella talaxeln.

Sätt nu

$$f(z) = \frac{z^{s-1}}{(z+1)} .$$

För $x > 0$, är $f(x)$ inte definierad, men p.g.a. valet av logaritm,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \operatorname{Im} z > 0}} f(z) = \frac{x^{s-1}}{(x+1)},$$

där högerlet nu tolkas som en reell funktion, för $x > 0$

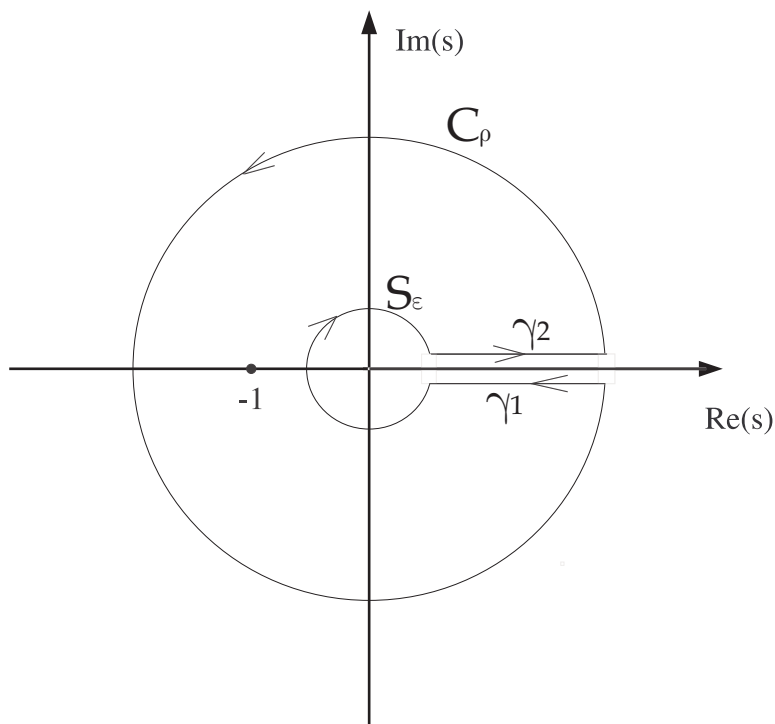
$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \operatorname{Im} z < 0}} f(z) = \frac{x^{s-1}e^{(i2\pi)(s-1)}}{(x+1)} = \frac{x^{s-1}e^{(si2\pi)}e^{-i2\pi}}{(x+1)} = \frac{x^{s-1}e^{(si2\pi)}}{(x+1)} .$$

Identiteten

$$e^{(-i2\pi)} = \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) = 1,$$

har använts ovan.

Välj $0 < \varepsilon < \rho$. Nu skapas en sluten kurva som har segmentet $[\varepsilon, \rho]$ och förgrenings punkten i origo och polen vid $z = -1$. Se figur 4 nedan, där ε är radien för den lilla cirkeln och ρ är radien för den stora cirkeln samt att polen $z = -1$ ligger i det inre av kurvan. Nu behövs Cauchys residy sats



FIGUR 4. Området för den slutna kurvan i exempel 2.

Sats 4. (Cauchys residy sats) [4, s 312] Om Γ är en enkelt sluten positivt orienterad kurva och f är analytisk på Γ förutom i punkterna $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ och inuti Γ , så är

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j). \quad (22)$$

I detta fall, eftersom

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz$$

så kan integralen skrivas som summan av segmenten

$$\left(\int_{S_\epsilon} + \int_{C_\rho} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} \right) f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f; -1). \quad (23)$$

Integralen för den övre sidan där logaritmen inte är definierad

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\epsilon}^{\rho} \frac{x^{s-1}}{(x+1)} dx$$

används i integralen för den undre sidan för att göra omskrivningen

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = - \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{x^{s-1} e^{si2\pi}}{(x+1)} dx = -e^{si2\pi} \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{x^{s-1}}{(x+1)} dx - e^{si2\pi} \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{x^{s-1}}{(x+1)} dx = \\ &= (1 - e^{si2\pi}) \int_{\gamma_1} f(z)dz . \end{aligned}$$

När $\varepsilon \rightarrow 0^+$ och $\rho \rightarrow +\infty$ fås

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \left(\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \right) = (1 - e^{si2\pi})I .$$

På cirkeln med radien $\rho > 1$ gäller att

$$|f(z)| = \frac{|z^{s-1}|}{|z+1|} \leq \frac{\rho^{s-1}}{\rho-1}$$

(enligt triangelolikheten)

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)dz \right| \leq \frac{2\pi\rho^{s-1}}{\rho-1}$$

som går mot noll då ρ går mot oändligheten eftersom $0 < s < 1$.

För cirkeln med radien $\varepsilon < 1$ gäller

$$|f(z)| = \frac{|z^{s-1}|}{|z+1|} \leq \frac{\varepsilon^{s-1}}{1-\varepsilon}$$

$$\left| \int_{S_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq \frac{2\pi\varepsilon^{s-1}}{1-\varepsilon} .$$

Även denna integral går mot noll då ε går mot noll.

När $\varepsilon \rightarrow 0^+$ och $\rho \rightarrow \infty$ fås i ekvationen (23) att

$$0 + 0 + (1 - e^{s2i\pi})I = 2\pi i \text{Res}(f; -1) . \quad (24)$$

Nu beräknas residyn för enkelpolen $z = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z)dz = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{s-1}}{z+1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} z^{s-1} = \lim_{z \rightarrow -1} e^{(s-1)\log(z)} = e^{(s-1)\log(-1)} = \end{aligned}$$

$$= e^{(s-1)\log(e^{i\pi})} = e^{(s-1)i\pi} = e^{si\pi} e^{-i\pi} = -e^{si\pi}.$$

Om beräkningen för residyn nu används i ekvation (24) fås

$$\begin{aligned} (1 - e^{s2i\pi})I &= 2\pi i(-e^{si\pi}) \\ I &= \frac{2\pi i(-e^{si\pi})}{(1 - e^{s2i\pi})} = \frac{2\pi i(-e^{si\pi})(-e^{-si\pi})}{(1 - e^{s2i\pi})(-e^{-si\pi})} = \\ &= \frac{2\pi i}{(-e^{-si\pi} + e^{si\pi})} = \frac{2\pi i}{(e^{si\pi} - e^{-si\pi})} = \frac{\pi}{\sin(s\pi)} \end{aligned}$$

där identiteten

$$\sin(az) = \frac{(e^{iaz} - e^{-iaz})}{2i}$$

har använts, se [4, s 112].

