EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Variationskalkyl, några klassiska problem

av

Lior Amir

2007 - No 16

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

Variationskalkyl, några klassiska problem

Lior Amir

Examensarbete i matematik 20 poäng, fördjupningskurs

Handledare: Erik Svensson

2007

Jag vill tacka följande personer för deras hjälp:

Först och främst min handledare Erik Svensson för allt han gjort för mig och mycket mycket mer.

Hans Rullgård, utan honom skulle jag inte ha klarat en enda dag på jorden.

Christell Sjöö, Kirsti Kanttikoski, Helen Florberger, Susanne Thon, Malin Birgerson och Riitta de Zalenski för deras stöd och generositet.

Lennart Börjeson för livslust och solsken.

Till אבא

Innehåll

Kapitel 1

Introduktion

I det här avsnittet kommer vi att studera Euler-Lagrange-ekvationen, extremalfältet, E-funktionen och tillräckliga villkor för minimum och extremum.

1.1 Härledning av Euler-Lagrange-ekvationen

Variationskalkyl har varit ett av de större områdena inom analys i över tvåhundra år; den kan tillämpas på en mångfald problem inom matematik och fysik.

Antag att två punker P och Q är givna i ett plan. Det finns oändligt många kurvor som förbinder dessa punkter. Vi kan ställa följande frågor, till exempel: Vilken kurva minimerar den tid som behövs för att glida mellan P och Q? Vilken kurva minimerar arean av den rotationsyta som fås när kurvan roterar kring x-axeln?

Låt oss titta på ett allmänt problem. Låt P och Q ha koordinaterna (x_1, y_1) resp. (x_2, y_2), och betrakta familjen av två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ som satisfierar villkoren $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ Vi ska se, att om en sådan funktion $y(x)$ minimerar integralen

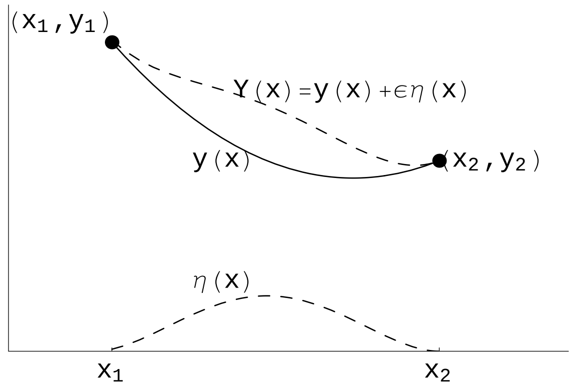
$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y, y'\big) dx,$$

så uppfyller $y(x)$ en differentialekvation. Vilken differentialekvation satisfieras av den minimerande funktionen $y(x)$?

Vi får en differentialekvation för den minimerande funktionen $y(x)$ genom att jämföra de värden på I, som fås när den funktionen varieras.

Mera specifikt kan man göra på följande sätt:

Låt $y(x)$ vara den minimerande funktionen och betrakta den enparametriga familjen av jämförelsefunktioner $Y(x)$ definierad genom $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, där $\eta(x)$ är en godtycklig två gånger kontinuerligt deriverbar funktion för vilken $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ och ε är en variabel.



Figur 1.1

Kurvorna $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ och $Y(x) = y(x)$ har då gemensamma start- och slutpunkt, och värden på I för $Y(x) = y(x)+\varepsilon\eta(x)$ är alltid större än eller lika med värden på I för $Y = y(x)$. I vår enparametriga familj

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

står $\varepsilon\eta(x)$ för den vertikala avvikelsen från kurvan $y(x)$. För varje fixt val av funktionen $\eta(x)$ ger varierande värden på ε en delfamilj av vår parameterfamilj och för $\varepsilon = 0$ i en sådan delfamilj fås den minimerande funktionen $y(x)$.

Villkoren $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ försäkrar att $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$ och $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$, dvs att alla jämförelsefunktionerna har samma ändpunktsvärden som den minimerande funktionen $y(x)$. Med ett lämpligt val av $\eta(x)$ och ε, är det möjligt att framställa vilken två gånger kontinuerligt deriverbar funktion som helst (med de önskade ändpunktsvärdena) med ett uttryck av formen $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$.

Låt oss återvända till $I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y, y'\big)dx$. Genom att ersätta $y(x)$ och $y'(x)$ med $Y(x)$ och $Y'(x)$ resp. får vi integralen

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, Y, Y\big)dx, \tag{1.1}$$

vilken, för en given funktion $\eta(x)$, är en funktion av parametern ε:

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, Y, Y'\big)dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)\big).
\end{aligned}
$$

Genom att sätta $\varepsilon = 0$ in i $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ får vi $Y(x) = y(x)$, och eftersom vi förutsatt att $y(x)$ minimerar integralen, vet vi att $I(\varepsilon)$ är en minimumpunkt med avseende på ε för $\varepsilon = 0$ (detta stämmer för vilket val av $\eta(x)$ som helst). På så sätt reduceras problemet till ett vanligt minimumproblem med avseende på variabeln ε; dessutom vet vi på förhand det värde av variabeln ε för vilket minimum fås ($\varepsilon = 0$). Eftersom $I(\varepsilon)$ med våra förutsättningar är deriverbar, gäller alltså att $I'(0) = 0$ (för varje val av $\eta(x)$).

Derivatan $I'(\varepsilon)$ kan fås genom att derivera

$$
I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)\big)dx
$$

under integraltecknet, dvs

$$
\begin{aligned}
I'(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon}\right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y, Y')\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'}(x, Y, Y')\eta'(x)\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta(x), \qquad \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'(x)\right).
$$

När $\varepsilon = 0$ är $(Y, Y') = (y, y')$, och således ger $I'(0) = 0$ att

$$
I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')\eta'(x)\right) = 0 \tag{1.2}
$$

Vi kan eliminera $\eta'(x)$ genom att partialintegrera integralens andra term, vilket ger

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) &= \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \\
&= \{\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\} \\
&= -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx.
\end{aligned}
$$

Vi kan därför skriva om (1.2) på formen

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) dx = 0.$$

Vi använder oss sedan av följande lemma:

Lemma 1. *Om x_1 och x_2 är fixa konstanter och funktionen $G(x)$ är kontinuerlig för $x_1 \leqq x \leqq x_2$ samt om $\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0$ för varje val av en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $\eta(x)$ för vilken $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, gäller att $G(x) = 0$ identiskt i intervallet $x_1 \leqq x \leqq x_2$.*

Bevis. Anta att motsatsen gäller, dvs att det finns ett värde x' i $(x_1 \leqq x' \leqq x_2)$ för vilket $G(x') \neq 0$. Låt oss anta att $G(x') > 0$. Eftersom $G(x)$ är kontinuerlig måste det finnas ett delintervall av $x_1 \leqq x \leqq x_2$ kring x', säg $x'_1 \leqq x' \leqq x'_2$, där $x'_1 < x'_2$ i vilket $G(x) > 0$ överallt. Men då kan påståendet

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0 \tag{1.3}$$

inte gälla för varje tillåtet val av η.

Betrakta, t. ex., funktionen η som definieras av

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x_1 \leqq x \leqq x'_1 \\ (x - x'_1)^3(x'_2 - x)^3 & \text{för } x'_1 \leqq x \leqq x'_2 \\ 0 & \text{för } x'_2 \leqq x \leqq x_2 \end{cases}$$

($\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ och η är två gånger kontinuerligt deriverbar.)

Då är

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (x - x'_1)^2(x - x'_2)^2 G(x)dx. \tag{1.4}$$

Eftersom $G(x) > 0$ i $x'_1 \leqq x \leqq x'_2$, blir högerledet av (1.4) positivt, vilket strider mot (1.3). Samma sak gäller om vi antar att $G'(x) < 0$. □

Detta ger att en minimerande funktion $y(x)$ måste uppfylla differentialekvationen

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \text{Euler-Lagrange-ekvationen.}$$

Vi har därmed visat att om $y(x)$ är en tillåten funktion som minimerar integralen (1.1), då satisfierar y Euler-Lagrange-ekvationen. Dessutom måste

$y(x)$ uppfylla problemets randvillkor. Villkoret I'(0)=0 behöver dock inte ge ett minimum, utan kan också ge ett maximum eller en terrasspunkt för $I(\varepsilon)$ då $\varepsilon = 0$. Om den erhållna funktionen $y(x)$ verkligen ger ett minimum måste därför avgöras genom ytterligare analys. Sådana ges i avsnitten 1.2 och 1.3. Varje lösning till Euler-Lagrange-ekvationen kallas dock en extremal till det betraktade problemet, oberoende av om lösningen uppfyller problemets randvillkor eller ej.

De partiella derivatorna $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ och $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ räknas genom att betrakta x, y och y' som oberoende variabler.

Eftersom

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{dx} \\ &= F_{y'x} + F_{y'y}\frac{dy}{dx} + F_{y'y'}\frac{d^2y}{d^2x}\end{aligned}$$

ser vi att Euler-Lagrange-ekvationen också kan skrivas:

$$F_{y'y'}\frac{d^2y}{d^2x} + F_{y'y}\frac{dy}{dx} + F_{y'x} - F_y = 0.$$

Referenser:
Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952
George F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill international editions, 1991

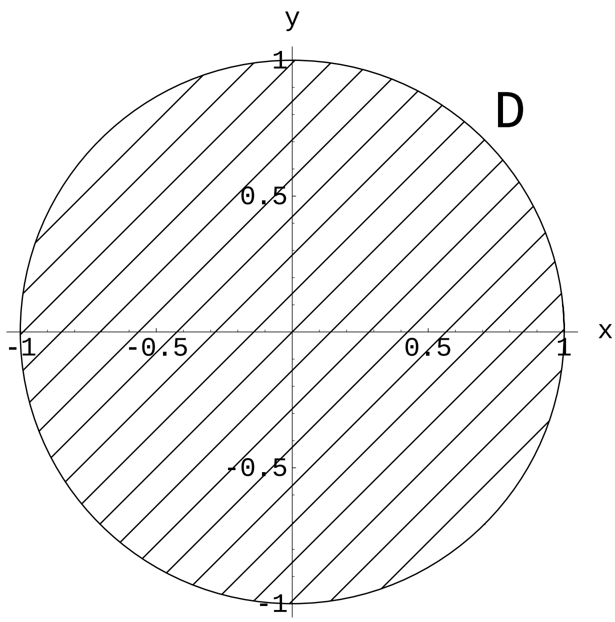
1.2 Extremalfält

Låt F vara en given trevariabelfunktion, och låt D vara ett öppet ändligt område i xy-planet begränsat av en enkel sluten kurva.

Betrakta nu extremaler hörande till F, dvs lösningar till Euler-Lagrange-ekvationen hörande till f. Anta att det existerar en enparametrig skara av sådana extremaler i D, som har följande egenskaper:

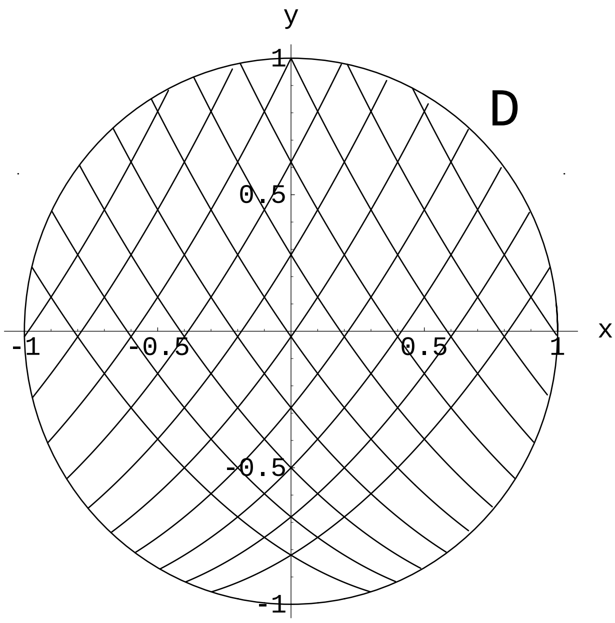
1. Genom varje punkt i D går *en och endast en* extremal som tillhör skaran.
2. Vinkelkoefficienten för tangenten till en extremal i punkten (x, y) är en funktion $p(x, y)$, som har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen i D.
3. $F_{y'y'}(x, y, p(x, y)) \neq 0$ för varje punkt (x, y) i D.

En sådan extremalskara kallas ett extremalfält i D. Funktionen $p(x, y)$ kallas fältfunktionen för fältet.



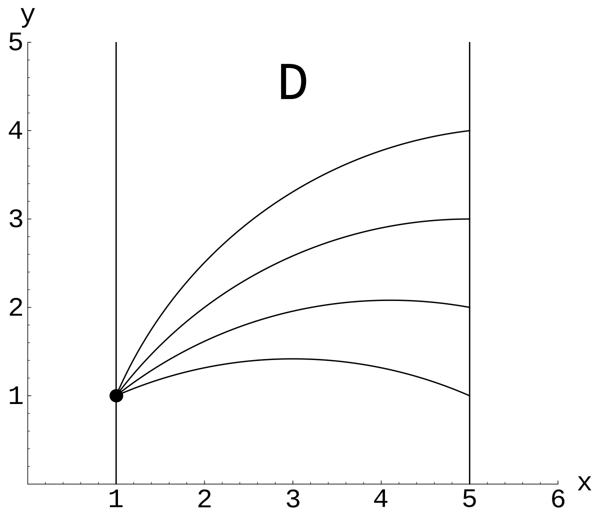
Figur 1.2: Ett extremalfält

Om minst två olika kurvor hörande till en extremalskara går genom en viss punkt (x_0, y_0) och (x_0, y_0) tillhör D bildar inte extremalskaran ett extremalfält (se figur 1.3).



Figur1.3: Inte ett extremalfält

Om alla kurvor hörande till en extremalskara går genom en viss punkt (x_0, y_0) där (x_0, y_0) tillhör randen av D och extremalskaran uppfyller 1, 2 och 3 ovan är dock extremalskaran ett extremalfält i D. Ett sådant extremalfält kallas ett centralfält, och punkten (x_0, y_0) är fältets centrum (se figur 1.4).



