EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Interpolation och approximation

av

Elhoussaine Ifoudine

2008 - No 5

Interpolation och approximation

Elhoussaine Ifoudine

Examensarbete i matematik 15 högskolepoäng, fördjupningskurs

Handledare: Rikard Bøgvad

2008

Innehållsförteckning:

Introduktion:

Arbetet handlar om hur man ska räkna ut interpolationspolynom och approximationspolynom $p_n(x)$ för en given funktion $f(x)$ i givna valda punkter (x_0, y_0), $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$ det ville säga ett polynom så att, $f(x_k) = p_n(x_k) = y_k$ för $\{k = 0, \ldots n\}$. Polynomet $p_n(x)$ approximerar alltså $f(x)$.
Jag börjar med att visa att $p_n(x)$ existerar och är unikt genom att använda Vandermonde-determinanten för det linjära systemet $p_n(x_k) = y_k$. Sedan tas olika exempel upp. Interpolationspolynom och approximationspolynom som tas upp i arbetet är Lagranges, Newtons och Tschebyscheffs.

Innehållet i de olika avsnitten är följande:

Lagranges interpolationspolynom:
Här beskrivs först Lagranges interpolationspolynom. Och jag tar fram det första och det andra polynomet som kallas för linjära respektive kvadratiska interpolationspolynom. I slutet av detta avsnitt bevisas en uppskattning av approximationsfelet (Cauchys rest för interpolationspolynom) genom att använda både den vanliga Rolles sats och en allmännare version.

Newtons polynom:
Här har jag tagit upp hur man beräknar Newtons interpolationspolynom. Beräkning av dem är komplicerad så jag beskriver Newtons metod i form av tabell och räkneschema för att underlätta beräkning.

Tshebyscheffspolynom:
I detta avsnitt definieras Tshebyscheffspolynom med en formel i form av arccos funktionen och först visas att det verkligen är ett polynom. Avsnittet avslutas med problemet om hur man kan göra för att approximationsfelet för ett interpolationspolynom, ska bli så litet som möjligt genom att använda Tshebyscheffspolynomen.

Min huvudreferens för arbetet är [1] kapitel II och III, men ämnet behandlas också i [2] kapitel 18.

I. Interpolation och Approximation

I.1 Interpolationsproblem:

I ett interpolationsproblem är syftet att leta efter enkla funktioner. Man vill hitta en enkel funktion f i form av polynom, styckvis polynom eller trigonometriska polynom, som går igenom några antal punkter:

$$\left(x_0, y_0\right),\ \left(x_1, y_1\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(x_n, y_n\right),$$

där alltså: $\quad f\left(x_0\right) = y_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f\left(x_n\right) = y_n$

Till exempel vill man hitta polynom $p_n\left(x\right)$ med $grad \le n$ med egenskapen att $p_n\left(x_0\right) = y_0, p_n\left(x_1\right) = y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_n\left(x_n\right) = y_n$. Dessa kallas interpolationspolynom. Om de punkter man startar med är punkter på en funktionsgraf $y_n = f\left(x_n\right)$ så approximerar $p_n\left(x\right)$ funktionen $f\left(x\right)$.

Hur bra approximationen är beror förstås på hur funktionen uppför sig mellan punkterna . Det kommer att vara intressant att studera felet:

$$f\left(x\right) - p_n\left(x\right) = ?$$

I.1.1 Sats: (p_n är unikt)

Låt $\left(z_0, z_1, \ldots, z_n\right)$ vara $n+1$ givna värden (de kan vara reella eller komplexa tal) och $\left(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n\right)$ $n+1$ givna andra värden (de kan vara reella eller komplexa tal). Det finns ett unikt polynom $p_n\left(z\right)$ så att:

$$p_n\left(z_i\right) = w_i \qquad \left(i = 0, 1, 2, \ldots, n\right). \tag{1}$$

Bevis:

Vi ska bestämma polynomet $p\left(z\right) = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n$ med $n+1$ okända koefficienter a_i för $\left(i = 0, 1, 2, \ldots, n\right)$, så att det uppfyller villkoret (1).

Ekvation (1) ger oss för $\forall i \in \left\{0, 1, 2, \ldots, n\right\}$ ett system av linjära ekvationer, som kan skrivas i matrisform som följande ekvation:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_0^1 & z_0^2 \ldots\ldots z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & z_1^1 & z_1^2 \ldots\ldots z_1^{n-1} & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ 1 & z_n^1 & z_n^2 \ldots\ldots z_n^{n-1} & z_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

För att kunna se om detta system har en unik lösning måste vi kontrollera att determinanten inte är lika med noll. Determinanten för detta system kallas för Vandermonde-determinant:

$$D\left(z_0, z_1, \ldots, z_n\right) = D\left[C_0, C_1, \ldots, C_n\right] = \begin{vmatrix} 1 & z_0^1 & z_0^2 \ldots\ldots z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & z_1^1 & z_1^2 \ldots\ldots z_1^{n-1} & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ 1 & z_n^1 & z_n^2 \ldots\ldots z_n^{n-1} & z_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} \left(z_i - z_j\right).$$

Här är C_i i:te kolonnen i determinanten för $\{i = 0, 1...., n\}$

Vi ska visa formeln för Vandermonde-determinanten genom en rekursionsformel. Inom mängdklammer står de kolonnoperationer som ger de olika transformationerna av determinanterna.

- För $n = 1$:

$$D\left(z_0, z_1\right) = \begin{vmatrix} 1 & z_0^1 \\ 1 & z_1^1 \end{vmatrix} \qquad \left\{C_1 \leftarrow C_1 - z_0 \times C_0\right\}$$

$$D\left(z_0, z_1\right) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 - z_0 \\ 1 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = \left(z_1 - z_0\right)$$

- För $n = 2$:

$$D\left(z_0, z_1, z_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & z_0^1 & z_0^2 \\ 1 & z_1^1 & z_1^2 \\ 1 & z_2^1 & z_2^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - z_0 \times C_0 \\ C_2 \leftarrow C_2 - z_0 \times C_1 \end{Bmatrix}$$

$$D\left(z_0, z_1, z_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 - z_0 & z_0^2 - z_0^2 \\ 1 & z_1 - z_0 & z_1^2 - \left(z_0 \times z_1\right) \\ 1 & z_2 - z_0 & z_2^2 - \left(z_0 \times z_2\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & z_1 - z_0 & z_1 \times \left(z_1 - z_0\right) \\ 1 & z_2 - z_0 & z_2 \times \left(z_2 - z_0\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & z_1 \times \left(z_1 - z_0\right) \\ z_2 - z_0 & z_2 \times \left(z_2 - z_0\right) \end{vmatrix} = \left(z_1 - z_0\right)\left(z_2 - z_0\right) \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = \left(z_1 - z_0\right)\left(z_2 - z_0\right)\left(z_2 - z_1\right)$$

- För $n \geq 2$ använder vi oss på samma sätt av elementära operationer $\{C_i \leftarrow C_i - z_0 \times C_{i-1}\}$.
  Då får vi :

$$D(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0^1 - z_0 & z_0^2 - z_0^2 \ldots & z_0^n - z_0^n \\ 1 & z_1^1 - z_0 & z_1^2 - (z_1 \times z_0) \ldots z_1^n - (z_1^{n-1} \times z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n^1 - z_0 & z_n^2 - (z_n \times z_0) \ldots z_n^n - (z_n^{n-1} \times z_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & z_1^1 - z_0 & z_1^2 - (z_1 \times z_0) & \ldots\ldots & z_1^n - (z_1^{n-1} \times z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n^1 - z_0 & z_n^2 - (z_n \times z_0) & \ldots\ldots & z_n^n - (z_n^{n-1} \times z_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1^1 - z_0 & z_1^2 - (z_1 \times z_0) & \ldots\ldots & z_1^n - (z_1^{n-1} \times z_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^1 - z_0 & z_n^2 - (z_n \times z_0) & \ldots\ldots & z_n^n - (z_n^{n-1} \times z_0) \end{vmatrix}$$

$$= (z_1 - z_0) \ldots\ldots (z_n - z_0) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Med induktion kan vi se att:

$$D(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j).$$

Eftersom punkterna z_i är parvis olika så är $D(z_0, z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ alltså finns $p_n(z)$.
Nu ska vi visa att $p_n(z)$ är unikt. Låt oss antaga att det finns två interpolationspolynom $p_n(z)$ och $q_n(z)$ med högst grad n som uppfyller följande villkor:

$$p_n(z_i) = q_n(z_i) = w_i, \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$

Polynomet $p_n(z) - q_n(z)$ har högst grad n och den är lika med noll i punkterna z_i för $i = 0, 1, \ldots, n$. Polynomet har dessutom $(n+1)$ nollställen. Från detta följer att $p_n(z) - q_n(z) = 0$ så $p_n(z) = q_n(z)$ för alla z, och satsen följer. □

I.2 Lagrange Interpolation:

Låt $(x_0, y_0), \ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$ vara givna och sådana att x_i :na är parvis olika. Lagranges idé var att multiplicera varje y_j $\{j = 0,1,\ldots,n\}$ med ett polynom p_n, där $p_n(x_j) = 1$ för $n = j$ och $p_n(x_j) = 0$ för $n \neq j$, och sedan addera :

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k p_k(x),$$

för att få ett polynom av grad n som uppfyller (1).

