



EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Hermitepolynom

av

Djordje Rafailović

2007 - No 10

Hermitepolynom

Djordje Rafailović

Examensarbete i matematik 10 poäng, påbyggnadskurs

Handledare: Rikard Bøgvad

2007

HERMITEPOLYNOM

DJORDJE RAFILOVIC

INNEHÅLL

1. Inledning	3
2. Hermitepolynom	3
3. Hermites differentialekvation	5
4. Hermitepolynomens rekursiva relation	12
5. Ortogonaliteten	13
5.1. Ortogonala polynom	15
5.2. Hermitepolynomen och ortogonalitet	15
5.3. Utveckling i serier	20
6. Genererande funktioner	22
6.1. Hermitepolynomen och genererande funktioner	23
6.2. Tillämpningar av Hermites genererande funktion	24
7. En alternativ definition	25
7.1. Rekursiv relation för de probabilistiska hermitepolynomen	26
8. En kombinatorisk tolkning av hermitepolynomen	27
8.1. Ortogonala polynom och enumeration	27
8.2. Matchningar	27
8.3. Uppräkning av möjliga matchningar	28
8.4. Matchningar och Hermitepolynomen	30
9. NAIRU skattning	33
10. Historisk redogörelse	36
11. Arbetet i formler	39
Referenser	40

1. INLEDNING

Arbetet kommer i mångt och mycket behandla en uppsättning polynom som går under namnet **Hermitepolynom**¹.

Låt oss inledningsvis titta på de första i raden av dessa, för att på så sätt bilda oss en uppfattning vad kommande sidor kommer handla om:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= 2x \\ p_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ p_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ p_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ p_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ p_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jag ska försöka presentera specifika egenskaper som dessa polynom har samt ge en liten inblick i hur de praktiskt används och i vilka syften.

2. HERMITEPOLYNOM

Hermitepolynomen betecknas vanligtvis som $H_n(x)$ där n är gradtalet för det specifika polynomet.

En vanlig definition av polynomen görs med hjälp av *Rodrigues formel*:

Definition 1. Låt n vara ett heltal. Hermitepolynomet av grad n ges då av

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (2.1)$$

Exempel 1. Låt oss m.h.a. formel (2.1) beräkna värdet för de fem första $H_n(x)$, och jämföra resultatet med polynomen givna i inledningen. Vi börjar med att räkna ut derivatorna:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{-x^2} &= (-2x)e^{-x^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} e^{-x^2} \right) = \frac{d}{dx} \left((-2x)e^{-x^2} \right) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \\ \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} \right) = \frac{d}{dx} \left((4x^2 - 2)e^{-x^2} \right) = (12x - 8x^3)e^{-x^2} \\ \frac{d^4}{dx^4} e^{-x^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} \right) = \frac{d}{dx} \left((12x - 8x^3)e^{-x^2} \right) = \\ &= (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2} \end{aligned}$$

¹Efter den berömde matematikern *Charles Hermite*

Sätter vi in dessa värden i definitionen av $H_n(x)$ för respektive n -värde får vi

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= (-1)e^{x^2}(-2x)e^{-x^2} = 2x \\ H_2(x) &= e^{x^2}(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= (-1)e^{x^2}(12x - 8x^3)e^{-x^2} = 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= e^{x^2}(12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2} = 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vi ser att dessa fem $H_n(x)$ är identiska med de fem första $p_n(x)$ givna i inledningen.

Låt oss nu visa att $H_n(x)$ verkligen är polynom för alla n .

SATS 1. $H_n(x)$ är polynom för alla heltal n .

Bevis. Vi har redan visat att påståendet är sant för $n = 1, 2$.

Från ekvation (2.1) följer att:

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2} \quad (2.3)$$

Låt oss anta att $H_{n-1}(x)$ är ett polynom av grad $n - 1$.

Sätter vi $m = n - 1$ i ekvation (2.3), får vi

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) = (-1)^{n-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2} \quad (2.4)$$

Deriverar vi (2.4) m.a.p. x får vi (2.3), dvs.

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) \stackrel{(2.4)}{=} \frac{d}{dx} \left((-1)^{n-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2} \right) = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{d}{dx} [H_{n-1}(x)] e^{-x^2} + (-1)^{n-1} H_{n-1}(x) (-2x) e^{-x^2} = \\ &= -(-1)^n \frac{d}{dx} [H_{n-1}(x)] e^{-x^2} + (-1)^n H_{n-1}(x) 2x e^{-x^2} = \\ &= (-1)^n \left[\left(2x - \frac{d}{dx} \right) H_{n-1}(x) \right] e^{-x^2} \end{aligned}$$

alltså

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx} \right) H_{n-1}(x) \quad (2.5)$$

och om H_{n-1} är ett polynom av grad $n - 1$, så får vi enligt (2.5) att $H_n(x)$ är ett polynom av grad n , och påståendet är sant för alla n enligt induktionsprincipen. $\square$

När vi nu bildat oss en uppfattning om hur dessa polynom ser ut och hur de effektivt kan uttryckas i en kompakt form, kan vi börja titta på vilka egenskaper de har och var i matematiken de visar sig vara användbara.

Låt oss börja med att titta på en viss differentialekvation där det visar sig att Hermitepolynomen dyker upp i lösningarna.

3. HERMITES DIFFERENTIALEKVATION

Hermite's differentialekvation är ett special fall av ett Sturm-Liouville problem.

Definition 2. Låt $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ och $q(x)$ vara givna funktioner, a_1, a_2, b_1 och b_2 vara givna konstanter och egenvärdet λ vara den okända parametern. En differentialekvation över ett intervall $a \leq x \leq b$ på formen

$$\left(r(x)y'(x)\right)' + \left(q(x) + \lambda p(x)\right)y(x) = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

tillsammans med randvillkoren

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

kallas för ett ***Sturm-Liouville problem*** (*S-L problem*).

S-L-problem spelar en viktig roll inom tillämpad matematik. Den tillhörande teorin hjälper oss t ex vid lösningen av en mängd randvärdeproblem (olika matematiska formuleringar av problem från fysiken). Exempelvis kan man med hjälp av S-L teorin lösa olika "värmeproblem" och "vågproblem" (se vidare [4]).

Definition 3. *Differentialekvationen:*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (3.2)$$

där n är ett icke-negativt heltal, kallas ***Hermite's differentialekvation***.

Observation 1. Låt i Definition 2, $[a, b]$ ersättas med $(-\infty, \infty)$, $p(x) = e^{-x^2/2}$, $q(x) = 0$, $r(x) = e^{-x^2/2}$ och $\lambda = 2n$. Vi ser då att ekvation (3.1) blir

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \frac{dy}{dx} \right) + 2ne^{-x^2/2} y = 0 \quad (3.3)$$

som är definierad på $-\infty < x < \infty$. Deriverar vi uttrycket inom parenteser samt multiplicerar båda sidor med $e^{x^2/2}$ får vi ekvation (3.2).

SATS 2. Hermitepolynomen $H_n(x)$ är lösningar till ekvationen (3.2).

Bevis. Låt oss försöka bevisa denna sats i två steg: ett där vi försöker få en allmän bild över hur lösningarna kommer se ut, och det andra där vi försöker visa en koppling mellan dessa lösningar och hermitepolynomen.

Steg1: Låt

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j. \quad (3.4)$$

Då är

$$y' = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$$

och

$$y'' = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}$$

Om vi stoppar in dessa i ekvation (3.2) får vi:

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - 2x \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} + 2n \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0$$

som kan skrivas som:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} 2j a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} 2n a_j x^j = 0$$

Alltså har vi att:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left((j+2)(j+1) a_{j+2} - 2j a_j + 2n a_j \right) x^j = 0$$

och vi får den rekursiva relationen

$$(j+2)(j+1) a_{j+2} - 2j a_j + 2n a_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Ur denna kan vi lösa ut a_{j+2} :

$$a_{j+2} = \frac{2(j-n)}{(j+2)(j+1)} a_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Vi observerar här att varje a_n kan för jämna n skrivas som en multipel av a_0 och för udda n som en multipel av a_1 på följande sätt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0 \\
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= \frac{-2n}{2}a_0 = -na_0 \\
a_3 &= \frac{2(1-n)}{(1+2)(1+1)}a_1 = \frac{2(1-n)}{3!}a_1 \\
a_4 &= \frac{2(2-n)}{(2+2)(2+1)}a_2 = \frac{2(2-n)}{4 \cdot 3}a_2 = \frac{2(2-n)}{4 \cdot 3} \cdot \frac{-2n}{2}a_0 = \\
&= \frac{2^2(2-n)(-n)}{4!}a_0 \\
a_5 &= \frac{2(3-n)}{(3+2)(3+1)}a_3 = \frac{2(3-n)}{5 \cdot 4}a_3 = \frac{2(3-n)}{5 \cdot 4} \cdot \frac{2(1-n)}{3!}a_1 = \\
&= \frac{2^2(3-n)(1-n)}{5!}a_1 \\
a_6 &= \frac{2(4-n)}{(4+2)(4+1)}a_4 = \frac{2(4-n)}{6 \cdot 5}a_4 = \frac{2(4-n)}{6 \cdot 5} \cdot \frac{2(2-n)}{4 \cdot 3} \cdot \frac{-2n}{2}a_0 = \\
&= \frac{2^3(4-n)(2-n)(-n)}{6!}a_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Stoppar vi in dessa a -värden i (3.4) får vi att

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots = \\
&= a_0 \left(1 + (-n)x^2 + \frac{2^2(2-n)(-n)}{4!}x^4 + \dots \right) + \\
&\quad + a_1 \left(x + \frac{2(1-n)}{3!}x^3 + \frac{2^2(3-n)(1-n)}{5!}x^5 + \dots \right)
\end{aligned}$$

Resultat ovan kan sedan uttryckas som följande lemma:

Lemma 1. *Varje lösning till ekvation (3.2) kan skrivas som:*

$$y(x) = a_0 y_{j,n}(x) + a_1 y_{u,n}(x)$$

där

$$\begin{aligned}
y_{j,n}(x) &= 1 + (-n)x^2 + \dots \quad (\text{endast jämna potenser}) \\
y_{u,n}(x) &= x + \frac{2(1-n)}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{endast udda potenser})
\end{aligned}$$

Att lösningarna i lemma 1 är polynomiella kan man illustrera med följande exempel.