Figur 1.4: Ett centralfält

Betrakta nu en enparametrig skara av extremaler $y = y(x, C), C \in I$, $(I$

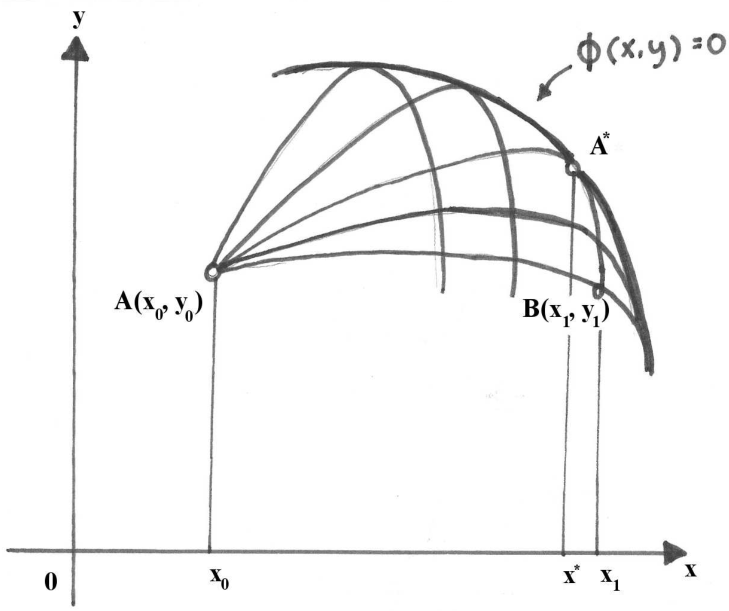
öppet intervall), som alla går genom en punkt $A = (x_0, y_0)$. Låt $\phi(x, y) = 0$ vara enveloppkurvan till denna extremalskara (vi antar att envelopp existerar). För varje punkt (x, y) på enveloppen $\phi(x, y) = 0$ gäller då enligt definitionen av envelopp att

$$y(x, C) - y = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0$$

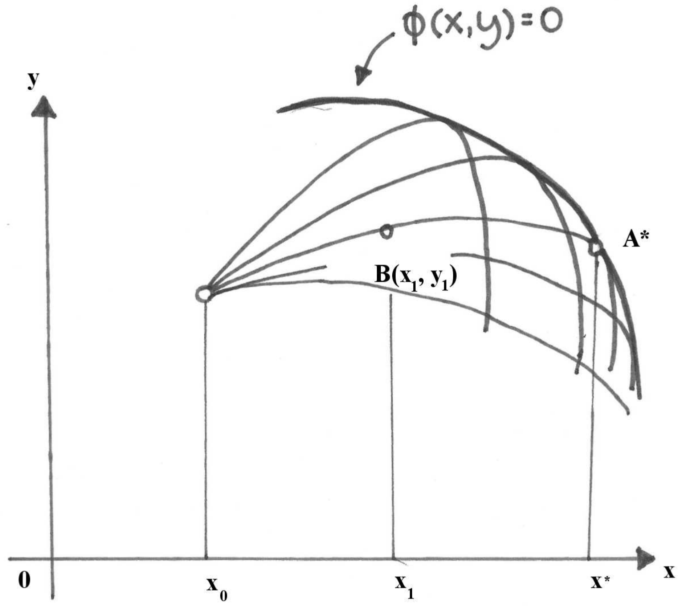
för något C.

Låt $B = (x_1, y_1)$ vara en punkt genom vilken det går en extremal, och låt $y = y(x, C_0)$ vara en sådan extremal. Den punkt A^* där extremalen tangerar enveloppen $\phi(x, y) = 0$ kallas den med avseende på extremalen $y = y(x, C_0)$ konjugerade punkten till A. Av enveloppens ekvation följer att varje punkt på enveloppen är gränsvärdet då $\delta C \to 0$ för skärningspunkten $\neq A$ för två extremaler $y = y(x, C)$ och $y = y(x, C + \delta C)$. Detta har följande konsekvens:

Låt x^* vara abskissan för A^*. Om $x^* > x_1$, bildar extremalerna $y = y(x, C)$ för C nära C_0 ett centralfält, om $x_0 < x^* < x_1$ gör de inte det (se både figurerna nedan).



Figur1.5: Inte ett centarlfält



Figur1.6: Ett centralfält

Sammanfattningsvis gäller följande: Ett tillräckligt villkor för att det ska finnas ett centralfält av extremaler med centrum i A i någon omgivning av en extremalkurvbåge AB är att den konjugerade punkten A^* inte ligger på bågen AB. Detta villkor kallas för *Jacobis villkor*.

Låt oss formulera detta villkor analytiskt:
Låt $y = y(x, C)$ vara ekvationerna för ett strålknippe av extremaler med centrum i punkten A; C kan antas vara lutningen y' i punkten A av en extremal tillhörande strålknippet. Vi antar att en envelopp finns.
Enveloppen bestäms av ekvationerna:

$$y = y(x, C),$$
$$\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Derivatan $\dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ längs en godtycklig kurva tillhörande extremalfamiljen är en funktion av bara x. Låt oss beteckna denna funktion med u så att

$$y = y(x, C),$$
$$u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$$

och

$$u'_x = \frac{\partial^2 y(x, C)}{\partial C \partial x}.$$

Eftersom kurvorna $y = y(x, C)$ är extremaler och därmed lösningar till en Euler-Lagrange-ekvation gäller om F är den funktion som definierar Euler-Lagrange-ekvationen att

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C)) - \frac{d}{dx} F'_y(x, y(x, C), y'_x(x, C)) \equiv 0.$$

Genom att derivera denna identitet med avseende på C och sätta in $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = u$ erhåller vi

$$F_{yy} u + F_{yy'} u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'} u + F_{y'y'} u') = 0$$

eller

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} \left(F_{y'y'} u' \right) = 0.$$

I funktionerna $F_{yy}(x, y, y'), F_{yy'}(x, y, y')$ och $F_{y'y'}(x, y, y')$ är här $y = y(x, C)$ och $y' = y'_x(x, C)$ där $y(x, C)$ är en lösning till tillhörande Euler-Lagrange-ekvationen.

Låt nu B vara en punkt på en av extremalerna $y = y(x, C)$, säg på $y = y(x, C_0)$. Låt x_0 vara abskissan för A (centrum för det strålknippe som extremalerna $y = y(x, C)$ bildar), och låt x_1 vara abskissan för B. Eftersom $y(x_0, C) = y_0 =$ konstant för alla C gäller att

$$u(x_0) = \frac{\partial y(x_0, C)}{\partial C} = 0$$

för alla C.

Betrakta nu Jacobis ekvation ovan för $C = C_0$. Då är som nyss motiverats $u(x_0) = 0$. Om $A^* = (x^*, y^*)$ för den med avseende på extremalen $y = y(x, C_0)$ konjugerade punkten till A gäller

$$\frac{\partial y(x^*, C_0)}{\partial C} = 0$$

och

$$y^* = y(x^*, C_0),$$

dvs

$$u(x^*) = \frac{\partial y(x^*, C_0)}{\partial C} = 0.$$

Omvänt om

$$u(x^*) = \frac{\partial y(x^*, C_0)}{\partial C} = 0$$

så är (x^*, y^*) där $y^* = y(x^*, C_0)$ den med avseende på extremalen $y = y(x, C_0)$ konjugerade punkten till A.

Följaktligen gäller att A^*, den med avseende på extremalkurvan $y = y(x, C_0)$ konjugerade punkten till A, ligger på extremalbågen AB precis om $u(x^*) = 0$ för något $x^* \in]x_0, x_1]$. Dvs Jacobis villkor är uppfyllt precis om $u(x) \neq 0$ för alla $x \in]x_0, x_1]$.

Exempel 1:

Är Jacobis villkor uppfyllt vid problemet att bestämma extremaler till

$$I = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$$

för funktioner $y(x)$ sådana att $y(0) = y(a) = 0$?

Lösning:

Sätt

$$F = y'^2 - y^2.$$

Då är

$$F_{yy} = -2,\ F_{yy'} = 0 \quad \text{och} \quad F_{y'y'} = 2.$$

Insättning i Jacobis ekvation

$$\Big(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\Big)u - \frac{d}{dx}\Big(F_{y'y'}u'\Big) = 0$$

ger

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0$$

dvs

$$u'' + u = 0.$$

Härav får vi att $u = C_1 \sin(x - C_2)$. Till följd av att $u(0) = 0$, har vi att $C_2 = 0$ och att $u = C_1 \sin x$. Funktionen u försvinner i punkten $x = k\pi$.

Om $0 < a < \pi$ är punkten $x = 0$ den enda punkt där funktionen u försvinner och alltså Jacobis villkor uppfyllt.

Om $a > \pi$, finns det minst en punkt till, nämligen $x = \pi$, i intervallet $0 \leq x \leq a$ där funktionen u försvinner. Jacobis villkor är inte uppfyllt i detta fall.

Exempel 2:

Är Jacobis villkor uppfyllt vid problemet att bestämma extremaler till

$$I = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2)dx$$

för funktioner $y(x)$ sådana att $y(0) = y(a) = 0$?

Lösning:

Sätt

$$F = y'^2 + y^2 + x^2.$$

Då är

$$F_{yy} = 2,\ F_{yy'} = 0 \quad \text{och} \quad F_{y'y'} = 2.$$

Insättning i Jacobis ekvation

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right) = 0$$

ger

$$2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0$$

dvs

$$u'' - u = 0,$$

som har generell lösning

$$u = C_1 \sinh x + C_2 \cosh x.$$

Då $u(0) = 0$ är $C_2 = 0$ och $u = C_1 \sinh x$. Kurvan $u = C_1 \sinh x$ skär x-axeln endast i punkten $x = 0$. Jacobis villkor är alltså uppfyllt för godtyckligt $a > 0$.

Referenser:

L. E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Pergamon press, 1961

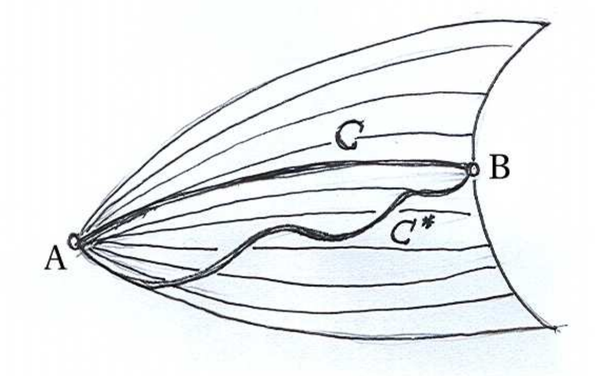
Johannes Malmquist, Valdemar Stenström, Sture Danielson, *Matematisk analys del III*, Natur och Kultur, 1953

1.3 Hilberts sats och Weierstraßfunktionen $E(x, y, p(x, y), y')$

Antag att Jacobis villkor gäller för variationsproblemet

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx, \qquad y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2,$$

så att extremalen C som passerar genom punkterna $A(x_1, y_1)$ och $B(x_2, y_2)$ kan inkluderas i ett centralfält.



Figur 1.7

Vi studerar nu

$$\Delta V = \int_{C^*} F(x, y, y')dx - \int_C F(x, y, y')dx, \tag{1.5}$$

där C^* är en konkurrerande kurva till C, en kurva med samma ändpunkter som C. Weierstraß har visat att denna skillnad mellan två integraler kan uttryckas genom en enda integral om C tillhör ett extremalfält och C^* ligger i området för detta fält.

Följande resultat gäller:

1.3.1 Hilberts sats

Sats 1. Hilbert: *Om det enkelt sammanhängande området D är innehållet i ett extremalfält och $p(x,y)$ är extremalfältets fältfunktion, så gäller för varje sluten kurva γ inom D*

$$\int_\gamma \Big(\big(F(x,y,p(x,y)) - pF_p\big(x,y,p(x,y)\big)\big)dx + F_p\big(x,y,p(x,y)\big)dy\Big) = 0 \tag{1.6}$$

eller ekvivalent

$$\int_\gamma \Big(F\big(x,y,p(x,y)\big) + \Big(\frac{dy}{dx} - p(x,y)\Big)F_p\big(x,y,p(x,y)\big)\Big)dx = 0. \tag{1.7}$$

Bevis. Låt $y = \varphi(x,\alpha)$ vara extremalfältskurvorna i D.

På grund av egenskapen 1, sidan 9, hos ett extremalfält (genom varje punkt i D passerar en och endast en extremal som tillhör skaran), kan α entydigt lösas ut ur sambandet $y = \varphi(x,\alpha)$ som en funktion av x och y.

Dvs

$$y = \varphi(x,\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \psi(x,y)$$

för någon entydigt bestämd funktion ψ. Notera att

$$\varphi\big(x,\psi(x,y)\big) = y \tag{1.8}$$

med denna definition ψ.

Enligt definitionen av fältfunktionen $p(x,y)$, se 2 sidan 9, gäller att

$$p(x,y) = \varphi'_x(x,\alpha).$$

Alternativt kan man skriva

$$p(x,y) = \varphi'_x\big(x,\underbrace{\psi(x,y)}_{\alpha}\big) \tag{1.9}$$

och

$$p(x,\underbrace{\varphi(x,\alpha)}_{y}) = \varphi'_x(x,\alpha).$$

Med hjälp av kedjeregeln fås:

$$p'_x\Big(x,\varphi(x,\alpha)\Big) + p'_y\Big(x,\varphi(x,\alpha)\Big)\varphi'_x(x,\alpha) = \varphi''_{xx}(x,\alpha)$$

eller

$$p'_x(x,y) + p'_y(x,y)p(x,y) = \varphi''_{xx}\Big(x, \psi(x,y)\Big) \tag{1.10}$$

Enligt Greens sats följer Hilberts sats om det gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\Big(x,y,p(x,y)\Big)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F\Big(x,y,p(x,y)\Big) - p(x,y)F_p\Big(x,y,p(x,y)\Big)\right). \tag{1.11}$$

Derivering ger

$$\frac{\partial}{\partial x}F_p\left(x,y,p(x,y)\right) = F_{px}\Big(x,y,p(x,y)\Big) + F_{pp}\left(x,y,p(x,y)\right)p'_x(x,y)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F\Big(x,y,p(x,y)\Big) - p(x,y)F_p\Big(x,y,p(x,y)\Big)\right)$$

$$= F_y\Big(x,y,p(x,y)\Big) - F_{py}\Big(x,y,p(x,y\Big)p'_y(x,y) - F_{pp}\Big(x,y,p(x,y)\Big)p(x,y)p'_y(x,y).$$

Men $y = \varphi(x,\alpha)$ är en extremal, så $y = \varphi(x,\alpha)$ uppfyller
Euler-Lagrange-ekvationen (index ger respektive derivata)

$$F_2(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_3(x,y,y') = 0$$

dvs ekvationen

$$F_2(x,y,y') - F_{31}(x,y,y') - F_{32}(x,y,y')y' - F_{33}(x,y,y')y'' = 0.$$

Vi har alltså att

$$F_2\Big(x, \underbrace{\varphi(x,\alpha)}_{y}, \underbrace{\varphi'_x(x,\alpha)}_{p(x,y)}\Big) - F_{13}\Big(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha)\Big)$$

$$- F_{23}\Big(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha)\Big)\varphi'_x(x,\alpha) - F_{33}(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))\varphi''_{xx}(x,\alpha) = 0$$

dvs

$$
\begin{aligned}
&F_2\Big(x,\varphi\big(x,\psi(x,y)\big),\varphi'_x\big(x,\psi(x,y)\big)\Big) - F_{13}\Big(x,\varphi\big(x,\psi(x,y)\big),\varphi'_x\big(x,\psi(x,y)\big)\Big)\\
&- F_{23}\Big(x,\varphi\big(x,\psi(x,y)\big),\varphi'_x\big(x,\psi(x,y)\big)\Big)\varphi'_x\big(x,\psi(x,y)\big)\\
&- F_{33}\Big(x,\varphi\big(x,\psi(x,y)\big),\varphi'_x\big(x,\psi(x,y)\big)\Big)\varphi''_{xx}\big(x,\psi(x,y)\big) = 0.
\end{aligned}
$$

Använder vi sedan (1.8), (1.9) och (1.10) får vi att

$$
\begin{aligned}
F_2\big(x,y,p(x,y)\big) - F_{13}\big(x,y,p(x,y)\big) - F_{23}\big(x,y,p(x,y)\big)p(x,y)&\\
- F_{33}\big(x,y,p(x,y)\big)\big(p'_x(x,y) + p'_y(x,y)p(x,y)\big) &= 0
\end{aligned}
$$

vilket kan skrivas

$$
\begin{aligned}
&F_{xp}\big(x,y,p(x,y)\big) + F_{pp}\big(x,y,p(x,y)\big)p'_x(x,y)\\
&= F_y\big(x,y,p(x,y)\big) - F_{yp}\big(x,y,p(x,y)\big)p(x,y) - F_{pp}\big(x,y,p(x,y)\big)p(x,y)p'_y(x,y).
\end{aligned}
$$

Villkoret (1.11) gäller alltså och satsen är visad. $\square$

1.3.2 E-funktionen

Låt D vara som i Hilberts sats, låt C vara en extremal och låt C^* vara en kurva med samma ändpunkter som C.