Enligt dessa beräkningarna är alltså Mellintransformen

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(x+1)}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{(x+1)} dx = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}, \quad (25)$$

när s tillhör den fundamentala remsan $\langle 0, 1 \rangle$.

Exempel 3. Låt $H(x)$ var Heavisides stegfunktion som definieras av

$$H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Mellintransformen är

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{H(x)\} &= \int_0^{+\infty} H(x)x^{s-1} dx = \int_0^1 H(x)x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} H(x)x^{s-1} dx = \\ &= \int_0^1 1 \cdot x^{s-1} dx + 0 = \left[\frac{x^{s-1+1}}{s-1+1}\right]_0^1 = \left[\frac{x^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

d.v.s.

$$H^*(s) = \frac{1}{s} \quad (26)$$

som konvergerar för $s > 0$. Den fundamentala remsan är intervallet $\langle 0, +\infty \rangle$. Detta eftersom $H(x) = O(x^{-a})$ vid $x \rightarrow \infty$ för alla $a > 0$ och $H(x) = O(x^0)$ då $x \rightarrow 0$, så att fundamentala remsan innehåller $\langle 0, a \rangle$ för alla $a > 0$.

8. LIKHET MED LAPLACETRANSFORMEN OCH FOURIERTRANSFORMEN

Genom att göra variabelbytet $x = e^{-u}$ visar det sig att Mellintransformen är ekvivalent med Laplacetransformen.

Om

$$x = e^{-u}$$

så är

$$u = -\ln(x)$$

och

$$\frac{dx}{du} = \frac{d(-\ln(x))}{du} = -\frac{1}{x}$$

$$dx = -xdu = -e^{-u}du$$

och gränserna

$u \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 0$ och $u \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$.

Variabelbytet ger

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(x)\} &= f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx = \int_0^{+\infty} f(x)x^s x^{-1}dx = \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(e^{-u})(e^{-u})^s (e^{-u})^{-1}(-e^{-u})du = \\ &= -\int_{+\infty}^{-\infty} f(e^{-u})e^{-us}e^ue^{-u}du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-u})e^{-us}du\end{aligned}$$

där $s = \sigma + it$.

Detta visar att Laplacetransformen för en funktion av u är den samma som Mellintransformen för en funktion av x . Om sedan $\sigma = 0$ för den reella delen av $s = \sigma + it$ fås Fouriertransformen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-u})e^{-itu}du.$$

Eftersom Fouriertransformen har en invers medför det att även Mellintransformen har det.

Sats 5. (*Inversions satsen*) Låt $f(x)$ vara integrerbar med den fundamentalaremsan $\langle \alpha, \beta \rangle$. Om c är sådan att $\alpha < c < \beta$ och $f^*(c + it)$ är integrerbar, så håller likheten

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds \quad (27)$$

nästan överallt. Om $f(x)$ är kontinuerlig så håller likheten överallt på $(0, \infty)$.

Låt $f(x)$ vara lokalt integrerbar med den fundamentala remsan $\langle \alpha, \beta \rangle$ och styckvist kontinuerlig i en omgivning av x_0 . Då gäller för något c i intervallet (α, β)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f^*(s) x^{-s} ds = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}. \quad (28)$$

Inversen $f(x)$ för $f^*(s)$ kan beräknas med inversionsformeln (27) d.v.s. $f(x)$ och $f^*(s)$ utgör ett transformpar. Den inversa transformen ges alltså genom att beräkna integralen längst den vertikala linjen $\operatorname{Re}(s) = c$ där $c \in \mathbb{R}$, och c ligger i den fundamentala remsan $\langle \alpha, \beta \rangle$. För att bestämma inversen beräknas två olika utvecklingar för $f(x)$. Utvecklingen vid noll baseras på polerna för $f^*(s)$ i det vänstra halvplanet och utvecklingen vid oändligheten motsvarar polerna i det högra halvplanet.

9. INVERSBERÄKNINGAR

Exempel 4. Enligt tidigare beräkningar har det visat sig att

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

och

$$f^*(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

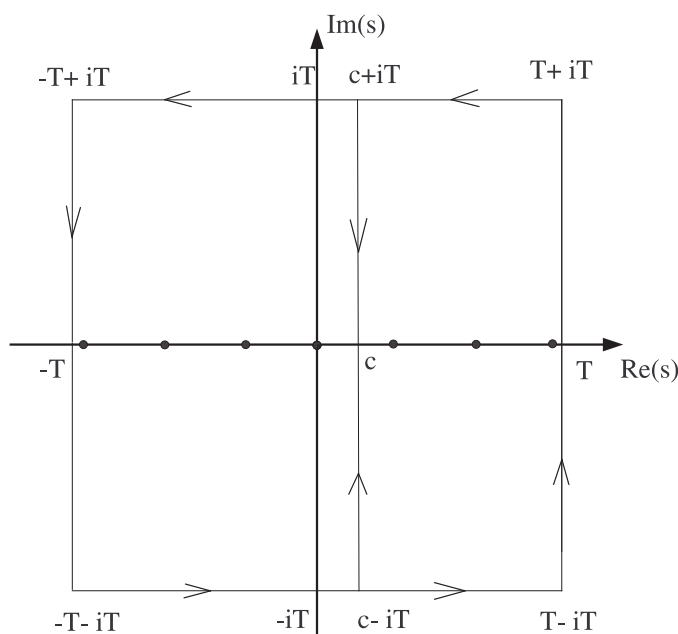
utgör ett transformpar. Polerna för $f^*(s)$ är $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ d.v.s. när s är ett heltal så att $\sin(\pi s) = 0$. Den inversa Mellintransformen ges av

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \quad (29)$$

där c är ett reellt tal sådant att $0 < c < 1$. Detta eftersom den fundamentala remsan är $\langle 0, 1 \rangle$ (se beräkningar i tidigare kapitel). Med hjälp av Cauchys residyteorem kan integralen beräknas direkt, utan hjälp av inversions satsen. Detta görs genom att ta limes för det rektangulära området $\langle -\infty, c \rangle, \langle c, \infty \rangle$. Det som fås är ett område i det vänstra halvplanet som motsvarar utvecklingen för $f(x)$ vid noll och ett område till höger som gäller utvecklingen vid oändligheten, se figur 5 nedan. I det första av dessa fall består kurvan längs vilket integralen tas av det horisontella segmentet från $c+iT$ till $-T+iT$, det vertikala segmentet $-T+iT$ till $-T-iT$, det horisontella segmentet $-T-iT$ till $c-iT$ samt det vertikala segmentet $c-iT$ till $c+iT$. T är en parameter som går

mot oändligheten vilket medför att limes för det sista av dessa segment närmar sig den inversa Mellin integralen. För att undvika polerna till $f^*(s)$ d.v.s. heltalen, så parametriseras $T = \frac{(2j+1)}{2}$, med $j \in \mathbb{Z}$.