Exempel 2. *Låt oss betrakta fallet $n = 6$, samt begynnelsevärde problemet där $y(0) = a_0 = 1$ och $y'(0) = a_1 = 0$, dvs. låt oss titta på*

lösningen till

$$\begin{cases} y'' - 2x + 2 \cdot 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Då $a_1 = 0$ följer det från lemma 1 att alla udda potenser kommer försvinna från lösningen, och det som blir kvar är

$$y(x) = a_0 y_{j,n}(x)$$

vi har vidare givet att $a_0 = 1$, ur detta följer att

$$\begin{aligned} a_2 &= -n \cdot a_0 = -6 \\ a_4 &= \frac{2^2(2-n)(-n)}{4!} \cdot a_0 = \frac{2^2(2-6)(-6)}{4!} = 4 \\ a_6 &= \frac{2^3(4-n)(2-n)(-n)}{6!} a_0 = \frac{2^3(4-6)(2-6)(-6)}{6!} = -\frac{8}{15} \end{aligned}$$

Hur blir det med a_8 ?

$$a_8 \stackrel{(3.5)}{=} \frac{2 \overbrace{(6-6)}^{=0}}{(6+2)(6+1)} a_6 = 0$$

Vi vet dessutom från relationen (3.5) att a_{10} kommer vara en multipel av a_8 , att a_{12} kommer vara en multipel av a_{10} osv. Resultatet blir med andra ord att

$$a_8 = a_{10} = a_{12} = a_{14} = \dots = 0$$

alla jämna potenser större än 6 kommer alltså försvinna från lösningen och det som blir kvar är 4 nollskilda koefficienter. Vi får följande polynom

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left(1 + (-n)x^2 + \frac{2^2(2-n)(-n)}{4!}x^4 + \frac{2^3(4-n)(2-n)(-n)}{6!}x^6 \right) = \\ &= 1 - 6x^2 + 4x^4 - \frac{8}{15}x^6 \end{aligned}$$

En heltalsmultipel av detta polynom är vad som i inledningen definierades som hermitepolynomet av grad 6:

$$H_6 = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

Observation 2. Hermitepolynomen är i sin grundform definierade till att den ledande koefficienten ska vara 2^n , där n är det specifika polynoms gradtal.

Vill vi att lösningen till ekvation (3.6) ska vara på just denna form, återstår det bara att transformerar dess ledande koefficienten till 2^6 . Detta åstadkommer vi genom att multiplicera $y(x)$ med

$$-\frac{15}{8} \cdot 2^6 = -120$$

dvs.

$$\begin{aligned}
-120y(x) &= -120 \cdot \left(1 - 6x^2 + 4x^4 - \frac{8}{15}x^6\right) = \\
&= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120
\end{aligned}$$

Vi fick redan här en inblick i att en koppling existerar mellan lösningarna till ekvation (3.2) och hermitepolynomen, det formella beviset illustreras dock i steg 2 nedan.

Det visar sig att ekvation (3.2), där $n = 0, 1, 2, \dots$ alltid kommer ha en polynomiell lösning av grad n . Vi kan sammanfatta detta i följande sats:

SATS 3. Låt n vara ett positivt heltal.

- (1) Om n är jämnt, så kommer begynnelsevärde problemet:
 $a_0 = 1, a_1 = 0$ ge oss en polynomiell lösning till ekvation (3.2).
 - (2) Om n är udda, så kommer begynnelsevärde problemet:
 $a_0 = 0, a_1 = 1$ ge oss en polynomiell lösning till ekvation (3.2).
- För ett fixt heltal n definierar vi:

$$y_n(x) := \begin{cases} y_{u,n}(x) & n \text{ udda} \\ y_{j,n}(x) & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

som en lösning till ekvation (3.2).

- (3) alla polynomiella lösningar till ekvation (3.2) skriver vi som

$$C \cdot y_n(x), \quad C \in \mathbb{R}$$

Steg2: Då vi vet hur lösningarna kommer se ut kan vi nu bevisa hur dessa kan kopplas till hermitepolynomen. Låt oss börja med en vidareutveckling av observation 2, och avrunda med ett formellt bevis.

Observation 3. $y_{u,n}$ och $y_{j,n}$ är båda ändliga, och den ledande koefficienten kan lätt fås fram m.h.a. den rekursiva relationen (3.5).

Exempel 3. Låt n vara jämnt.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2(n-2-n)}{(n-2+2)(n-2+1)} a_{n-2} = \frac{2(-2)}{n(n-1)} a_{n-2} \\
a_{n-2} &= \frac{2(n-4-n)}{(n-4+2)(n-4+1)} a_{n-4} = \frac{2(-4)}{(n-2)(n-3)} a_{n-4} \\
a_{n-4} &= \frac{2(n-6-n)}{(n-6+2)(n-6+1)} a_{n-6} = \frac{2(-6)}{(n-4)(n-5)} a_{n-6} \\
&\vdots \\
a_4 &= \frac{2(2-n)}{(2+2)(2+1)} a_2 = \frac{2(2-n)}{4 \cdot 3} a_2 \\
a_2 &= \frac{2(0-n)}{(0+2)(0+1)} a_0 = \frac{2(-n)}{2 \cdot 1} a_0 = \frac{2(-n)}{2 \cdot 1}
\end{aligned}$$

från detta får vi att

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(-2)}{n(n-1)} \cdot \frac{2(-4)}{(n-2)(n-3)} \cdot \frac{2(-6)}{(n-4)(n-5)} \cdots \frac{2(2-n)}{4 \cdot 3} \cdot \frac{2(-n)}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{2^{n/2}(-1)^{n/2}n(n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2}{n!} = \frac{2^{n/2}(-1)^{n/2}}{(n-1)(n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \end{aligned}$$

För $n = 6$ får vi alltså

$$a_6 = \frac{2^{6/2}(-1)^{6/2}}{(6-1)(6-3)(6-5)} = \frac{2^3(-1)^3}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{-8}{15}$$

dvs. samma som i exempel 2.

För udda n kommer den ledande koefficienten bli:

$$a_n = \frac{2^{(n-1)/2}(-1)^{(n-1)/2}}{n(n-2)(n-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}$$

Enligt observation 2 kan man nu transformera varje lösning $y_n(x)$ till att vara på formen $H_n(x)$.

SATS 4. Låt n vara ett heltal. Vi får att

$$\hat{H}_n(x) = t_n y_n(x)$$

där

$$t_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cdot \frac{(n-1)(n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^{n/2}} \cdot 2^n & \text{där } n \text{ jämnt} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cdot \frac{n(n-2)(n-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^{(n-1)/2}} \cdot 2^n & \text{där } n \text{ udda} \end{cases}$$

och

$$\hat{H}_n(x) = H_n(x)$$

Alltså har vi sett att lösningarna y_n är, sånär som på multiplikation med en konstant, Hermitepolynomen. Varför detta är sant kommer strax behandlas, men först ett nyttigt lemma:

Lemma 2. Om y_n är en polynomiell lösning till ekvation

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \quad (3.7)$$

så är y'_n en polynomiell lösning till

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2(n-1)y(x) = 0 \quad (3.8)$$

Bevis. Låt oss fixera ett heltal n , samt observera att om man deriverar ett n -polynom får man ett nytt polynom av grad $n-1$. Vi kan vidare sätta

$$\begin{aligned} y_n &:= f_n \\ y'_n &:= f_{n-1} \end{aligned}$$

Då y_n löser ekvation (3.7) följer det från lemma 1 att f_{n-1} löser

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2(n-1)y(x) = 0$$

alltså löser y'_n ekvation (3.8).