Då gäller enligt Hilberts sats att

$$\int_C \Big(F\Big(x, y, p(x,y)\Big) + \big(y' - p(x,y)\big) F_p\Big(x, y, p(x,y)\Big)\Big) dx$$
$$= \int_{C^*} F\Big(x, y, p(x,y)\Big) + \big(y' - p(x,y)\big) F_p\Big(x, y, p(x,y)\Big) dx. \quad (1.12)$$

Eftersom C är en extremal som tillhör fältet så är $p = y'$ längs C, och vänstra ledet av (1.12) reduceras till

$$\int_C F(x, y, y') dx,$$

dvs

$$\int_C F(x, y, y') dx = \int_{C^*} F\Big(x, y, p(x,y)\Big) + \big(y' - p(x,y)\big) F_p\big(x, y, p(x,y)\big) dx,$$

varav fås

$$\int_{C^*} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx$$
$$= \int_{C^*} \Big(F(x, y, y') - F\Big(x, y, p(x,y)\Big) - \big(y' - p(x,y)\big) F_p\Big(x, y, p(x,y)\Big)\Big) dx. \quad (1.13)$$

Funktionen

$$E\Big(x, y, p(x,y), y'\Big)$$
$$= F(x, y, y') - F\Big(x, y, p(x,y)\big) - \big(y' - p(x,y)\big) F_p\Big(x, y, p(x,y)\Big) \quad (1.14)$$

kallas *Weierstraß E-funktion.* Med denna beteckning har vi visat att

$$\int_{C^*} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} E\Big(x, y, p(x,y), y'\Big) dx.$$

1.4 Tillräckliga villkor för extremum/minimum

Det är uppenbart att villkoret att funktionen E är icke-negativ är ett tillräckligt villkor för ett minimum längs kurvan C.

Ett minimumvärde är det minsta värdet som antas längs angränsande kurvor. Vad som menas med angränsande kurvor måste dock definieras tydligare.

Låt C vara kurvan $y = y_0(x)$.

Om minimumvärdet är det minsta värdet för funktioner för vilka $|y(x) - y_0(x)|$ är litet kallas minimumvärdet ett *starkt* minimum.

Om minimumvärdet är det minsta värdet för funktioner för vilka $|y(x) - y_0(x)|$ och $|y'(x) - y_0'(x)|$ båda är små kallas minimumvärdet ett *svagt* minimum.

Analogt gäller för maximum.

1.4.1 Weierstraß tillräckliga villkor

För ett svagt minimum räcker det att olikheten $E\Big(x, y, p(x, y), y'\Big) \geq 0$ gäller om (x, y) är nära extremalen C och y' är nära $p(x, y)$ längs densamma.

För ett starkt minimum måste olikheten $E\Big(x, y, p(x, y), y'\Big) \geq 0$ gälla för varje värde på (x, y) som är nära extremalen C och för godtyckliga värden på y'. Detta enligt definitionerna ovan, ty när det gäller fallet av ett starkt extremum kan närliggande kurvor ha godtyckliga riktningar, medan för ett svagt extremum är värden på y' längs närliggande kurvor nära värdet $y' = p$ längs C.

1.4.2 Legendres tillräckliga villkor

Antag att funktionen $F(x, y, y')$ har en derivata av andra ordningen med avseende på y'. Enligt Taylors formel har vi att:

$$\begin{aligned} F(x, y, y') = F\Big(x, y, p(x, y)\Big) + \big(y' - p(x, y)\big) F_p\Big(x, y, p(x, y)\Big) \\ + \frac{\big(y' - p(x, y)\big)^2}{2!} F_{y'y'}\Big(x, y, q(x, y)\big)(x, y), \\ (p < q < y'). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Sätter vi in ekvation (1.15) i (1.14), så får vi

$$
\begin{aligned}
&E\Big(x, y, p(x,y), y'\Big) \\
&= \underbrace{F\Big(x, y, p(x,y)\Big) + (y'-p)F_p\Big(x, y, p(x,y)\Big) + \frac{\big(y'-p(x,y)\big)^2}{2} F_{y'y'}\Big(x, y, q(x,y)\Big)}_{F(x,y,y')} \\
&\qquad - F\Big(x, y, p(x,y)\Big) - \big(y'-p(x,y)\big)F_p\Big(x, y, p(x,y)\Big)
\end{aligned}
$$

som ger

$$
E\Big(x, y, p(x,y), y'\Big) = \frac{\big(y'-p(x,y)\big)^2}{2} F_{y'y'}\Big(x, y, q(x,y)\Big). \tag{1.16}
$$

Om $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$ längs extremalen C, då behåller denna derivata av andra ordningen sitt tecken (på grund av kontinuitet) för alla punkter som är nära C och för alla sådana värden på y' som är nära de värden som y' antar i de motsvarande punkterna i kurvan C. Vi har alltså ett svagt minimum om $F_{y'y'} > 0$ på C. Detta villkor $F_{y'y'} > 0$ (eller $F_{y'y'} < 0$ för svagt maximum) kallas för *Legendres tillräckliga villkor*.

Villkoret $E \geq 0$ är uppfyllt om $F_{y'y'}(x, y, q(x,y)) \geq 0$ i punkter (x, y) som ligger nära den givna extremal som undersöks för godtyckligt q. Det är också nödvändigt att Taylors formel som ges i (1.15) ska gälla för godtyckliga y'. Vi har alltså ett starkt minimum om båda dessa villkor är uppfyllda.

Referenser:

L. E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Pergamon press, 1961
Johannes Malmquist, Valdemar Stenström, Sture Danielson, *Matematisk analys del III*, Natur och kultur, 1953

Kapitel 2

Kortaste glidtiden

2.1 Euler-Lagrange-ekvation för kortaste glidtiden

I juni 1696 föreslog Johann Bernoulli följande problem: Givet två punkter A och B i ett vertikalt plan (B ligger lägre än A), tänkte han sig att en tråd böjs mellan dessa punkter i form av en godtycklig kurva och att ett rörligt objekt M med en given begynnelsehastighet under inverkan av gravitationen glider längs kurvan . Han ställde frågan, vilken funktionskurva $y = y(x)$ bland de oändligt många möjligheterna ger den kortaste glidtiden. Denna kurva som gör det kallade han brachistokron (från grekiska: brachistos=kortast, chronos=tid).

Låt punkterna A och B ha koordinaterna (x_0, y_0) resp. (x_1, y_1), så att $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$. Vi antar att punkterna A och B ligger i xy-planet, att y-axeln är riktad lodrät nedåt i det fallande objektets riktning (på grund av gravitationen), och att x-axeln är vågrät och riktad åt det håll i vilket B ligger.

Låt objektets massa vara m och låt g vara tyngdaccelerationen. Låt s vara båglängden av $y = y(x)$ så att

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Den totala glidtiden längs $y = y(x)$ från A till B är $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v}$.

Den integral som ska minimeras är alltså

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx.$$

För att kunna få v som en funktion av koordinaterna, utnyttjar vi termodynamikens huvudsats (energi konserveras, dvs kinetisk energi+potentiell energi=konstant; det antas att ingen energi förloras på grund av luftmotståndet eller friktion). Vi antar att objektet har begynnelsehastighet 0 i punkten A. Då gäller alltså att

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y - y_0)$$

som kan förenklas till

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{y - y_0}.$$

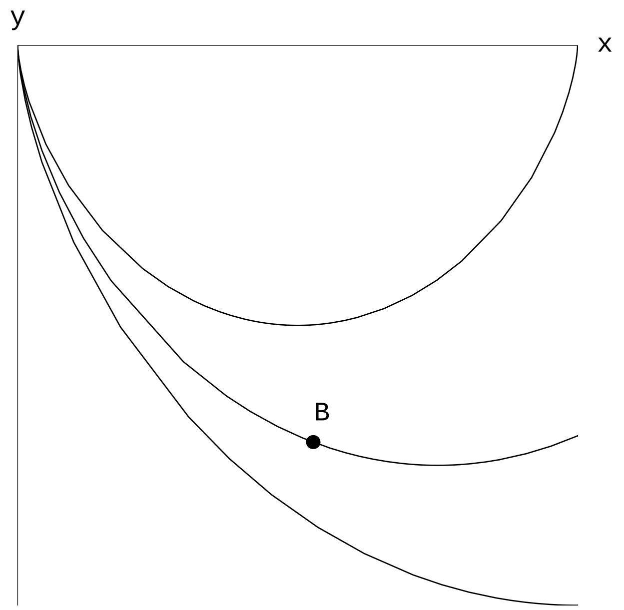
($(y - y_0)$ är lika med det lodräta avståndet som kroppen måste sänka sig från viloläget för att få hastigheten v).

Glidtiden är alltså

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}}}_{F(y,y')} dx.$$

Referenser:
Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

2.2 Lösning av Euler-Lagrange-ekvationen för brachistokronproblemet



Figur 2.1

För enkelhets skull antar vi att koordinatsystemet i föregående avsnitt är inlagt så att $x_0 = y_0 = 0$.

Den integral som ska minimeras är då alltså enligt 2.1 integralen

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx.$$

Integrandfunktionn $F = \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{y}}$ är oberoende av variabeln x. I så fall har integrandfunktionen den första integralen

$$F - y' F_{y'} = C. \tag{2.1}$$

Ekvation (2.1) kan fås såhär. Utveckling av Euler-Lagrange-ekvationen

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ger eftersom F är oberoende av x att

$$F_y - \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'' \right) = 0.$$

Dvs
$$F_y = F_{y'y}y' + F_{y'y'}y''. \tag{2.2}$$

Resultatet i (2.1) kan nu fås genom att derivera $F - y'F_{y'}$ med avseende på x och använda (2.2).

Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(F - y'F_{y'}\Big) &= 0 + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - \left(y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\cdot y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} + y'\cdot y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) \\
&= \frac{\partial F}{\partial y}y' - y'^2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} - y'y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \\
&= \frac{\partial F}{\partial y}y' - y'\left(y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) \\
&= F_y y' - y'\Big(\underbrace{y'F_{y'y} + y''F_{y'y'}}_{=F_y \quad \text{enligt} \quad (2.2)}\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vi har alltså att
$$\frac{d}{dx}\big(F - y'F_{y'}\big) = 0$$
varav fås
$$F - y'F_{y'} = C.$$

I det här betraktade fallet ger det ekvationen
$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$
som kan förenklas till
$$\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$
som ger
$$1 = C\sqrt{y(1+y'^2)} \tag{2.3}$$
Genom att kvadrera (2.3) fås
$$y(1+y'^2) = C_1.$$

Vi inför en variabel t och sätter $y' = \cot t$. Vi får då
$$y = \frac{C_1}{1+y'^2} = \frac{C_1}{1+\cot^2 t} = C_1\sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Men

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

varav fås

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\frac{C_1}{2} d\big(1 - \cos 2t\big)}{\cot t} = \frac{\frac{C_1}{2}\big(0 + 2\sin 2t\, dt\big)}{\cot t}$$
$$= \frac{2C_1 \sin t \cos t\, dt}{\cot t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1 - \cos 2t)dt,$$

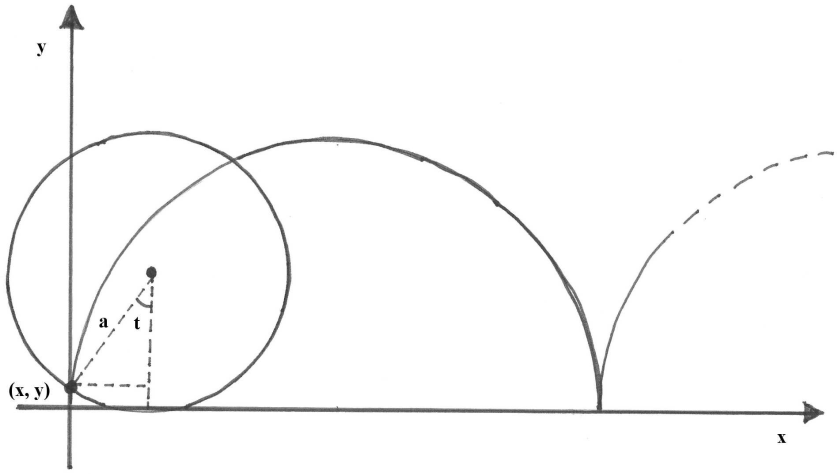
vilket till slut ger

$$x = C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Till följd av detta är ekvationen för kurvan (i parameterform):

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t)$$
$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t),$$

dvs en cykloidkurva.



Figur 2.2: Cykloiden

Vi antar att startpunkten $x = y = 0$ fås för $t = 0$, så att $C_2 = 0$. Sätt också $\frac{C_1}{2} = a$. Modifiera även parametern genom att ersätta $2t$ med t. Vi får då lösningen på formen

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Exakt en av dessa cykloider går genom punkten $B = (x_1, y_1)$, se beviset av 1) i nästa avsnitt. Denna cykloidkurva är den sökta lösningen till Euler-Lagrange-ekvationen för brachistokronproblemet.

Referenser:
L. E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Pergamon press, 1961

2.3 Bevis att lösningen i föregående avsnitt löser brachistokronproblemet

Låt γ vara den erhållna kurvan från $(0,0)$ till (x_1, y_1) i föregående avsnitt. Vi visar nu att γ löser brachistokronbroblemet genom att bevisa att glidtiden längs γ är kortare än glidtiden längs varje annan funktionskurva i $x > 0, y > 0$ från $(0,0)$ till (x_1, y_1).