Kurvan för det andra fallet består av det vertikala segmentet från $c + iT$ till $c - iT$, det horisontella segmentet från $c - iT$ till $T - iT$, det vertikala segmentet $T - iT$ till $T + iT$ och slutligen det horisontella segmentet $T + iT$ till $c + iT$. Om det nu visar sig att alla dessa bidrag förutom det centrala vertikala segmentet går mot noll då j går mot oändligheten så har Mellinintegralen beräknats på två olika sätt. Det visar sig enligt Cauchys residysats att Mellinintegralen är lika med summan av residyerna vid polerna inuti de två områdena.



FIGUR 5. Området för den slutna kurvan i exempel 4.

Här påminns om en sats som kommer att användas i beräkningarna som följer.

Sats 6. [4, s,170] Om $f(s)$ är kontinuerlig på kurvan Γ och om $|f(s)| \leq M$ för alla s på Γ , så gäller att

$$\left| \int_{\Gamma} f(s) ds \right| \leq ML \quad (30)$$

där L är längden av Γ . Speciellt är

$$\left| \int_{\Gamma} f(s) ds \right| \leq \max_{s \in \Gamma} |f(s)| \cdot L \quad (31)$$

Beräkningar på övre horisontella segment;

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| &= \left| \frac{2\pi i}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} \right| = \left| \frac{2\pi i}{(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})} \frac{e^{i\pi s}}{e^{i\pi s}} \right| = \\ &= \left| \frac{2\pi i e^{i\pi s}}{e^{2i\pi s} - 1} \right| = \frac{|2\pi i e^{i\pi s} e^{-\pi t}|}{|e^{2i\pi s} e^{-2\pi t} - 1|} = \frac{2\pi e^{-\pi t}}{|e^{2i\pi s} e^{-2\pi t} - 1|} \end{aligned}$$

Eftersom $|e^{2i\pi s} e^{-2\pi t} - 1| \rightarrow 1$ då $t \rightarrow \infty$ och att $e^{2i\pi s}$ roterar runt enhetscirkeln fås

$$\left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| \leq 4\pi e^{-\pi t}.$$

Undre horisontella segmentet;

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| &= \left| \frac{2\pi i}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} \right| = \left| \frac{2\pi i}{(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})} \frac{e^{-i\pi s}}{e^{-i\pi s}} \right| \\ &= \left| \frac{2\pi i e^{-i\pi s}}{1 - e^{-2i\pi s}} \right| = \frac{|2\pi i e^{-i\pi s} e^{\pi t}|}{|1 - e^{-2i\pi s} e^{2\pi t}|} = \frac{2\pi e^{\pi t}}{|1 - e^{-2i\pi s} e^{2\pi t}|} \end{aligned}$$

Eftersom $|1 - e^{-2i\pi s} e^{2\pi t}| \rightarrow 1$ då $t \rightarrow -\infty$ och att $e^{-2i\pi s}$ roterar runt enhetscirkeln fås

$$\left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| \leq 4\pi e^{\pi t}.$$

Beräkning för vertikala segment;

$$\left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| = \left| \frac{2\pi i}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} \right| \quad (32)$$

Det som nu visas är att nämnaren har ett minsta värde.

$$\begin{aligned} e^{i\pi s} - e^{-i\pi s} &= e^{i\pi(\sigma+it)} - e^{-i\pi(\sigma+it)} = \\ &= e^{-\pi t}(\cos(\pi\sigma) + i\sin(\pi\sigma)) - e^{\pi t}(\cos(\pi\sigma) + i\sin(\pi\sigma)) = \\ &= (e^{-\pi t} - e^{\pi t})\cos(\pi\sigma) + (e^{-\pi t} + e^{\pi t})i\sin(\pi\sigma) \end{aligned}$$

Nämnaren blir då

$$\begin{aligned} |e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}| &= \sqrt{(e^{-\pi t} - e^{\pi t})^2 \cos^2(\pi\sigma) + (e^{-\pi t} + e^{\pi t})^2 \sin^2(\pi\sigma)} = \\ &= \sqrt{(\cos^2(\pi\sigma) + \sin^2(\pi\sigma))e^{-2\pi t} + 2(\sin^2(\pi\sigma) - \cos^2(\pi\sigma)) + (\cos^2(\pi\sigma) + \sin^2(\pi\sigma))e^{2\pi t}} = \\ &= \sqrt{e^{-2\pi t} + e^{2\pi t} + 2(\sin^2(\pi\sigma) - \cos^2(\pi\sigma))}. \quad (33) \end{aligned}$$

Deriverar (33) och bestämmer nollställena.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sqrt{e^{-2\pi t} + e^{2\pi t} + 2(\sin^2(\pi\sigma) - \cos^2(\pi\sigma))}) &= \\ &= \frac{(-e^{-2\pi t} + e^{2\pi t})}{\sqrt{e^{-2\pi t} + e^{2\pi t} + 2(\sin^2(\pi\sigma) - \cos^2(\pi\sigma))}} = 0 \\ &= \frac{e^{2\pi t}}{\sqrt{e^{-2\pi t} + e^{2\pi t} + 2(\sin^2(\pi\sigma) - \cos^2(\pi\sigma))}} = \frac{e^{-2\pi t}}{\sqrt{e^{-2\pi t} + e^{2\pi t} + 2(\sin^2(\pi\sigma) - \cos^2(\pi\sigma))}} \\ &= e^{2\pi t} = e^{-2\pi t} \end{aligned}$$

$$t = 0.$$

Vilket ger att $t = 0$ är ett globalt minimum. Om $t = 0$ i ekvation (32) fås

$$\left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| \leq \left| \frac{\pi}{\sin(\pi\sigma)} \right|.$$

Beräkningar av $\max$ för $|x^{-s}|$ på de olika segmenten; Enligt ekvation (11) är $|x^{-s}| = x^{-\operatorname{Re}(s)}$.

