



EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Baires kategorisats och dess tillämpningar

av

Kristina Nilsson

2007 - No 14

Baires kategorisats och dess tillämpningar

Kristina Nilsson

Examensarbete i matematik 10 poäng, påbyggnadskurs

Handledare: Andrzej Szulkin

2007

Sammanfattning

Arbetet går ut på att bevisa Baires kategorisats och att redogöra för vissa av dess tillämpningar.

Speciellt använder vi denna sats för att visa några klassiska resultat i funktionalanalysen: satsen om den öppna avbildningen, Banachs sats och Banach-Steinhaus sats. Dem tillämpar vi sedan bl.a. för att visa att de flesta kontinuerliga funktioner inte är kontinuerligt deriverbara samt att det finns kontinuerliga periodiska funktioner vilkas Fourierserier divergerar i vissa punkter.

Författarens tack

Jag skulle vilja rikta ett stort tack till min handledare Andrzej Szulkin för intressanta diskussioner, mycket bra förklaringar av teorin och ett stort tålamod med denna gravida och ibland smått korkade författare.

Ett stort tack även till min man, Ulf, som har kommit med värdefulla åsikter och frågor och hjälpt mig med "underverket" Microsoft Word.

Och till sist vill jag ge en stor kram till mina härliga och busiga barn som i tid och otid stört mig i pluggandet genom åren och fått mig att få perspektiv på tillvaron!

INNEHÅLL

1	INTRODUKTION	7
2	DEFINITIONER.....	10
3	BAIRES KATEGORISATS.....	14
3.1	DEFINITION	14
3.2	BAIRES KATEGORISATS	15
4	BANACHRUM OCH DERAS ELEMENTÄRA EGENSKAPER.....	18
4.1	DEFINITIONER.....	18
4.2	EXEMPEL PÅ BANACHRUM.....	18
4.2.1	<i>Det reella rummet R^n och det komplexa rummet C^n.</i>	18
4.2.2	<i>Funktionsrummet $C[a,b]$</i>	19
4.3	LINJÄRA OPERATORER MELLAN BANACHRUM	20
5	SATSEN OM DEN ÖPPNA AVBILDNINGEN OCH DESS KONSEKVENSER	22
5.1	SATSEN OM DEN ÖPPNA AVBILDNINGEN (OPEN-MAPPING THEOREM).....	22
5.2	BANACHS SATS	24
5.3	EN TILLÄMPNING AV BANACHS SATS	25
6	BANACH-STEINHAUS SATS OCH DESS TILLÄMPNINGAR.....	26
6.1	BANACH-STEINHAUS SATS.....	26
6.2	EN ENKEL TILLÄMPNING	28
6.3	TILLÄMPNING PÅ FOURIERSERIER.....	29
7	REFERENSER.....	32

1 Introduktion

Jag börjar arbetet med att i kapitel 2, Definitioner, göra en sammanställning av de definitioner som kommer att användas senare i arbetet, detta för att läsaren på ett enklare sätt ska kunna sätta sig in i satserna utan att snubbla på uttryck som används.

Sen i kapitel 3, Baires kategorisats, går jag vidare till själva grundsatsen för detta arbete, Baires kategorisats. Satsen visar att om ett metriskt rum är fullständigt så är det av andra kategorin.

Innan jag går in på själva satsen och beviset för denna så definierar jag Baires kategorier som är en nödvändighet för resten av arbetet.

I kapitel 4, Banachrum och deras elementära egenskaper, så börjar jag med att definiera vad ett Banachrum är, därefter så går jag igenom tre exempel på Banachrum: det reella rummet $\mathbf{R}^n$, det komplexa rummet $\mathbf{C}^n$ och till sist det rum som vi kommer att använda i senare satser, funktionsrummet $C[a, b]$.

Jag går även igenom linjära operatorer mellan Banachrum i detta kapitel. Där visar jag att om den linjära operatoren T är bijektiv så är också inversen linjär.

Till sist i detta kapitel visas den viktiga satsen att den linjära operatoren, T , är kontinuerlig om och endast om den är begränsad.

Kapitel 5, Satsen om den öppna avbildningen och dess konsekvenser, behandlar satsen om den öppna avbildningen, som säger att en surjektiv och begränsad linjär operator, T , mellan två Banachrum är en öppen avbildning, d.v.s. den linjära operatoren, T , avbildar surjektivt öppna mängder på öppna mängder.

Detta kapitel tar även upp Banachs sats, avsnitt 5.2, som säger att bilden av ett Banachrum, TX , antingen är av första kategorin i dess målmängd, Y , eller så är bilden lika med hela målmängden, $TX = Y$, och inversen, T^{-1} , är då en begränsad linjär avbildning.

För att kunna bevisa Banachs sats så använder jag mig av satsen om den öppna avbildningen.

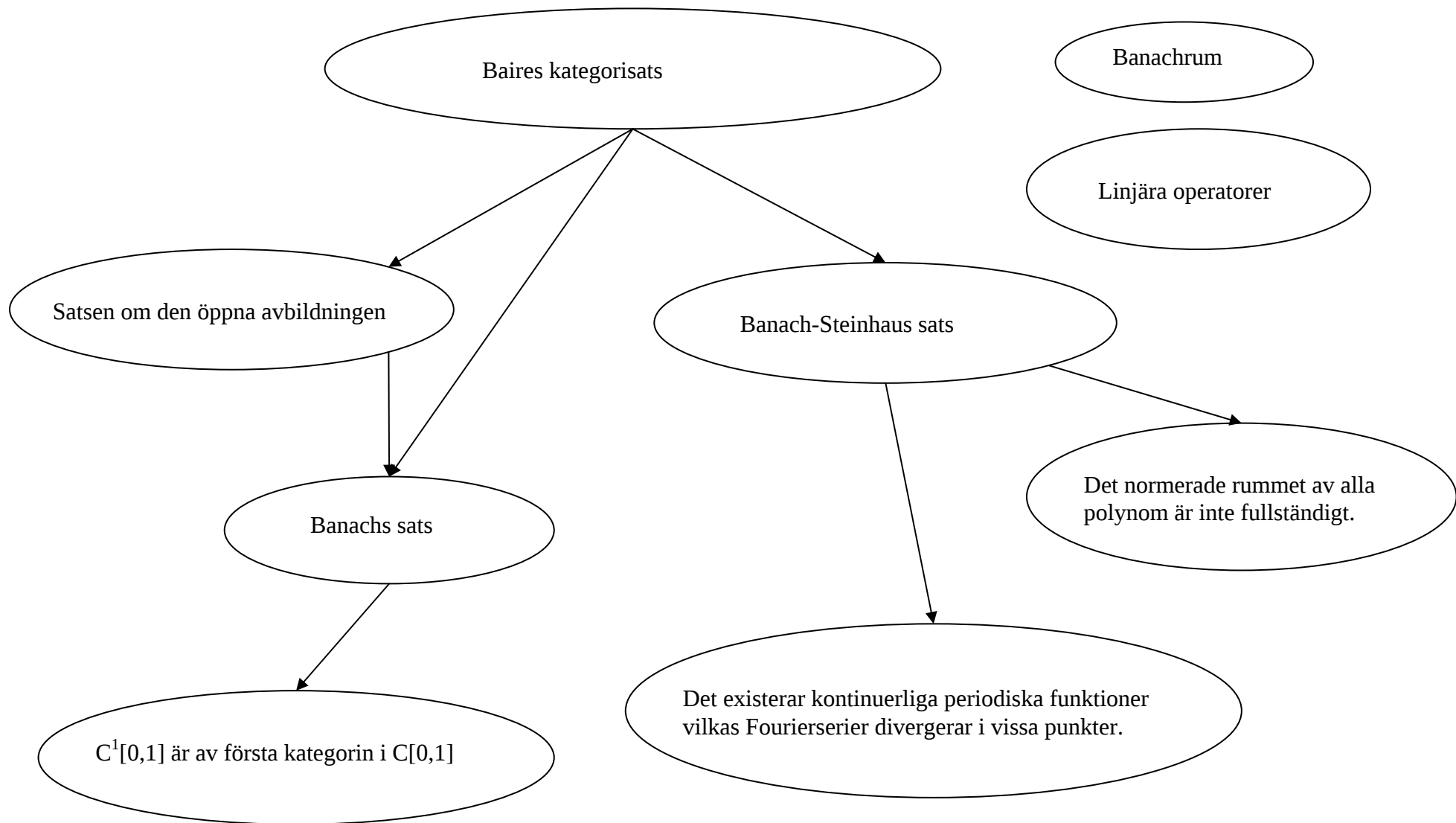
Och slutligen i detta kapitel så går jag igenom en tillämpning av Banachs sats, avsnitt 5.3.