I.3 Linjär interpolation:

Linjär interpolation är en interpolation med en linjär funktion, vars graf är linje som går igenom punkterna (x_0, y_0) och (x_1, y_1). Vi ska använda följande polynom:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

De har egenskapen att $L_0(x_0) = L_1(x_1) = 1$ och $L_0(x_1) = L_1(x_0) = 0$. Det linjära Lagrange-polynomet kan skrivas som följande:

$$p_1 = L_0 y_0 + L_1 y_1,$$

Alltså är:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \qquad (2)$$

I.3.1 Exempel:

Låt $f(x) = \cos(x)$ i intervallet $[0.0, 1.2]$.

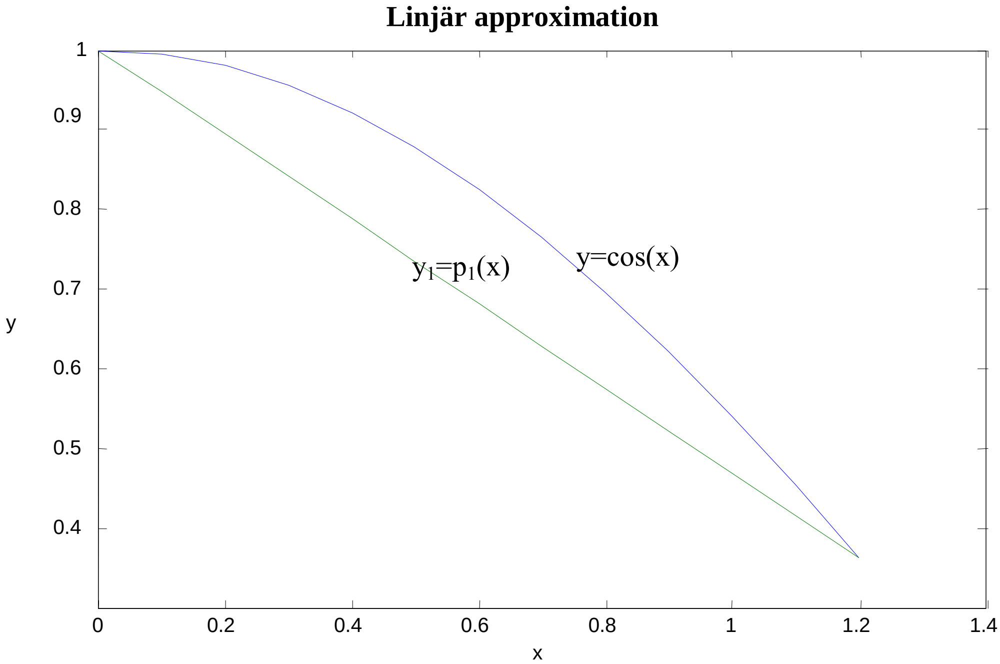
(a) Sök det linjära interpolationspolynomet $p_1(x)$ i $x_0 = 0.0$ och $x_1 = 1.2$.

(b) Sök det linjära interpolationspolynomet $q_1(x)$ i $x_0 = 0.2$ och $x_1 = 1.0$

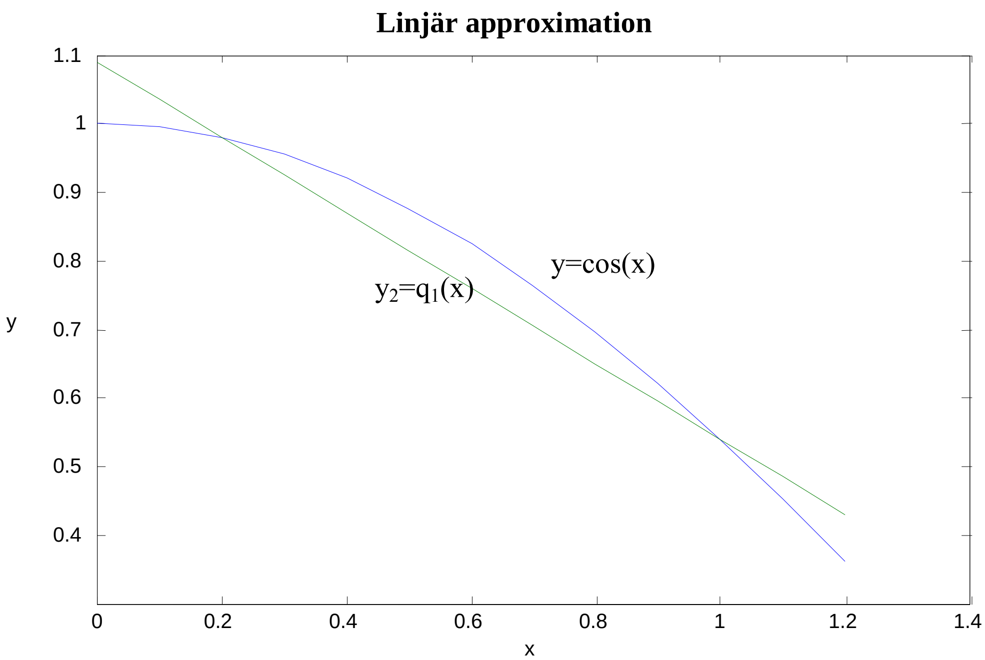
Ekvation (2) ger:

$$p_1(x) = -0.833333(x - 1.2) + 0.301965x$$

$$q_1(x) = -1.225083(x - 1.0) + 0.67538(x - 0.2)$$



Figur 1: **Lagranges linjär interpolationspolynom** $p_1(x)$ **och** $f(x) = \cos(x)$ **i interpolationspunkter** $x_0 = 0$ **och** $x_1 = 1.2$



Figur 2: **Lagranges linjär interpolationspolynom** $q_1(x)$ **och** $f(x) = \cos(x)$ **i interpolationspunkter** $x_0 = 0.2$ **och** $x_1 = 1.0$

Tabell 1: (vi ska jämföra $f(x)=\cos(x)$ och den linjära approximationen $p_1(x)$ och $q_1(x)$).

x_k	$f(x_k)=\cos(x_k)$	$p_1(x_k)$	$f(x_k)-p_1(x_k)$	$q_1(x_k)$	$f(x_k)-q_1(x_k)$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000	1.090008	-0.090008
0.1	0.995004	0.946863	0.048141	1.035037	-0.040033
0.2	0.980067	0.893726	0.086340	0.980067	0.000000
0.3	0.955336	0.840489	0.114747	0.925096	0.030240
0.4	0.921061	0.787543	0.133608	0.870126	0.050935
0.5	0.877583	0.734316	0.143267	0.815155	0.0624428
0.6	0.825336	0.681179	0.144157	0.760184	0.065151
0.7	0.764842	0.628042	0.136800	0.705214	0.059628
0.8	0.696707	0.574905	0.121802	0.650243	0.046463
0.9	0.621610	0.521768	0.099842	0.595273	0.026337
1.0	0.540302	0.468631	0.071671	0.540302	0.000000
1.1	0.453596	0.415495	0.038102	0.485332	-0.031736
1.2	0.362358	0.362358	0.000000	0.430361	-0.068003
0.0	1.000000	1.000000	0.000000	1.090008	-0.090008

I.4 Kvadratisk Interpolation:

Kvadratisk Interpolation är interpolationspolynom p_2 där graden är 2 och de givna punkterna är $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ och (x_2,y_2).