På segmentet $[c + iT, -T + iT]$ är

$$\max\{|x^{-s}| \mid -T < \operatorname{Re}(s) < c\} = |x|^{-c}.$$

På segmentet $[-T + iT, -T - iT]$ är

$$\max\{|x^{-s}| \mid \operatorname{Re}(s) = -T\} = |x|^T.$$

På segmentet $[-T - iT, c - iT]$ är

$$\max\{|x^{-s}| \mid -T < \operatorname{Re}(s) < c\} = |x|^{-c}.$$

På segmentet $[c - iT, T - iT]$ är

$$\max\{|x^{-s}| \mid c < \operatorname{Re}(s) < T\} = |x|^{-c}.$$

På segmentet $[T - iT, T + iT]$ är

$$\max\{|x^{-s}| \mid \operatorname{Re}(s) = T\} = |x|^{-T}.$$

På segmentet $[T + iT, c + iT]$ är

$$\max\{|x^{-s}| \mid c < \operatorname{Re}(s) < T\} = |x|^{-c}.$$

Beräkningar för utvecklingen vid noll dvs $|x| < 1$.
Använder sats 6.

$$\left| \int_{c+iT}^{-T+iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \right| \leq (c+T)|x|^{-c} 4\pi e^{-\pi T} \rightarrow 0 \quad (34)$$

eftersom $T \rightarrow \infty$, $|x| < 1$ och exponentialfunktionen dominerar.

$$\left| \int_{-T+iT}^{-T-iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \right| \leq 2T|x|^T \left| \frac{\pi}{\sin(-\pi T)} \right| = 2T|x|^T \pi \rightarrow 0 \quad (35)$$

eftersom $|x| < 1$ och där $T_j = \frac{2j+1}{2}$, vilket medför att $\sin(-\pi T) = 1$.

$$\left| \int_{-T-iT}^{c-iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \right| \leq (c+T)|x|^{-c} 4\pi e^{-\pi T} \rightarrow 0 \quad (36)$$

då $T \rightarrow \infty$.

Längst det centrala vertikala segmentet beräknas integralen med Cauchys residysats. P.g.a. (34, 35, 36) och Cauchys residysats tillämpad på den vänstra rektangeln i figuren, så är

$$2\pi i f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f^*(s); -n).$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f^*(s); s = -n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \pi}{\left[\frac{d}{ds}(\sin(\pi s)) \right]_{s=-n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \pi}{\pi \cos(-\pi n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1)^n. \end{aligned}$$

Detta ger den inversa Mellintransformen

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

för $|x| < 1$, se exempel (1).

Nu ska vi på liknande sätt studera $|x| > 1$.

$$\left| \int_{c-iT}^{T-iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \right| \leq (T-c)|x|^{-c} 4\pi e^{-\pi T} \rightarrow 0$$

då $T \rightarrow \infty$.

$$\left| \int_{T-iT}^{T+iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \right| \leq 2T|x|^{-T} \left| \frac{\pi}{\sin(-\pi T)} \right| = 2T|x|^{-T} \pi \rightarrow 0$$

då $T \rightarrow \infty$, eftersom $|x| > 1$.

$$\left| \int_{T+iT}^{c+iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds \right| \leq (T-c)|x|^{-c} 4\pi e^{-\pi T} \rightarrow 0.$$

då $T \rightarrow \infty$.

Beräkning för vertikala, centrala segmentet. Som tidigare fås nu

$$\begin{aligned}
 2\pi i f(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c-iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds = - \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} x^{-s} ds = \\
 &= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(f^*(s); n) \\
 f(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(f^*(s); n) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n} \pi}{\left[\frac{d}{ds}(\sin(\pi s))\right]_{s=n}} = \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n} \pi}{\pi \cos(\pi n)} = - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Detta känns igen som

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

för $|x| > 1$, se exempel (1).

Sammanfattningsvis har här visats att inversa Mellintransformen av $f^*(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ är $f(x) = \frac{1}{1+x}$, och alltså verifierat inversionsformeln i ett specialfall.

10. TRANSFORMENS FUNDAMENTALA EGENSKAPER

Sats 7. Om $f(x)$ och $g(x)$ har Mellintransformerna $f^*(s)$ och $g^*(s)$ så har $f(x) + g(x)$ Mellintransformen $f^*(s) + g^*(s)$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{f(x)+g(x)\} &= \int_0^{+\infty} [f(x)+g(x)]x^{s-1}dx = \int_0^{+\infty} [f(x)x^{s-1}+g(x)x^{s-1}]dx = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx + \int_0^{+\infty} g(x)x^{s-1}dx = f^*(s) + g^*(s)
 \end{aligned}$$

□

Detta visar också att Mellintransformen är lineär och med samma förfarande som ovan fås en sats.

Sats 8. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$ så har $af(x)$ där a är en konstant Mellintransformen $af^*(s)$.

Sats 9. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$ så har $f(ax)$ Mellintransformen $a^{-s}f^*(s)$, där a är ett positivt reellt tal.

Bevis. Gör variabelbytet

$$ax = t$$

$$x = \frac{t}{a}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a}.$$

Gränserna blir: $t \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ och $t \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{f(ax)\} &= \int_0^{+\infty} f(ax)x^{s-1}dx = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{t}{a}\right)^s\left(\frac{t}{a}\right)^{-1}\frac{dt}{a} = \int_0^{+\infty} f(t)t^s a^{-s}t^{-1}aa^{-1}dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}a^{-s}dt = a^{-s} \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt = a^{-s}f^*(s) \end{aligned}$$

□

Sats 10. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$, så har $f(\frac{1}{x})$ Mellintransformen $f^*(-s)$.