Denna tillämpning säger att rummet $C^1[0, 1]$ av kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[0, 1]$ är av första kategorin i rummet $C[0, 1]$ av kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$. Detta innebär att ”de flesta” kontinuerliga funktioner inte är kontinuerligt deriverbara.

I kapitel 6, Banach-Steinhaus sats, går jag igenom Banach-Steinhaus sats. Denna sats säger att om X och Y är två Banachrum och (T_α) är en familj linjära operatorer mellan dessa rum, samt om dessa operatorer är likformigt begränsade i varje punkt $x \in X$ så är de likformigt begränsade. Med andra ord så säger satsen att likformig begränsning i varje punkt x implicerar x -oberoende likformig begränsning.

I avsnitt 6.2, En enkel tillämpning, använder jag mig sen av Banach-Steinhaus sats för att visa att det normerade rummet X av polynom $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k$ inte är fullständigt.

Och även i avsnitt 6.3, Tillämpning på Fourierserier, använder jag mig av Banach-Steinhaus sats för att visa att det existerar reellvärda kontinuerliga periodiska funktioner vilkas Fourierserier divergerar i vissa punkter.

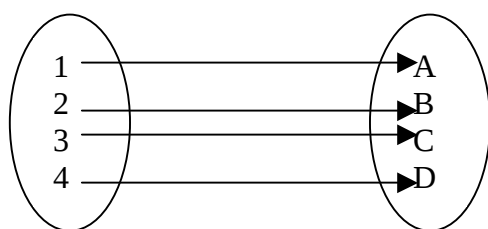


2 Definitioner

För läsarens bekvämlighet har vi här sammanställt återkommande definitioner i arbetet. Definitionerna redovisas i bokstavsordning.

Banachrum: Ett Banachrum är ett fullständigt normerat rum.

bijektiv: Låt X och Z vara två mängder och f en funktion, $f: X \rightarrow Z$. Då sägs f vara bijektiv om det för alla $z \in Z$ finns exakt ett element $x \in X$ sådant att $f(x) = z$. f är bijektiv om f är både injektiv och surjektiv.



Cauchyföljd: En följd x_k av element i ett metriskt rum X kallas för en Cauchyföljd om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ om $m, n \geq N$. Alternativt kan detta uttryckas som att $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ då $\min(m, n) \rightarrow \infty$.

definitionsområde: Låt X och Z vara två mängder och f en funktion, $f: X \rightarrow Z$, då kallas mängden X för en definitionsområde till f .

fullständigt: Ett metriskt rum sägs vara fullständigt om varje Cauchyföljd är konvergent.

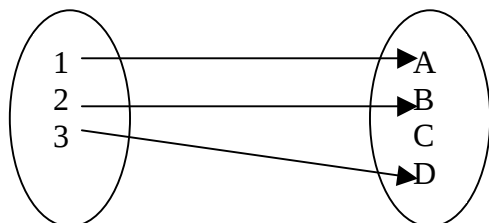
linjärt funktionsrum: Ett linjärt rum kallas för ett linjärt funktionsrum om dess element är (skalär- eller vektorvärda) funktioner definierade på en mängd M , och addition och multiplikation med skalär sker punktvis, d.v.s. $f + g$ och cf definieras genom $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ och $(cf)(x) = cf(x)$.

gränsvärde av följd: En (oändlig) följd x_n i ett metriskt rum X sägs ha gränsvärdet x om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett N sådant att $n > N$ medför att $d(x_n, x) < \varepsilon$. (Ändliga följder anses inte ha något gränsvärde).

hopningspunkt: Låt S vara en delmängd till ett metriskt rum X . En punkt x sägs vara hopningspunkt till S om det finns en följd (x_k) av punkter, alla skilda från x , i S sådan att $x_k \rightarrow x$ då $k \rightarrow \infty$.

ingenstans tät: En delmängd E till ett metriskt rum X sägs vara ingenstans tät i X om det slutna höljet till E inte har några inre punkter.

injektiv: Låt X och Z vara två mängder och f en funktion, $f : X \rightarrow Z$. Då sägs f vara injektiv om $f(x) = f(z)$ implicerar att $x = z$. Alternativt uttryckt är funktionen injektiv om varje värde i dess värdemängd motsvaras av exakt ett värde i dess definitionsmängd.



inre punkt: Punkten x sägs vara en inre punkt till mängden $M \subset X$, om det finns ett klot B med medelpunkten i x sådant att $B \subset M$.

klot: Om a är en punkt i ett metriskt rum X , kallas mängden $\{x : d(x, a) \leq r\}$ för det slutna klotet med medelpunkt a och radie r . Det öppna klotet, som betecknas med $B(a, r)$, definieras på motsvarande sätt fast med sträng olikhet $<$.

kontinuerlig: Om X och Z är metriska rum är funktionen $f : X \rightarrow Z$ kontinuerlig i x om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$ om $d(x, z) < \delta$.

konvergens av serie: En serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ i ett normerat rum sägs vara konvergent med summa s om delsummorna $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ har gränsvärdet s då $n \rightarrow \infty$.

likformig kontinuitet: Om X och Z är metriska rum är funktionen $f : X \rightarrow Z$ likformigt kontinuerlig om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att det för alla $x_1, x_2 \in X$ med $d(x_1, x_2) < \delta$ gäller att $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. (Skillnaden mot vanlig kontinuitet är att för likformigt kontinuerliga funktioner går det att finna ett δ som är användbart över hela rummet.)

metrik: Låt M vara en mängd. En reellvärd funktion $d : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ sägs vara en metrik på M om den uppfyller följande villkor:

- (positivitet) $d(x, y) \geq 0$ för alla x, y och $d(x, y) = 0$ då och endast då $x = y$.
- (symmetri) $d(x, y) = d(y, x)$ för alla x, y .
- (triangelolikheten) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ för alla $x, y, z \in M$.

målmängd: Låt X och Z vara två mängder och f en funktion, $f : X \rightarrow Z$, då kallas mängden Z för en målmängd till f .

norm: En reellvärd funktion $x \mapsto N(x)$ på ett linjärt rum V (reellt eller komplext) kallas för en norm om den uppfyller följande tre villkor:

- a) (homogenitet) $N(cx) = |c|N(x)$ för alla skalärer c och alla $x \in V$.
- b) (triangelolikhet) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ för alla $x, y \in V$.
- c) (strikt positivitet) $N(x) \geq 0$ för alla x och $N(x) = 0$ om och endast om $x = 0$.

Normer betecknas ofta med $\|x\|$.

normerat rum: Ett linjärt rum V försett med en norm $\|\cdot\|$ kallas för ett normerat rum. Det förses med metriken $d(x, y) = \|x - y\|$.