□

Korollarium 1. *Det gäller vidare att:*

$$y'_n = c_n \cdot y_{n-1} \quad (3.9)$$

Om vi antar att y_n är en polynomiell lösning till ekvation (3.2), kan ekvationen efter omskrivning uttryckas som:

$$y_n(x) = -\frac{1}{2n} \left(y''_n(x) - 2xy'_n(x) \right) \quad (3.10)$$

Vidare vet vi att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y'_n(x) e^{-x^2} \right) &= y''_n(x) e^{-x^2} - 2xy'_n(x) e^{-x^2} = \\ &= e^{-x^2} (y''_n(x) - 2xy'_n(x)) \\ &\Leftrightarrow \\ e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y'_n(x) e^{-x^2} \right) &= y''_n(x) - 2xy'_n(x) \end{aligned}$$

och ekvation (3.10) kan skrivas som:

$$y_n(x) = -\frac{1}{2n} e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y'_n(x) e^{-x^2} \right) \quad (3.11)$$

enligt den rekursiva relationen (3.9) kan vi skriva (3.11) som

$$y_n(x) = -\frac{c_n}{2n} e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y_{n-1}(x) e^{-x^2} \right)$$

För att förenkla räkningen något, kan vi låta $C_n = \frac{c_n}{2n}$, dvs.

$$y_n(x) = -C_n e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y_{n-1}(x) e^{-x^2} \right) \quad (3.12)$$

Vi kan nu "upprepa" formel (3.12), samt samla alla konstanta faktorer i C -tal:

$$\begin{aligned} y_{n-1}(x) &= -C_{n-1} e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y_{n-2}(x) e^{-x^2} \right) \\ y_{n-2}(x) &= -C_{n-2} e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y_{n-3}(x) e^{-x^2} \right) \\ &\vdots \\ y_2(x) &= -C_2 e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y_1(x) e^{-x^2} \right) \\ y_1(x) &= -C_1 e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \right) \end{aligned}$$

Vi får alltså att:

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= -C_n e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(\left[-C_{n-1} e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(y_{n-2}(x) e^{-x^2} \right) \right] e^{-x^2} \right) = \\
&= (-1)^2 C_n C_{n-1} e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} e^{-x^2} \frac{d}{dx} \left(y_{n-2}(x) e^{-x^2} \right) \right) = \\
&= (-1)^2 C_n C_{n-1} e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(y_{n-2}(x) e^{-x^2} \right) = \\
&= (-1)^3 C_n C_{n-1} C_{n-2} e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} \left(y_{n-3}(x) e^{-x^2} \right) = \\
&\vdots \\
&= (-1)^{n-1} C_n C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_2 e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(y_1(x) e^{-x^2} \right) = \\
&= (-1)^n C_n C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_2 C_1 e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right)
\end{aligned}$$

dvs.

$$y_n(x) = C(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) \quad (3.13)$$

där $C = C_1 C_2 \cdots C_n$. Enligt ekvation (2.1) kan vi nu skriva lösningarna som:

$$y_n(x) = C \cdot H_n(x) \quad (3.14)$$

vilket bevisar påståendet att Hermitepolynomen löser differentialekvationen (3.2), och ger oss samtidigt ett intressant tillämpningsområde för polynomerna. $\square$

Från teorin om Hermites differentialekvation visar det sig vidare att man kan härleda en rekursiv relation för Hermitepolynomen. Låt oss nu försöka göra just detta.

4. HERMITEPOLYNOMENS REKURSIVA RELATION

Då H_n är lösningar till ekvation (3.2), får vi från lemma 2 att H'_{n+1} uppfyller ekvationen:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

samt att

$$H'_{n+1}(x) = c \cdot H_n(x) \quad (4.1)$$

Tittar vi närmare på ekvation 4.1 ser vi att den ledande koefficienten för $H'_{n+1}(x)$ kommer vara $2^{n+1}(n+1)$ och för $cH_n(x)$ är den $c2^n$. Vi får alltså att

$$\left. \begin{array}{l} 2^{n+1}(n+1)x^n \\ c \cdot 2^n x^n \end{array} \right\} \Rightarrow c = 2(n+1).$$

Ekvation 4.1 blir m.a.o.

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) \quad (4.2)$$

om vi vidare låter indexeringen för $H'_{n+1}(x)$ att vara n , får vi

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (4.3)$$

Ett resonemang liknande det ovan ger också relationen

$$H''_{n+1}(x) = 2(n+1)H'_n(x)$$

denna tillsammans med relation (4.3) ger oss

$$H''_{n+1}(x) = 2(n+1)H'_n(x) \stackrel{(4.3)}{=} 2(n+1)2nH_{n-1}(x) \quad (4.4)$$

Då hermitepolynomen löser differentialekvationen (3.2) kan vi skriva detta som

$$\begin{aligned} \underbrace{H''_{n+1}(x)}_{(4.4)} - 2x \underbrace{H'_{n+1}(x)}_{(4.2)} + 2(n+1)H_{n+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ 2(n+1)2nH_{n-1}(x) - 2x2(n+1)H_n(x) + 2(n+1)H_{n+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{2(n+1)2nH_{n-1}(x)}{2(n+1)} - \frac{2x2(n+1)H_n(x)}{2(n+1)} + \frac{2(n+1)H_{n+1}(x)}{2(n+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ 2nH_{n-1}(x) - 2xH_n(x) + H_{n+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Relation (4.5) brukar kallas *Hermitepolynomens rekursiva relation*.

Låt oss nu vända blicken på egenskapen att Hermitepolynomen är ortogonala, och förklara innebörden av detta.

5. ORTOGONALITETEN

Jag försöker här ge en inblick vad som menas med ortogonala funktioner, vi börjar med ett par definitioner:

Definition 4. Styckvis kontinuerliga funktioner $C_p(a, b)$: Låt f vara kontinuerlig på $a < x < b$, utom möjligen i ett visst ändligt antal punkter $x_1, \dots, x_{n-1}$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$$

Vi antar att alla ensidiga gränsvärden för f existerar

$$f(x_\alpha+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_\alpha \\ x > x_\alpha}} f(x), \quad f(x_\alpha-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_\alpha \\ x < x_\alpha}} f(x)$$

Om detta gäller så har vi att $C_p(a, b)$ är ett funktionsrum, dvs. om $f_1, f_2 \in C_p(a, b)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, så

$$c_1f_1 + c_2f_2 \in C_p(a, b), \quad f_1f_2 \in C_p(a, b).$$

Om $C_p(a, b)$ dessutom är ett euklidiskt rum, finns en **inre produkt**, som definieras som

$$(f_1, f_2) := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

och uppfyller axiomen:

- (1) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$
- (2) $(\lambda \cdot f, g) = \lambda(f, g)$
- (3) $(f, f) \geq 0$

där $f, g, h \in C_p(a, b)$.

Vi definierar **normen** för f som

$$\|f\| := (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

samt **avståndet** mellan två funktioner i $C_p(a, b)$ som

$$\|f - g\| := \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

Med dessa definitioner i grunden kan vi nu ge oss på en definition av vad som menas *ortogonalitet*.

Definition 5. (Ortogonalitet)

Två funktioner i $C_p(a, b)$ sägs vara **ortogonala** om inre produkten mellan funktionerna är noll, dvs. om

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \tag{5.1}$$

Det är brukligt att man *normaliserar* ortogonala funktioner på ett liknande sätt som för vektorer, dvs. delar funktionen med dess norm.

Exempel 4. Vi kan lätt visa med givna definitioner på inre produkt och norm, att normen av en normerad funktion är lika med 1:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \left(\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right) dx \right)^{1/2} &= \frac{1}{\|f(x)\|} \cdot \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\|f(x)\|}{\|f(x)\|} = 1 \end{aligned}$$

Vi kan nu utvidga definitionen av ortogonalitet och normalitet till att även gälla för en hel mängd av funktioner, eller rättare sagt för en *familj* av funktioner.

Definition 6. En familj funktioner $\{\psi(x)_n\}_{n=1}^N$ kallas **ortogonal** om

$$(\psi_n, \psi_m) = 0 \quad \text{då } n \neq m$$

En familj $\{\phi(x)_n\}_{n=1}^N$ kallas för ett **ON-system** om

$$(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 0 & \text{då } n \neq m \\ 1 & \text{då } n = m \end{cases}$$

Låt oss titta på ett exempel som förhoppningsvis hjälper oss att förstå begreppen ortogonalitet och ON-system lite bättre.

Exempel 5. Betrakta familjen $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ i intervallet $0 < x < \pi$,²

$$\begin{aligned} (\cos nx, \cos mx) &= \begin{cases} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx, & \text{då } n \neq m \\ \int_0^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}, & \text{då } n = m \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x dx = 0, & \text{då } n \neq m \\ \int_0^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}, & \text{då } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Vi har alltså att i intervallet $0 < x < \pi$ så är familjen $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonal om $n \neq m$. För att $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ ska bli ett ON-system måste vi normera $\cos nx$:

$$\frac{\cos nx}{\|\cos nx\|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Familjen $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ är nu ett ON-system.³

5.1. Ortogonala polynom. Innan vi ger oss på att betrakta polynom, låt oss göra en liten utvidgning av Definition 5:

Definition 7. En familj av funktioner $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sägs vara **ortogonal med viktfunktion** $v(x)$ på intervallet $[a, b]$ om:

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) v(x) dx = 0 \quad (5.2)$$

för varje $m \neq n$, där $v(x)$ är en fix icke-negativ funktion som inte är beroende av m och n .

En viktig klass av ON-system är just den som består av ortogonala polynom $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, där n är polynomets grad.

Förutom egenskap 5.2 besitter dessa många andra användbara egenskaper i stil med de som här visas för Hermitepolynomen.

Ortogonala polynom är av stor betydelse i matematisk fysik, approximations teori, teorin om mekanisk kvadratur osv.

5.2. Hermitepolynomen och ortogonalitet. Det visar sig att följande gäller för Hermitepolynomen och viktfunktionen $v(x) = e^{-x^2}$ på intervallet $-\infty < x < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{då } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{då } n = m \end{cases} \quad (5.3)$$

²påminner om att:

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \end{cases} \Rightarrow \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

³familjen $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ (observera att n tillåts vara 0), används bl.a. för att få fram Fouriers cosinus serier

Exempel 6. Visa att (5.3) gäller!