Vi ska hitta $L_0(x)$, $L_1(x)$ och $L_2(x)$ där $L_i(x_i)=1$ och $L_i(x_j)=0$ för $i\neq j$, $\{i,j=0,1,2\}$, så vi kan skriva:

$$L_0(x)=\frac{l_0(x)}{l_0(x_0)}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x)=\frac{l_1(x)}{l_1(x_1)}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x)=\frac{l_2(x)}{l_2(x_2)}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

Alltså Lagranges idé ger:

$$p_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2,$$

I.5 Lagranges Allmänna interpolationspolynom:

Lagranges polynom ser alltså ut som:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i \,. \qquad (3)$$

där $L_i(x)$ $i = 0,1,\ldots,n$ är polynom av grad n som har egenskapen att $L_i(x_i) = 1$ och $L_i(x_j) = 0, i \neq j$.

Detta är Lagranges allmänna interpolationspolynom.

Nu ska vi se hur man konstruerar Lagrange interpolationspolynom $L_i(x)$. Vi börjar med att definiera faktorer som bygger upp den.

I.5.1 Definition

Låt $l_i(x)$ för $i = 0,\ldots,n$ vara polynom som har egenskaperna:

$$\begin{aligned}
&l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&l_k(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)\,, \qquad \text{där} \quad 0 < k < n \qquad (4) \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&l_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

I.5.2 Definition:

Låt $L_{n,k}(x)$ definieras som följande uttryck:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} = \frac{\prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}\,. \qquad (5)$$

$L_{n,k}(x)$ har de sökta egenskaperna, eftersom $L_n(x_n) = 1$, $L_n(x_k) = 0$ om $n \neq k$. Om vi låter $x = x_n$, så förkortas ju summan i likheten (3) till en enkel term $\dfrac{l_n(x_n)}{l_n(x_n)} = 1$. Vi ser då se att $p_n(x_k) = y_k$.

1.5.3 Exempel:

Antag att $f(x) = \cos(x)$ på intervallet $[0.0,1.2]$.

(a) Sök $p_2(x)$ vars graf passerar igenom punkterna på grafen $y = f(x)$ för $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.6$ och $x_2 = 1.2$.

(b) Sök $p_3(x)$ som passerar igenom punkter på grafen $y = f(x)$ för $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$ och $x_3 = 1.2$.

Ekvation (5) ger:

- $$p_2(x) = 1.388889(x-0.6)(x-1.2) \; -2.292599(x-0.0)(x-1.2)$$
  $$+0.503275(x-0.0)(x-0.6)$$
- $$p_3(x) = -2.604167(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2)$$
  $$+7.195789(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)$$
  $$+0.943641(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8) \; -5.443021(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)$$

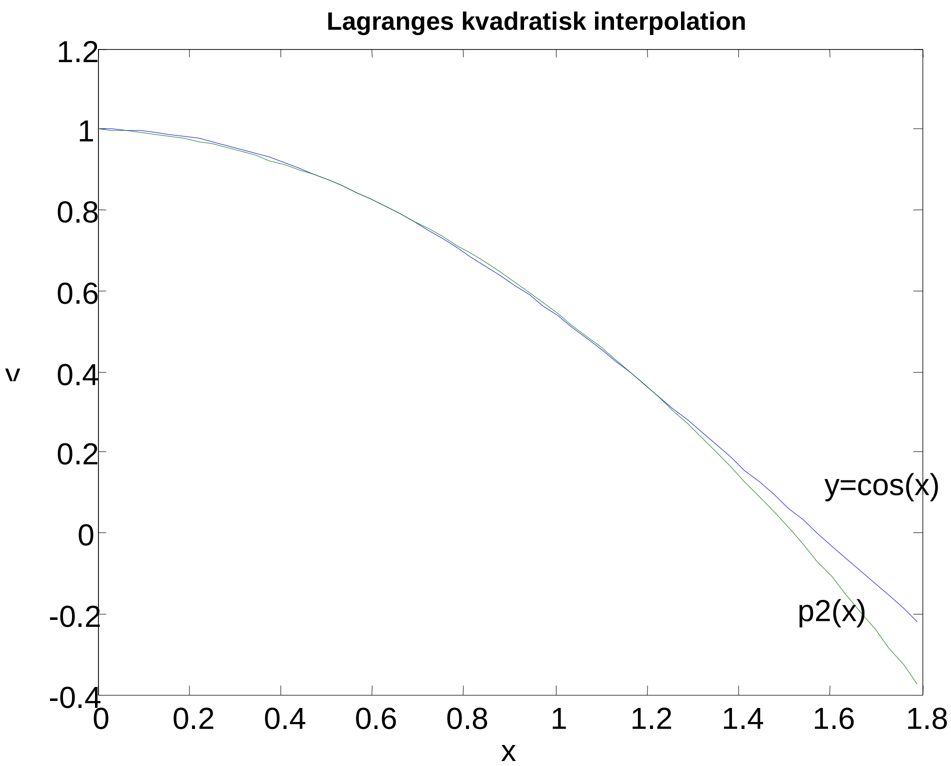
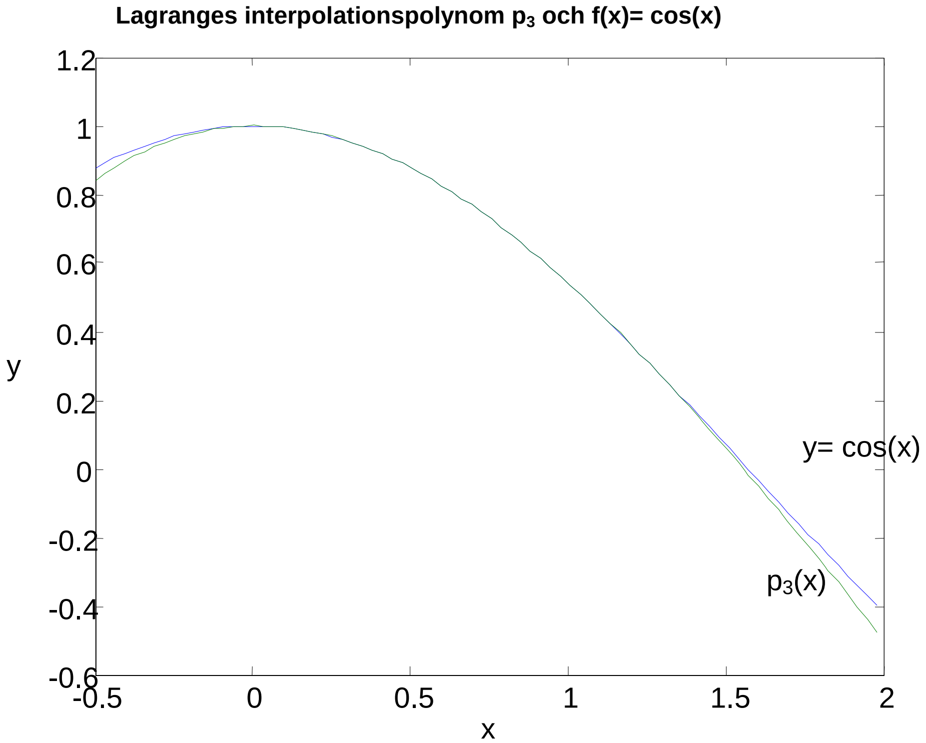


Figure 3: Lagranges kvadratisk interpolationspolynom $p_2(x)$ och $f(x) = \cos(x)$ med interpolationspunkter $x_0 = 0.0, x_1 = 0.6$ och $x_2 = 1.2$.



Figur 4: Lagranges interpolationspolynom $p_3(x)$ och. $f(x)=\cos(x)$ i interpolationspunkter $x_0=0.0, x_1=0.4, x_2=0.8$ och $x_3=1.2$.