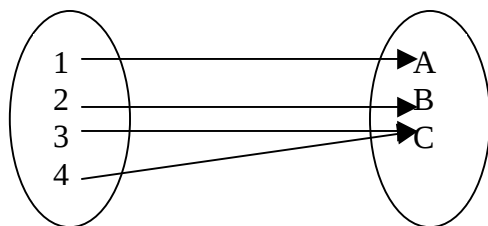
omgivning: Låt M vara en delmängd till ett metriskt rum X . M sägs vara en omgivning till punkten x , om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att varje punkt y med avstånd $< \varepsilon$ till x ligger i M .

randpunkt: Punkten x sägs vara en randpunkt till mängden M , om det godtyckligt nära x finns både punkter i M och punkter utanför M .

sluten mängd: En mängd är sluten om dess komplement är en öppen mängd. Alternativt: den innehåller alla sina randpunkter.

slutet hölje: Låt M vara en delmängd till ett metriskt rum X . Med det slutna höljet $\bar{M}$ av M menas den minsta slutna mängd i X som innehåller M . Den kan också karakteriseras som mängden av inre punkter och randpunkter till M eller mängden av alla punkter som är gränsvärde till någon konvergerande följd i mängden M .

surjektiv: Låt X och Z vara två mängder och f en funktion, $f: X \rightarrow Z$. Då sägs f vara surjektiv, om det för varje z i Z finns ett x i X sådant att $f(x) = z$. Detta innebär att varje värde i en surjektiv funktions målmängd motsvaras av minst ett värde i dess definitionsmängd, eller ekvivalent, att funktionens målmängd är lika med dess värdemängd.



tät: Låt M och N vara delmängder till ett metriskt rum X , $M \subset N$. Om $\bar{M} \supset N$ så sägs M vara tät i N . Detta kan också uttryckas så att varje punkt i N är gränsvärde av en följd av punkter i M .

värdemängd: En värdemängd eller bildmängd är mängden av alla värden en funktion kan anta. Givet en funktion f från mängden X till mängden Y så är $f(X)$ värdemängden till f . Observera att värdemängden till f inte säkert är samma sak som målmängden Y , utan begränsas till de värden som f verkligen antar, värdemängden är alltså en delmängd av Y .

yttre punkt: Låt M vara en delmängd till ett metriskt rum X . Punkten x sägs vara en yttre punkt till mängden M , om dess komplement i X , M^C , är en omgivning till x .

öppen mängd: En mängd är öppen om den är en omgivning till alla sina punkter. Alternativt: den innehåller ingen av sina randpunkter.

övre begränsning: Talet K sägs vara en övre begränsning till funktionen f på mängden M om $f(x) \leq K$ för alla $x \in M$.

3 Baires kategorisats

3.1 Definition

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [1], [4] och [5].)

En delmängd E till ett metriskt rum X sägs vara

- a) *ingenstans tät* i X om det slutna höljet till E inte har några inre punkter.
- b) *av första kategorin* i X om E är unionen av uppräknligt många ingenstans täta mängder.
- c) *av andra kategorin* i X om E inte är av första kategorin i X .

Varje reellt tal betraktat som en mängd är en ingenstans tät delmängd av $\mathbf{R}$. Så en specifik punkt i $\mathbf{Q}$ är ingenstans tät i $\mathbf{R}$ och tar man alla dessa punkter, som är en uppräknlig mängd, så är de av första kategorin i $\mathbf{R}$, enligt b) i definitionen ovan. Alltså är $\mathbf{Q}$ samtidigt av första kategorin i $\mathbf{R}$ och en tät delmängd av $\mathbf{R}$. $\mathbf{Q}$ är en tät delmängd i $\mathbf{R}$ eftersom varje intervall, hur litet det än är, innehåller rationella tal.

Sats. En uppräknlig union, av mängder av första kategorin, är av första kategorin.

Bevis. Låt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, där varje A_n är av första kategorin.

Enligt definition är då $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$, där varje $A_{n,m}$ är ingenstans tät.

Eftersom mängden $\{(n, m) : n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$ är uppräknlig (enligt [4], Sats 2.12) och

$A = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}$, d.v.s. A är en uppräknlig union av ingenstans täta mängder så är A av första kategorin. V.s.b.

Rummet $\mathbf{R}$ är fullständigt, och därmed av andra kategorin i sig självt enligt Baires kategorisats nedan.

En viktig slutsats från satsen ovan är att irrationella tal är av andra kategorin i $\mathbf{R}$, för annars vore $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ av första kategorin i $\mathbf{R}$.

Vi noterar också att rummet $\mathbf{R}$, betraktat som $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$ (och därmed en delmängd av $\mathbf{R}^2$) är ingenstans tät i $\mathbf{R}^2$. Alltså är $\mathbf{R}$ av andra kategorin i sig självt men av första kategorin i $\mathbf{R}^2$. Slutsatsen är att det är meningslöst att tala om kategorin av en viss mängd A utan att ange det rum i vilket A betraktas.

3.2 Baires kategorisats

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [1] och [5].)

Sats. Om ett metriskt rum $X \neq \emptyset$ är fullständigt, så är det av andra kategorin i sig självt.

Notera. Det följer då att om $X \neq \emptyset$ är fullständigt och

$$(3.1) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

där alla A_k är slutna, då innehåller åtminstone en av mängderna A_k , en icke-tom öppen delmängd.

Bevis. Antag att det fullständiga metriska rummet $X \neq \emptyset$ är av första kategorin. Låt

$$(3.2) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

och varje M_k är ingenstans tät i X . Vi skall konstruera en Cauchyföljd (p_k) med hopningspunkt p som inte finns i någon M_k , d.v.s. vi hittar en motsägelse till (3.2).

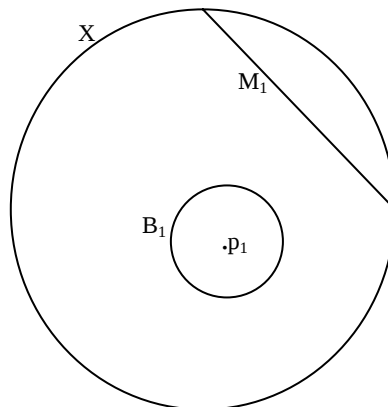
Genom antagande så är M_1 ingenstans tät i X , d.v.s. $\overline{M_1}$ innehåller inga inre punkter i X .

Men X innehåller inre punkter eftersom ett metriskt rum alltid är öppet i sig självt. Detta

innebär då att $\overline{M_1} \neq X$ och då får vi att $\overline{M_1}^C = X - \overline{M_1}$ är en öppen och icke-tom mängd,

eftersom vi tagit bort en sluten mängd. Vi kan således välja en punkt p_1 i $\overline{M_1}^C$ och ett öppet

klot, B_1 , med medelpunkten i p_1 och radien ε_1 . Vi kan dessutom anta att $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$.