Bevis. Gör variabelbytet

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{-1}{u^2}$$

$$dx = -x^2 du = -\frac{du}{u^2}.$$

Gränserna blir: $u \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ och $u \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{f(\frac{1}{x})\} &= \int_0^{+\infty} f(\frac{1}{x})x^{s-1}dx = \int_{+\infty}^0 f(u)\left(\frac{1}{u}\right)^{s-1}\frac{1}{u^2}(-1)du = \\ &= (-1) \int_{+\infty}^0 f(u)u^{-s}uu^{-2}du = \int_0^{+\infty} f(u)u^{-s-1}du = f^*(-s) \end{aligned}$$

□

Sats 11. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$, så har $f(x^\rho)$ Mellintransformen $\frac{1}{\rho}f^*\left(\frac{s}{\rho}\right)$, där ρ är ett reellt tal skilt från noll.

Bevis. Inför variabelbytet

$$x^\rho = u$$

$$x = (x^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = (u)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\rho} u^{\frac{1}{\rho}-1}$$

$$dx = \frac{1}{\rho} u^{\frac{1}{\rho}-1} du.$$

Gränserna blir: $u \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ och $u \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{f(x^\rho)\} &= \int_0^{+\infty} f(x^\rho) x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} f(u) (u^{\frac{1}{\rho}})^{s-1} \left(\frac{1}{\rho}\right) u^{\frac{1}{\rho}-1} du = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} f(u) u^{\frac{s}{\rho}} u^{\frac{1}{\rho}-1} u^{\frac{1}{\rho}} u^{-1} du = \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} f(u) u^{\frac{s}{\rho}-1} du = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} f(x) x^{\frac{s}{\rho}-1} dx = \frac{1}{\rho} f^*\left(\frac{s}{\rho}\right) \end{aligned}$$

□

Sats 12. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$ så har $x^\nu f(x)$ Mellintransformen $f^*(s + \nu)$. Här är ν ett positivt reellt tal.

Bevis.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{x^\nu f(x)\} &= \int_0^{+\infty} x^\nu f(x) x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} f(x) x^\nu x^s x^{-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) x^{(s+\nu)-1} dx = f^*(s + \nu) \end{aligned}$$

□

Sats 13. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$ så har $\frac{df(x)}{dx}$ Mellintransformen $-(s-1)f^*(s-1)$.

Bevis. Använder partiell integration [1, s 252] på integralen :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} x^{s-1} dx = \\ &= [f(x) x^{s-1}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) (s-1) x^{(s-1)-1} dx = \\ &= -(s-1) \int_0^{+\infty} f(x) x^{(s-1)-1} dx = -(s-1) f^*(s-1) \end{aligned}$$

□

Sats 14. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$ så har $x \frac{df(x)}{dx}$ Mellintransformen $-sf^*(s)$.

Bevis.

$$\mathcal{M}\left\{x \frac{df(x)}{dx}\right\} = \int_0^{+\infty} x \frac{df(x)}{dx} x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} x^s dx.$$

Använd nu partiell integration på den sista integralen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{x \frac{df(x)}{dx}\right\} &= [f(x)x^s]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) s x^{s-1} dx = \\ &= -s \int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1} dx = -s f^*(s) \end{aligned}$$

□

Sats 15. Om $f(x)$ har Mellintransformen $f^*(s)$ så har $f(x) \log(x)$ Mellintransformen $\frac{df^*(s)}{ds}$.

Bevis.

$$\begin{aligned} \frac{df^*(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1} dx \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} (f(x) x^{s-1}) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} [x^{s-1} \frac{d}{ds} (f(x)) + (f(x) \frac{d}{ds} (x^s) x^{-1})] dx = \\ &= \int_0^{+\infty} [0 + f(x) x^s \log(x) x^{-1}] dx = \int_0^{+\infty} f(x) \log(x) x^{s-1} dx = \mathcal{M}\{f(x) \log(x)\}. \end{aligned}$$

Här utnyttjades derivatan av en exponential

$$\frac{d}{ds} (x^s) = \frac{d}{ds} e^{\log(x)s} = x^s \log(x).$$

□

På liknande sätt kan en rad andra viktiga satser för Mellintransformen härledas. De härledda satserna sammanfattas i tabellen nedan:

$f(x)$	$f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	
$f(x) + g(x)$	$f^*(s) + g^*(s)$	$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \cap \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$	
$a f(x)$	$a f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	a är en konstant
$f(ax)$	$a^{-s} f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	där a är ett positivt reellt tal
$f(\frac{1}{x})$	$f^*(-s)$	$\langle -\alpha, -\beta \rangle$	
$f(x^\rho)$	$\frac{1}{\rho} f^*(\frac{s}{\rho})$	$\langle \rho\alpha, \rho\beta \rangle$	där ρ är ett reellt tal skilt från noll.
$x^\nu f(x)$	$f^*(s + \nu)$	$\langle \alpha - \nu, \beta - \nu \rangle$	där ν är ett positivt reellt tal.
$\frac{df(x)}{dx}$	$-(s-1)f^*(s-1)$	$\langle \alpha-1, \beta-1 \rangle$	
$x \frac{df(x)}{dx}$	$-s f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	
$f(x) \log(x)$	$\frac{df^*(s)}{ds}$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	

Här följer nu några exempel på hur satserna kan användas för att härleda nya identiteter.

Exempel 5. Transformen av $H(x) \log(x)$ är $\frac{-1}{s^2}$. Vi vet ju att

$$\mathcal{M}\{H(x)\} = \int_0^{+\infty} H(x)x^{s-1}dx = \frac{1}{s}$$

(se exempel (3)).

Använd nu sats 15: $\mathcal{M}\{H(x) \log(x)\} = \frac{df^*(s)}{ds}$. Alltså är

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{H(x) \log(x)\} &= \int_0^{+\infty} H(x) \log(x)x^{s-1}dx = \frac{d}{ds}(f^*(s)) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \\ &= \frac{-1}{s^2}. \end{aligned}$$

Exempel 6. Gammafunktionen definieras genom att sätta $f(x) = e^{-x}$ i Mellintransformen

$$\Gamma(s) = \mathcal{M}\{e^{-x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \quad (37)$$

för $s > 0$. Faktorn $e^{-x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Alltså konvergerar den generaliserade integralen oberoende av värdet på s då limes går mot oändligheten. Vid små gränsvärden går $e^{-x} \rightarrow 1$, och faktorn $x^{s-1} \rightarrow \infty$ då $s < 1$. Restriktionen att s måste vara positiv är bara för att garantera konvergens vid gränsvärden nära noll. Enligt sats 3 är $e^{-x} = O(1) = O(x^0)$ då $x \rightarrow 0^+$ och $e^{-x} = O(x^{-b})$ då $x \rightarrow \infty$ för varje $b > 0$. Detta medför att Gammafunktionen är analytisk i den fundamentala remsan $\langle 0, +\infty \rangle$.