Observation:

Observera att när vi ökar antalet interpolationspunkter i exemplen i bilderna så minskar approximationsfelet, det vill säga att interpolationspolynomet verkar gå mot den givna funktionen.

Detta är förstås inget bevis för att det är så ens för funktionen $\cos(x)$, och det finns situationer när det inte är så som till exempel i Runges fenomen.

Exempel: ”Runges fenomen”

Runge upptäckte att med ett naturligt val av interpolationspunkter finns det enkla funktioner så att interpolationpolynomen inte konvergerar mot den ursprunliga funktionen, när man ökar antalet interpolationpunkter. Grafen till interpolationspolynomet kommer att svänga kraftigt och ökande mellan interpolationspunkter, och ju högre grad interpolationspolynomet har desto kraftigare svängningar blir det, alltså:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-p_n(x)\right|\right)=\infty$$

Låt oss åskådligtgöra detta med följande exempel:

Antag att $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$, och låt oss välja interpolationspunkter som är likformiga utspridda,

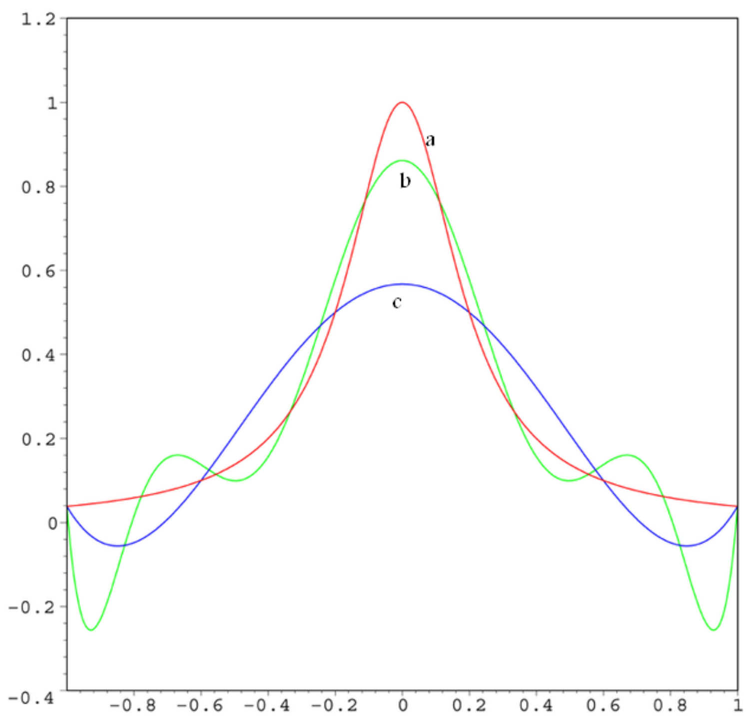
$x_0 = -1, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_{k+1} = x_k + h = x_0 + (k+1)h, \ldots, x_n = 1$, med $h = \dfrac{2}{n}$.

Eftersom interpolationsfelet är beroende av hur $\left|f^{(n)}(x)\right|$ varierar för $n = 1, 2, \ldots$ så:

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{-50x}{\left(1+25x^2\right)^2}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|f'(1)\right| = \left|\frac{-50}{\left(1+25x^2\right)^2}\right| = 0.074.$$

$$\left|f''(x)\right| = \left|\frac{5000\left(1+25x^2\right) - 50\left(1+25x^2\right)^2}{\left(1+25x^2\right)^4}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|f''(1)\right| = 0.2105.$$

Observera att värdet på derivatan blir större, detta innebär att interpolationsfel blir också större. Alltså när n ökar $p_n(x)$ konvergerar inte mot den interpolerade funktionen $f(x)$.



Interpolation av $f(x) = 1 / \left(1+25x^2\right)$ (graf a) med 5:e ordnings polynom (graf c) och ett 9:e ordnings polynom (graf b)

I nästa avsnitt ska vi skatta felet

I.6 Skattning av Felet: (Cauchys rest för interpolationspolynom)

I.6.1 Definition:

Om $f(x)$ är n gånger deriverbar i $[a,b]$, och $f^{(n)}(x)$ också är kontinuerlig i $[a,b]$, så skriver vi att $f(x) \in C^n[a,b]$.

I.6.2 Sats: Generalisering av Rolles sats

Låt $n \geq 2$, och anta att $f \in C[a,b]$ och att $f^{(n+1)}(x)$ existerar för varje x i (a,b) samt att $f(x_1) = f(x_2) = \ldots\ldots = f(x_n) = 0$ för $a \leq x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n \leq b$. Då finns det en punkt ξ för vilken $f^{(n-1)}(\xi) = 0$ och $x_1 < \xi < x_n$.

Bevis:

Utgångspunkt är den vanliga Rolles sats, som säger att: ”om $f(x) \in C[a,b]$ och f är deriverbar i varje punkt i (a,b), och om $f(a) = f(b)$ så finns det en punkt $x = \xi$ för vilken $f'(\xi) = 0$ och $a < \xi < b$”.

Vi visar satsen för $n = 3$. Det allmänna fallet bevisas på samma sätt.
Låt $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Eftersom f är deriverbar i punkterna $x_1 < x_2 < x_3$, ger Rolles sats att kan man hitta ξ_1, ξ_2 där $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ och $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$
Eftersom $f''(x)$ existerar så använder vi Rolles sats en gång till så att vi får ξ för vilket $f''(\xi) = 0$ och $\xi_1 < \xi < \xi_2$. □

I.6.3 Sats (Lagranges Approximationspolynom)

Anta att $f \in C^{n+1}[a,b]$ och $x_0, \ldots, x_n$ är $n+1$ tal i $[a,b]$. Låt polynomet $p_n(x)$ vara Lagranges interpolationspolynom $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x)$ (se avsnitt I.5). Om $x \in [a,b]$ så kallar vi skillnaden

$$f(x) - p_n(x) = R_n(x) \qquad (6)$$

för resten. Polynomet $p_n(x)$ approximerar $f(x)$ och resten är ett mått på hur noggrann approximationen är. Vi ska med Rolles sats visa att för varje $x \in [a,b]$ finns ett $\xi \in \left(\min(x, x_0, \ldots, x_n), \max(x, x_0, \ldots, x_n)\right)$ så att :

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \ . \qquad (7)$$

Talet ξ är beroende av punkterna $x, x_0, \ldots, x_n$ och f.

Bevis:

För $x = x_i$ satsen är trivial, eftersom $f(x_i) = p_n(x_i)$ och funktionen $f(x_i) - p_n(x_i) = 0$.
Anta nu att x är fix och $x \neq x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ och låt oss definiera följande funktion:

$$K(x) = \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)}. \tag{8}$$

Låt oss också definiera följande funktion av t:

$$W(t) = f(t) - p_n(t) - (t - x_0)(t - x_1)\ldots\ldots(t - x_n)K(x). \tag{9}$$

Observera att $W(t) = 0$ i $n+2$ punkter, nämligen för $t = x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n, x$.

Enligt Rolles sats så finns då ξ så att $W^{(n+1)}(\xi) = 0$, och så att $\min(x, x_0, \ldots, x_n) \prec \xi \prec \max(x, x_0, \ldots, x_n)$. Genom att derivera (9) $n+1$ gånger och utnyttja att $n+1$:a derivatan av *n*: te gradpolynom som $p_n(t)$ försvinner så får man:

$$W^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!K(x)$$

Sätt in det ξ som vi nyss visade att det fanns:

$$W^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) = 0 \tag{10}$$

$$\Rightarrow \qquad K(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{11}$$

Sätt in detta i uttrycket (8) för $K(x)$ så får vi :

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad = \quad \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)}.$$

Detta ger oss:

$$f(x) - p_n(x) \quad = \quad \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

och satsen är bevisad. □

Korollarium:

Låt $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, där $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, och $p_n(x)$ är interpolationspolynomet som hör till punkterna $(x_i, f(x_i))$ $i = 0,1,\ldots,n$.
Då är:

$$|R_n(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} f^{(n+1)}(\xi) . \frac{|x - x_0| \ldots |x - x_n|}{(n+1)!}.$$

Exempel:

Låt oss uppskatta felet för $f(x) = \arcsin(x)$ i $x = 0.5335$ via en linjär interpolation mellan värdena $x_0 = 0.5330$ och $x_1 = 0.5340$.