Bevis. Från Observation 1 vet vi att Hermitepolynomen löser differentialekvationen (3.3), vi kan alltså skriva:

$$e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_n(x) \right) + 2nH_n(x) = 0 \quad (5.4)$$

Låt oss dessutom skriva denna ekvation då $H_m(x)$ utgör lösningen:

$$e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_m(x) \right) + 2mH_m(x) = 0 \quad (5.5)$$

multipliserar vi ekvation (5.4) med $H_m(x)$, ekvation (5.5) med $H_n(x)$ och subtrahera dessa, får vi:

$$\begin{aligned} e^{x^2} \left(H_m(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_n(x) \right) - H_n(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_m(x) \right) \right) + \\ -2(m-n)H_m(x)H_n(x) = 0 \\ \Rightarrow 2(m-n)e^{-x^2}H_m(x)H_n(x) = H_m(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_n(x) \right) + \\ -H_n(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_m(x) \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Observera att:

$$H_m(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(H_m(x) e^{-x^2} H'_n(x) \right) - e^{-x^2} H'_n(x) H'_m(x) \quad (5.7)$$

$$H_n(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_m(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(H_n(x) e^{-x^2} H'_m(x) \right) - e^{-x^2} H'_m(x) H'_n(x) \quad (5.8)$$

stoppar vi in (5.7) och (5.8) in i (5.6) och integrerar denna från $-\infty$ till ∞ får vi:

$$\begin{aligned} 2(m-n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \left(H_m(x) H'_n(x) - H_n(x) H'_m(x) \right) \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \left(H_m(x) H'_n(x) - H_n(x) H'_m(x) \right) \right) dx + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \left(H_m(x) H'_n(x) - H_n(x) H'_m(x) \right) \right) dx = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{-\xi^2} \left[H_m(x) H'_n(x) - H_n(x) H'_m(x) \right]_{\xi}^0 + \\ &\quad + \lim_{\xi \rightarrow \infty} e^{-\xi^2} \left[H_m(x) H'_n(x) - H_n(x) H'_m(x) \right]_0^{\xi}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vi ser att (5.9) är på formen: ett polynom delat på en exponentialfunktion. Det finns ett standardgränsvärde som lyder $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ och observationen att ett godtyckligt polynom:

$$\begin{aligned} |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0| &< |a_n x^n + a_{n-1} x^n + \dots + a_1 x^n + a_0 x^n| = \\ &= |(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)x^n| \leq |b_n| |x^n| \end{aligned}$$

gör att uttrycket (5.9) är lika med noll. Dvs.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0, \quad \text{då } m \neq n \quad (5.10)$$

Vi har således visat att polynomen $H_n(x)$ är ortogonala med avseende på viktfunktionen e^{-x^2} . Det som återstår att visa är vad integralen i (5.3) blir då $m = n$.

Låt oss definiera funktionen I som

$$I(n, m) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx. \quad (5.11)$$

Då är

$$I(n-1, n+1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) H_{n+1}(x) dx = 0 \quad (5.12)$$

Vi har i avsnittet om Hermitepolynomens rekursiva relation sett att följande relation gäller:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (5.13)$$

om vi sätter in (5.13) i (5.12) får vi

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) (2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)) dx = 0 \\ \Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} H_{n-1}(x) H_n(x) dx - 2n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) H_{n-1}(x) dx}_{I(n-1, n-1)} = 0 \\ \Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} H_{n-1}(x) H_n(x) dx = 2nI(n-1, n-1) \quad (5.14) \end{aligned}$$

Enligt Rodrigues formel (2.1) definierades hermitepolynomen som

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

M.h.a. denna får vi att ekvation (5.14) blir:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} \left[(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right] \left[(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx = \\ &= 2nI(n-1, n-1) \\ \Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2+x^2} (-1)^{2n-1} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right] e^{x^2} \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx = \\ &= 2nI(n-1, n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-1) \int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{x^2} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right] \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx = \\ = 2nI(n-1, n-1) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Vi observerar nu att:

$$\begin{aligned} 2xe^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) &= \frac{d}{dx} (e^{x^2}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) - e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \end{aligned}$$

varav ekvation (5.15) blir:

$$\begin{aligned} 2nI(n-1, n-1) &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) + \right. \\ &\quad \left. - e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \right] \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx = \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx + \\ &\quad - e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx}_{(1)} + \\ &\quad - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx}_{(2)} \end{aligned}$$

Observera vidare att:

$$\begin{aligned} I(n, n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \end{aligned} \quad (5.16)$$

vi ser att (1) är lika med $I(n, n)$, och (2) blir om vi partialintegrerar:

$$\begin{aligned}
 (2) &= \left[\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \left(e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \right] \left(e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right) dx = \\
 &= \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} + \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx
 \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned}
 2nI(n-1, n-1) &= I(n, n) - \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} + \\
 &\quad + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx}_{=I(n+1, n-1) \text{ enl. (5.16)}} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Vi vet från (5.12) att $I(n+1, n-1) = 0$, samt att

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = p_n(x) e^{-x^2}$$

där $p_n(x)$ är ett polynom av grad n (se ex 1). Vi får alltså att:

$$\begin{aligned}
 \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} &= \left[e^{x^2} p_n(x) e^{-x^2} p_{n-1}(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \\
 &= \left[p_n(x) p_{n-1}(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{p_n(\xi) p_{n-1}(\xi) - p_n(-\xi) p_{n-1}(-\xi)}{e^{\xi^2}} = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

och ekvation (5.17) blir:

$$2nI(n-1, n-1) = I(n, n) \quad (5.18)$$

Ur denna rekursiva relation får vi då att:

$$\begin{aligned}
 I(n, n) &= 2nI(n-1, n-1) = \{\text{upprepad användning av (5.18)}\} \\
 &= 2n [2(n-1) I(n-2, n-2)] = \\
 &= 2^2 n (n-1) [2(n-2) I(n-3, n-3)] = \\
 &\quad \vdots \\
 &= 2^n n (n-1) (n-2) \cdots 2 \cdot 1 I(0, 0) \\
 &= 2^n n! I(0, 0)
 \end{aligned}$$

Med hjälp av definitionen av I (se (5.11)), ser vi att:

$$I(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (5.19)$$

Lemma 3. *Den generaliserade integralen i ekvation (5.19) är lika med $\sqrt{\pi}$, dvs.*

$$I(0,0) = \sqrt{\pi}$$

Bevis. Låt oss börja med att titta på $I(0,0)^2$:

$$\begin{aligned} I(0,0)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \{\text{ändrar inte lösningen}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \{\text{polära koordinater}\} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \left\{ \begin{array}{l} u=r^2, \\ du=2rdu \end{array} \right. \quad r=0 \Rightarrow u=0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-u} r \frac{du}{r} = \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi [-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi (0 + 1) = \\ &= \pi \end{aligned}$$

och vi får alltså att:

$$I(0,0) = \sqrt{\pi}$$

□

Från lemmat följer vidare att

$$I(n,n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (5.20)$$

Alltså gäller (5.3). □

Den just beskrivna ortogonalitetsegenskapen kan vi nu använda för att utveckla diverse olika styckvis kontinuerliga funktioner i termer av Hermitepolynom.

5.3. Utveckling i serier.

SATS 5. *En styckvis kontinuerlig funktion $f(x)$ kan uttryckas i termer av Hermitepolynom:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{där } f(x) \text{ är kontinuerlig} \\ \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, & \text{i alla diskontinuitetspunkter} \end{cases}$$

där

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx.$$

Denna ortogonala serieutveckling brukar kallas **Fourier-Hermite serieutveckling**.

Låt mig illustrera utvecklingen med ett konkret exempel.

Exempel 7. Betrakta $f(x) = e^{ax}$, där a är ett godtyckligt reellt eller komplext tal. Enligt satsen ovan har vi att:

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad (5.21)$$

där

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ax} H_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ax} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \end{aligned} \quad (5.22)$$

Låt oss påminnas om att, givet två funktioner $g(x)$ och $f(x)$, kan vi partialintegrera produkten $f(x)g'(x)$ enligt följande:

$$\int_{-X}^X f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{-X}^X - \int_{-X}^X f'(x)g(x)dx$$

och om

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 0$$

får vi alltså att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx \quad (5.23)$$

Då vi i (5.22) har

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx$$

samt att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{ax} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{ax} \cdot \overbrace{\frac{p_n(x)}{e^{x^2}}}^{\text{Se Ex 1}} = \\ &= \left\{ \text{Std. gränsvärde: } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{p_n(x)e^{ax}}{e^{x^2}} = 0 \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

får vi att

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{ax}) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} a e^{ax} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx \end{aligned}$$

Upprepar vi denna process n gånger, samt observerar att

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{ax}) = a^n e^{ax}$$

får vi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} a^n e^{ax} \cdot e^{-x^2} dx = \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} a^n e^{ax-x^2} dx \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax-x^2} dx = \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1)(x^2-ax+(\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2)} dx = \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1)(x-\frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}} dx = \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{a^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1)(x-\frac{a}{2})^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x - \frac{a}{2} \\ dy = dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{a^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \{se\ lemma\ 3\} \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{a^2/4} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{a^n}{2^n n!} e^{a^2/4} \end{aligned}$$

Vi kan alltså enligt (5.21) uttrycka funktionen e^{ax} , där a är ett godtyckligt reellt eller komplext tal, som

$$e^{ax} = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Nog om detta låt oss nu titta på Hermitepolynomens Genererande funktion, vad denna är bra för och hur den används praktiskt. Men först lite allmänt om genererande funktioner

6. GENERERANDE FUNKTIONER

Definition 8. Låt $a_0, a_1, a_2, \dots$ vara en talföljd, funktionen

$$G(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (6.1)$$

kallas för talföljdens **genererande funktion**.