Exempel 7. Betrakta nu funktionen $e^{-x} \log(x)$ som har transformen $\Gamma'(s)$. Ty

$$\Gamma(s) = \mathcal{M}\{e^{-x}\}$$

och då ger sats 15

$$\mathcal{M}\{e^{-x} \log(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-x} \log(x)x^{s-1}dx = \frac{d}{ds}\Gamma(s) = \Gamma'(s).$$

Exempel 8. Här använder vi egenskaperna hos Mellintransformen formellt, d.v.s. utan att bekymra oss om konvergensen hos de oändliga summorna. Med funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x}(1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

får man Mellintransformen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) x^{s-1} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-x} x^{s-1} + e^{-2x} x^{s-1} + e^{-3x} x^{s-1} + \dots) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2x} x^{s-1} dx + \int_0^{+\infty} e^{-3x} x^{s-1} dx + \dots = \end{aligned}$$

Använder nu sats 9

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = a^{-s} f^*(s)$$

vilket medför att

$$\begin{aligned} &= \mathcal{M}\{e^{-x}\} + \mathcal{M}\{e^{-2x}\} + \mathcal{M}\{e^{-3x}\} + \dots = \\ &= 1^{-s} \Gamma(s) + 2^{-s} \Gamma(s) + 3^{-s} \Gamma(s) + \dots = \Gamma(s)(1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots) = \\ &= \Gamma(s) \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right) = \Gamma(s) \zeta(s) \end{aligned}$$

där

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

är Riemanns zetafunktion.

Detta resultat ska användas senare. Här sammanfattas detta i en sats, och bevisas mer strikt.

Sats 16.

$$\mathcal{M}\left\{\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right\} = \Gamma(s) \zeta(s)$$

om $s \in \langle 1, \infty \rangle$.

Bevis. $1 - e^{-x} = x \cdot g(x)$ där $g(x) \neq 0$, för $x \in \mathbb{C}$.
Alltså är

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{x} \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Ur detta ses att

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = O(x^{-1})$$

när $x \rightarrow 0$, och

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = O(x^a)$$

$\forall a < 0$ när $x \rightarrow \infty$, och alltså är enligt sats 3 Mellintransformen definierad för $s \in \langle 1, \infty \rangle$. Samma gäller för Mellintransformen till

$$\frac{e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$$

$n \geq 0$.

I stället för den oändliga utvecklingen utnyttjar vi

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x}(1 + e^{-x} + \dots + e^{-nx} + \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}).$$

Som ovan i exempel 8, får vi då

$$\mathcal{M}\left\{\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right\} = \Gamma(s)\left(\frac{1}{1^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right) + \mathcal{M}\left\{\frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}\right\}.$$

Alltså ska vi för att få satsen visa att $s \in \langle 1, \infty \rangle \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}\left\{\frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}\right\} = 0.$$

Välj $\varepsilon > 0$, godtyckligt. Bestäm $\delta > 0$ s.a.

$$0 \leq \int_0^\delta \left| \frac{x^{s-2}}{g(x)} \right| dx < \varepsilon.$$

Detta är möjligt eftersom $s \in \langle 1, \infty \rangle$ och $g(x)$ är analytisk i en omgivning av 0 och speciellt begränsad.

Då är

$$I_n = \left| \int_0^\infty \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} x^{s-1} dx \right| \leq \int_0^\delta \left| \frac{x^{s-2}}{g(x)} \right| dx + e^{-n\delta} \int_\delta^\infty \left| \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{s-1} \right| dx$$

eftersom

$$|e^{-(n+1)x}| \leq 1$$

om $x \in [0, \delta]$ och

$$|e^{-nx}| \leq e^{-n\delta}$$

om $x \in [\delta, \infty[$.

Välj nu $n \gg 0$ s.a. den andra summanden är mindre än ε . Observera att

$$\int_{\delta}^{\infty} \left| \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{s-1} \right| dx < \infty$$

eftersom integralen i Mellintransformen är absolutkonvergent. Sammantaget

$$I_n \leq 2\varepsilon$$

om $n \gg 0$. Alltså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0,$$

och därmed är satsen visad. □

Exempel 9.

$$\mathcal{M}\{e^{-x^2}\} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{s-1} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

Här har sats 11 använts.

11. TILLÄMPNINGAR PÅ GAMMA OCH ZETA FUNKTIONERNA

Kapitlet börjar med en viktig sats, som behövs för att beräkna singulära utvecklingar. Denna sats leder sedan till att polen för Riemanns zetafunktion kan beräknas. Först påminns om en definition från komplex analys.

Definition 5. [4, s 355] En funktion f säges vara meromorf i definitionsmängden D om den i varje punkt i D är antingen analytisk eller har en pol. Om f i D har polerna $\{a_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ med multipliciteterna m_{α} så skriver man

$$f^*(s) \asymp \sum_{\alpha \in A} \frac{1}{(s - a_{\alpha})^{m_{\alpha}}},$$

och kallar det $f^*(s)$ singulära utveckling.