Vi har :

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ och $f^{(3)}(x) = \frac{\left(1+2x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$. Eftersom $f^{(3)}(x) > 0$ för $0.533 \le x \le 0.534$ så är $x = 0.534$ är maxpunkt för $f''(x)$. Formeln för uppskattning av felet i korollariet ger oss:

$$\left|R_1(x)\right| \le \max_{0.533 \le \xi \le 0.534} \frac{\xi}{\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left|(x-0.533)(x-0.534)\right|}{2!},$$

för $x = 0.5335$ och $\xi = 0.534$

$$\left|R_1(0.5335)\right| \le \frac{0.534}{\left(1-(0.534)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left|(0.5335-0.533)(0.5335-0.534)\right|}{2!}.$$

$$\le \frac{0.534}{\left(1-(0.534)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left|(0.0005)^2\right|}{2} \le 1.2 \times 10^{-7}.$$

I.7 Newtons polynom:

Det är ibland användbart att ha flera approximationspolynom $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ och sedan välja det bästa oftast förstås det med högst grad. Om vi använder Lagranges polynom, så finns det inget samband mellan $p_n(x)$ och $p_{n-1}(x)$, utan varje polynom är uppbyggt individuellt, och vi har ingen hjälp av uträkningen av $p_{n-1}(x)$ för att räkna ut $p_n(x)$, utan måste starta om.

För Newtons polynom är det annorlunda. Vi bygger upp dem genom att använda tidigare polynom via en rekursiv formel. Räknemässigt är detta alltså mycket effektivare. Observera emellertid att sats I.1.1 säger att interpolationspolynomet är unikt, så vi får inte andra polynom än tidigare, bara ett effektivare sätt att beräkna dem.

Newtons första polynom ser ut så här $(n=1)$:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \qquad (12)$$

Vi fortsätter på samma sätt att bygga upp Newtons polynom $p_2, p_3, \ldots, p_n$:

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad (13)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{14}$$

$$\vdots$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \tag{15}$$

$p_n(x)$ i ekvation (15) kallas för Newtons polynom med n parametrar $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.
Observera att $p_n(x)$ är summan och produkten av linjära faktorer upp till $a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$, så man inser att $p_n(x)$ är av $grad \le n$.
Vi ska strax visa en rekursionsformel för Newtons polynom, men först några exempel.

I.7.1 Exempel:

Låt $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 4$ och $x_3 = 4.5$, samt koefficienter $a_0 = 5,\ a_1 = -2,\ a_2 = 0.5,\ a_3 = -0.1$ och $a_4 = 0.003$.

Räkna ut $p_1(x),\ p_2(x), p_3(x)$, och $p_4(x)$ samt $p_k(x)$ för $k = 1,2,3,4$.

Vi använder oss av formler (12) till (15) så får vi:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= 5 - 2(x-1),\\
p_2(x) &= 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3),\\
p_3(x) &= p_2(x) - 0.1(x-1)(x-3)(x-4)\\
p_4(x) &= p_3(x) - 0.003(x-1)(x-3)(x-4)(x-4.5).
\end{aligned}
$$

Beräkning av polynomet för $x = 2.5$ ger oss följande resultat:

$$
\begin{aligned}
p_1(2.5) &= 5 - 2(1.5) = 2\\
p_2(2.5) &= p_1(2.5) + 0.5(1.5)(-0.5) = 1.625\\
p_3(2.5) &= p_2(2.5) - 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5) = 1.5125\\
p_4(2.5) &= p_3(2.5) + 0.003(1.5)(-0.5)(-1.5)(-2.0) = 1.50575.
\end{aligned}
$$

Observera att precis som vi ville ha det, så vi behöver inte göra om all uträkning av varje polynom, utan kan använda oss av tidigare uträkningar. Nu ska vi beskriva hur Newtons polynom kan användas för interpolation helt allmänt.

I.7.2 Newtons metod:

Antag att vi vill hitta en Newtonsk följd av polynom $p_1(x),\ p_2(x), \ldots, p_n(x)$ som approximerar en given funktion $f(x)$, i vissa punkter $x_0, x_1, \ldots, x_n$,där funktionen har värdena $f(x_i) = y_i$. Närmare bestämt, så att $p_1(x_0) = f(x_0)$, $p_1(x_1) = y_1$, $p_2(x_0) = y_0$, $p_2(x_1) = y_1$, $p_2(x_2) = y_2$, och allmänt $p_i(x_j) = y_j$ om $j \le i$.
Vi ska göra detta med induktion.

Anta alltså att vi redan konstruerat det $n-1$: *a* Newtons polynom p_{n-1} för vilket::

$$p_{n-1}(x_0) = f(x_0) = y_0,\ p_{n-1}(x_1) = f(x_1) = y_1, \ldots\ldots, p_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) = y_{n-1}.$$

Från (15), ser vi att Newtons polynom av graden n $p_n(x)$ kan skrivas som följande:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + g_n(x) \tag{16}$$

$$\Rightarrow \qquad g_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x), \tag{17}$$

där $$g_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1}), \tag{18}$$

för a_n en konstant som ska bestämmas så att $p_n(x_n) = y_n$.

För att bestämma a_n, låt $x = x_n$. Då ger (18) att:

$$a_n = \frac{g_n(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Sätt sedan in för $x = x_n$ i $g_n(x)$ som beskrivs i uttrycket (17) .Då får vi:

$$a_n = \frac{p_n(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

Om vi nu vill ha $p_n(x_n) = y_n$, så ska vi alltså sätta

$$a_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}. \tag{19}$$

Alltså har vi nu bestämt a_n och därmed p_n. Basen för induktions argumentet är $p_0(x_0) = y_0$.
För att göra det överskådligare inför vi nästa definition.

I.7.3 Definition:

Antag att (x_i, y_i) är givna punkter där x_i $(i = 0, 1, \ldots, k, \ldots, n)$ är distinkta, definieras :

$$y[x_k] = y_k$$

$$y[x_k, x_{k+1}] = \frac{y[x_{k+1}] - y[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$y[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{y[x_{k+1}, x_{k+2}] - y[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

och $$y[x_0, \ldots, x_n] = \frac{y[x_1, \ldots, x_n] - y[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

I.7.4 Exempel:

Sätt $y=\cos(x)$, beräkna för punkterna $x_n = 0,1,2,3,4$: $y[x_k]$ för $k=0,1,2,3,4$, $y[x_k, x_{k+1}]$ för $k=0,1,2,3$, $y[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$ för $k=0,1,2$ och $y[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$ för $k=0,1$.

Vi väljer att räkna ut några och de andra kan utföras på samma sätt.

Vi har:

$$y[x_0] = \cos(0) = 1.$$

$$y[x_0,x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{\cos(1)-\cos(0)}{1-0} = \frac{0.5403023-1}{1} = -0.4596977.$$

$$y[x_1,x_2] = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\cos(2)-\cos(1)}{2-1} = \frac{-0.4161468-0.5403023}{2-1} = -0.9564491.$$

$$y[x_2,x_3] = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{\cos(3)-\cos(2)}{3-2} = \frac{-0.9899925+0.4161468}{3-2} = -0.5738457.$$

$$y[x_3,x_4] = \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} = \frac{\cos(4)-\cos(3)}{4-3} = \frac{-0.6536436+0.9899925}{4-3} = 0.3363489$$

$$y[x_0,x_1,x_2] = \frac{y[x_1,x_2]-y[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{-0.9564491+0.4596977}{2} = -0.2483757.$$

I.7.5 Sats:

Antag att $x_0, x_1, \ldots, x_n$ är $n+1$ distinkta punkter i $[a,b]$.Då finns det ett unikt polynom $p_n(x)$ med $grad \le n$ så att:

$$y(x_i) = p_n(x_i) \quad \text{för} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Med Newtons metod kan det skrivas som:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Här är koefficienterna $a_i = y[x_0, \ldots, x_i]$ och alltså:

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & y_0 + (x-x_0)\,y[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\,y[x_0,x_1,x_2] \\ & + \ldots\ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\,y[x_0,\ldots,x_n] \end{aligned}$$

Bevis:

Vi ska använda oss av rekursionsformeln:

- För $n=1$ så $p_{n-1}(x_n) = p_0(x_1) = y_0$ och uttrycket (19) som beskriver a_n :

$$a_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y[x_0, x_1].$$

Vi använder oss av likheten (16) som beskriver $p_n(x)$ i form av $g_n(x)$ och $p_{n-1}(x)$, då får vi det första Newtons interpolationspolynomet av *grad* 1:

$$p_1(x) = p_0(x) + g_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y_0 + (x - x_0)\, y[x_0, x_1].$$

- För $n = 2$, ger användande av formeln nyss för $p_1(x)$ och uttrycket (19) som beskriver a_n:

$$a_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - (x_2 - x_0)\, y[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = y[x_0, x_1, x_2]$$

- För $n = k$, slutligen ger (16):

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + g_k(x)$$

Vi sätter in $g_k(x)$ och $a_k = y[x_0, \ldots, x_n]$ (se 18) så får vi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{k-1})\, y[x_0, \ldots, x_k]$$

Med $p_0(x) = y_0$ och för $k = 1, \ldots\ldots, n$ ger Newtons metod, alltså, allmänt att

$$p_n(x) = y_0 + (x - x_0)\, y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, y[x_0, x_1, x_2] + \ldots\ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\, y[x_0, \ldots, x_n]. \qquad (20)$$

□

För att underlätta beräkning för koefficienten a_n har vi organiserat ett räkneschema.

I.7.6 Räkneschema:

För att underlätta beräkning av Newtons interpolationspolynom har vi användning av följande räkneschema, där vi först räknar ut en kolonn och sedan använder detta resultat för att beräkna kolonen närmast till höger.

x_k	$y[x_k]$	$y[,]$	$y[,,]$	$y[,,,]$	$y[,,,,]$
x_0	$y[x_0]$				
x_1	$y[x_1]$	$y[x_0, x_1]$			
x_2	$y[x_2]$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$y[x_3]$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$y[x_4]$	$y[x_3, x_4]$	$y[x_2, x_3, x_4]$	$y[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

I.7.7 Exempel:

Hitta Newtons polynom för funktionen $f(x)=\cos(x)$ som överensstämmer med $\cos(x)$ i de fem punkterna $(x,\cos(x))$ för $x=0,1,2,3$ och 4. Använd dem för att beräkna a_n och de fyra Newtons interpolationspolynomen $p_n(x)$, för $n=1,2,3,4$.

Här används räkneschema för de givna fem punkterna i form av en tabell.

Tabell 3

Värdena är avrundade till sjunde decimalen.

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
$x_0=0.0$	1.0000000				
$x_1=1.0$	0.5403023	-0.4596977			
$x_2=2.0$	−0.4161468	-0.9564491	-0.2483757		
$x_3=3.0$	−0.9899925	-0.5738457	0.1913017	0.1465592	
$x_4=4.0$	−0.6536436	0.3363499	0.4550973	0.0879318	-0.0146568

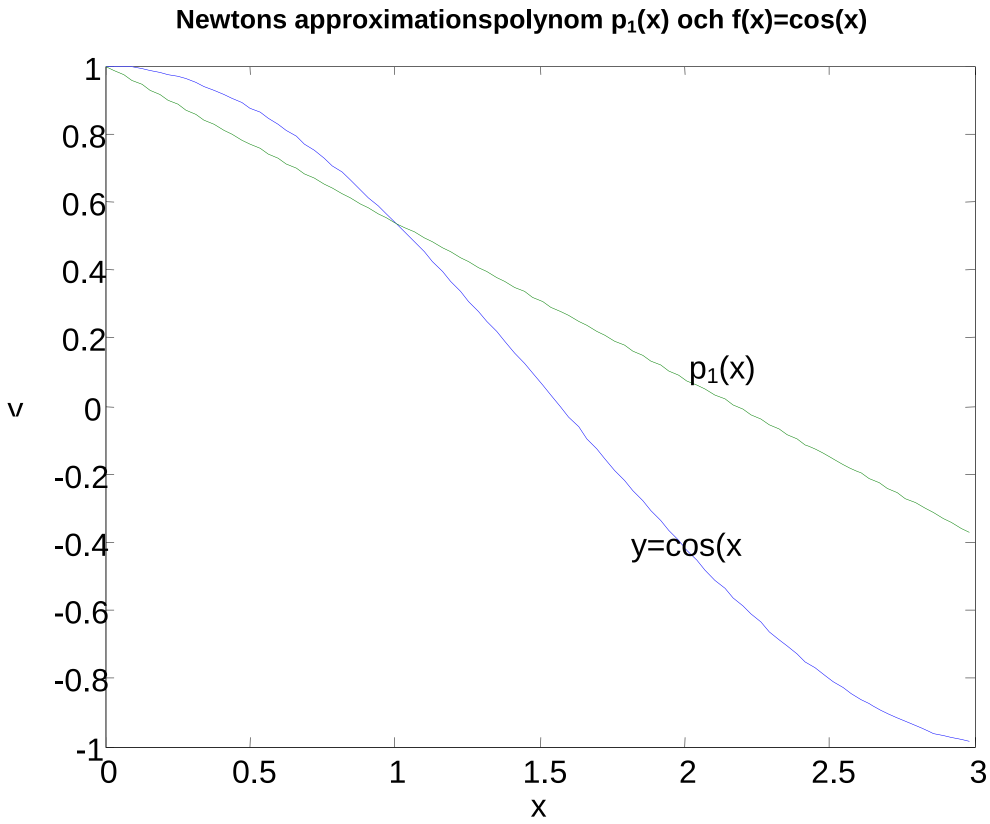
Sätt in värdena i $p_n(x)$ som beskrivs i uttrycket (20):

$$p_1(x)=1.0000000-0.4596977(x-0.0).$$

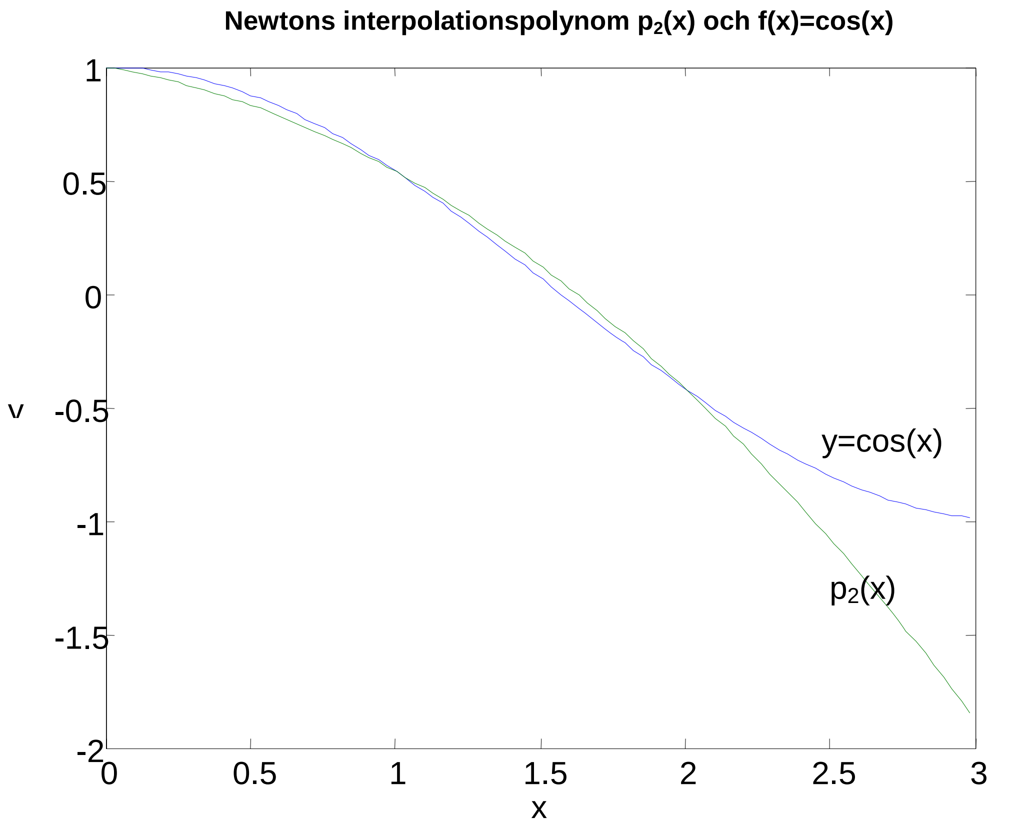
$$p_2(x)=1.0000000-0.4596977(x-0.0)-0.2483757(x-0.0)(x-1.0).$$

$$\begin{aligned}p_3(x)=&1.0000000-0.4596977(x-0.0)-0.2483757(x-0.0)(x-1.0)\\&+0.1465592(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0).\end{aligned}$$