Att en följd har $G(t)$ som genererande funktion brukar ibland betecknas:

$$\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \supset G(t)$$

Observation 4. Om endast ändligt många element i följden är skilda från noll får vi alltså att $G(t)$ då blir ett polynom.

Exempel 8. Den genererande funktionen för följden $1, 1, 1, \dots$ är t ex

$$G(t) = \frac{1}{1-t}$$

om $|t| < 1$, dvs.

$$G(x) = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \{\text{geo. serien}\} = \frac{1}{1-t}$$

Den genererande funktionen är ett försök att gå från en följd av tal till en funktion för att på så sätt möjliggöra användandet av analysmetoder i kombinatoriken. Används flitigt i lösningen av kombinatoriska problem men även i lösandet av vissa differentialekvationer.

En annan hjälpsam funktion är den exponentiellt genererande funktionen:

Definition 9. Låt $a_0, a_1, a_2, \dots$ vara en talföljd. Funktionen

$$E(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}t^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}t^k \quad (6.2)$$

kallas för talföljdens **exponentiellt genererande funktion**.

Exempel 9. Den exponentiellt genererande funktionen för följden i ex. 8 är:

$$E(t) = e^t$$

för alla reella t , dvs.

$$E(t) = 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots = \{\text{Std. Taylor serie}\} = e^t$$

Låt oss nu återgå till våra polynom och visa hur de faller in i teorin om genererande funktioner.

6.1. Hermitepolynomen och genererande funktioner.

SATS 6. Det visar sig att följden $\{H_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ av hermitepolynom har den exponentiellt genererande funktion:

$$E(x, t) = e^{2xt-t^2} \quad (6.3)$$

där $|t| < \infty$, dvs.

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)}{k!}t^k \quad (6.4)$$

Bevis. För att visa att (6.4) gäller, kan vi till att börja med Taylorutveckla e^{2xt-t^2} runt $t = 0$, dvs.

$$E(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left. \frac{\partial^k E}{\partial t^k} \right|_{t=0} \quad (6.5)$$

där $|t| < \infty$. Vidare har vi att:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^k E}{\partial t^k} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{2xt-t^2} \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{(x-t)^2 - x^2 + 2xt - t^2} \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{x^2 - (x-t)^2} \right) \right|_{t=0} = \\ &= e^{x^2} \left(\left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{-(x-t)^2} \right) \right) \right|_{t=0} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Låt oss nu titta lite närmare på uttrycket i (6.6), mera bestämt på:

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{-(x-t)^2} \right) \right|_{t=0} \quad (6.7)$$

och göra en jämförelse med:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-x^2} \right) \quad (6.8)$$

Vi observerar att varje derivering av (6.7) kommer ta ner en faktor $-2(x-t)(-1)$ och att exponentialfunktionen kommer kvarstå i varje term. Jämför vi detta med derivering av (6.8) som tar ner en faktor $-2x$, drar vi slutsatsen att, då deriveringen av (6.7) sker runt $t = 0$ ser vi att det som skiljer (6.7) från (6.8) är faktorn $(-1)^k$, dvs.

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{-(x-t)^2} \right) \right|_{t=0} = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-x^2} \right) \quad (6.9)$$

Vi får alltså att:

$$\left. \frac{\partial^k E}{\partial t^k} \right|_{t=0} = e^{x^2} \left((-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-x^2} \right) \right) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-x^2} \right) \stackrel{(2.1)}{\equiv} H_k(x)$$

som visar att (6.4) gäller. $\square$

Det visar sig att (6.4) spelar en viktig roll i teorin om Hermitepolynomen.

6.2. Tillämpningar av Hermites genererande funktion. Vi har i avsnitt 3 och 4 fått se hur härledningen av den rekursiva relationen för hermitepolynomen kunde se ut. Nu när vi introducerat Hermites genererande funktion kan denna härledning förenklas avsevärt:

Betrakta differentialekvationen

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - (2x - 2t)E(x, t) = 0 \quad (6.10)$$

Anm 1. En potensserie kan alltid deriveras term för term innanför sin konvergensradie.

Ekvation (6.4) insatt i (6.10) ger oss:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}}_{n:=n+1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}}_{n:=n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nH_{n-1}(x)}{n!} t^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Detta är den rekursiva relationen för Hermitepolynomen som vi härledde i avsnitt 4, ekvation (4.5).

Vi kan, när vi ändå är i gång, även visa att relationen (4.3) enkelt kan härledas med hjälp av den genererande funktionen samt sambandet:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} - 2tE(x, t) = 0$$

vi får nämligen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}}_{n:=n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nH_{n-1}(x)}{n!} t^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

som är lika med relation (4.3).

Polynomen jag hittills behandlat brukar man ofta kalla för “fysikerns hermitepolynom”, då dessa vanligtvis uppkommer inom fysiken. Det finns dock en alternativ definition av hermitepolynomen.

7. EN ALTERNATIV DEFINITION

Följande definition av hermitepolynomen brukar kallas den **probabilistiska definitionen**:

Definition 10. Låt n vara av ett heltal. De probabilistiska hermitepolynomen av grad n ges av:

$$\bar{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right) \quad (7.1)$$

Vi kan med denna formel lätt få att de första fem probabilistiska polynomen är:

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_0(x) &= 1 \\
 \bar{H}_1(x) &= x \\
 \bar{H}_2(x) &= x^2 - 1 \\
 \bar{H}_3(x) &= x^3 - 3x \\
 \bar{H}_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Låt mig här påpeka att de båda definitionerna inte är ekvivalenta. Det gäller nämligen att:

$$H_n(x) = 2^{n/2} \bar{H}_n(\sqrt{2}x) \tag{7.3}$$

Teorin för de probabilistiska polynomen kan vi nu lätt få fram genom några enkla substitutioner samt lite räkning. Låt oss ge ett exempel på detta genom att härleda de probabilistiska hermitepolynomens rekursiva relation.

7.1. Rekursiv relation för de probabilistiska hermitepolynomen.

I avsnitt 4, kom vi fram till att hermitepolynomens rekursiva relation kunde skrivas som:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{7.4}$$

Denna tillsammans med (7.3) ger oss:

$$\begin{aligned}
 2^{(n+1)/2} \bar{H}_{n+1}(\sqrt{2}x) &= 2x2^{n/2} \bar{H}_n(\sqrt{2}x) - 2n2^{(n-1)/2} \bar{H}_{n-1}(\sqrt{2}x) \\
 &\Leftrightarrow \\
 2^{(n+1)/2} \bar{H}_{n+1}(x) &= 2^{-1/2}x2^{(n+2)/2} \bar{H}_n(x) - n2^{(n+1)/2} \bar{H}_{n-1}(x) \\
 &\Leftrightarrow \\
 2^{(n+1)/2} \bar{H}_{n+1}(x) &= x2^{(n+1)/2} \bar{H}_n(x) - n2^{(n+1)/2} \bar{H}_{n-1}(x) \\
 &\Leftrightarrow \\
 \bar{H}_{n+1}(x) &= \frac{x2^{(n+1)/2} \bar{H}_n(x)}{2^{(n+1)/2}} - \frac{n2^{(n+1)/2} \bar{H}_{n-1}(x)}{2^{(n+1)/2}} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \bar{H}_{n+1}(x) &= x\bar{H}_n(x) - n\bar{H}_{n-1}(x)
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Introduktionen av de probabilistiska polynomen gör jag framförallt i syfte med att påvisa en kombinatorisk tolkning av hermitepolynomen som jag alldeles strax ska påbörja. Den resterande teorin hörande till dessa lämnar jag till läsaren att själv utforska (se till exempel teorin för $He_n(x)$ i [1]).

8. EN KOMBINATORISK TOLKNING AV HERMITEPOLYNOMEN

Låt oss börja med att allmänt titta på hur ortogonala polynom och kombinatorik hör ihop.

8.1. Ortogonal polynom och enumeration. Låt oss betrakta en mängd objekt S^n , där n indikerar att mängden beror på en parameter n , som är ett heltal. Låt oss vidare dela upp denna mängd i mindre disjunkta delmängder, dvs. göra en partition i $n + 1$ delmängder:

$$S^n = \bigcup_{k=0}^n S_k^n \quad (8.1)$$

Då vi gjort detta är det vidare naturligt att betrakta den genererande funktionen:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n |S_k^n| x^k \quad (8.2)$$

och hoppas på att analysen relaterad till polynomen är nära besläktad med kombinatoriska strukturen av den ändliga mängden S^n .

Låt oss göra ytterligare ett utvik från den tänkta genomgången och först införa och förklara begreppet matchning.

8.2. Matchningar. Här följer en kort genomgång:

Definition 11. Låt $[n]$ vara en n -mängd, alltså en mängd med n element. Vi kan illustrera detta som en mängd av punkter som vi kallar $1, 2, \dots, n$:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ 1 & 2 & \dots & n \end{array}$$

En matchning är en partition av $[n]$ i disjunkta delmängder med högst 2 element.

M.a.o. är en matchning en uppdelning av mängden $[n]$ i delmängder sådana att dessa består av antingen disjunkta 2-delmängder eller enskilda punkter, s.k. hörn.