Vi gör det genom att bevisa

1) Cykloidkurvorna

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 < t < 2\pi, \quad a > 0$$

bildar ett centralfält i området $x > 0, y > 0$ (med centrum i $(0,0)$).

2) Weierstraß E-funktion är > 0 i hela området $x > 0, y > 0$ om $y' \neq p$.

Har vi visat detta följer det direkt av resonemanget i kapitel 1 att glidtiden längs γ är kortare än glidtiden längs varje annan funktionskurva i $x > 0, y > 0$ från $(0,0)$ till (x_1, y_1).

Vi börjar med att bevisa 1). För att göra det behöver vi visa att det för varje val av $x > 0$ och $y > 0$ endast finns ett $a > 0$ och ett $t \in]0, 2\pi[$ så att

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Fixera nu $x > 0, y > 0$ godtyckliga.

Av $y = a(1 - \cos t)$ fås

$$a = \frac{y}{1 - \cos t}$$

som med $x = a(t - \sin t)$ ger

$$t - \sin t - \frac{x}{y}(1 - \cos t) = a.$$

Sätt $u = \dfrac{x}{y}$.

Då är $u > 0$. Sätt

$$f(t) = t - \sin t - u(1 - \cos t).$$

Vi måste visa att för varje $u > 0$ så är $f(t) = 0$ för exakt ett $t \in]0, 2\pi[$.

Derivering ger

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 1 - \cos t - u \sin t \\
&= 1 - \sqrt{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cos t + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin t\right).
\end{aligned}
$$

Låt α vara den entydigt bestämda vinkel i $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\Bigg($observera att $u > 0$ och att

$$
\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 + \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = 1)\Bigg)
$$

för vilken

$$
\cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{och} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.
$$

Då är

$$
f'(t) = 1 + \sqrt{1+u^2}\sin(\alpha + t)
$$

och $f'(t) = 0$ ger

$$
\sin(\alpha + t) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \sin\alpha,
$$

varav fås

$$
\alpha + t = \alpha + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad \alpha + t = \pi - \alpha + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.
$$

Eftersom $0 < t < 2\pi$ är $t = \pi - 2\alpha$ $\left(\text{kom ihåg att } \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ enda möjligheten. Vi får följande schema för $f(t)$ i $0 < t < 2\pi$.

t	0		$\pi - 2$		2π
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	minimum (< 0)	$\nearrow$	2π

Av schemat framgår att $f(t) = 0$ för exakt ett $t \in]0, 2\pi[$.

Eftersom $t \in]0, 2\pi[$ är entydigt bestämt av $x > 0$ och $y > 0$ är även

$$
a = \frac{x}{t - \sin t} = \frac{y}{t - \cos t}
$$

det.

Detta visar 1). Vi visar nu 2).

Enligt (1.16) gäller om $y' \neq p$ att Weierstraß E-funktion

$$E\Big(x, y, p(x, y), y'\Big) = \frac{1}{2}(y' - p)^2 \cdot F_{y'y'}\big(x, y, q(x, y)\big)$$

för något q mellan p och y'.

Eftersom här gäller att

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \quad ,$$

vilket efter derivering och förenkling ger att

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ,$$

följer att 2) gäller.

2.4 Några variationer av det grundläggande variationsproblemet

I inledningen gav vi teorin för det grundläggande problemet i variationskalkyl att optimera en integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y, y'\big)dx$ för funktioner $y(x)$ sådana att $y(x_1)$ och $y(x_2)$ har givna värden. Vi ska nu studera några variationer av detta problem.

2.4.1 Från en fix punkt till en given lodrät linje

Betrakta problemet att optimera $I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y, y'\big)dx$ för funktionen $y(x)$ sådan att $y(x_1) = y_1$ men $y(x_2)$ inte har något föreskrivet värde.

Antag att $y(x)$ är själva extremalfunktionen, och betrakta den enparametriga familjen av jämförelsefunktioner $Y(x)$ definierad genom

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{2.4}$$

där $\eta(x)$ är en godtycklig funktion för vilken

$$\eta(x_1) = 0. \tag{2.5}$$

ε är en parameter.

För $\varepsilon = 0$ är $Y(x) = y(x)$ oberoende av $\eta(x)$. Dvs integralen

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')dx, \tag{2.6}$$

där enligt (2.4)

$$Y' = y' + \varepsilon\eta'$$

har ett extremum för $\varepsilon = 0$ oberoende av val av η.

Vi har alltså $I'(0) = 0$ för varje val av η.

Derivering av

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, Y, Y'\big)dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx \tag{2.7}$$

ger

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx. \tag{2.8}$$

Genom att sätta in $\varepsilon = 0$, får vi

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx = 0 \tag{2.9}$$

(Vi har här utnyttjat att $\dfrac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta$ och att $\dfrac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'$).

Genom att integrera andra termen i (2.7) och utnyttja (2.5) $(\eta(x_1) = 0)$, får vi

$$I'(0) = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2} \eta(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta \, dx = 0 \tag{2.10}$$

Denna ekvation måste gälla för varje val av $\eta(x)$ som uppfyller (2.5), och särskilt för sådana η för vilka $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

För sådana $\eta(x)$ övergår (2.10) i

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta \, dx$$

och genom att tillämpa lemmat på sida 4, får vi

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \tag{2.11}$$

Insättningen av (2.11) i (2.10) ger att

$$I'(0) = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2} \eta(x_2).$$

Genom att sedan välja $\eta(x_2) = 1$, får vi att

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} = 0. \tag{2.12}$$

Från (2.11) ser vi att den differentialekvationen bestäms av integrandfunktionen F, och inte av ändpunktvillkoret. Differentialekvationen (2.11) är den samma som Euler-Lagrange-ekvationen under villkoret av fixa ändpunkter.

De två konstanter som fås vid lösningen av (2.11) bestäms av ändpunktvillkoren:

1. $y(x_1) = y_1$
2. $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} = 0$

(förutsatt, förstås, att problemet har en lösning).

Referenser:

Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

2.4.2 Från en given lodrät linje till en fix punkt

Vi behandlar detta problem precis på samma sätt som vi gjorde i förra avsnittet, med den enda skillnaden att vänstra ändpunkten är fix, dvs givet integrationsintervallet $[x_1, x_2]$ vill vi optimera integralen $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y, y'\big)dx$ för funktioner $y(x)$ sådana att $y(x_2) = y_2$, men $y(x_1)$ inte har något föreskrivet värde.

Antag att $y(x)$ är extremalfunktionen, och betrakta den enparametriga familjen av jämförelesefunktioner definierade genom att

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{2.13}$$

där $\eta(x)$ är en godtycklig funktion för vilken

$$\eta(x_2) = 0; \tag{2.14}$$

ε är en parameter som tillhör den familj som definieras av η. För $\varepsilon = 0$ har integralen $I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, Y, Y'\big)dx$, som enligt (2.13) kan skrivas som

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'\big), \tag{2.15}$$

ett extremum, dvs vi har $I'(0) = 0$ för varje val av η.

Vi deriverar (2.15) med avseende på ε och får

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\eta'\right) dx. \tag{2.16}$$

Genom att sätta in $\varepsilon = 0$ i (2.16) fås

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx = 0 \tag{2.17}$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta, \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'\right).$$

Vi integrerar andra termen i (2.17) och genom att utnyttja, att $\eta(x_2) = 0$ får vi

$$I'(0) = -\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta dx = 0 \tag{2.18}$$

På likartat sätt som i 2.4.1 fås sedan att

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{2.19}$$

och att

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = 0.$$

De två integrationskonstanter som fås när vi löser (2.19) bestäms av ändpunktvillkoren:

1. $y(x_2) = y_2$
2. $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = 0$

Referenser:

Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

2.4.3 Kortaste glidtiden från en fix punkt $x = x_1$ till den lodräta linjen $x = x_2$ (tillämpning av 2.1 och 2.4.1)

Integralen för glidtiden är

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}} dx. \tag{2.20}$$

Derivering av integrandfunktionen

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}} \tag{2.21}$$

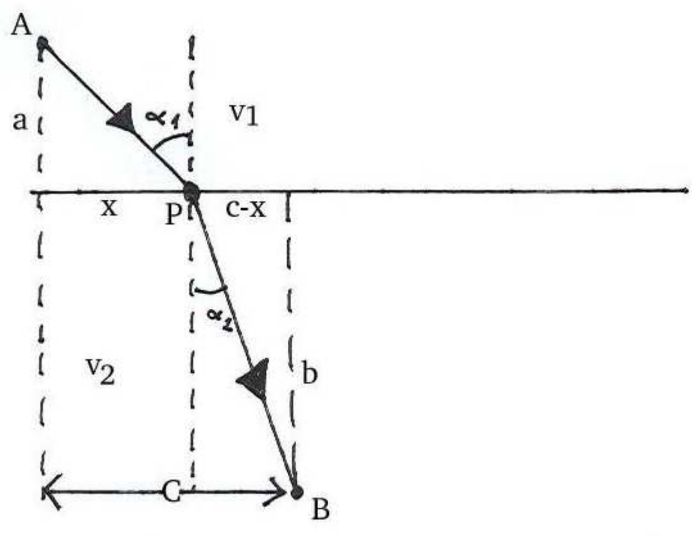
ger att

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-y_1}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{y-y_1}\sqrt{1+y'^2}},$$

som med (2.12) ger $y'(x_2) = 0$, dvs tangenten till cykloiden som ger snabbaste glidtiden måste vara vågrät i skärningen med linjen $x = x_2$.

2.4.4 En alternativ härledning av kortaste glidtidskurvan

Låt oss först betrakta det fysikaliska problemet i vilket en ljusstråle rör sig från A till P med hastighet v_1, och sedan, när den kommer in i en tätare omgivning, rör sig strålen från P till B med en mindre hastighet v_2.



Figur 2.2

Enligt figuren ovan är den totala glidtiden

$$\tau = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2} \tag{2.22}$$

Ljusstrålen väljer väg från A till B genom P, så att glidtiden τ minimeras, dvs $\dfrac{d\tau}{dx} = 0$ gäller.

Derivering av (2.22) ger

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}\, v_1} - \frac{(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}\, v_2},$$

som med $\dfrac{d\tau}{dx} = 0$ ger

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_1} = \frac{(x - c)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2} v_2}$$

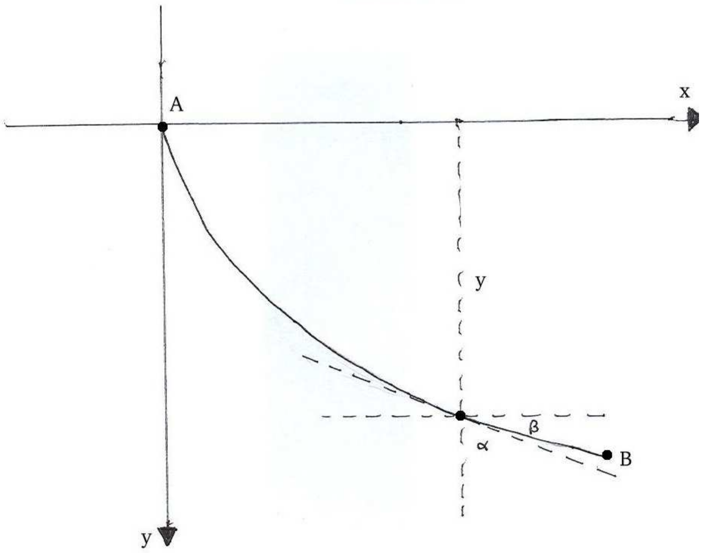
eller

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \qquad \text{(Snells reflektionslag.)}$$

Om vi låter skiktena bli flera och flera och ännu smalare, då minskar ljustets hastighet vid gränserna kontinuerligt på samma sätt som för strålen ovan, och vi drar slutsatsen att

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{konstant.}$$

Föreställ Dig nu en liten pärla, som liksom ljusstrålen har förmågan att välja ut den väg längs vilken glidtiden från A till B är kortast.



Figur 2.3

Enligt principen att energin bevaras bestäms pärlans hastighet på en viss nivå endast av dess förlust i potentialenergi som den har satsat på att nå denna nivå.
Dvs

$$v = \sqrt{2gy} \tag{2.23}$$

Med hjälp av geometrin fås

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{2.24}$$

och

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C. \tag{2.25}$$

Av (2.25) fås

$$y\big(1+(y')^2\big) = C$$

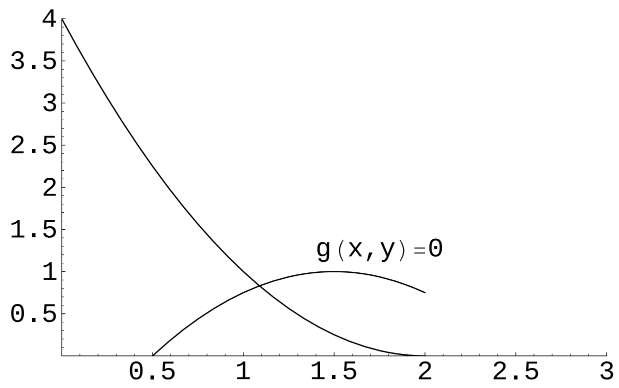
som är brachistokronens differentialekvation.

Vi har därmed givit en alternativ härledning av kortaste glidtidkurvans differentialekvationen.

Referenser:
George F. Simmons,
Differential equations with applications and historical notes, McGraw-Hill international editions, 1991
Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

2.4.5 Övre integrationsgränsen är obestämd

Vi vill optimera integralen $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y, y'\big)dx$ för funktioner $y(x)$ sådana att $y(x_1) = y_1$ och $g\big(x_2, y(x_2)\big) = 0$ där g är en given funktion. Dvs startpunkten för $y(x)$ är given och slutpunkten ska ligga på kurvan $g(x, y) = 0$.



Figur 2.4

Antag att $y(x)$ är en extremalfunktion och betrakta en enparametrig familj av jämförelsefunktioner $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, där $\eta(x)$ är en godtycklig funktion för vilken $\eta(x_1) = 0$. Att $\eta(x_1) = 0$ försäkrar att alla jämförlsebågarna passerar genom den bestämda punkten (x_1, y_1). Skärningspunkten av jämförelsebågen $y = Y(x)$ med den givna kurvan $g(x, y) = 0$ betecknas med (X_2, Y_2). Då $\varepsilon = 0$ betecknas skärningspunkten med (x_2, y_2).