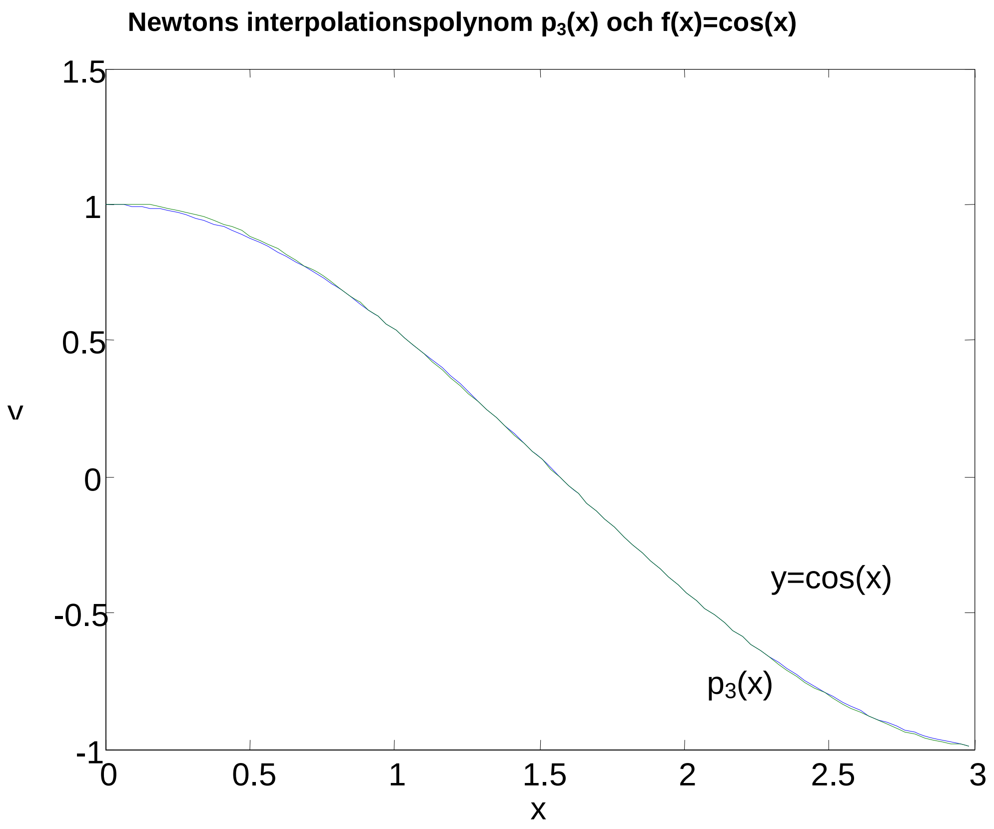
$$\begin{aligned}p_4(x)=&1.0000000-0.4596977(x-0.0)-0.2483757(x-0.0)(x-1.0)\\&+0.1465592(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)\\&-0.0146568(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)(x-3.0).\end{aligned}$$



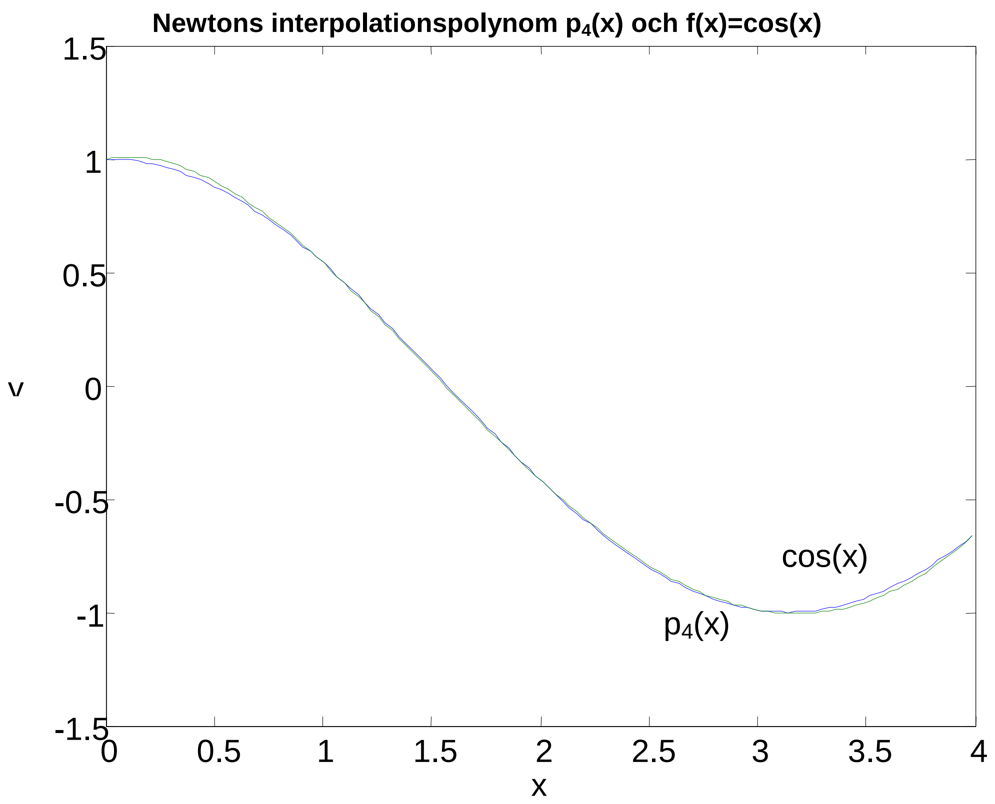
Figur 5: Newtons interpolationspolynom $p_1(x)$ och $\cos(x)$ i interpolationspunkter $x = 0, 1, 2, 3$ och 4.



Figur 6: Newtons interpolationspolynom $p_2(x)$ och $\cos(x)$ i interpolationspunkter $x = 0, 1, 2, 3$ och 4.



Figur 7: Newtons interpolationspolynom $p_3(x)$ och $\cos(x)$ i interpolationspunkter $x = 0, 1, 2, 3$ och 4.



Figur 8: Newtons interpolationspolynom $p_4(x)$ och $\cos(x)$ i interpolationspunkter $x = 0, 1, 2, 3$ och 4.

Observation:

Observera att i figurer kan man se hur Newtons interpolationspolynom $p_n(x)$ närmar sig själva funktionen $f(x)=\cos(x)$ ju mer man ökar polynomets grad.

Nu ska vi titta på hur felet uppför sig, när man approximerar en funktion $f(x)$ med Newtons interpolationspolynom, och samtidigt införa en ny klass av polynom.

II Tschebyscheffpolynom:

Tschebyscheffs Polynom är ett viktigt verktyg för interpolationsproblem. Syftet är att göra Lagranges interpolationsfel så litet som möjligt genom att använda Tschebyscheffpolynomens rötter som interpolationspunkter.

Vi ska studera interpolationspolynom $p_n(x)$ för en funktion $f(x)$ över intervallet $[-1,1]$ med rötter x_k för $\{k=0,1,\ldots,n\}$ där $-1\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le 1$.