Exempelvis (om $n = 5$) kan en matchning se ut som:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{---} & & & \text{---} & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

dvs. vi låter här $(1, 2)$ och $(4, 5)$ utgöra de disjunkta 2-delmängderna och vi betraktar punkt 3 som en enskild punkt. Vi säger vidare att 1 är hopparat med 2, och 3 med 4.

Med detta sagt inser vi att även:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

är en matchning, men här står alla punkter för sig själva. Den andra extrem varianten av en matchning är när alla punkter är hopparade med någon annan punkt. Detta kallas för en **perfekt matchning** och

finns förstås bara när antalet punkter är delbart med 2, alltså när n är jämnt.

Man kan dessutom se en matchning som en involution av $[n]$, där de oparade talen är fixa punkter av matchningen och de parade talen är transpositioner.

Nedan följer lite kombinatorik hörande till matchningar:

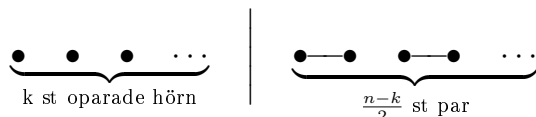
8.3. Uppräkning av möjliga matchningar. Låt oss anta att

$$S^n = \{\text{alla möjliga matchningar av en } n\text{-mängd}\}$$

Låt oss vidare anta att

$$S_k^n = \{\text{möjliga matchningar av en } n\text{-mängd} \mid k \text{ oparade hörn}\}$$

Vi kan illustrera en sådan matchning på följande sätt:



Låt oss försöka beräkna storleken av mängden S_k^n . Men först ett litet lemma som hjälper oss reda ut vissa saker:

Lemma 4. Låt $P(n, k)$ vara antalet k -permutationer och $C(n, k)$ vara antalet k -kombinationer ur en n -mängd (det är underförstått att elementen i denna n -mängd är olika). Då gäller följande:

$$P(n, k) = C(n, k)k! \quad (8.3)$$

dvs.

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} k!$$

Lemmat kan bevisas på följande sätt:

$$\begin{array}{lcl} P(n, k) & = & C(n, k) \cdot k! \\ \# \text{ sätt att välja och ordna} & = & \# \text{ sätt att välja} \cdot \# \text{ sätt att ordna} \end{array}$$

Exempel 10. Låt oss nu ge en kompakt formel för $|S_k^n|$.

- (1) Vi kan välja k st punkter från en n -mängd på $C(n, k)$ möjliga sätt (det viktiga här är att k har samma paritet som n för att $n - k$ ska vara delbart med 2).
- (2) Då vi gjort detta, har vi $n - k$ punkter kvar, ur dessa väljer vi nu ut två punkter. Detta kan göras på $C(n - k, 2)$ möjliga sätt.
- (3) Vi kan fortsätta att välja två punkter tills alla resterande punkter är hopparade, dvs. vi får

$$C(n - k - 2, 2), C(n - k - 4, 2), \dots, C(2, 2)$$

möjliga utfall.

- (4) Då vi på detta sätt kommer få antalet ordnade par, måste vi "dela bort" ordningen, dvs. dela med antalet par i fakultet.

Slår vi ihop resonemanget ovan, får vi den sökta storleken på mängden S_k^n

$$|S_k^n| = \underbrace{C(n, k)}_{(1)} \cdot \frac{\overbrace{C(n-k, 2)C(n-k-2, 2) \cdots C(2, 2)}^{(2)-(3)}}{\underbrace{p!}_{(4)}} \quad (8.4)$$

där vi kallar antalet par för p , dvs. $p = \frac{n-k}{2}$.

Vi kan förenkla uttrycket i (8.4) något, vi observerar först att:

$$C(n, k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

samt att:

$$\begin{aligned} C(n-k, 2) &= \frac{(n-k)(n-k-2+1)}{2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \\ C(n-k-2, 2) &= \frac{(n-k-2)(n-k-2-2+1)}{2} = \frac{(n-k-2)(n-k-3)}{2} \\ &\vdots \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$C(n-k, 2)C(n-k-2, 2) \cdots C(2, 2) = \frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdots 1}{2^p}$$

där 2^p kommer från att nämnaren för varje kombination av par kommer vara 2, och vi har ju som sagt p st möjliga par.

Åter till (8.4):

$$\begin{aligned} |S_k^n| &= C(n, k) \cdot \frac{C(n-k, 2)C(n-k-2, 2) \cdots C(2, 2)}{p!} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdots 1}{p!2^p} \end{aligned}$$

vi ser här att täljaren kommer vara lika med $n!$.

I nämnaren observerar vi att $p! \cdot 2^p$ kan skrivas som

$$\begin{aligned} p! \cdot 2^p &= \left(p(p-1)(p-2) \cdots 1 \right) \cdot \left(2 \cdot 2 \cdots 2 \right) = \\ &= 2p(2p-2)(2p-4) \cdots 2 \end{aligned}$$

Vi observerar vidare att:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p! \cdot 2^p} &= \frac{1}{2p(2p-2)(2p-4) \cdots 2} = \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{(2p-1)(2p-3) \cdots 1} \cdot \frac{1}{2p(2p-2)(2p-4) \cdots 2} = \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)(2p-4) \cdots 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{(2p)!} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Vi kan alltså skriva (8.4) som:

$$|S_k^n| = \frac{n! \cdot (2p-1)(2p-3) \cdots 1}{k! \cdot (2p)!}. \quad (8.6)$$

Noterar vi även att

$$n = k + 2p \Rightarrow k = n - 2p$$

får vi att (8.6) blir:

$$|S_k^n| = \frac{n! \cdot (2p-1)(2p-3) \cdots 1}{(n-2p)! \cdot (2p)!} \quad (8.7)$$

Då det dessutom är känt att

$$C(m, r) = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

dvs.

$$C(n, 2p) = \frac{n!}{(2p)!(n-2p)!},$$

kan vi skriva (8.7) som:

$$\begin{aligned} |S_k^n| &= \frac{n! \cdot (2p-1)(2p-3) \cdots 1}{(n-2p)! \cdot (2p)!} = \\ &= \frac{n!}{\underbrace{(n-2p)!(2p)!}_{C(n, 2p)}} \cdot (2p-1)(2p-3) \cdots 1 = \\ &= C(n, 2p) \cdot (2p-1)(2p-3) \cdots 1 \end{aligned} \quad (8.8)$$

som är ett smidigt sätt att uttrycka storleken på mängden av alla matchningar med k oparade hörn.

Då detta är avklarat låt oss ta en titt på hur allt detta kommer spela in i teorin om hermitepolynomen.

8.4. Matchningar och Hermitepolynomen. Det vi vill uppnå är en koppling mellan mängden S^n och hermitepolynomen. Vi börjar med att vikta varje disjunkt par med (-1) och varje oparat hörn med x . Vi kan illustrera detta på följande sätt:

$$\begin{array}{l} \text{Matchning:} \quad \overbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots}^{k \text{ st hörn}} \quad \left| \quad \overbrace{\bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \cdots}^{p \text{ st par}} \right. \\ \text{Vikt:} \quad \quad \quad x \quad \quad x \quad \quad x \quad \cdots \quad \quad \quad (-1) \quad \quad (-1) \quad \cdots \end{array}$$

Då vi gjort denna konstruktion kan vi nu betrakta följande polynom:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |S_k^n| x^k (-1)^{\frac{n-k}{2}} \quad (8.9)$$

Vi kan lätt räkna ut värdet för polynomen då $n = 0$ och $n = 1$:

$$p_0(x) = |S_0^0| x^0 (-1)^{\frac{0}{2}} = \frac{0!}{0!0!} \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$p_1(x) = |S_1^1| x^1 (-1)^{\frac{0}{2}} = 1 \cdot x \cdot 1 = x$$

Vi ser att $p_0(x) = \bar{H}_0(x)$ och $p_1(x) = \bar{H}_1(x)$. Om vi nu kan visa att dessa polynom även uppfyller den rekursiva relationen:

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - np_{n-1}(x),$$

som ju är den rekursiva relationen för de probabilistiska hermitepolynomen (se (7.4)), så kan vi dra slutsatsen att $p_n(x) = \bar{H}_n(x)$ för alla heltal n .

SATS 7. Låt S^n vara mängden av alla möjliga matchningar, och S_k^n vara den delmängd som innehåller k oparade hörn. Om

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - np_{n-1}(x) \quad (8.10)$$

där

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} |S_k^n| (-1)^{\frac{n-k}{2}} x^k \quad (8.11)$$

och

$$S^n = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_k^n \quad (8.12)$$

så är $p_n(x) = \bar{H}_n(x)$.

Bevis. Vi har alltså att:

$$S^{n+1} = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} S_k^{n+1} \quad (8.13)$$

och

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} |S_k^{n+1}| (-1)^{\frac{n+1-k}{2}} x^k \quad (8.14)$$

låt oss titta närmare på $|S_k^{n+1}|$.

Vi vet att

$$S_k^n = \{ \text{matchningar av } n \text{ element} \mid k \text{ oparade hörn} \}.$$

Då vi är ute efter storleken av S_k^{n+1} måste vi först bilda oss en uppfattning över hur denna mängd kan se ut.

I S_k^{n+1} har vi en extra punkt jämfört med S_k^n . Vi inser att det finns två möjliga scenarier för denna utvidgning från mängden S^n , nämligen möjligheten att den extra punkten är ett oparat hörn samt möjligheten att den utgör ett disjunkt par med någon annan punkt i mängden.