Vi har alltså

$$g(X_2, Y_2) = 0 \tag{2.26}$$

och

$$Y_2 = y(X_2) + \varepsilon\eta(X_2). \tag{2.27}$$

Derivering av (2.26) ger med hjälp av (2.27) att

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial Y_2}\frac{dY_2}{d\varepsilon} \\
&= \left\{ Y_2 = y(X_2) + \varepsilon\eta(X_2), \quad \frac{dY_2}{d\varepsilon} = y'(X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \eta(X_2) + \varepsilon\eta'(X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} \right\} \\
&= \frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial Y_2}\left(y'(X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \eta(X_2) + \varepsilon\eta'(X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} \right).
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Genom att sätta $\varepsilon = 0$ får man att X_2, Y_2 och $\left(\frac{\partial X_2}{\partial \varepsilon}\right)$ är lika med x_2, y_2, respektive $\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0$.
Dvs $\varepsilon = 0$ i (2.28) ger

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 + \frac{\partial g}{\partial y_2}\left(y'(x_2)\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 + \eta(x_2)\right) \\
=& \frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 + \frac{\partial g}{\partial y_2}y'(x_2)\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 + \frac{\partial g}{\partial y_2}\eta(x_2).
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2}y'(x_2)\right) = -\frac{\partial g}{\partial y_2}\eta(x_2)
$$

dvs

$$
\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y_2}\eta_2}{\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2}y_2'}
\tag{2.29}
$$

där vi har satt $\eta_2 = \eta(x_2)$ och $y_2' = y'(x_2)$.

Betrakta nu integralen

$$
I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{X_2} F\big(x, Y, Y'\big)dx.
$$

Eftersom X_2, Y, Y' reduceras till x_2, y, y' då $\varepsilon = 0$, har vi att $I(0)$ ger ett extremum, så att $I'(0) = 0$. Genom att använda lagen att om

$$
I = I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} F\big(x, \varepsilon\big)dx,
$$

då är

$$I'(\varepsilon) = F\big(x_2, \varepsilon\big)\frac{dx_2}{d\varepsilon} - F\big(x_1, \varepsilon\big)\frac{dx_1}{d\varepsilon} + \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dx,$$

får vi derivatan

$$\begin{aligned} I'(\varepsilon) &= \frac{dX_2}{d\varepsilon} F\bigg|_{X_2} + \int_{x_1}^{X_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx \\ &= \frac{dX_2}{d\varepsilon} F\bigg|_{X_2} + \int_{x_1}^{X_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta' \right) dx. \end{aligned}$$

Genom att sätta in $\varepsilon = 0$, partialintegrera andra termen av integralen och använda att $\eta(x_1) = 0$ får vi

$$\begin{aligned} 0 = I'(0) = \left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_0 F\Bigg|_{x_2} + \frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_2} \eta_2 + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta dx \\ = \Big\{\text{enligt } (2.29)\Big\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\, F|_{x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y_2'\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}\eta_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_2} \eta_2 + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right) \eta dx$$

(för varje η med $\eta(x_1) = 0$), varav fås

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_2} - \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\, F|_{x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y'\dfrac{\partial g}{\partial y_2}} \right)\eta_2 + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right) \eta dx = 0.$$

Som i slutet av 2.4.1 följer av detta att $y = y(x)$ satisfierar Euler-Lagrange-ekvationen, och att

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_2} - \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\bigg|_{x_2} F|\, x_2}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y'\dfrac{\partial g}{\partial y_2}} = 0 \tag{2.30}$$

$\Big($Här och ovan är $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} = g_x'(x_2, y_2)$ och $\dfrac{\partial g}{\partial y_2} = g_y'(x_2, y_2).\Big)$

Ett liknande resultat fås om istället högra ändpunkten är en given punkt och vänstra ändpunkten ligger på en given kurva $h(x, y) = 0$. I detta fall ersätts $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}$ och $\dfrac{\partial g}{\partial y_2}$ med $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$ resp. $\dfrac{\partial h}{\partial y_1}$ i villkoret om ändpunkten.

Referenser:
Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

2.4.6 Kortaste glidtiden från en fix punkt till en given kurva $g(x, y) = 0$

Vi utnyttjar ekvationen (2.30)

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} - \frac{\left.\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\right|_{x_2} F|_{x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y'\left(\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\right)} = 0,$$

tillämpad på integrandfunktionen för en brachistokron

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_2 - y_1}},$$

(som tidigare sätter vi $y(x_2) = y_2$ och $y'(x_2) = y_2'$) vilket ger oss

$$\frac{y_2'}{\sqrt{y_2 - y_1}\sqrt{1+{y_2'}^2}} - \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\sqrt{\dfrac{1+{y_2'}^2}{y_2 - y_1}}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y_2'\dfrac{\partial g}{\partial y_2}} = 0,$$

varav fås

$$\frac{y_2'}{\sqrt{y_2 - y_1}\sqrt{1+{y_2'}^2}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\sqrt{\dfrac{1+{y_2'}^2}{y_2 - y_1}}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y_2'\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}.$$

Dvs

$$y_2' = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}\dfrac{\sqrt{1+{y_2'}^2}}{\sqrt{y_2 - y_1}} \cdot \sqrt{y_2 - y_1}\sqrt{1+{y_2'}^2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + y_2'\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}$$

som ger

$$y_2'\frac{\partial g}{\partial x_2} + y_2'^2\frac{\partial g}{\partial y_2} = \frac{\partial g}{\partial y_2}(1+{y_2'}^2),$$

varav fås

$$y_2'\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial y_2},$$

som till slut ger

$$y_2'\left(\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}\right) = 1. \tag{2.31}$$

Eftersom lutningen för $g(x, y) = 0$ i (x_2, y_2) är $-\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}$, och eftersom y_2' är lutningen för extremalkurvan i (x_2, y_2), betyder relationen i (2.31) ortogonalitet av båda kurvorna vid skärningspunkten.

Referenser:

Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

2.4.7 Brachistokron från en given kurva $h(x, y) = 0$ till en fix punkt (x_2, y_2)

Sätt

$$F\big(y_1, y, y'\big) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_1}}$$

och

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\big(y_1, y.y'\big)dx.$$

Då ska alltså I minimeras för funktioner $y(x)$ enligt rubriken ovan.

Den totala glidtiden längs en kurva $y = y(x)$ då $x_1 \le x \le x_2$ är enligt tidigare härledning $\dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_1}}$, där $y_1 = y(x_1)$. Sätt också $y(x_2) = y_2$.

Vi vill minimera glidtiden för funktioner $y(x)$ sådana att (x_2, y_2) är en given punkt och (x_1, y_1) är en punkt på $h(x, y) = 0$ då h är en given funktion.

Antag att $y(x)$ är en minimerande funktion.

Vi inför den enparametriga familjen av jämförelsefunktioner

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{2.32}$$

där $\eta(x)$ är godtycklig med $\eta(x_2) = 0$, så att varje jämförelsekurva passerar genom (x_2, y_2).

Skärningspunkten mellan jämförelsekurvan $y = Y(x)$ och den givna kurvan $h(x, y) = 0$ betecknas av (X_1, Y_1), men som (x_1, y_1) då $\varepsilon = 0$ (dvs för själva extremalbågen $y = y(x)$).

Vi har alltså att $h(X_1, Y_1) = 0$ och $Y_1 = y\big(X_1\big) + \varepsilon\eta\big(X_1\big)$.

Beteckna $\dfrac{dX_1}{d\varepsilon}$ och $\dfrac{dY_1}{d\varepsilon}$ för $\varepsilon = 0$ med $\left(\dfrac{dX_1}{d\varepsilon}\right)_0$ resp. $\left(\dfrac{dY_1}{d\varepsilon}\right)_0$.

Sätt också $\eta(x_1) = \eta_1$ och $y'(x_1) = y'_1$.

Derivering av $h(X_1, Y_1) = 0$ med avseende på ε ger i $\varepsilon = 0$ att

$$0 = \left(\frac{\partial h}{\partial X_1} \frac{dX_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial h}{\partial Y_1} \frac{dY_1}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x_1} \Big(\frac{dX_1}{d\varepsilon} \Big)_0 + \frac{\partial h}{\partial y_1} \Big(\frac{dY_1}{d\varepsilon} \Big)_0$$

$$\left\{ \frac{dY_1}{d\varepsilon} = y'(X_1) \frac{dX_1}{d\varepsilon} + \eta(X_1) + \varepsilon \eta'(X_1) \frac{dX_1}{d\varepsilon} \frac{dX_1}{d\varepsilon} \right\}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{dX_1}{d\varepsilon} \right)_0 + \frac{\partial h}{\partial y_1} \left(y'(x_1) \left(\frac{dX_1}{d\varepsilon} \right)_0 + \eta(x_1) \right)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{dX_1}{d\varepsilon} \right)_0 + \frac{\partial h}{\partial y_1} y_1'(X_1) \left(\frac{dX_1}{d\varepsilon} \right)_0 + \frac{\partial h}{\partial y_1} \eta_1.$$

Vi får därav

$$\left(\frac{dX_1}{d\varepsilon} \right)_0 = - \frac{\eta_1 \dfrac{\partial h}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'} \tag{2.33}$$

och

$$\left(\frac{dY_1}{d\varepsilon} \right)_0 = \frac{\eta_1 \dfrac{\partial h}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'}. \tag{2.34}$$

Eftersom

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_1}}$$

gäller att

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = - \frac{\partial F}{\partial y} \tag{2.35}$$

vilket också utnyttjas nedan.

Sätt

$$I(\varepsilon) = \int_{X_1}^{x_2} F\big(Y_1, Y, Y'\big) dx. \tag{2.36}$$

Av (2.32) fås

$$Y' = y'(x) + \varepsilon \eta'(x) \tag{2.37}$$

vilket även det utnyttjas nedan.

Eftersom X_1, Y_1, Y, Y' reduceras till sina motsvarande minimerande värden då $\varepsilon = 0$, har (2.36) sitt minimum för $\varepsilon = 0$ så att $I'(0) = 0$.

Derivering av (2.36) ger eftersom

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} F\big(x, \varepsilon\big) dx,$$

har derivata

$$I'(\varepsilon) = F\big(x_2, \varepsilon\big)\frac{dx_2}{d\varepsilon} - F\big(x_1, \varepsilon\big)\frac{dx_1}{d\varepsilon} + \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dx$$

att

$$0 = I'(0) = -\left(\frac{dX_1}{d\varepsilon}\right)_0 F\Bigg|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\left(\frac{dY_1}{d\varepsilon}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx$$

$$= -\left(\frac{dX_1}{d\varepsilon}\right)_0 F\Bigg|_{x_1} - \frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{x_1}\eta + \left(\frac{dY_1}{d\varepsilon}\right)_0 \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1}dx + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta dx$$

där vi har partialintegrerat sista termen i integralen på raden ovan och använt att $\eta(x_2) = 0$.

Genom att sätta in värdena på $\left(\frac{dX_1}{d\varepsilon}\right)_0$ och $\left(\frac{dY_1}{d\varepsilon}\right)_0$ från (2.33) och (2.34) får vi

$$\begin{aligned}
&-\left(-\frac{\eta_1\frac{\partial h}{\partial y'}}{\frac{dh}{dx_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1}y_1'}\right) F\big|_{x_1} - \eta_1\frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{x_1} + \frac{\eta_1\frac{\partial h}{\partial x_1}}{\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1}y_1'}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1}dx \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta\, dx \\
&= \eta_1\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1}y_1'}F\Bigg|_{x_1} - \frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{x_1} + \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}}{\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial y_1}y_1'}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1}dx\right) \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta\, dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Eftersom (2.38) gäller för varje $\eta(x)$ som satisfierar $\eta(x_2) = 0$, gäller det särskilt för sådana $\eta(x)$ som satisfierar $\eta_1 = \eta(x_1) = 0$. För sådana $\eta(x)$ reduceras vänstra delen av (2.38) till själva integralen, och genom att tillämpa lemmat från sida 4 får vi att

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \tag{2.39}$$

den vanliga Euler-Lagrange-ekvationen.

Insättning av (2.39) i (2.38) ger genom att välja $\eta(x)$ så att $\eta_1 = \eta(x_1) = 1$, att

$$\frac{\dfrac{\partial h}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'} F|_{x_1} - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} + \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_1} dx = 0 \tag{2.40}$$

Integralen i (2.40) kan beräknas.

På grund av (2.35) har vi att

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_1} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} dx,$$

och på grund av (2.39) har vi att

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx,$$

och vi erhåller att

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_1} dx &= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \\ &= \left.\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2}. \end{aligned}$$

Genom att använda detta resultat i (2.40) får vi att

$$\frac{F|_{x_1}\dfrac{\partial h}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'} - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} + \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'} \cdot \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} - \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h}{\partial y_1} y_1'} \cdot \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x_2} = 0,$$

som ger

$$F|_{x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial y_1} - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} \cdot \left.\frac{\partial h}{\partial y_1} y_1'\right|_{x_1} + \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} = 0$$

varav fås att

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1} \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right)\right|_{x_1} = 0. \tag{2.41}$$

Men eftersom F är helt oberoende av x gäller, vilket visats tidigare, att $y' \dfrac{\partial F}{\partial y'} - F = C_1$ och alltså att

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right)\right|_{x_1} = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right)\right|_{x_2}. \tag{2.42}$$

Insättning av (2.42) i (2.41) ger

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1} \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right)\right|_{x_2} = 0$$

varav fås att

$$\frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial y_1}} = - \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y'} y' - F}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} \right)_{x_2}. \tag{2.43}$$

Men eftersom $F = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}}$ så är

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y-y_1}}$$

och

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y-y_1}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y-y_1}},$$

och alltså är

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y'} y' - F}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} = -\frac{1}{y'}.$$

Detta insatt i (2.43) ger

$$y_2' \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial h}{\partial y_1}} = 0$$

där $y_2' = y'(x_2)$.

Men $y'_2 = y'(x_2)$ är extremalkurvans lutning vid högra ändpunkten (x_2, y_2) och $\dfrac{\frac{\partial h}{\partial x_1}}{\frac{\partial h}{\partial y_1}}$ är lutningen för kurvan $h(x, y) = 0$ vid vänstra ändpunkten (x_1, y_1). Brachistokronens lutning i högra ändpunkten är alltså vinkelrät mot lutningen till kurvan $h(x, y) = 0$ i vänstra ändpunkten.

Referenser:

Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952

Kapitel 3

Minimala rotationsytan

3.1 Euler-Lagrange-ekvationen i olika fall av problemet med minimal rotationsyta

Euler var den förste som studerade följande problem: Givet två punkter, (x_1, y_1) och (x_2, y_2), vilken funktionskurva $y = y(x)$ mellan dessa punkter ger vid rotation kring x-axeln en rotationsyta med minimal area. Vi antar att $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, och att $y(x) \geq 0$ för $x_1 \leq x \leq x_2$. Arean av rotationsytan är

$$I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Vi vill alltså minimera denna integral för funktioner $y(x)$ sådana att

$$y(x_1) = y_1 > 0 \quad \text{och} \quad y(x_2) = y_2 > 0$$

och sådana att

$$y(x) \geq 0 \quad \text{i} \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Integrandfunktionen $F = y\sqrt{1 + y'^2}$ är här oberoende av x.