Sats 17. *låt $f(x)$ ha transformen $f^*(s)$ med den fundamentala remsan $\langle \alpha, \beta \rangle$. Antag att $f(x)$ har Maclaurinutvecklingen*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_\xi x^\xi + O(x^\gamma)$$

i en omgivning av $x = 0$, där $-\gamma < -\xi \leq \alpha$. Då är $f^(s)$ fortsättningsbar till en meromorf funktion i remsan $\langle -\gamma, \beta \rangle$, där den har den singulära utvecklingen*

$$f^*(s) \asymp \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+1} + \dots + \frac{a_\xi}{s+\xi}.$$

Bevis. Antag att $f(x)$ har en Maclaurinutveckling i $x = 0$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_\xi x^\xi + O(x^\gamma). \quad (38)$$

För s i den fundamentala remsan $s \in \langle \alpha, \beta \rangle$ gäller att

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx = \int_0^1 f(x)x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx =$$

(använder antagandet (38))

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_\xi x^\xi + O(x^\gamma)]x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx = \\ &= \int_0^1 a_0x^{s-1}dx + \int_0^1 a_1xx^{s-1}dx + \int_0^1 a_2x^2x^{s-1}dx + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^1 a_\xi x^\xi x^{s-1}dx + \int_0^1 O(x^\gamma)x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx = \\ &= a_0 \left[\frac{x^s}{s} \right]_0^1 + a_1 \left[\frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_0^1 + a_2 \left[\frac{x^{s+2}}{s+2} \right]_0^1 + \dots \\ &\quad \dots + a_\xi \left[\frac{x^{s+\xi}}{s+\xi} \right]_0^1 + \int_0^1 O(x^\gamma)x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx = \\ &= \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + \dots + \frac{a_\xi}{s+\xi} + \int_0^1 O(x^\gamma)x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx. \end{aligned}$$

Enligt lemma 3 konvergerar integralen

$$\int_0^1 O(x^\gamma)x^{s-1}dx$$

på intervallet $\langle -\gamma, +\infty \rangle$. Integralen

$$\int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

konvergerar enligt sats 2 på intervallet $\langle -\infty, \beta \rangle$, vilket medför att summan av de två integraler är analytisk på remsan $\langle -\gamma, \beta \rangle$. Den singulära utvecklingen för $f^*(s)$ är alltså

$$\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + \dots + \frac{a_\xi}{s+\xi}.$$

□

Exempel 10. Funktionen $f(x) = e^{-x}$ har utvecklingen

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (39)$$

i $x = 0$. Enligt sats 17 har då Gammafunktionen $\Gamma(s) = \mathcal{M}\{e^{-x}\}$ (se ekvation (37)) den singulära utvecklingen

$$\Gamma(s) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n} \quad (40)$$

i hela $\mathbb{C}$.

Exempel 11. Enligt sats 16 är

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx$$

i den fundamentala remsan $\langle 1, \infty \rangle$.

Beräknar utvecklingen för $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ i en omgivning av $x = 0$. $f(x) = 1 - e^{-x}$ är analytisk och har nollställe för $x = 0$ d.v.s. $f(0) = 0$. Utvecklingen blir då

$$\begin{aligned} f(x) = 1 - e^{-x} &= 1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots\right) = \\ &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = \\ &= x \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1)!} + \dots\right) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

$g(x)$ är en analytisk funktion som uppfyller $g(0) \neq 0$. Eftersom $h(x) = e^{-x}$ är en analytisk funktion med $h(0) \neq 0$, så fås utvecklingen (för några tal B_n)

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} &= \frac{h(x)}{xg(x)} = \frac{1}{x} \left(B_0 + \frac{B_1x}{1!} + \frac{B_2x^2}{2!} + \frac{B_3x^3}{3!} + \dots + \frac{B_nx^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= \frac{B_0}{x} + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2x}{2!} + \frac{B_3x^2}{3!} + \dots + \frac{B_{n+1}x^n}{(n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (41)$$

B_{n+1} kallas Bernoullitalen: $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{(-1)}{2}$, osv. Alltså fås av detta en sats:

Sats 18. Den singulära utvecklingen för $\Gamma(s)\zeta(s)$ är

$$\Gamma(s)\zeta(s) \asymp \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(s+n)}. \quad (42)$$

Ett generellt fenomen som observeras i exemplen ovan är att

$$x^n \Leftrightarrow \frac{1}{s+n}.$$

Med hjälp av de singulära expansionerna för $\Gamma(s)$ och $\Gamma(s)\zeta(s)$ kan polen för $\zeta(s)$ bestämmas. Enligt den singulära utvecklingen (40)

$$\Gamma(s) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n} = \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{s+1} + \frac{(1)}{2(s+2)} + \frac{(-1)}{6(s+3)} + \dots,$$

har Gammafunktionen poler för $s = 0, -1, -2, -3, \dots$. Vid en jämförelse med den singulära expansionen (42)

$$\Gamma(s)\zeta(s) \asymp \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(s+n)} = \frac{B_0}{s-1} + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{2(s+1)} + \frac{B_3}{6(s+2)} + \dots,$$

så observeras att den också har en pol i $s = 1$. I en liten skiva runt $s = 1$ fås

$$\Gamma(s)\zeta(s) \asymp \frac{B_0}{s-1} + g(s)$$

där $g(s)$ är en analytisk funktion i skivan. Om sedan uttrycket divideras med $\Gamma(s)$ fås

$$\zeta(s) \asymp \frac{\frac{B_0}{s-1} + g(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{B_0}{\Gamma(s)} + \frac{g(s)}{\Gamma(s)}.$$

Eftersom $\Gamma(s)$ är en analytisk funktion nära $s = 1$, så har

$$(s-1)\zeta(s) \asymp (s-1)\left(\frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{B_0}{\Gamma(s)} + \frac{g(s)}{\Gamma(s)}\right) = \frac{B_0}{\Gamma(s)} + (s-1)\frac{g(s)}{\Gamma(s)}$$

ett gränsvärde $\neq 0$ när $s \rightarrow 1$. Med samma teknik följer att $s = 1$ är den enda polen till $\zeta(s)$. Alltså har följande sats visats

Sats 19. $\zeta(s)$ är en meromorf funktion med en enda enkelpol i $s = 1$.

Av beviset för sats 19 följer att

Korollarium 1.

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}$$

12. GAMMAFUNKTIONEN

Här samlas en del egenskaper hos Γ -funktionen och alternativa bevis för redan använda.

Gammafunktionen fås genom att sätta $f(x) = e^{-x}$ i Mellintransformen

$$\Gamma(s) = \mathcal{M}\{e^{-x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

för $s > 0$. Gammafunktionen är analytisk i den fundamentala remsan $\langle 0, +\infty \rangle$.

Med partiel integration verifieras funktionalekvationen

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+1)-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s x^{1-1} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x} x^s]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) s x^{s-1} dx = \\ &= 0 + s \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = s\Gamma(s) \end{aligned} \tag{43}$$

vilket tillåter att utvidga $\Gamma(s)$ till en meromorf funktion i hela komplexa talplanet $\mathbb{C}$.