Vi kan illustrera detta genom att fixera punkten $n + 1$ och låta:

$$S_k^{n+1} = A \cup B \Rightarrow |S_k^{n+1}| = |A| + |B|$$

där

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{alla matchningar} \mid \text{punkt } n+1 \text{ är ett oparat hörn} \} \\ B &= \left\{ \text{alla matchningar} \left| \begin{array}{l} \text{punkt } n+1 \text{ utgör ett par med någon} \\ \text{annan punkt i mängden} \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Låt oss titta lite närmare på mängderna A och B , samt försöka bestämma storleken på dessa:

A: Vi börjar med att titta på mängden A

- Punkt $n + 1$ har vi som sagt fixerat, samt antagit är ett oparat hörn.
- Resten av punkterna utgör en n -mängd.
- Då slutmålet är att k oparade hörn ska väljas ur $(n + 1)$ -mängden, och vi vet att punkt $n + 1$ är ett sådant hörn, så får vi att ur den resterande n -mängden ska vi välja $k - 1$ oparade hörn. M.a.o. får vi att:

$$|A| = |S_{k-1}^n|$$

B: Nu till mängd B

- Återigen låter vi punkt $n + 1$ vara fixerad, men nu antar vi att denna utgör ett par med någon annan punkt i mängden. Det finns n st möjliga kandidater till punkter som $n+1$ kan vara hopparad med.
- Låt oss välja en av dessa, säg punkt p :

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ n+1 \quad p \end{array}$$

- Då detta är gjort ska vi nu välja k oparade hörn ur en $(n - 1)$ -mängd, dvs. $n+1$ punkter minus de två punkter som utgör det valda paret.
- Punkt p kan ju som sagt vara någon av punkterna $1, \dots, n$, alltså n möjliga utfall, och vi får:

$$|B| = n |S_k^{n-1}|$$

Nu åter till ekvation (8.14):

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} |S_k^{n+1}| x^k (-1)^{\frac{n+1-k}{2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (|A| + |B|) x^k (-1)^{\frac{n+1-k}{2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (|S_{k-1}^n| + n |S_k^{n-1}|) x^k (-1)^{\frac{n+1-k}{2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underbrace{|S_{k-1}^n| x^k (-1)^{\frac{n+1-k}{2}}}_{k:=k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} n |S_k^{n-1}| x^k (-1)^{\frac{n-1-k+2}{2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |S_k^n| x^{k+1} (-1)^{\frac{n+1-k-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} n |S_k^{n-1}| x^k (-1)^{\frac{n-1-k}{2}+1} = \\
&= x \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |S_k^n| x^k (-1)^{\frac{n-k}{2}}}_{p_n(x)} + (-1)n \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} |S_k^{n-1}| x^k (-1)^{\frac{n-1-k}{2}}}_{p_{n-1}(x)} = \\
&= x p_n(x) - n p_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

vilket bevisar påståendet. $\square$

Vi inser snabbt att vi genom denna koppling även får ett alternativ sätt att uttrycka de probabilistiska polynomen, nämligen:

Definition 12. Låt n vara ett heltal. De probabilistiska hermitepolynomen av grad n ges av:

$$\bar{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(C(n, 2k) (2k-1)(2k-3) \cdots 1 \right) x^{n-2k} \quad (8.15)$$

Det arbetet hittills behandlat är tänkt att vara den introduktion i ämnet, som utlovades i början. Det skulle dock vara trevligt att avrunda allt med en tillämpning av den just lästa teorin. Låt oss göra detta genom att betrakta ett fall från *nationalekonomi*n där polynomen visar sig användbara (OBS! Följande avsnitt förutsätter att läsaren har grundläggande nationalekonomiska kunskaper).

9. NAIRU SKATTNING

Om mängden arbetslösa i ett land minskar, blir följden att konsumenternas sammanlagda köpkraft ökar. Detta i sin tur gör att värdet på pengarna minskar (inflation). Inflationen minskar landets företags

internationella konkurrenskraft som resulterar i ökad arbetslöshet. Resonemanget ovan brukar kallas Phillipsrelationen, och numera är det vanligt att man tillämpar följande standardmodell för att representera relationen:

$$\pi_t - \pi_t^e = \beta(u_t - u_t^*) + \delta X_t + \epsilon_t$$

där π_t är en skattning på den faktiska inflationen i landet och π_t^e är den förväntade inflationen. Modellen utgår vidare från att betrakta skillnaden mellan den faktiska arbetslösheten (u_t) och NAIRU⁴ (u_t^*). Med X_t försöker man fånga upp effekten av utbudschockar på inflationen och slutligen får ϵ_t i traditionell mening representera feltermen i denna regressionsanalys.

För att få ett grepp om inflationsförväntningarna är det brukligt att man i modellen antar att dessa följer en "slumpvis vandring", mera specifikt antar man att $\pi_t^e = \pi_{t-1}$, dvs.

$$\pi_t - \pi_{t-1} = \beta(u_t - u_t^*) + \delta X_t + \epsilon_t \quad (9.1)$$

Låter vi dessutom $\Delta\pi_t = \pi_t - \pi_{t-1}$ kan vi skriva om ekvation (9.1) till

$$\Delta\pi_t = \beta(u_t - u_t^*) + \delta X_t + \epsilon_t \quad (9.2)$$

Ekvation (9.2) kan man nu skatta med den autoregressiva modellen:

$$\Delta\pi_t = \beta(L)(u_t - u_t^*) + \delta(L)\Delta\pi_{t-1} + \gamma(L)X_t + \varepsilon_t \quad (9.3)$$

där L är "lag operatör"⁵. $\beta(L)$, $\delta(L)$ och $\gamma(L)$ blir alltså här "lag polynom" där L indikerar fördröjningen i modellen. Värt att notera är också att den nya feltermen ε_t är seriellt okorrelerad i denna modell.

Även om skattning är möjlig, så är den alltför enkelt inte enkel att genomföra då modellen är icke-linjär i sina parametrar. För att kringgå dessa svårigheter kan vi här anta att NAIRU är oberoende av tiden, och vi kan då göra följande omskrivning av ekvation (9.3):

$$\Delta\pi_t = \beta(L)u_t - \beta(1)u_t^* + \delta(L)\Delta\pi_{t-1} + \gamma(L)X_t + \epsilon_t \quad (9.4)$$

där antagandet ovan illustreras av $\beta(1)$. Om vi dessutom låter:

$$\mu = -\beta(1)u_t^*$$

får vi att ekvationen blir:

$$\Delta\pi_t = \mu + \beta(L)u_t + \delta(L)\Delta\pi_{t-1} + \gamma(L)X_t + \epsilon_t \quad (9.5)$$

Efter antagandet och omskrivningen kan man nu skatta modellen med en minsta kvadratmetod. Ur denna kan man vidare få att NAIRU då

⁴NAIRU står för *Non-Accelerating Inflation Rate-of-Unemployment*, och är ett begrepp som vissa ekonomer börjat använda när de talar om den lägsta arbetslöshetsnivån som inte ökar inflationen, dvs. NAIRU representerar en s.k. jämviktsarbetslöshet.

⁵Lag är eng. för *fördröjning*, dvs. "fördröjningsoperatör"

blir:

$$\hat{u}^* = \frac{-\hat{\mu}}{\hat{\beta}(1)} \quad (9.6)$$

där

$$\hat{\beta}(1) = \sum_{n=1}^p \beta_n$$

och där p står för lag polynomet $\beta(L)$'s gradtal.

Den hittills beskrivna modellen gäller således då NAIRU är oberoende av tiden. På senare år har en hel del forskning ägnats åt att ta fram en modell där NAIRU tillåts variera med tiden en s.k. TV-NAIRU modell⁶.

Jasjeet Singh Sekhon presenterade 2001 en sådan modell där han med hjälp av Hermite polynom serier av ordning 6 skattar en tidsberoende NAIRU (se [7]).

Sekhon bidrag kan sammanfattas med att han i den hittills beskrivna modellen låter:

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^l \alpha_j H_{j-1}(t)$$

där

$$\begin{aligned} H_n &= \text{Hermitepolynom av grad } n \\ t &= \text{tids argumentet centrerat runt } 0 \end{aligned}$$

som i sin tur gör att ekvation (9.5) blir:

$$\Delta\pi_t = \sum_{j=1}^l \alpha_j H_{j-1}(t) + \beta(L)u_t + \delta(L)\Delta\pi_{t-1} + \gamma(L)X_t + \epsilon_t \quad (9.7)$$

och TV-NAIRU blir:

$$\hat{u}^* = \frac{-\sum_{j=1}^l \hat{\alpha}_j H_{j-1}(t)}{\hat{\beta}(1)} \quad (9.8)$$

Valet av vilken grad Hermitepolynom serien kommer ha görs genom att använda Mallows C_p . Den nuvarande modellen väljer, som nämnt tidigare, en Hermite serie av grad 6.

Innan vi tar farväl låt mig för de historieintresserade lägga fram en kort redogörelse för hur hermitepolynomen i smått och *speciella funktioner*⁷ i stort utvecklats genom tiden .

⁶TV=Time-Varying

⁷En redogörelse om speciella funktioner känns nödvändig då hermitepolynomen tillhör detta området inom matematiken.

10. HISTORISK REDOGÖRELSE

Ett av de bärande budskapen genom detta arbete är att hermitepolynomen är en typ av ortogonala polynom. Dessa ortogonala polynom i sig faller inom en gren av matematiken som kallas *speciella funktioner*, alltså funktioner som inte är elementära - de vanliga som alla känner till - men som dyker upp i många sammanhang och fått ett namn som särskiljer dem från andra funktioner.