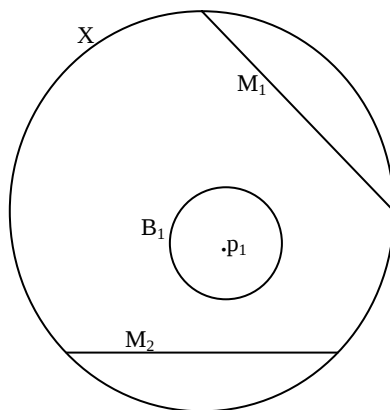
$$B_1 = B(p_1; \varepsilon_1) \subset \overline{M_1}^C \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

Vi försätter nu vidare med att konstatera att M_2 genom antagandet är ingenstans tät i X och som $\overline{M_1}$ ovan så innehåller $\overline{M_2}$ inga inre punkter i X . $\overline{M_2}$ innehåller då inte heller det

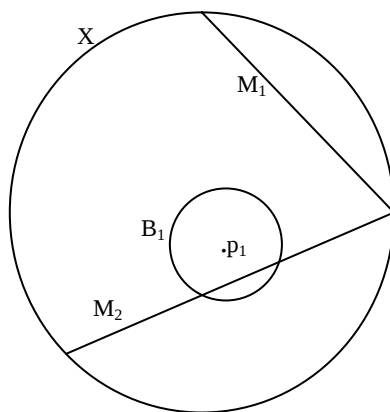
öppna klotet $B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$. Eftersom B_1 kan men inte behöver skära M_2 får vi nu en av

följande två situationer:

1) Att B_1 inte skär M_2 :



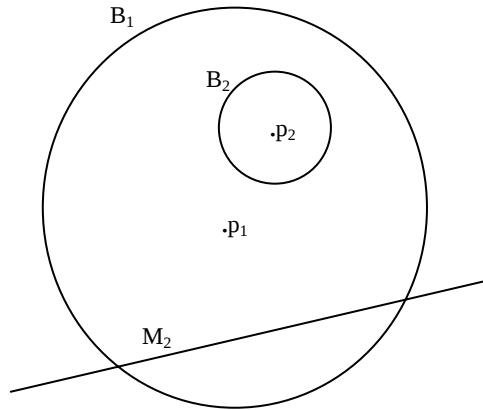
2) Att B_1 skär M_2 :



Vilken av situationerna som jag nu väljer spelar ingen roll eftersom jag kommer att använda mig av snittet mellan B_1 och $\overline{M_2}^C$.

Vi har nu att $\overline{M_2}^C \cap B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ är en icke-tom och öppen mängd. Vi kan nu återigen välja en punkt p_2 i den mängden och ett öppet klot, B_2 , med medelpunkten i p_2 och radien ε_2 . Vi har alltså att

$$B_2 = B(p_2; \varepsilon_2) \subset \overline{M_2}^C \cap B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1), \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$$



Vi fortsätter på ovanstående sätt och får då till slut en följd av klot:

$$B_k = B(p_k, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

så att $B_k \cap M_k = \emptyset$ och

$$B_{k+1} \subset B(p_k; \frac{1}{2}\varepsilon_k) \subset B_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Vi har då för varje m och $n > m$ att $B_n \subset B(p_m; \frac{1}{2}\varepsilon_m) \subset B_m$ och det följer att om $n, k > m$, så är

$$d(p_n, p_k) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, p_k) < 2\varepsilon_k < 2^{1-k}.$$

Alltså är (p_k) en Cauchyföljd, och den konvergerar mot ett $p \in X$ eftersom X är fullständigt. Då $p_m \in B_k$ för $m \geq k$, måste också $p \in B_k$, och detta gäller för alla k .

Eftersom $B_m \subset \overline{M_m}^C$ så ser vi att $p \notin M_m$ för något m , så att $p \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m = X$. Detta

motsäger att $p \in X$. V.s.b.

Att X är fullständigt är viktigt, för t.ex. om man tar $X = \mathbf{Q}$, som inte är fullständigt, så är $\mathbf{Q}$ av första kategorin i sig självt.

4 Banachrum och deras elementära egenskaper

4.1 Definitioner

(Teorin i detta avsnitt kommer från referens [1].)

En norm på ett linjärt rum X är en funktion $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbf{R}$ sådan att

- a) $\|x\| \geq 0$
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Triangelolikheten)

x och y ovan är godtyckliga vektorer i X och α en godtycklig skalär.

Ett linjärt rum med en norm kallas för ett normerat rum.

En metrik d på X definieras genom normen på följande sätt:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

Det följer ur a)-d) att $d(x, y) = 0$ om och endast om $x = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ och

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Alltså är d verkligen en metrik.

Ett normerat rum som är fullständigt m.a.p. metriken d ovan kallas för Banachrum.

4.2 Exempel på Banachrum

4.2.1 Det reella rummet $\mathbf{R}^n$ och det komplexa rummet $\mathbf{C}^n$.

(Teorin i detta avsnitt kommer från referens [1].)

Rummet $\mathbf{R}^n$ består av mängden av alla ordnade n -tuplar av reella tal, som vi skriver på formen

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \text{ osv,}$$

och metriken för detta rum definieras enligt

$$(4.1) \quad d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

Rummet $\mathbf{C}^n$ består av mängden av alla ordnade n -tuplar av komplexa tal med en metrik definierad enligt

$$(4.2) \quad d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

När $n = 1$ så har vi det komplexa planet $\mathbf{C}$ med den vanliga metriken definierad enligt

$$d(x, y) = |x - y|.$$

$\mathbf{C}^n$ är ett komplext linjärt rum medan $\mathbf{R}^n$ är ett reellt linjärt rum. De är normerade med en norm definierad enligt

$$(4.3) \quad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2}.$$

Vi ska nu visa att $\mathbf{R}^n$ och $\mathbf{C}^n$ är fullständiga, d.v.s. att de är Banachrum:

Sats. Rummen $\mathbf{R}^n$ och $\mathbf{C}^n$ är fullständiga.

Bevis. Vi tittar på rummet $\mathbf{R}^n$ och vi har metriken definierad enligt (4.1). Vi tittar nu på en godtycklig Cauchyföljd (x_m) i $\mathbf{R}^n$ och skriver denna på formen $x_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$.

Eftersom (x_m) är en Cauchyföljd så har vi att för varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett N sådant att

$$(4.4) \quad d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (m, r > N).$$

Eftersom $(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 \leq d(x_m, x_r)^2 < \varepsilon^2$ för varje j , så är följden $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ en Cauchyföljd av reella tal för varje $j = 1, \dots, n$. Eftersom $\mathbf{R}$ är fullständigt, se [1] sats 1.4-4, så konvergerar följden till något ξ_j , d.v.s. $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j$ då $m \rightarrow \infty$.

Om vi använder dessa n st gränsvärden så kan vi definiera $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$. Genom att låta $r \rightarrow \infty$ får vi nu från (4.4) att $d(x_m, x) \leq \varepsilon$ om $m > N$.

Det här visar att x är gränsvärdet till (x_m) och bevisar att $\mathbf{R}^n$ är fullständigt eftersom (x_m) var en godtyckligt vald Cauchyföljd.

Att visa att $\mathbf{C}^n$ är fullständigt görs på samma sätt som för det reella rummet $\mathbf{R}^n$, med den skillnaden att $(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2$ ersätts med $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}|^2$. V.s.b.

Metriken för dessa rum, som fås från (4.3), ser alltså ut på följande sätt:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2},$$

och detta är standardmetriken på $\mathbf{R}^n$ respektive $\mathbf{C}^n$.

4.2.2 Funktionsrummet $C[a, b]$

(Teorin i detta avsnitt kommer från referens [1].)

Med $C[a, b]$ betecknar vi mängden av alla reellvärda funktioner $x, y, \dots$ av en variabel som är definierade och kontinuerliga på ett givet kompakt intervall $J = [a, b]$.

Vi definierar normen som

$$(4.5) \quad \|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|.$$

Det är lätt att verifiera att $\|x\|$ uppfyller a)-d) ovan.

Vi skall nu visa att funktionsrummet $C[a, b]$ är fullständigt.

Sats. Rummet $C[a, b]$ med normen (4.5) är fullständigt.