Gamma funktionen $\Gamma(s)$ uppfyller också $\Gamma(1) = 1$.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^0 dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^T = 0 - (-1) = 1 . \quad (44)$$

Med funktionalekvationen (43) kan uttrycket

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+m+1)}{s(s+1)(s+2)\dots(s+m)} \quad (45)$$

härledas. Eftersom $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ och

$$\begin{aligned} \Gamma(s+2) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+2)-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+1} dx = \\ &= [-e^{-x} x^{s+1}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x})(s+1)x^{(s+1)-1} dx = \\ &= 0 + (s+1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+1)-1} dx = \\ &= (s+1)\Gamma(s+1) = (s+1)s\Gamma(s) \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\Gamma(s+2) = (s+1)s\Gamma(s) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(s+3) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+3)-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+2} dx = \\ &= [-e^{-x} x^{s+2}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x})(s+2)x^{(s+2)-1} dx = \\ &= 0 + (s+2) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+2)-1} dx = (s+2)\Gamma(s+2) = \\ &= (s+2)(s+1)s\Gamma(s) \end{aligned}$$

samt att

$$\Gamma(s+3) = (s+2)(s+1)s\Gamma(s) \quad (47)$$

Detta resulterar i att

$$\begin{aligned} \Gamma(s+m+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+m+1)-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+m} dx = \\ &= [-e^{-x} x^{s+m}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x})(s+m)x^{(s+m)-1} dx = 0 + (s+m) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(s+m)-1} dx = \\ &= (s+m)\Gamma(s+m) = (s+m)\dots(s+2)(s+1)s\Gamma(s) \end{aligned}$$

alltså

$$\Gamma(s+m+1) = (s+m) \dots (s+2)(s+1)s\Gamma(s).$$

Vilket ger att

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+m+1)}{(s+m) \dots (s+2)(s+1)s}.$$

Detta visar att uttrycket för $\Gamma(s)$ ovan precis som (54) har enkelpoler för $s = 0, -1, -2, -3, \dots$

Med samma resonemang som ovan kan man visa att om $s = n$ i funktionalekvationen där n är ett positivt heltal fås

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Om $s = s-1$ i (43) fås

$$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$$

där

$$\Gamma(s-1) = (s-2)\Gamma(s-2).$$

Alltså kan uttrycket skrivas som

$$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1) = (s-1)(s-2)\Gamma(s-2) \quad (48)$$

osv.

På liknande sätt kan man visa att om $s = 1-s$ i (43) fås

$$\Gamma(1-s) = (-s)\Gamma(-s) = (-s)(-1-s)\Gamma(-1-s)$$

osv.

En annan viktig funktionalekvation för gammafunktionen är Eulers reflexionsformel

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (49)$$

Om $s = \frac{1}{2}$ i formeln fås att

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (50)$$

där den positiva roten väljs, eftersom $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$. Gammafunktionens faktoriseringsegenskaper kan också användas för att beräkna t.ex. $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Exempel 12. Genom att använda funktionalekvationen $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ på $\Gamma(\frac{7}{2})$ samt ekvation (50) fås att

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Om n är ett jämt positivt heltal kan på liknande sätt ett generellt uttryck skrivas. Detta görs genom att sätta $s = \frac{n+1}{2}$ i ekvation (48) vilket ger

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)\left(\frac{n+1}{2} - 2\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - 2\right) = \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\dots \\ &\dots\left(\frac{n-(n-5)}{2}\right)\left(\frac{n-(n-3)}{2}\right)\left(\frac{n-(n-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-(n-1)}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\dots\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (51)$$

Gammafunktionen introducerades av Euler [3]. Den kan också skrivas, för alla rella eller komplexa tal s , med formeln

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{m}\right) e^{-\frac{s}{m}} \right\} \quad (52)$$

där γ är Eulers konstant som definieras av

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \log m \right] \simeq 0,5772. \quad (53)$$

Med (52) kan man visa att

$$\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^s}{s(s+1)(s+2)(s+3)\dots(s+m)}. \quad (54)$$

För varje $s = 0, -1, -2, -3, \dots$, har $\Gamma(s)$ enkla poler.

Exempel 13. För att beräkna residyn vid polen $s = -3$ fås enligt (54)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(\Gamma(s), -3) &= (s+3)\Gamma(s)_{s \rightarrow -3} = \\
 &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ s \rightarrow -3}} \frac{m!m^s}{s(s+1)(s+2)(s+4)\dots(s+m)} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!m^{-3}}{(-3)(-2)(-1)(1)(2)(3)\dots(m-4)(m-3)} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!m^{-3}}{(-3)(-2)(-1)(1)(2)(3)\dots(m-4)(m-3)} \cdot \frac{(m-2)(m-1)m}{(m-2)(m-1)m} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!m^{-3}(m-2)(m-1)m}{(-3)(-2)(-1)(1)(2)(3)\dots(m)} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{-2}(m-2)(m-1)}{(-3)(-2)(-1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{-2}(m^2 - 3m + 2)}{(-3)(-2)(-1)} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2})}{(-3)(-2)(-1)} = \\
 &= \frac{1}{(-3)(-2)(-1)} = \frac{(-1)^3}{3!} .
 \end{aligned}$$

Generellt sett är residyn vid en pol $s = -n$ där n är noll eller ett positivt heltal

$$\operatorname{Res}(\Gamma(s), -n) = \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} .$$

Summan av residyerna vid polerna på den negativa reella axeln inklusive origo för $\Gamma(s)$ är

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \frac{1}{e} .$$

REFERENSER

- [1] Arne Persson, Lars-Christer Böiers, *Analys i en variabel*, Studentlitteratur and-ra upplagan, (2001).
- [2] Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Philippe Dumas *Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums*, Algorithms Project, INRIA, Rocquencourt, F-78153 Le Chesnay, France. E-mail address: Philippe.Flajolet@inria.fr, Xavier.Gourdon@inria.fr, Philippe.Dumas@inria.fr
- [3] N.W. MacLachlan, *Complex variable and operational calculus with technical applications*, Cambridge at the university press New York: The Macmillan Company, (1947).
- [4] E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis with applications to engineering and science*, third edition Prentice hall, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey 07458, (2003).
- [5] Martin Tamm, *Martin Tamms föreläsningsanteckningar, analys 2, HT 02*, <http://matematik.su.se/matamm/undervisning/pdf/Analys2/>, (2002).