Enligt tidigare härledning gäller då att

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = c_1. \tag{3.1}$$

I vårt fall är

$$F = y\sqrt{1 + y'^2}. \tag{3.2}$$

Om vi tillämpar (3.1) på (3.2) får vi

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = c_1$$

eller

$$yy'^2 - y(1+y'^2) = c_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Förenkling ger

$$-y = c_1\sqrt{1+y'^2},$$

och genom att kvadrera fås

$$\frac{y^2}{c_1^2} = 1 + y'^2$$

som förenklas till

$$y'^2 = \frac{y^2 - c_1^2}{c_1^2}.$$

Alltså gäller

$$y' = (\pm)\frac{\sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1}.$$

Genom att separera variablerna och sedan integrera, får vi

$$x = c_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = c_1 \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1}\right) + c_2 \tag{3.3}$$

som ger

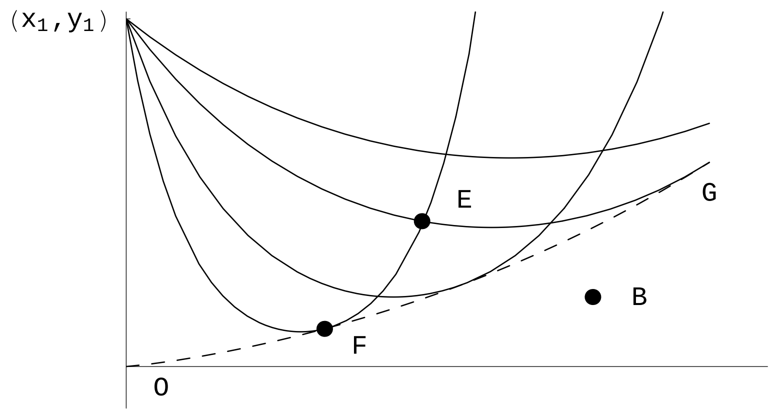
$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right). \tag{3.4}$$

Kurvan i (3.4) passerar genom punkten 1 $\big((x_1, y_1)\big)$ precis om

$$y_1 = c_1 \cosh\left(\frac{x_1 - c_2}{c_1}\right). \tag{3.5}$$

Sambanden (3.4) och (3.5) definierar tillsammans en enparametrig familj av kedjekurvor genom punkten 1 sådana att för varje riktning passerar en av dessa kedjekurvor genom punkten 1 i denna riktning.

Vi måste sedan avgöra vilken eller vilka av kedjekurvorna i denna familj som också passerar genom den andra punkten 2 (punkt (x_2, y_2)). Eventuellt finns det ingen sådan kurva alls.



Figur 3.1: Kedjekurvor och envelopp

I figuren ovan visas olika kurvor i den enparametriga familjen, dvs olika kurvor

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \quad \text{för vilka} \quad y_1 = c_1 \cosh\left(\frac{x_1 - c_2}{c_1}\right).$$

Dessa kurvor har en envelopp, se nästa avsitt där enveloppens ekvation härleds. I figuren är enveloppen den streckade kurvan G.

Följande gäller: Ingen medlem av familjen går genom punkten B nedanför enveloppen; endast en medlem passerar genom punkten F på enveloppen (F är en tangeringspunkt); genom varje punkt E ovanför enveloppen passerar exakt två medlemar i familjen, dvs det finns två stationära funktioner, men bara den övre kedjekurvan framställer en minimal yta; inget minimum framställs av den kedjekurva vars tangeringspunkt med enveloppen ligger inom intervallet ($x_1 < x < x_2$). Om (x_2, y_2) ligger till vänster om enveloppen och tillräckligt långt över enveloppen ger den övre kedjekurvan en yta som är ett absolut minimum (annars fås bara ett relativt minimum).

Mera detaljer och bevis ges senare.

Referenser:

George F. Simmons,
Differential equations with applications and historical notes, McGraw-Hill international editions, 1991

3.2 Bevis av existens av envelopp och härledning av enveloppens ekvation samt några slutsatser om minimalyta

Vi påminner om att en kurva $\phi(x, y) = 0$ är envelopp till en kurvskara $y = y(x, c)$ (c är kurvskareparametern) om det för varje punkt (x, y) på enveloppen finns ett c så att

$$y(x, c) - y = \frac{\partial y(x, c)}{\partial c} = 0.$$

Vi visar nu att den enparametriga familj av kedjekurvor som definierades i föregående avsnitt har en envelopp. Dvs vi visar att kurvskaran definierad genom att

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \quad \text{där} \quad y_1 = c_1 \cosh\left(\frac{x_1 - c_2}{c_1}\right)$$

har en envelopp. Vi bestämmer också enveloppens ekvation på parameterform.

Vi antar att vi har valt koordinatsystem så att $(x_1, y_1) = (0, 1)$. Dvs vi har alltså att

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \quad \text{där} \quad 1 = c_1 \cosh\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) = c_1 \cosh\frac{c_2}{c_1}.$$

Sätt

$$\alpha = \frac{1}{c_1} \quad \text{och} \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}.$$

Då gäller alltså att

$$y = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x - \beta)$$

där

$$\alpha = \cosh\beta,$$

och vi får att

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\cosh\beta}\cosh\Big(\Big(\cosh\beta\Big)x - \beta\Big) \\ &= \frac{1}{\cosh\beta}\frac{1}{2}\left(e^{(\cosh\beta)x}e^{-\beta} + e^{-(\cosh\beta)x}e^{\beta}\right) \\ &= \frac{e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}e^{(\cosh\beta)x} + \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}e^{-(\cosh\beta)x}. \end{aligned}$$

Sätt slutligen $\gamma = e^{\beta}$, så erhålls att

$$y = \frac{1}{\gamma^2+1} e^{\frac{1}{2}(\gamma+\frac{1}{\gamma})x} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+\frac{1}{\gamma})x}. \tag{3.6}$$

Eftersom $\gamma = e^{\beta}$ så är $\gamma > 0$.

Den kurvskara som fås av (3.6) för värdena > 0 på parametern γ är alltså den enparametriga familjen av kedjekurvor i föregående avsnitt $\Big($i fallet $\quad (x_1, y_1) = (0, 1)\Big)$.

Sätt

$$y(x,\gamma) = \frac{1}{\gamma^2+1} e^{\frac{1}{2}(\gamma+\frac{1}{\gamma})x} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+\frac{1}{\gamma})x}.$$

Kurvskaran (3.6) är då kurvskaran $y = y(x,\gamma)$. En eventuell envelopp till denna kurvskara är, enligt definition av envelopp, en eventuell kurva med punkter (x, y) för vilka

$$y = y(x,\gamma) \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} = 0.$$

Vi visar nu att det finns en sådan kurva.

Sambandet

$$\frac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} = 0$$

ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} = &\left(-\frac{2\gamma}{(\gamma^2+1)^2} + \frac{1}{\gamma^2+1}\cdot\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\gamma^2}\Big)x\right) e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} \\ &+ \left(\frac{2\gamma}{(\gamma^2+1)^2} - \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}\cdot\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\gamma^2}\Big)x\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} = 0.\end{aligned}$$

Multiplicera med $2\gamma\big(\gamma^2+1\big)^2 e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}$ så fås

$$\left(-4\gamma^2 + \big(\gamma^2-1\big)\Big(\gamma+\frac{1}{\gamma}\Big)x\right) e^{\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + 4\gamma^2 - \gamma^2\big(\gamma^2-1\big)\Big(\gamma+\frac{1}{\gamma}\Big)x = 0.$$

Sätt $u = \big(\gamma + \frac{1}{\gamma}\big)x$. Då gäller enligt ovan att

$$\big(-4\gamma^2 + \big(\gamma^2-1\big)u\big)\, e^{u} + 4\gamma^2 - \gamma^2\big(\gamma^2-1\big)u = 0,$$

vilket kan skrivas

$$\big(\gamma^2-1\big)u\big(e^u-\gamma^2\big) = 4\gamma^2\big(e^u-1\big). \tag{3.7}$$

Eftersom $\gamma > 0$ och $x > 0$ är här $u = \Big(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\Big)x > 0$.

Vi studerar nu ekvationen (3.7) för $u > 0$ för olika $\gamma > 0$. Om $e^u \neq \gamma^2$ kan (3.7) skrivas

$$\big(\gamma^2 - 1\big)u = 4\gamma^2 \frac{e^u - 1}{e^u - \gamma^2}$$

eller ekvivalent

$$\big(\gamma^2 - 1\big)u = 4\gamma^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{e^u - \gamma^2}\right).$$

Sätt

$$\varphi(u) = 4\gamma^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{e^u - \gamma^2}\right) - \big(\gamma^2 - 1\big)u.$$

Derivering ger

$$\varphi'(u) = 4\gamma^2 \left(0 - \frac{\big(\gamma^2 - 1\big)\, e^u}{\big(e^u - \gamma^2\big)^2}\right) - \big(\gamma^2 - 1\big),$$

dvs

$$\varphi'(u) = -\big(\gamma^2 - 1\big)\left(4\gamma^2 \frac{e^u}{\big(e^u - \gamma^2\big)^2} + 1\right). \tag{3.8}$$

Vi delar nu in i olika fall.

<u>Fall 1: $0 < \gamma < 1$.</u>

Då är $e^u > 1 > \gamma^2$ för alla $u > 0$. I detta fall är alltså $\varphi(u)$ definierad för alla $u > 0$, och enligt (3.8) gäller att $\varphi'(u) > 0$ för alla $u > 0$. Således är $\varphi(u)$ strängt växande i $u \geq 0$ och

$$\varphi(u) > \varphi(0) = 4\gamma^2 \Big(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{1 - \gamma^2}\Big) = 0$$

för alla $u > 0$. Ekvationen (3.7) saknar alltså lösning $u > 0$ om $0 < \gamma < 1$.

<u>Fall 2: $\gamma = 1$.</u>

Insättning av $\gamma = 1$ i (3.7) ger $4\big(e^u - 1\big) = 0$ som saknar lösning $u > 0$.

<u>Fall 3: $\gamma > 1$.</u>

Av $e^4 - \gamma^2 = 0$ fås $u = 2 \ln \gamma$ och eftersom $\gamma > 1$ gäller $2 \ln \gamma > 0$. I detta fall är alltså $\varphi(u)$ definierad om $0 < u < 2 \ln \gamma$ och om $u > 2 \ln \gamma$. I båda dessa intervall gäller enligt (3.8) att $\varphi'(u) < 0$. Funktionen $\varphi(u)$ är således strängt avtagande i båda dessa intervall. Eftersom $\varphi(0) = 0$ saknar därför $\varphi(u)$ nollställe i $0 < u < 2 \ln \gamma$, och eftersom $\varphi(u) \to +\infty$ då $u \to 2 \ln \gamma^+$ och $\varphi(u) \to -\infty$ då $u \to +\infty$ har $\varphi(u)$ exakt ett nollställe i $u > 2 \ln \gamma$. Vi ser också att $u = 2\ln\gamma$ inte uppfyller ekvationen (3.7). I detta fall har alltså ekvationen (3.7) exakt en lösning $u > 0$.

Sammanfattningsvis har vi visat att ekvationen (3.7) för $\gamma > 0$ har lösning $u > 0$ precis om $\gamma > 1$, och att det finns en entydig lösning $u > 0$ för varje $\gamma > 1$. För godtyckligt $\gamma > 1$ låt $u = f(\gamma)$ beteckna den entydiga lösningen $u > 0$ till (3.7). Eftersom $u = \left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)x$ gäller med denna beteckning att

$$x = \frac{f(\gamma)}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \tag{3.9}$$

om $\gamma > 1$. Ovanstående är vad som fås från sambandet

$$\frac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} = 0.$$

Insättning av (3.9) i

$$y = y(x,\gamma) = \frac{1}{\gamma^2+1}e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}$$

ger

$$y = \frac{1}{\gamma^2+1}e^{\frac{1}{2}f(\gamma)} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}e^{-\frac{1}{2}f(\gamma)}$$

om $\gamma > 1$.

Vi har därmed visat att kurvskaran $y = y(x,\gamma)$ för $\gamma > 0$ i $x > 0$ har en envelopp och att enveloppens ekvation på parameterform är

$$\begin{cases} x = \dfrac{f(\gamma)}{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}}, \\ \\ y = \dfrac{1}{\gamma^2+1}e^{\frac{1}{2}f(\gamma)} + \dfrac{\gamma^2}{\gamma^2+1}e^{-\frac{1}{2}f(\gamma)} \end{cases} \qquad \gamma > 1$$

där $f(\gamma)$ är definierad ovan och envelopparametern γ är samma γ som $y = y(x,\gamma)$.

Genom derivering kan också visas att enveloppen är en i första kvadranten från origo strängt växande konvex funktion av x.

Vi drar nu några slutsatser för vårt problem att minimera arean av en rotationsyta.

Vi antar som ovan att koordinatsystemet är valt så att $(x_1, y_1) = (0, 1)$ och använder beteckningarna ovan. Våra extremalkurvor $y = y(x,\gamma)\,(\gamma > 0)$ är då i $x \geq 0$ en enparametrig familj av extremalkurvor som alla utgår från punkten $(0, 1)$.

Eftersom enveloppen endast är definierad för $\gamma > 1$ gäller att en extremalkurva $y = y(x, \gamma)$ tangerar enveloppen endast om $\gamma > 1$.
På enveloppen gäller $y = y(x)$ och $\dfrac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} = 0$. På en extremalkurva $y = y(x, \gamma), \quad x > 0$ hela vägen fram till eventuell tangering med enveloppen (tangering endast om $\gamma > 1$), gäller därför på grund av kontinuitet antingen $\dfrac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} > 0$ eller $\dfrac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} < 0$. På en envelopptangerande extremalkurva $y = y(x, \gamma)$ hela vägen från tangeringspunkten gäller analogt antingen $\dfrac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} > 0$ eller $\dfrac{\partial y(x,\gamma)}{\partial \gamma} < 0$.

Sätt

$$x(\gamma) = \frac{f(u)}{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}},$$

$$y(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2 + 1} e^{\frac{1}{2} f(\gamma)} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} e^{-\frac{1}{2} f(\gamma)}$$

för $\gamma > 1$, så att enveloppen ovan är

$$x = x(\gamma), \quad y = y(\gamma), \quad \gamma > 1.$$

Genom derivering kan visas att $x(\gamma)$ och $y(\gamma)$ är strängt avtagande i $\gamma > 1$.