Bevis. Låt (x_m) vara en Cauchyföljd på $C[a, b]$. Givet ett $\varepsilon > 0$, så finns det alltså ett N sådant att för alla $m, n > N$ har vi att

$$(4.6) \quad d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad \text{där } J \in [a, b].$$

För varje fixerat $t = t_0 \in J$, har vi då

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

Detta visar att $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$ är en Cauchyföljd av reella tal. Eftersom $\mathbf{R}$ är fullständigt så konvergerar följden, $x_m(t_0) \rightarrow x(t_0)$ då $m \rightarrow \infty$.

På det här sättet kan vi till varje $t \in J$ associera ett unikt reellt tal $x(t)$.

Detta definierar (punktvis) en funktion x på J och vi visar att $x \in C[a, b]$ och $x_m \rightarrow x$: från (4.6) och med $n \rightarrow \infty$ så har vi att

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

Och då för varje $t \in J$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

Detta visar att $(x_m(t))$ konvergerar likformigt mot $x(t)$ på J . Eftersom dessa x_m är kontinuerliga på J och konvergensen likformig, så är gränsvärdet x kontinuerlig på J .

Härav så följer att $x \in C[a, b]$ och även att $x_m \rightarrow x$. Detta bevisar att $C[a, b]$ är fullständigt och är då ett Banachrum. V.s.b.

4.3 Linjära operatorer mellan Banachrum

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [1] och [3].)

Låt X och Y vara två Banachrum, och låt T vara en avbildning från X till Y . T kallas även för en operator, vilket kommer att användas i detta arbete.

Om $y = Tx$ så kallar vi y för bilden av x och mängden $T^{-1}(y)$ för inversa bilden av y . För en delmängd A av X så skriver vi $T(A) = \{Tx : x \in A\}$. Mängden $T(X)$, som även betecknas TX , kallas för *värdemängden av T* .

T kallas för en *linjär operator* från X till Y om

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2 \quad \text{för alla } x_1, x_2 \text{ i } X \text{ och alla skalärer } \lambda_1, \lambda_2.$$

Det följer att $T(0) = T(2 \cdot 0) = 2T(0)$, så att $T(0) = 0$.

Om $TX = Y$ så säger vi att T avbildar X på Y , eller att T är en surjektiv avbildning.

Om $Tx_1 = Tx_2$ medför att $x_1 = x_2$ så kallas T för en injektiv avbildning.

Och T kallas för en bijektiv avbildning när den är både surjektiv och injektiv.

Sats. Låt X och Y vara vektorrum, båda reella eller båda komplexa. Låt $T : X \rightarrow Y$ vara en linjär operator. Då gäller att:

(a) Inversen $T^{-1} : TX \rightarrow X$ existerar om och endast om $Tx = 0$ medför att $x = 0$.

(b) Om T^{-1} existerar så är det en linjär operator.

Bevis. (a) Antag att $Tx = 0$ implicerar att $x = 0$. Låt $Tx_1 = Tx_2$. Eftersom T är linjär, så har vi att:

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0 \text{ så att } x_1 - x_2 = 0 \text{ enligt vårt antagande.}$$

Då följer nu att $Tx_1 = Tx_2$ implicerar att $x_1 = x_2$ och T^{-1} existerar eftersom T är en bijektion.

Och motsatsen gäller också, d.v.s. om T^{-1} existerar och $Tx = 0$ så är $Tx - T0 = 0$. Alltså måste $x = 0$ p.g.a. injektivitet.

(b) Vi antar att T^{-1} existerar och ska då visa att T^{-1} är linjär. Vi betraktar $x_1, x_2 \in X$ och deras bilder:

$$y_1 = Tx_1 \quad \text{och} \quad y_2 = Tx_2.$$

Då gäller att

$$x_1 = T^{-1}y_1 \quad \text{och} \quad x_2 = T^{-1}y_2.$$

T är linjär, så för alla skalärer, α och β , gäller det då att

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Eftersom vi har fått att $x_j = T^{-1}y_j$ så ger detta att

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2,$$

och detta bevisar att T^{-1} är linjär. V.s.b.

Låt X och Y vara linjära metriska rum. En linjär operator T från X till Y kallas för kontinuerlig om $Tx_n \rightarrow Tx$ då $x_n \rightarrow x$.

Om X och Y är Banachrum så kallas en linjär operator T begränsad om det finns en konstant M så att det för alla x gäller att $\|Tx\| \leq M \|x\|$. Det minsta sådant M kallas för normen av T och vi betecknar den med $\|T\|$.

Således får vi följande:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Sats. En begränsad linjär operator är likformigt kontinuerlig. Om en linjär operator är kontinuerlig i en punkt så är den begränsad.

Bevis. Antag T är begränsad, då gäller att:

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\| \cdot \|x_1 - x_2\| < \varepsilon \text{ för alla } x_1 \text{ och } x_2 \text{ i } X \text{ med } \|x_1 - x_2\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|},$$

alltså är T likformigt kontinuerlig.

Antag nu att T är linjär operator som är kontinuerlig i x_0 . Då finns det ett $\delta > 0$ sådant att

$$\|Tx - Tx_0\| < 1 \text{ för alla } x \text{ sådana att } \|x - x_0\| < \delta.$$

För varje $z \neq 0$ i X så sätter vi $w = \frac{\eta z}{\|z\|}$, där $\eta \in (0, \delta)$ är fixerat. Då har vi att:

$$\frac{\eta}{\|z\|} Tz = Tw = T(w + x_0) - T(x_0)$$

och

$$\frac{\eta}{\|z\|} \|Tz\| = \|T(w + x_0) - T(x_0)\| < 1, \text{ eftersom}$$

$$\|w + x_0 - x_0\| = \|w\| = \eta < \delta.$$

Konsekvensen av detta blir att

$$\|Tz\| \leq \eta^{-1} \|z\| \text{ och } T \text{ är då begränsad.} \quad \text{V.s.b.}$$

Det följer speciellt att T är kontinuerlig om och endast om den är begränsad.

5 Satsen om den öppna avbildningen och dess konsekvenser

5.1 Satsen om den öppna avbildningen (Open-mapping theorem)

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [5] och [2].)

Definition. X_ε betecknar det öppna klotet $B(0, \varepsilon)$ i X och Y_δ betecknar då, på samma sätt, det öppna klotet $B(0, \delta)$ i Y .

Sats. Låt X och Y vara Banachrum och låt T vara en begränsad linjär avbildning från X till Y . Om $TX = Y$, så avbildar T öppna mängder av X på öppna mängder av Y .

Bevis. Beviset ges i tre delar.

(a) Antag att vi har visat att:

$$(5.1) \quad \text{för alla } \varepsilon > 0 \text{ så existerar det ett } \delta > 0 \text{ sådant att } TX_\varepsilon \supset Y_\delta.$$

Låt G vara en öppen mängd i X . Vi vill visa att TG är öppen, d.v.s. att för alla $y_0 \in TG$ så existerar det ett $\delta > 0$ sådant att $y_0 + Y_\delta \subset TG$.

Låt $y_0 = Tx_0$ och sedan väljer vi ett $\varepsilon > 0$ sådant att $x_0 + X_\varepsilon \subset G$. Välj sedan även $\delta > 0$ som i (5.1), och då om (5.1) gäller så fås:

$$TG \supset T(x_0 + X_\varepsilon) = y_0 + TX_\varepsilon \supset y_0 + Y_\delta.$$

Likhetstecknet gäller pga att det är en linjär avbildning.

Det återstår nu att visa (5.1).

(b) Till del (b) används Baires kategorisats.

Det gäller att $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kX_{\varepsilon/2}$ vilket ger att

$$Y = TX = \bigcup_{k=1}^{\infty} kTX_{\varepsilon/2} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kTX_{\varepsilon/2}}.$$

Vi använder nu Baires kategorisats vilket ger att $\overline{kTX_{\varepsilon/2}}$ har inre punkter för något k , vilket i sin tur ger att $\overline{TX_{\varepsilon/2}}$ har inre punkter, eftersom om $y \in Y$ är en inre punkt i $\overline{kTX_{\varepsilon/2}}$, så är $y/k \in Y$ en inre punkt till $\overline{TX_{\varepsilon/2}}$.