Historiskt sett präglas matematiken av fall, där man gjort samlingar av användbara funktioner eller "hjälpmedel", som sedan flitigt använts av andra matematiker vid lösandet av diverse problem. Dessa samlingar är i en vidare mening just vad som menas med speciella funktioner.

Den tidigaste formen av dessa har anor från det antika Babylon, där man hittat samlingar som troligtvis användes vid lösandet av diverse multiplikations- och divisionsproblem.

Dessa båda operationer hade ännu inte hunnit utvecklas. Divisionen blev här istället reducerad till addition och subtraktion av multiplikativa inverser (reciproker). Multiplikationen å andra sidan blev reducerad till addition och subtraktion av kvadrater. Man skulle kunna säga att så gott som all räkning i det antika Babylon hade formen av användandet av tabell, alltså markerar detta tiden då *speciella funktioner* gör entré på den matematiska scenen. Nu har ju förstås multiplikation och division blivit något som alla får lära sig, men i början av sin historia var de alltså speciella funktioner.

Nästa bidrag till området kom med utvecklingen av trigonometrin, där egyptiern Rhinds papyrus från 1650 f.Kr räknas som ett av de tidigare verken⁸.

Arkeologer har även hittat tabeller från Babylon som behandlar temat *sekanter*, så trigonometrifunktioner dök upp även här och vi kan se samma utveckling som för multiplikation och division. Via de grekiska astronomerna och så småningom Kopernikus och hans bok *De Revolutionibus* blir dessa speciella funktioner något som alla matematiker får lära sig i början av sin karriär.

Kopernikus startar dessutom en långvarig tradition där matematiker, en tid framåt tiden, alltid hade med ett appendix om speciella funktioner baktill i sina verk.

Då trigonometrin idag inte är så olik den beskriven av Kopernikus, skulle man lite löst kunna säga att denna i viss mån blev "färdigställd" av Kopernikus och nu stod andra "tabellsamlingar" på tur. Vid år 1614 blir så logaritmer ett nytt tillskott till de speciella funktionerna och efter bara ett par år fanns det en stor mängd logaritmtabeller i cirkulation.

⁸Rhind tar upp problem med pyramider som krävde trigonometri att lösas.

Mitten av 1600-talet skulle man kunna säga var tidpunkten då alla de elementära funktionerna som vi känner till var på plats, och detta markerar även början på en ny epok för området *speciella funktioner*.

1600-talet var nämligen tiden då differential och integralkalkylen började gro, och i dess spår börjar även fler av dagens speciella funktioner upptäckas. De flesta av dessa exploderade fram på scenen och allt hände relativt snabbt. Runt 1700-talet dyker exempelvis *Besselfunktioner* upp, och under 1720 startar Euler en stor industrialisering av differential och integralkalkylen och han börjar studera många av dagens speciella funktioner.

Euler upptäcker *gammafunktionen* samt definierar Besselfunktionen för undersökning av bl.a. cirkulära tunnor. Han systematiserade de *elliptiska integralerna*, som ett par år tidigare hade upptäckts. Vidare introducerar han *zetafunktionen* samt undersöker *polylogaritmer*.

I slutet av 1700-talet sker så ytterligare ett par upptäckter av speciella funktioner som behövdes för potentialteorin och himlamekaniken. *Legendre funktioner* - även kallade *Laplace funktioner* - kommer exempelvis in i bilden runt 1780.

Omkring 1800-1850 var den komplexa analysen stor och detta var tidpunkten då många *periodiska funktioner* upptäcks. Ett par år senare skulle blickarna istället riktas mot den harmoniska analysen och man kan säga att det var här de, för oss intressanta, ortogonala polynomen dyker upp.

Chebyshevs intresse för både *mekanikens teori* och den *approximativa flödesteorin* brukar räknas som startskottet för teorin om dagens ortogonala polynom. På följande sätt beskriver Roy (se [8]) Chebyshev's bidrag till området ortogonala polynom:

Chebyshev was probably the first mathematician to recognise the general concept of orthogonal polynomials. A few particular orthogonal polynomials were known before his work. Legendre and Laplace had encountered the Legendre polynomials in their work on celestial mechanics in the late eighteenth century. Laplace had found and studied the Hermite polynomials in the course of his discoveries in probability theory during the early nineteenth century. Other isolated instances of orthogonal polynomials occurring in the work of various mathematicians is mentioned later. It was Chebyshev who saw the possibility of a general theory and its applications. His work arose out of the theory of least squares approximation and probability; he applied his results to interpolation, approximate quadrature and other areas. He discovered the discrete analogue of the Jacobi polynomials but their importance was not recognized until this century. They

were rediscovered by Hahn and named after him upon their rediscovery.

Från citatet framkommer även, att det var Laplace som först kom i kontakt med hermitepolynomen.

Det skulle dock dröja till mitten av 1800-talet förrän polynomen fick den form som detta arbete behandlat. Den som har störst förtjänst i detta är förstås den som fått ge namn åt polynomen, nämligen Charles Hermite. Exempelvis skriver Hermite runt 1890 några artiklar där där polynomen dyker upp (se t ex referenserna i [11]). Det var i samband med försök att lösa differential ekvation (3.2) som polynomen dök upp - och det var förstås den differentialekvation som vi behandlat i avsnittet om Hermites differentialekvation.

De historiska fakta som just givits är till större delen framlagda av Stephen Wolfram, och vidare läsning om speciella funktioner kan göras i "*The History and Future of Special Functions*" (se [12]).

11. ARBETET I FORMLER

Hermitepolynomen:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} (e^{-t^2+2tx}) \right|_{t=0}$$

Den probabilistiska definitionen:

$$\bar{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2})$$

$$\bar{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n}{2k} (2k-1)(2k-3) \cdots 1 \right) x^{n-2k}$$

Hermites differentialekvation:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hermites rekursiva relationer:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$\bar{H}_{n+1}(x) = x\bar{H}_n(x) - n\bar{H}_{n-1}(x)$$

Ortogonalitet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{då } n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{då } n = m \end{cases}$$

Serieutveckling:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{där } f(x) \text{ är kontinuerlig} \\ \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, & \text{i alla diskontinuitetspunkter} \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$$

Hermites genererande funktion:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

REFERENSER

- [1] M. Abramowitz and Irene A. Stegun (eds.), Pocketbook of Mathematical Funktions, Material selected by Michael Danos and Johann Rafelski - Abridged ed. of Handbook of mathematical funktions - Verlag Harri Deutsch - Thun - Frankfurt/Main, (1984).
- [2] K. Banda, Hur många permutationer har kvadratrötter?, Examensarbete, Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet, (2006 - No5).
- [3] N. Biggs, Discrete Mathematics, Second Edition, Oxford University Press, (2003).
- [4] J. W. Brown and R. V. Churchill, Fourier Series and Boundary Value Problems, Sixth Edition, McGraw-Hill (2001).
- [5] EfunDA, Hermite polynomial,
<http://www.efunda.com/math/Hermite/index.cfm>, 2006-11-25, (2006).
- [6] N. N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Physico-Technical Institute Academy of Sciences, U.S.S.R. - Revised English Edition Translated and Edited by, Richard A. Silverman, Pentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1965).
- [7] berkeley.edu, NAIRU Estimation,
<http://sekhon.berkeley.edu/nairu/node1.html>, 2007-02-28, (2007).
- [8] P. Chebyshev Pafnutii Lvovich Chebyshev (on the 175th anniversary of his birth) (Russian), Teor. Veroyatnost. i Primenen. 41 (3) (1996), 612-627.
- [9] PlanetMath, Hermite polynomials,
<http://planetmath.org/encyclopedia/HermitePolynomials.html>, 2006-11-25.
- [10] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, McGraw-Hill International Editions, (1976).
- [11] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Coll. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1975).
- [12] S. Wolfram The History and Future of Special Functions (Given at the Wolfram Technology Conference 2005 in Champaign, IL as part of the Festschrift for Oleg Marichev, in honor of his 60th birthday.)
<http://www.stephenwolfram.com/publications/talks/specialfunctions/>
- [13] S. Thangavelu, Lectures on Hermite and Laguerre Expansions, Mathematical Notes 42, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1993).
- [14] Kurssida nada, Tillämpad kombinatorik,
<http://www.nada.kth.se/~johank/TK-sida.html> 2007-01-19, (2007).
- [15] Eric Weisstein's World of Physics, Schrödinger Equation,
<http://scienceworld.wolfram.com/physics/SchroedingerEquation.html>, 2007-01-20, (2007).
- [16] Wikipedia, Generating function,
http://en.wikipedia.org/wiki/Generating_function, 2007-01-19, (2007).
- [17] Wikipedia, Hermite polynomials,
http://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials, 2006-12-30, (2006).
- [18] Wikipedia, Orthogonal polynomials,
http://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_polynomials, 2006-10-04, (2006).
- [19] Wikipedia, Power series,
http://en.wikipedia.org/wiki/Power_series, 2007-01-19, (2007).
- [20] Wikipedia, Quantum harmonic oscillator,
http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator, 2007-01-20.
- [21] Wikipedia, Sturm-Liouville theory,
http://en.wikipedia.org/wiki/Sturm-Liouville_theory, 2007-01-19, (2007).
- [22] Wolfram MathWorld, Hermite polynomial,
<http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html>, 2006-11-25, (2006).