Inför nu de båda kurvskarorna K_1 och K_2, där K_1 består av de kurvor $y = y(x, \gamma)$ som inte tangerar enveloppen samt de som tangerar fram till tangeringspunkten, och K_2 är de envelopptangerande kurvorna $y = y(x, \gamma)$ från tangeringspunkten. Dvs K_1 är kurvorna

$$y = y(x, \gamma), \quad 0 < x < \infty \quad \text{för} \quad 0 < \gamma \leq 1$$

och kurvorna

$$y = y(x, \gamma), \quad 0 < x < x(\gamma) \quad \text{för} \quad \gamma > 1,$$

samt K_2 är kurvorna

$$y = y(x, \gamma), \quad x > x(\gamma) \quad \text{för} \quad \gamma > 1.$$

Sats 2. *Två olika kurvor i K_1 skär aldrig varandra där de är definierade, och två olika kurvor i K_2 skär aldrig varandra där de är definierade.*

Bevis. Säg att $\gamma_2 > \gamma_1 > 1$ och att de båda kurvorna

$$y = y(x, \gamma_1), \quad 0 < x < x(\gamma_1)$$

och

$$y = y(x, \gamma_2), \quad 0 < x < x(\gamma_2)$$

i K_1 skär varandra i x_0 där

$$0 < x_0 < x(\gamma_1) \quad \text{och} \quad 0 < x_0 < x(\gamma_2).$$

Dvs det gäller att

$$y(x_0, \gamma_1) = y(x_0, \gamma_2).$$

Det följer då av medelvärdessatsen att

$$0 = y(x_0, \gamma_2) - y(x_0, \gamma_1) = \frac{\partial y(x_0, \gamma_3)}{\partial \gamma} \cdot \underbrace{(\gamma_2 - \gamma_1)}_{>0}$$

för något γ_3 med $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, och vi får att

$$\frac{\partial y(x_0, \gamma_3)}{\partial \gamma} = 0$$

för detta γ_3.

Eftersom $x(\gamma)$ är strängt avtagande i $\gamma > 1$ och $1 < \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, gäller att

$$x(\gamma_1) > x(\gamma_3) > x(\gamma_2)$$

och eftersom $0 < x_0 < x(\gamma_2)$ har vi att

$$0 < x_0 < x(\gamma_3).$$

Det finns alltså en punkt x_0 på kurvan

$$y = y(x, \gamma_3), \quad 0 < x < x(\gamma_3)$$

i K_1 där $\dfrac{\partial y(x, \gamma)}{\partial \gamma} = 0$. Detta strider mot att antingen $\dfrac{\partial y(x, \gamma)}{\partial \gamma} > 0$ eller $\dfrac{\partial y(x, \gamma)}{\partial \gamma} < 0$ på hela denna kurva.

Kurvorna

$$y = y(x, \gamma_1), \quad 0 < x < x(\gamma_1)$$

och

$$y = y(x, \gamma_2), \quad 0 < x < x(\gamma_2)$$

i K_1 kan således inte skära varandra. På likartat sätt visas övriga fall av denna sats. $\square$

Följande gäller för kurvorna $y(x, \gamma)$ i $0 < x < \infty$ för $\gamma > 0$:

1. $y(0,\gamma) = 1$ för alla $\gamma > 0$.

2. $y'_x(0,\gamma) = -\dfrac{1}{2}\Big(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\Big)$ som avtar strängt från $+\infty$ till $-\infty$ då γ växer från 0 till ∞.

3. $y(x,\gamma)$ är konvex i $0 < x < \infty$ för godtyckligt γ (ty $y''_{xx}(x,\gamma) > 0$ för alla x för godtyckligt γ).

4. För $\gamma > \gamma_0$ tangerar $y = y(x,\gamma)$ enveloppen i punkten $\big(x(\gamma), y(\gamma)\big)$ och denna punkt genomlöper enveloppen från origo ut mot oändligheten då γ avtar från ∞ mot 1.

5. för $\gamma > 1$ gäller

x	0		$\dfrac{2\gamma\ln\gamma}{\gamma^2+1}$		∞
$y'_x(x,\gamma)$		$-$	0	$+$	
$y(x,\gamma)$	1	$\searrow$	$\dfrac{2\gamma}{\gamma^2+1}$	$\nearrow$	

och vidare gäller $y(x,\gamma) = 1$ då $x = \dfrac{4\gamma\ln\gamma}{\gamma^2+1}$ (förutom i $x = 0$) som är godtyckligt nära 0 då γ är stort.

Låt D vara öppna området i $x > 0, y > 0$ mellan positiva y-axeln och enveloppen. Av sats 2 samt 1, 2, 3 och 4 följer att genom varje punkt i D passerar exakt en kurva från kurvskaran K_1. Av sats 2 samt 3, 4 och 5 följer att genom varje punkt i D passerar exakt en kurva från kurvskaran K_2. Detta visar skärningspåståendet i slutet av avsnitt 3.1 om kedjekurvorna $y = y(x,\gamma)$. Det visar också att kurvfamiljen K_1 (och även kurvfamiljen K_2) är ett extremalfält i D. Extremalfältet K_1 i D är ett centralfält $\big($alla kurvorna utgår ju från samma punkt $(0,1)\big)$.

I det här betraktade variationsproblemet att minimera rotationsarean

$$I = 2\pi \int_0^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}dx$$

för funktioner sådana att $y(0) = 1$ och $y(x_2) = y_2$ och sådana att $y(x) \geq 0$ i $0 \leq x \leq x_2$ (kom ihåg att nu är $(x_1, y_1) = (0,1)$) är integrandfunktionen

$$F = y\sqrt{1+y'^2}.$$

Derivering ger

$$F_{y'} = y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = yy'\Big(1+y'^2\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

och

$$F_{y'y'} = y\Big(1+y'^2\Big)^{-\frac{1}{2}} - yy'^2\Big(1+y'^2\Big)^{-\frac{3}{2}} = y\Big(1+y'^2\Big)^{-\frac{3}{2}},$$

som alltid är ≥ 0 i $0 \leq x \leq x_2$ eftersom $y(x) \geq 0$ i $0 \leq x \leq x_2$ antas gälla.

Av ovanstående och avsnitt 1.4 följer att följande gäller.
För godtyckligt val av $(x_2, y_2) \in D$ låt $y_0(x)$ vara den entydigt bestämda kedjekurva i K_1 för vilken $y_0(x_2) = y_2$. Då gäller att $I(y_0) < I(y)$ för varje annan funktion $y(x)$ med $y(0) = 1$ och $y(x_2) = y_2$ vars graf är innehållen i området D.

Det återstår att reda ut vad som gäller för $(x_2, y_2) \in D$ i det fall då grafen för $y(x)$ inte behöver vara innehållen i D, samt också fallet $(x_2, y_2) \notin D$. I dessa fall kan en eventuell kurva $y = y(x)$ som ger minimum innehålla en del av x-axeln. För en funktion $\eta(x)$ sådan att $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ och $\eta(x) > 0$ i $x_1 < x < x_2$ finns då inte någon omgivning av $\varepsilon = 0$ där

$$y(x) + \varepsilon\eta(x) \geq 0$$

i $x_1 \leq x \leq x_2$. En eventuell sådan minimerande kurva $y = y(x)$ behöver således inte vara lösning till Euler-Lagrange-ekvationen utan måste hittas på annat sätt.

3.3 Goldschmidts diskontinuerliga lösning

Om en parameterkurva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

där $y(t) \geq 0$ för $a \leq t \leq b$ roteras kring y-axeln fås en yta med arean

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

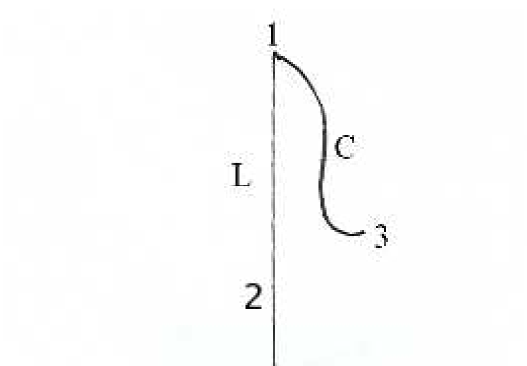
Om kurvan har längd l och vi inför båglängden s som parameter så att kurvan ges av

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq l$$

får vi att arean av rotationsytan ges av

$$2\pi \int_0^l y(s)ds.$$

Låt L_{12} vara lodräta linjesegmentet av längd l rakt ned från punkten 1 och låt C vara någon annan kurva av längd l från punkten 1 (se figur 3.2).



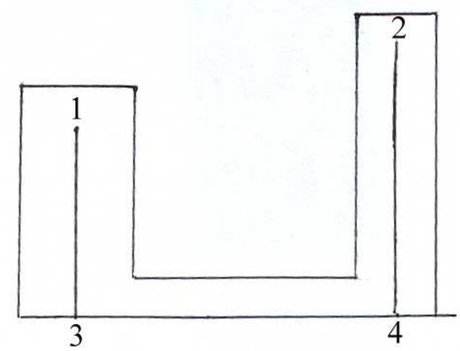
Figur 3.2

Låt $y(s)$ vara y-koordinaten för en punkt på L_{12} med avstånd s till punkten 1 och låt $Y(s)$ vara y-koordinaten för den punkt på C där avståndet längs C till punkten 1 är s. Uppenbarligen gäller då att $y(s) \leq Y(s)$ för $0 \leq s \leq l$ och alltså att

$$2\pi \int_0^l Y(s)ds - 2\pi \int_0^l y(s)ds = 2\pi \int_0^l \Big(Y(s) - y(s)\Big)ds \geq 0.$$

Från detta resultat kan vi dra följande slutsats:

Låt 3 och 4 vara punkter på x-axeln under punkterna 1 resp. 2 $\big($punkterna 1 och 2 är (x_1, y_1) resp. $(x_2, y_2)\big)$.



Figur 3.3

Om en kurva C_{12} i halvplanet $y \geqq 0$ har längd större än $y_1 + y_2$, så visar resultatet ovan att arean av den rotationsyta som framställs av C_{12} alltid är större eller lika med arean av den yta som framställs av den brutna linjen L_{1342}.

Om vi tar ett tillräckligt litet område kring denna brutna linje (såsom visas i figur 3.3) sådant att varje båge C_{12} i området som förbinder 1 med 2 alltid har större längd än $y_1 + y_2$, då är det uppenbart, att linjen L_{1342}, åtminstone i denna omgivning, är en minimerande båge. Den brutna linjen L_{1342} är Goldschmidts diskontinuerliga lösning.

Referenser:
Gilbert Ames Bliss, *Calculus of Variations*, The mathematical association of America, 1962

3.4 Zermelos enveloppsats och slutlig lösning av problemet att minimera rotationsarean

Vi börjar med ett envelopresultat av Zermelo:

Sats 3. *Zermelos enveloppsats*
Låt $y = y(x, \gamma)$ *vara en enparametrig kurvskara genom punkten* $A = (x_1, y_1)$ *av lösningar till Euler-Lagrange-ekvationen till problemet att minimera integralen*

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

för funktioner $y(x)$. *Kurvskaran* $y = y(x, \gamma)$ *antas ha en envelopp, och beteckna enveloppen med* G.

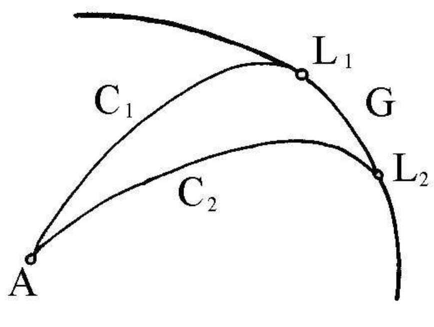
För en godtycklig kurva C *sätt*

$$I(C) = \int_C F(x, y, y')\,dx.$$

Låt kurvorna C_1 *och* C_2 *vara* $y = y(x, \gamma)$ *för två olika parametrar* $\gamma = \gamma_1$ *resp.* $\gamma = \gamma_2$ *från punkten* A *fram till enveloppen. Då gäller, se figur nedan, att*

$$I(C_1) + I(L_1 G L_2) = I(C_2),$$

där $L_1 G L_2$ *är enveloppen* G *från punkten* L_1 *till punkten* L_2.



Figur 3.4

Bevis. Låt $x = g(\gamma), y = h(\gamma)$ vara en parameterframställning av enveloppen där γ är samma parameter som i kurvskaran $y = y(x, \gamma)$.

Sätt

$$\phi(\gamma) = \int_{x_1}^{g(\gamma)} F\big(x, y(x,\gamma), y'_x(x,\gamma)\big)dx.$$

Då är

$$I\big(C_1\big) = \phi(\gamma_1) \quad \text{och} \quad I\big(C_2\big) = \phi(\gamma_2)$$

så att

$$I\big(C_2\big) - I\big(C_1\big) = \phi(\gamma_2) - \phi(\gamma_1) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \phi'(\gamma)d\gamma.$$

Derivering ger

$$\phi'(\gamma) = \int_{x_1}^{g(\gamma)} \Bigg(F_y y'_\gamma(x,\gamma) + F_{y'} y''_{x\gamma}(x,\gamma)\Bigg)dx + F\Bigg(g(\gamma), y\Big(g(\gamma),\gamma\Big), y'_x\Big(g(\gamma),\gamma\Big)\Bigg)g'(\gamma).$$

Men

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{g(\gamma)} \Bigg(F_y y'_\gamma(x,\gamma) + F_{y'} y''_{x\gamma}(x,\gamma)\Bigg)dx \\
&= \int_{x_1}^{g(\gamma)} F_y y'_\gamma(x,\gamma)dx + \int_{x_1}^{g(\gamma)} F_{y'} y''_{x\gamma}(x,\gamma)dx \\
&= \int_{x_1}^{g(\gamma)} F_y y'_\gamma(x,\gamma)dx + \Bigg[F_{y'} y'_\gamma(x,\gamma)\Bigg]_{x=x_1}^{x=g(\gamma)} - \int_{x_1}^{g(\gamma)} \Bigg(\frac{d}{dx}F_{y'}\Bigg) y'_\gamma(x,\gamma)dx \\
&= \int_{x_1}^{g(\gamma)} \Bigg(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\Bigg) y'_\gamma(x,\gamma)dx = 0.
\end{aligned}$$

I räkning här ovan har vi använt partiell integration, att $y'_\gamma\big(g(\gamma),\gamma\big) = 0$ eftersom punkterna $(x,y) = \big((g(\gamma), h(\gamma)\big)$ på enveloppen uppfyller att $y - y(x,\gamma) = y'_\gamma(x,\gamma) = 0$, att $y'_\gamma(x_1,\gamma) = 0$ eftersom $y(x_1,\gamma) = y_1$ för alla γ, och att Euler-Lagrange-ekvationen $F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0$ uppfylls av $y(x,\gamma)$.