Låt $\bar{y} \in Y$ vara en inre punkt i $\overline{TX_{\varepsilon/2}}$ då existerar ett $\delta > 0$ sådant att $\bar{y} + Y_\delta \subset \overline{TX_{\varepsilon/2}}$.

Om vi nu låter $y \in Y_\delta$, så gäller det att $\bar{y} + y \in \overline{TX_{\varepsilon/2}}$ (och $\bar{y} \in \overline{TX_{\varepsilon/2}}$) och att det existerar två följder:

$$y_i' = Tx_i' \in TX_{\varepsilon/2}, \quad y_i'' = Tx_i'' \in TX_{\varepsilon/2} \text{ sådana att } y_i' \rightarrow \bar{y}, \quad y_i'' \rightarrow \bar{y} + y.$$

Nu sätter vi $x_i = x_i'' - x_i'$, då gäller att:

$$Tx_i = Tx_i'' - Tx_i' \text{ vilket går mot } \bar{y} + y - \bar{y} = y.$$

Dessutom så gäller det att

$$\|x_i\| \leq \|x_i'\| + \|x_i''\| < \varepsilon, \text{ d.v.s. } x_i \in X_\varepsilon.$$

Vi har nu visat att:

(5.2) för alla $\varepsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ sådant att för alla $y \in Y_\delta$ och för alla $\delta_0 > 0$ så existerar $x \in X_\varepsilon$ sådant att $\|y - Tx\| < \delta_0$.

Vi vill nu komma fram till att $y = Tx$ och i del (c) visar vi detta mha (5.2).

(c) Vi ska nu alltså visa att x i (5.2) kan väljas så att $Tx = y$.

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och låt $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$. För varje $\varepsilon = \varepsilon_n$ kan vi välja ett $\delta = \delta_n$ sådant att (5.2) gäller, som δ_0 väljer vi δ_{n+1} . Eftersom δ i (5.2) kan göras mindre så kan vi anta att $\delta_n \rightarrow 0$.

Givet ett fixt $y \in Y_{\delta_1}$ så existerar det enligt (5.2) ett $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$ sådant att $\|y - Tx_1\| < \delta_2$, d.v.s.

$$y_1 := y - Tx_1 \in Y_{\delta_2}.$$

På samma sätt ser vi att det existerar ett $x_2 \in X_{\varepsilon_2}$ sådant att $\|y_1 - Tx_2\| < \delta_3$, d.v.s.

$$y_2 := y_1 - Tx_2 = y - Tx_1 - Tx_2 \in Y_{\delta_3}.$$

Om vi nu fortsätter på samma sätt så får vi till slut ett $x_n \in X_{\varepsilon_n}$ sådant att:

$$y_n = y - Tx_1 - \dots - Tx_n \in Y_{\delta_{n+1}}.$$

Och eftersom $\delta_n \rightarrow 0$ så ger detta att $y_n \rightarrow 0$.

Nu ska vi visa att $s_n = x_1 + \dots + x_n$ är en Cauchyföljd och det gör vi genom att använda triangelolikheten:

$$\left\| \sum_{n=k+1}^l x_n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^l \|x_n\| < \sum_{n=k+1}^l \varepsilon/2^n \leq \varepsilon/2^k.$$

Nu följer att $s_n \rightarrow x$ för något $x \in X$ och då får vi att

$$y_n = y - Ts_n \rightarrow y - Tx \text{ och eftersom } y_n \rightarrow 0 \text{ ger det att } y = Tx.$$

Det gäller även att

$$\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon, \text{ d.v.s. att } x \in X_{\varepsilon}.$$

Alltså får vi slutsatsen att varje $y \in Y_{\delta_1}$ kommer från ett $x \in X_{\varepsilon}$, d.v.s. $TX_{\varepsilon} \supset Y_{\delta_1}$. Därmed har vi visat (5.1). V.s.b.

Som en följsats till satsen om den öppna avbildningen så skall vi visa följande resultat:

5.2 Banachs sats

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [5] och [2].)

Sats. Låt X och Y vara Banachrum och låt T vara en injektiv, begränsad linjär avbildning från X till Y . Då är TX antingen av första kategorin i Y eller så är $TX = Y$ och T^{-1} en begränsad linjär avbildning.

Bevis. Beviset ges i två delar.

(a) Om TX inte är av första kategorin så är det av andra kategorin och då ska vi visa att $TX = Y$.

Vi börjar med att visa att $TX = Y$:

Låt oss då anta att TX är av andra kategorin och vi använder ett liknande resonemang som i satsen om den öppna avbildningen.

Låt $X_1 = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ och $TX = \bigcup_{k=1}^{\infty} TkX_1$. Eftersom TX är av andra kategorin så medför

det att TkX_1 har inre punkter för något k och detta i sin tur medför att TX_1 har en inre punkt.

Låt nu $\bar{y}$ vara en inre punkt till TX_1 , då existerar det ett $\delta > 0$ sådant att $\bar{y} + y \in TX_{\alpha}$ för alla y med $\|y\| < \delta$.

Eftersom $\bar{y} \in TX_1$, så existerar det ett $\bar{x} \in X_1$ sådant att $T\bar{x} = \bar{y}$.

Nu tittar vi på mängden

$$T(X_1 - \bar{x}) = T(X_1) - \bar{y}.$$

Eftersom $\bar{x} \in X_1$, innehåller $TX_1 - \bar{x}$ origo, och eftersom $\bar{y}$ är en inre punkt till TX_1 , är origo en inre punkt till $TX_1 - \bar{y}$. Detta ger att $TX = Y$.

Det sista inses genom att låta $y \in Y$ och sedan välja ett $a > 0$, så litet att $ay \in TX$, och eftersom TX är ett linjärt rum så måste även $y \in TX$. Då detta kan göras för varje $y \in Y$, så får vi att $TX = Y$.

Vi har nu visat att om TX är av andra kategorin så gäller att $TX = Y$.

(b) Det återstår att visa att T^{-1} är begränsad.

Att T^{-1} är begränsad är ekvivalent med att T^{-1} är kontinuerlig, som vi visat i avsnitt 4.3. Vi behöver således visa att för varje delmängd $G \subset X$ som är öppen så gäller det att varje $(T^{-1})^{-1}(G)$ är öppen.

Men vi har ju att

$$(T^{-1})^{-1}G = TG$$

är öppen enligt satsen om den öppna avbildningen. V.s.b.

Att T^{-1} är linjär, om den existerar, har visats i avsnitt 4.3.

5.3 En tillämpning av Banachs sats

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [5] och [1].)

Sats. Rummet $C^1[0,1]$ är av första kategorin i rummet $C[0,1]$.

Bevis. Vi har att $X = C^1[0,1]$ är det normerade rummet av alla kontinuerligt deriverbara funktioner på $J = [0,1]$ med en norm definierad enligt

$$\|x\|_X = \max_{t \in J} (|x(t)| + |x'(t)|).$$

Vi visar i senare sats i detta avsnitt att X är fullständigt, vilket vi antar tills vidare.

Låt $Y = C[0,1]$ med en norm definierad enligt $\|x\|_Y = \max_{t \in J} |x(t)|$ och låt $T: X \rightarrow Y$ där

$$Tx = x.$$

Tx är alltså samma funktion som x , men vi "glömmer" att den är deriverbar i rummet Y . Vi får då att

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_Y = \max_{t \in J} |x(t)| \leq \max_{t \in J} (|x(t)| + |x'(t)|) = \|x\|_X.$$

Alltså är T en begränsad operator med $\|T\| \leq 1$ och den är uppenbart injektiv.

Eftersom det finns kontinuerliga funktioner som inte är kontinuerligt deriverbara, t.ex. om $y(t) = \sqrt{t}$, så tillhör y rummet Y men ej rummet X , så är alltså $T(X) \neq Y$.

Eftersom $T(X) \neq Y$ så medför nu Banachs sats att $C^1[0,1]$ är av första kategorin i $C[0,1]$, d.v.s. att "de flesta" kontinuerliga funktioner i $C[0,1]$ inte tillhör $C^1[0,1]$. V.s.b.

Mängden av kontinuerligt deriverbara funktioner är alltså en undantagsmängd i mängden av alla kontinuerliga funktioner.

Sats. $X = C^1[0,1]$ är fullständigt.

Bevis. Låt (x_k) vara en Cauchyföljd. Eftersom (x_k) och (x_k') är Cauchyföljder i $C[0,1]$, kan vi nu anta att $x_k \rightarrow x$ och $x_k' \rightarrow y$ enligt satsen i delavsnitt 4.2.2.

Det återstår då att visa att $y = x'$:

Vi har att

$$x_k(t) - x_k(0) = \int_0^t x_k'(s) ds.$$

Låt nu $k \rightarrow \infty$, vilket ger

$$x(t) - x(0) = \int_0^t y(s) ds.$$

(Gränsvärdet av integralen är lika med integralen av gränsvärdet eftersom $x_k' \rightarrow y$ likformigt.)

Vi deriverar nu båda leden och detta ger

$$x'(t) = y(t). \quad \text{V.s.b.}$$

6 Banach-Steinhaus sats och dess tillämpningar

6.1 Banach-Steinhaus sats

(Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [5] och [1].)

Sats. Låt $T_\alpha, \alpha \in \Lambda$, vara begränsade linjära operatorer från ett Banachrum X till ett normerat rum Y . Om mängden $\{\|T_\alpha x\|\}_{\alpha \in \Lambda}$ är begränsad för varje $x \in X$, d.v.s. det finns ett tal c_x sådant att

$$(6.1) \quad \|T_\alpha x\| \leq c_x \quad \alpha \in \Lambda$$

så är även mängden $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha \in \Lambda}$ begränsad, d.v.s. det finns ett tal c sådant att

$$(6.2) \quad \|T_\alpha\| \leq c \text{ för alla } \alpha \in \Lambda.$$

Bevis. Låt $X_k = \{x \in X : \|T_\alpha x\| \leq k \text{ för alla } \alpha \in \Lambda\}$. X_k är sluten och det visas på följande sätt:

Om $x_n \rightarrow x$ så får vi att $\|T_\alpha x_n\| \rightarrow \|T_\alpha x\|$ och eftersom det gäller att $\|T_\alpha x_n\| \leq k$ så gäller det även att $\|T_\alpha x\| \leq k$, d.v.s. vi har att alla X_k är slutna.

Antag nu att det existerar ett k_0 sådant att X_{k_0} har en inre punkt, säg x_0 .

Då existerar det ett $\varepsilon > 0$ sådant att $x_0 + \varepsilon x \in X_{k_0}$ för alla x med $\|x\| \leq 1$.

För dessa x så gäller följande:

$$\|T_\alpha(-x_0 + \varepsilon x)\| = \|T_\alpha(x_0 - \varepsilon x)\| \leq k_0 \text{ eftersom } x_0 \pm \varepsilon x \in X_{k_0}.$$

Detta medför att

$$\|T_\alpha(\varepsilon x)\| = \left\| \frac{1}{2}T_\alpha(x_0 + \varepsilon x) + \frac{1}{2}T_\alpha(-x_0 + \varepsilon x) \right\| \leq \frac{1}{2}k_0 + \frac{1}{2}k_0 = k_0 \text{ för alla } \alpha \in \Lambda,$$

dvs $\varepsilon x \in X_{k_0}$ för alla x med $\|x\| \leq 1$.

Nu följer det att 0 är en inre punkt till X_{k_0} och

$$\varepsilon \|T_\alpha x\| = \|T_\alpha(\varepsilon x)\| \leq k_0, \text{ d.v.s. } \|T_\alpha x\| \leq \frac{k_0}{\varepsilon} \text{ för alla } x \text{ med } \|x\| \leq 1 \text{ och för alla } \alpha \in \Lambda.$$

Då får vi följande:

$$\|T_\alpha\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_\alpha x\| \leq \frac{k_0}{\varepsilon} = c.$$

Det återstår att visa att något X_{k_0} verkligen måste ha inre punkter. Antag nu att alla X_k saknar inre punkter. Eftersom de är slutna, är de ingenstans täta. Enligt Baires kategorisats så följer det nu att $X \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ eftersom alla X_k är av första kategorin.

Nu tar vi ett godtyckligt $\tilde{x} \in X$. Mängden $\{\|T_\alpha \tilde{x}\|\}_{\alpha \in \Lambda}$ är begränsad enligt antagandet, d.v.s.

$$\|T_\alpha \tilde{x}\| \leq k \text{ för något } k.$$

Då får vi att varje $\tilde{x} \in X$ tillhör något X_k , d.v.s.

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Vi får då en motsägelse och vi har nu visat att det finns en inre punkt vilket var det vi ville uppnå. V.s.b.

6.2 En enkel tillämpning

(Teorin i detta avsnitt kommer från referensen [1].)

Sats. Det normerade rummet X av alla polynom $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k$ med en norm definierad enligt

$$(6.3) \quad \|x\| = \max_j |\alpha_j| \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots \text{ koefficienterna till } x)$$

är inte fullständigt.

Bevis. Vi använder oss av Banach-Steinhaus sats.

Vi konstruerar en följd av begränsade linjära operatorer från X till $\mathbf{R}$, som uppfyller (6.1) men inte (6.2) så att X inte kan vara fullständigt.

Vi kan nu skriva ett polynom $x(t) \neq 0$ av grad N_x på formen

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j \quad (\alpha_{N_x} \neq 0, \alpha_j = 0 \text{ för } j > N_x).$$

Som en följd av operatorer från X till $\mathbf{R}$ så tar vi (T_n) definierad enligt

$$(6.4) \quad T_n 0 = 0, \quad T_n x = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}.$$

T_n är linjär och även begränsad. Det senare inses genom (6.3) där vi har att $|\alpha_j| \leq \|x\|$ så att

$$|T_n x| \leq n \|x\|.$$

Vidare så har vi, för varje fixt $x \in X$, att följden $(|T_n x|)$ uppfyller (6.1) eftersom ett polynom $x(t)$ av grad N_x har $N_x + 1$ koefficienter. Då får vi enligt (6.4),

$$|T_n x| \leq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = c_x,$$

som är på samma form som (6.1).

Vi ska nu visa att (T_n) inte uppfyller (6.2), d.v.s. att det inte finns något c som uppfyller:

$$\|T_n\| \leq c \text{ för alla } n.$$

Detta gör vi genom att välja ett speciellt polynom som definieras enligt:

$$x(t) = 1 + t + \dots + t^n.$$

Då är $\|x\| = 1$ enligt (6.3) och

$$T_n x = 1 + 1 + \dots + 1 = n = n \|x\|.$$

Vi har då fått följande:

$$\|T_n\| \geq \frac{|T_n x|}{\|x\|} = n, \text{ d.v.s. att } (\|T_n\|) \text{ är obegränsad.}$$

Om rummet X vore fullständigt skulle (6.1) medföra (6.2) enligt Banach-Steinhaus sats, alltså kan inte X vara fullständigt. V.s.b.