Det följer att

$$\phi'(\gamma) = F\Bigg(g(\gamma), y\Big(g(\gamma),\gamma\Big), y'_x\Big(g(\gamma),\gamma\Big)\Bigg)g'(\gamma)$$

och alltså att

$$\begin{aligned}
I\big(C_2\big) - I\big(C_1\big) &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \phi'(\gamma)d\gamma \\
&= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\Bigg(g(\gamma), y\Big(g(\gamma),\gamma\Big), y'_x\Big(g(\gamma),\gamma\Big)\Bigg)g'(\gamma)\, d\gamma.
\end{aligned}$$

Vi använder nu igen att enveloppen definieras av att

$$y - y(x,\gamma) = y'_\gamma(x,\gamma) = 0. \tag{3.10}$$

Insättning av enveloppens parameterframställning $x = g(\gamma)$, $y = h(\gamma)$ i (3.10) ger

$$y\Big(g(\gamma),\gamma\Big) = h(\gamma)$$

och

$$y'_\gamma\Big(g(\gamma),\gamma\Big) = 0.$$

Derivering av $y\Big(g(\gamma),\gamma\Big) = h(\gamma)$ med avseende på γ ger

$$y'_x\Big(g(x,\gamma)\Big)g'_\gamma + y'_\gamma\Big(g(\gamma),\gamma\Big) = h'(\gamma),$$

och eftersom $y'_\gamma\Big(g(\gamma),\gamma\Big) = 0$ (enligt ovan) får vi att

$$y'_x\Big(g(\gamma),\gamma\Big) = \frac{h'(\gamma)}{g'(\gamma)}.$$

Alltså gäller att

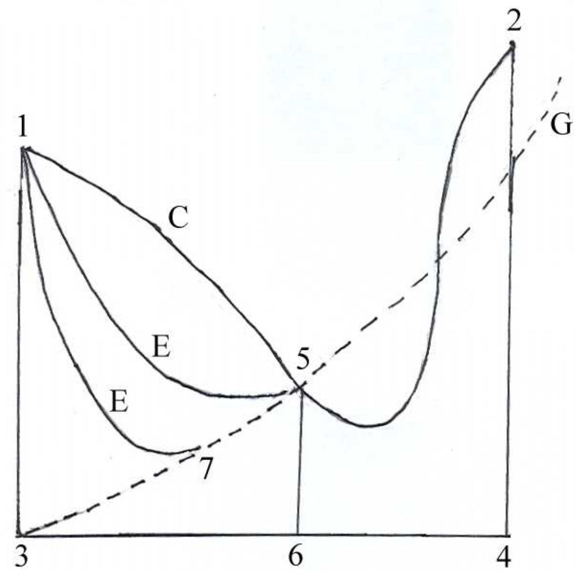
$$F\Bigg(g(\gamma), y\Big(g(\gamma),\gamma\Big), y'_x\Big(g(\gamma),\gamma\Big)\Bigg) = F\Bigg(g(\gamma), h(\gamma), \frac{h'(\gamma)}{g'(\gamma)}\Bigg).$$

Vi får att

$$\begin{aligned}
I\big(C_2\big) - I\big(C_1\big) &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\Bigg(g(\gamma), y\Big(g(\gamma),\gamma\Big), y'_x\Big(g(\gamma),\gamma\Big)\Bigg) g'(\gamma)\, d\gamma \\
&= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\Bigg(g(\gamma), h(\gamma), \frac{h'(\gamma)}{g'(\gamma)}\Bigg) d\gamma \\
&= \int_{L_1GL_2} F\big(x,y,y'\big)dx,
\end{aligned}$$

och Zermelos enveloppsats är visad. □

Vi fortsätter nu med problemet att minimera arean av en rotationsyta. För en godtycklig kurva C i $y \geq 0$ låt $I(C)$ beteckna arean av den rotationsyta som fås då C roteras kring x-axeln. Betrakta figuren nedan. Som tidigare är kurvan G enveloppen.



Figur 3.5

I figuren ovan är kurvorna E extremalkurvor $y = y(x, \gamma)$ i familjen K_1.

Vi visar först att varje båge $C_{12}(\neq L_{1342})$ i $y \geq 0$ som har en punkt 5 gemensam med enveloppen framställer en rotationsyta med större area än arean från Goldschmidts lösning.

Låt C_{12} vara en kurva från punkten 1 till punkten 2 i $y \geq 0$ där C_{12} har minst en punkt gemensam med G, och låt 5 vara första gemensamma punkten för C_{12} och G.

Enligt slutet av avsnittet 3.2 gäller

$$I\big(C_{15}\big) \geq I\big(E_{15}\big) \tag{3.11}$$

och att $I\big(C_{15}\big) = I\big(E_{15}\big)$ endast då $C_{15} = E_{15}$ (C_{15} är kurvan C från punkten 1 till punkten 5, och analogt med likartade beteckningar).

Enligt Zermelos sats gäller

$$I\big(E_{15}\big) = I\big(E_{17} \bigcup G_{75}\big) \tag{3.12}$$

för godtycklig punkt 7 på enveloppen. Om punkten 7 på enveloppen är tillräckligt nära origo 3 $\Big((x_1, y_1) = (1, 0)$ antas$\Big)$ är längden av $E_{17} \bigcup G_{75}$ större än längden av $y_1 + y_5$ och enligt avsnitt 3.3 gäller då att

$$I\big(E_{17} \bigcup G_{75}\big) > I\big(L_{1365}\big). \tag{3.13}$$

Av (3.11), (3.12) och (3.13) följer att

$$I\big(C_{15}\big) > I\big(L_{1365}\big). \tag{3.14}$$

Låt nu

$$x = x(s),\, y = y(s),\, 0 \le s \le l$$

vara en parameterframställning av kurvan C_{12} där s är båglängden mätt från punkten 1. Låt punkten 5 vara en godtycklig punkt på denna kurva och säg att punkten 5 fås då $s = s_5$.

Då gäller att

$$I\Big(C_{15}\Big) - I\Big(L_{1365}\Big) = 2\pi \int_0^{s_5} y(s)ds - \pi\Big(y_1^2 + y\big(s_5\big)^2\Big). \tag{3.15}$$

Derivatan av högerledet i (3.15) med avseende på s_5 är

$$2\pi y\big(s_5\big) - 2\pi y\big(s_5\big)y'\big(s_5\big) = 2\pi y\big(s_5\big)\Big(1 - y'\big(s_5\big)\Big). \tag{3.16}$$

Men eftersom båglängden s är parameter gäller

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1 \quad \text{för alla s}$$

och alltså att

$$-1 \le y'(s) \le 1 \quad \text{för alla s.}$$

Derivatan (3.16) är således ≥ 0 för alla s_5 och alltså är högerledet i (3.15) en växande funktion av s_5.

Högerledet i (3.15) är enligt (3.14) > 0 då s_5 är sådant att punkten 5 är första gemensamma punkten för C_{12} och G.

Eftersom högerledet i (3.15) är en växande funktion gäller att högerledet i (3.15) även är > 0 då $s_5 = l$, vilket betyder att

$$I\big(C_{12}\big) - I\big(L_{1342}\big) > 0.$$

För problemet att minimera rotationsarean vet vi nu följande:
Om punkten 2 ligger på eller nedanför enveloppen ger Goldschmidts lösning ett absolut minimum (enligt resonemanget här i avsnitt 3.4). Om punkten 2 ligger ovanför enveloppen G ger kedjekurvan $\in K_1$ från 1 till 2 ett minimum för funktionskurvor strikt ovanför G (enligt avsnitt 3.2) och Goldschmidts lösning ger ett minimum för funktionskurvor som har någon punkt gemensam med G (enligt avsnitt 3.4). Det minsta av dessa båda minimumvärdena ger globalt minimum då 2 ligger strikt ovanför G och godtyckliga funktionskurvor i $y \ge 0$ betraktas. Dessa båda minimumvärden är lika på en viss kurva H från origo och innanför G.

Vi bestämmer nu denna kurva H.

Låt alltså (x_2, y_2), punkten 2, vara en punkt i $x > 0$ strikt ovanför enveloppen G. Liksom i fallet med härledningen av enveloppens ekvation antar vi att punkten 1 som betecknas med (x_1, y_1) är punkten $(0, 1)$.

Extremalerna genom $(0, 1)$ är kedjekurvorna

$$y = \frac{1}{\gamma^2+1} e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + \frac{\gamma^2}{\gamma 2+1} e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} \tag{3.17}$$

för $\gamma > 0$. Att en sådan kurva (3.17) passerar genom punkten (x_2, y_2) betyder att

$$y_2 = \frac{1}{\gamma^2+1} e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1} e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2}. \tag{3.18}$$

För en kurva (3.17) visar en enkel räkning att

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2\gamma}\left(e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + \gamma^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}\right)$$

och alltså att

$$\begin{aligned} y\sqrt{1+y'^2} &= \frac{1}{2\gamma\left(\gamma^2+1\right)}\left(e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + \gamma^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2\gamma\left(\gamma^2+1\right)}\left(e^{\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + 2\gamma^2 + \gamma^4 e^{-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}\right). \end{aligned}$$

Rotationsarean A_1 från en kurva (3.17) i $0 \le x \le x_2$ är alltså

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\pi \int_0^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^{x_2} \frac{1}{2\gamma\left(\gamma^2+1\right)}\left(e^{\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x} + 2\gamma^2 + \gamma^4 e^{-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}\right)dx \end{aligned}$$

som ger

$$A_1 = \frac{\pi}{\left(\gamma^2+1\right)^2}\left(e^{\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2} + 2\gamma\left(\gamma^2+1\right)x_2 - \gamma^4 e^{-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x}\right) + \pi\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}.$$

Rotationsarean A_2 från Goldschmidts kurva mellan punkterna $(0, 1)$ och (x_2, y_2) är

$$\begin{aligned} A_2 &= \pi 1^2 + \pi y_2^2 \\ &= \pi + \pi\left(\frac{1}{\gamma^2+1} e^{\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+1} e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2}\right)^2 \\ &= \pi + \frac{\pi}{\left(\gamma^2+1\right)^2}\left(e^{\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2} + 2\gamma^2 + \gamma^4 e^{-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2}\right). \end{aligned}$$

Att $A_1 = A_2$ ger efter lite räkning att

$$\gamma^2\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)x_2 - \gamma^4 e^{-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x_2} - 2\gamma^2 - 1 = 0. \tag{3.19}$$

Sambanden (3.18) och (3.19) bestämmer H.

Sätt $u = \left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)x_2$. Då gäller enligt (3.19) att

$$\gamma^4 u - \gamma^4 e^{-u} - 2\gamma^2 - 1 = 0. \tag{3.20}$$

Eftersom $\gamma > 0$ och $x_2 > 0$ är här $u = \left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)x_2 > 0$.

Vi studerar nu ekvationen (3.20) för $u > 0$ för olika $\gamma > 0$. Sätt

$$\varphi(u) = \gamma^2 u - \gamma^4 e^{-u} - 2\gamma^2 - 1.$$

Derivering ger

$$\varphi'(u) = \gamma^2 + \gamma^4 e^{-u},$$

och alltså är $\varphi'(u) > 0$ för alla $u > 0$. Funktionen $\varphi(u)$ är således strängt växande i $u \geq 0$.

Eftersom

$$\varphi(0) = -\gamma^4 - 2\gamma^2 - 1 = -\left(\gamma^2 + 1\right)^2 < 0$$

och $\varphi(u) \to +\infty$ då $u \to +\infty$ så har ekvationen (3.20) exakt en lösning $u > 0$ för varje $\gamma > 0$. För godtyckligt $\gamma > 0$ låt $u = g(\gamma)$ beteckna den entydiga lösningen $u > 0$ till (3.20). Eftersom $u = \left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)x_2$ gäller med denna beteckning att

$$x_2 = \frac{g(\gamma)}{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}} \tag{3.21}$$

om $\gamma > 0$. Insättning av (3.21) i (3.18) ger

$$y_2 = \frac{1}{\gamma^2 + 1} e^{\frac{1}{2}g(\gamma)} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} e^{-\frac{1}{2}g(\gamma)}$$

om $\gamma > 0$.

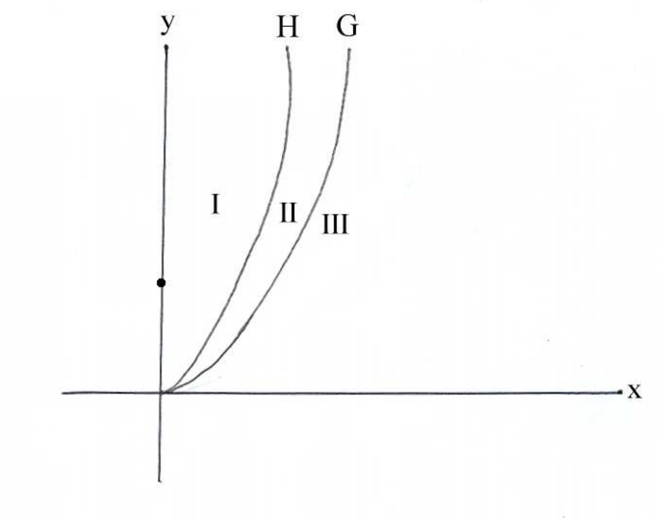
Vi har därmed visat att kurvan H är parameterkurvan

$$\begin{cases} x = \dfrac{g(\gamma)}{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}}, \\[2em] y = \dfrac{1}{\gamma^2 + 1} e^{\frac{1}{2}g(\gamma)} + \dfrac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} e^{-\frac{1}{2}g(\gamma)} \end{cases} \qquad \gamma > 0$$

där $g(\gamma)$ är definierad ovan och H-parametern γ är samma γ som i kurvskaran $y = y(x, \gamma)$.

Genom derivering kan visas att H är en i första kvadranten från origo strängt växande konvex funktion av x.

Då γ i parameterframställningen ovan av H avtar från $+\infty$ till 0 genomlöps H från origo ut mot oändligheten. Kurvan H och enveloppen G (i fallet $(x_1, y_1) = (0, 1)$) visas i figuren nedan.



Figur 3.6

Vi sammanfattar nu vårt slutresultat:

1. Innanför området I ger både kedjekurvan och Goldschmidts lösning ett lokalt minimum.

   Den absoluta minimala rotationsarean fås av den unika kedjekurvan $E_{12} \in K_1$.

2. Då punkten 2 ligger längs kurvan H ger både kedjekurvan och Goldschmidts lösning ett globalt minimum.

3. Då punkten 2 ligger mellan H och G (region II) eller på G ger kedjekurvan $E_{12} \in K_1$ ett relativt minimum, medan Goldschmidts lösning ger ett absolut minimum.

4. Då punkten 2 ligger nedanför enveloppen (region III) ger Goldschmidts lösning ett absolut minimum.

Referenser:
Gilbert Ames Bliss, *Calculus of Variations*, The mathematical association of America, 1962

Johannes Malmquist, Valdemar Stenström, Sture Danielson
Matematisk analys del III, Natur och kultur, 1953
Mary Emily Sinclair,
The absolute minimum in the problem of the surface of revolution of minimum area, Annals of mathematics vol. 9, 1908
Harris F. MacNeish,
Concerning the discontinuous in the problem of the minimum surface of revolution, Annals of mathematics vol. 7, 1905

.

Referenser

Robert Weinstock, *Calculus of Variations*, McGraw-Hill book company inc., 1952
Johannes Malmquist, Valdemar Stenström, Sture Danielson, *Matematisk analys del III*, Natur och kultur, 1953
L. E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Pergamon press, 1961
Gilbert Ames Bliss, *Calculus of Variations*, The mathematical association of America, 1962
George F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill international editions, 1991
Mary Emily Sinclair *The absolute minimum in the problem of the surface of revolution of minimum area*, Annals of mathematics vol. 9, 1908
Harris F. MacNeish, *Concerning the discontinuous solution in the problem of the minimum surface of revolution*, Annals of mathematics vol. 7, 1905