6.3 Tillämpning på Fourierserier

(Teorin i detta avsnitt kommer från referens [1].)

Låt x vara en 2π -periodisk funktion sådan att $|x|$ är integrerbar över $[0, 2\pi]$. Vi vill utveckla x i en Fourierserie, d.v.s. skriva x på formen

$$(6.5) \quad x(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt),$$

där tecknet $\sim$ betyder att x svarar mot serien ovan.

Fourierkoefficienterna a_0, a_m, b_m ges av:

$$(6.6) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos mtdt, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin mtdt.$$

Detta är ett naturligt val eftersom om man ersätter $\sim$ med ett likhetstecken i (6.5), multiplicerar båda led t.ex. med $\sin m_0 t$, integrerar och räknar formellt (d.v.s. utgår från att integralen av summan är lika med summan av integralerna), så får man b_{m_0} som i (6.6).

En naturlig fråga är: när är $x(t)$ lika med högerledet i (6.5) för alla t ?

Det är känt att om x är kontinuerlig och periodisk med period 2π samt om x' är styckvis kontinuerlig på $[0, 2\pi]$ så råder likhet för alla t , se [6], avsnitt 31, sats på s. 90.

Enligt referensen ovan konvergerar serien för alla x även om x (och x') enbart är styckvis kontinuerlig. Detta visar att kontinuitet inte är en nödvändighet för att högerledet i (6.5) ska konvergera. Överraskande nog så är kontinuitet inte heller tillräckligt för att serien (6.5) ska konvergera.

Sats. Det existerar reellvärda kontinuerliga funktioner vilkas Fourierserier divergerar i en given punkt t_0 .

Bevis. Vi använder oss av Banach-Steinhaus sats.

Låt X vara det normerade rum av alla reellvärda kontinuerliga funktioner med period 2π . Normen för X definieras enligt

$$(6.7) \quad \|x\| = \max_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

X är ett Banachrum, vilket vi skall visa i nästa sats. Och utan att begränsa generaliteten kan vi ta $t_0 = 0$.

Vi ska använda Banach-Steinhaus sats på $T_n = f_n$, där $f_n(x)$ är värdet vid $t = 0$ för den n :te partiella summan av Fourierserien till x .

Eftersom sinustermerna är 0 och cosinustermerna är 1 vid $t = 0$ så ser vi från (6.5) och (6.6) att

$$f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt \right] dt.$$

Vi vill bestämma summan i integralen och vi beräknar då

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2} t \sum_{m=1}^n \cos mt &= \sum_{m=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} t \cos mt = \sum_{m=1}^n \left[-\sin \left(m - \frac{1}{2} \right) t + \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \right] = \\ &= -\sin \frac{1}{2} t + \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \end{aligned}$$

där sista uttrycket kommer från att man kan stryka uttrycken mellan första och sista termen.

Om vi dividerar detta uttryck med $\sin \frac{1}{2} t$ och adderar 1 på båda sidor så får vi:

$$1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos mt = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2} t}.$$

Följaktligen så kan $f_n(x)$ skrivas på formen:

$$(6.8) \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt \quad \text{där} \quad q_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2} t}.$$

Om vi använder detta så kan vi visa att den linjära avbildningen f_n är begränsad. Enligt (6.7) och (6.8) har vi

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt = \frac{\|x\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

Vi ser då att f_n är begränsad. Vidare genom att ta supremum över alla x med normen 1 så får vi

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

Vi skall nu visa att vi istället kan sätta likhetstecken i olikheten ovan. Låt oss först skriva

$$|q_n(t)| = y(t) q_n(t) \quad \text{där} \quad y(t) = \begin{cases} +1 & \text{för varje } t \text{ sådant att } q_n(t) \geq 0 \\ -1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Funktionen y är inte kontinuerlig, men genom att ta ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ så kan vi modifiera den till ett kontinuerligt x med norm 1 sådant att

$$(6.9) \quad \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] q_n(t) dt \right| < \varepsilon,$$

t.ex. på ett följande sätt:

Vi ser att:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 \quad \text{för} \quad 0 \leq t < \pi / \left(n + \frac{1}{2} \right), \\ y(t) &= -1 \quad \text{för} \quad \pi / \left(n + \frac{1}{2} \right) < t < 2\pi / \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{osv.} \end{aligned}$$

Vi definierar nu:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \quad \text{för} \quad 0 \leq t < \pi / \left(n + \frac{1}{2} \right) - \alpha, \\ x(t) &= -1 \quad \text{för} \quad \pi / \left(n + \frac{1}{2} \right) + \alpha < t < 2\pi / \left(n + \frac{1}{2} \right) - \alpha \end{aligned}$$

och låter $x(t)$ vara den sträcka som förbinder punkten $\left(\pi/\left(n+\frac{1}{2}\right)-\alpha, 1\right)$ med $\left(\pi/\left(n+\frac{1}{2}\right)+\alpha, -1\right)$, sedan fortsätter vi vidare på samma sätt. Eftersom $x(t)=y(t)$ utom på intervall av längden 2α , är det nu lätt att se att (6.9) gäller om α väljs tillräckligt litet.

Genom att skriva (6.9) som två integraler och även använda (6.8) så får vi

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt - \int_0^{2\pi} y(t) q_n(t) dt \right| = \left| f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ var godtyckligt valt och $\|x\|=1$ så bevisar detta att:

$$(6.10) \quad \|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

Vi ska slutligen visa att följden $\{\|f_n\|\}$ är obegränsad.

Om vi i (6.10) substituerar uttrycket för q_n från (6.8), använder olikheten

$\left|\sin \frac{1}{2}t\right| < \frac{1}{2}t$ för $t \in (0, 2\pi]$ och gör variabelbytet: $\left(n+\frac{1}{2}\right)t = v$, så får vi:

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt > \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t} dt > \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v| dv = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty \text{ då } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ divergerar.

Följaktligen så är $(\|f_n\|)$ obegränsad så att (6.2) (med $T_\alpha = f_n$) inte gäller. Eftersom X är fullständigt så säger detta att (6.1) inte kan gälla för alla x . Det måste då finnas ett $x \in X$ sådant att $(\|f_n(x)\|)$ är obegränsad. Men enligt definitionen av f_n så betyder det att Fourierserien för detta x divergerar för $t=0$. V.s.b.

Sats. Rummet X ovan är ett Banachrum.

Bevis. Låt (x_k) vara en Cauchyföljd. På samma sätt som i avsnitt 4.2 visar man att det existerar ett x sådant att $x_k \rightarrow x$ likformigt. Eftersom $x_k(t+2\pi) \rightarrow x(t+2\pi)$, $x_k(t) \rightarrow x(t)$ och $x_k(t+2\pi) = x_k(t)$, är $x(t+2\pi) = x(t)$, d.v.s x är periodisk. Så $x \in X$. V.s.b.

7 REFERENSER

- [1] Erwin Kreyszig, -Introductory functional analysis with applications-,
Wiley, New York, 1978
ISBN 0-471-50731-8

- [2] Avner Friedman, -Foundations of Modern Analysis-
Holt, New York, 1970
SBN 03-081291-7

- [3] H. L. Royden, -Real Analysis-
Toronto, 1968, second edition

- [4] Walter Rudin, -Principles of Mathematical Analysis-
McGraw-Hill, Auckland, 1976, third edition
ISBN 0-07-085613-3

- [5] Andrzej Szulkin, Föreläsningsanteckningar i funktionalanalys (opublicerade)

- [6] James Ward Brown & Ruel V. Churchill, - Fourier series and boundary value
problems-,
McGraw-Hill, Boston, 2001, sixth edition
ISBN 0-07-232570-4