Lagranges polynom uppfyller uttrycket i sats (I.6.3) som beskriver förhållandet mellan approximationspolynomet $p_n(x)$, $f(x)$ och $R_n(x)$:

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x),$$

där
$$R_n(x)=Q(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{23}$$

$Q(x)$ är ett polynom av *grad* $n+1$ som försvinner i punkterna $x=x_k$ för $k=0,1,\ldots,n$, så $Q(x)$ kan skrivas:

$$Q(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Vi kommer att använda följande samband som följer ur (23),

$$|R_n(x)|\le|Q(x)|\ \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

för att begränsa felet $R_n(x)$.

Tittar vi på denna formel ser vi att felet kommer att vara litet om vi väljer rötter x_k för $\{k=0,1,\ldots,n\}$ som gör att $\max\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$ blir minimum alltså så litet så möjligt. Detta sker om x_k är rötter till Tschebyscheffspolynom.

Vi ska börja med att definiera Tschebyscheffspolynom.

II.1 Definition:

Låt $n\in\mathbb{N}$. Tschebycheffpolynomet av grad n är definierat som följande:

$$T_n(x):\ [-1,1]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\cos(n\,arc\cos x).$$

II.2 Beräkning av Tschebyscheffspolynom:

Låt $x \in [-1,1]$, och sätt $\alpha = arc\cos(x)$, $\cos(\alpha) = \cos\arccos(x) = x$

$$T_n(x) = \Re\left((\cos n\alpha + i\sin n\alpha)\right)$$

Enligt de Moivres formel så:

$$T_n(x) = \Re\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)^n\right)$$

Eftersom $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ så:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$$

$$= \sqrt{1-x^2} \; .$$

Vi sätter in $\cos(\alpha)$ och $\sin(\alpha)$ i form av x så $T_n(x)$ blir:

$$T_n(x) = \Re\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right) \text{ (Binomial satsen)}$$

$$= \Re\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} i^k \left(\sqrt{1-x^2}\right)^k\right)$$

Eftersom $T_n(x)$ är real~delen av ett komplex tal så måste imaginäradelen försvinna så :

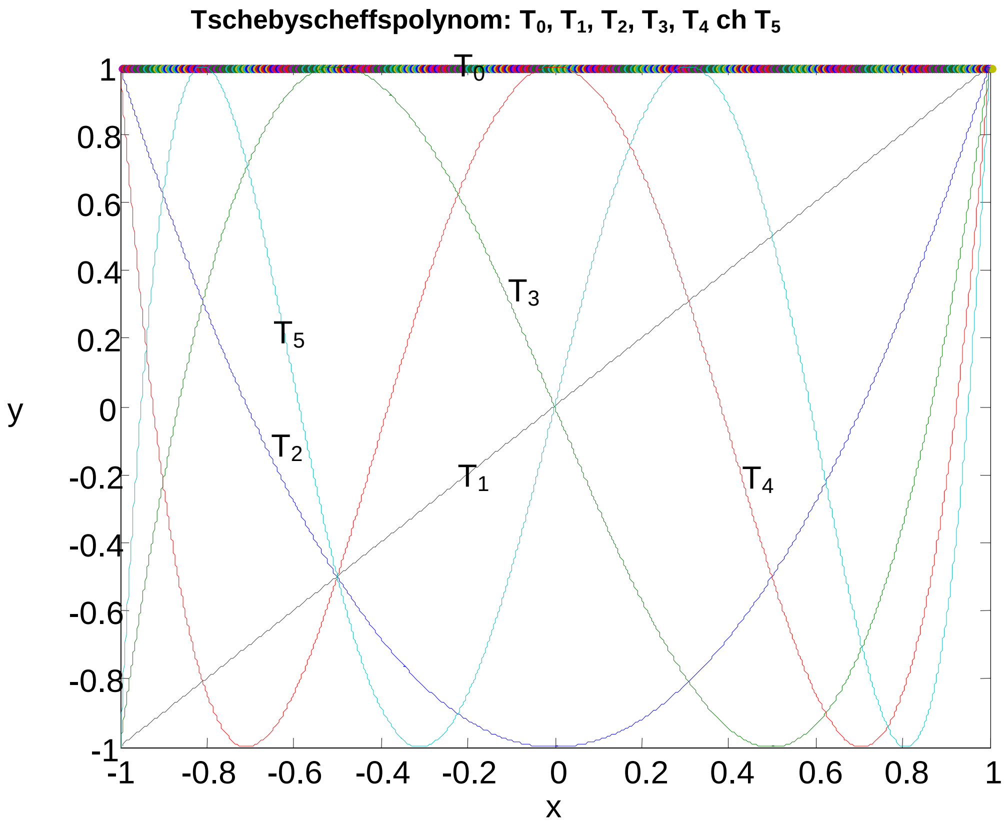
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} x^{n-2k} i^{2k} \left(1-x^2\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} x^{n-2k} \left(x^2-1\right)^k$$

Här är $[x]$ är heltalsdelen av x och $\Re(z)$ är real~delen av det komplexa talet z .

Här är några av Tschebyscheffs polynom:

n	T_n
0	1
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$



Figur 9: Graf över några av Tschebyscheffspolynom, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 **och** T_5**.**

II.3 Proposition:

(a) Det finns rekursiv relation mellan Tschebyscheffspolynom:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x \text{, och för alla } n\in\mathbb{N} \text{ så } T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x).$$

(b) Koefficienten för termen x^n är 2^{n-1}.

(c) Låt $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$ och $n\in\mathbb{N}^*$. T_n har exakt n rötter:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad \text{För } \{k = 1, 2, \dots, (n-1)\}.$$

(d) Låt $n \in \mathbb{N}^*$. $T_n(x)$ har exakt $n+1$ extrema punkter (där derivatan är noll):

$$x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

och $\quad T_n(x'_k) = (-1)^n$.

(e) Max för T_n är $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

(f) Tschebyscheffs polynom $T_n(x)$ är orthogonala polynom för vilken

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Det innebär att:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) w(x) dx = \begin{cases} \pi \ \ om \ \ n = m = 0. \\ \dfrac{\pi}{2} \ \ om \ \ n = m \neq 0. \\ 0 \ \ om \ \ n \neq m. \end{cases}$$

Bevis:

(a) Låt $x \in [-1,1]$ och $\alpha = \arccos x$. Vi ska använda oss av de klassiska trigonometriska formlerna $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ och $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$: Observera att $(n+2)\alpha = n\alpha + 2\alpha = (n+1)\alpha + \alpha$ och $n\alpha = (n+1)\alpha - \alpha$ så:

$$\cos(n+2)\alpha = \cos(n+1)\alpha \cdot \cos\alpha - \sin(n+1)\alpha \cdot \sin\alpha,$$

$$\cos n\alpha = \cos(n+1)\alpha \cdot \cos\alpha + \sin(n+1)\alpha \cdot \sin\alpha$$

Om vi summerar de två ekvationerna så får vi:

$$\cos(n+2)\alpha + \cos n\alpha = 2\cos(n+1)\alpha.\cos\alpha$$

Vi har alltså för alla $x \in [-1,1]$:

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x) \Leftrightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{22}$$

(b) Vi använder oss av en rekursionsformel:

- För $n=1$ så är koefficienten för $T_1(x)$ $2^{1-1}=2^0=1$.

  Anta att koefficienten för termen med $grad\ n$ för $T_n(x)$ är 2^{n-1}, så vi kan se ifrån rekursionsformel (22) att koefficienten för termen med $grad\ (n+1)$ är dubbelt så stor som $T_n(x)$ Så $2.2^{n-1}=2^n$.

(c) Låt $n \in \mathbb{N}^*$ och $k=0,1,\ldots,n-1$:

$$T_n(x_k)=\cos(n\arccos x_k)$$

$$=\cos\left(n\arccos\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)$$

$$=\cos n\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 0$$

$T_n(x)$ har $grad\ n$ och punkterna (x_k) för $\{k=0,1,\ldots,n-1\}$ är nollpunkterna för T_n. De är enkla eftersom vi för alla $k \neq k'$ har $x_k \neq x_{k'}$.

(d) Låt $n \in \mathbb{N}^*$ och $k=0,1,\ldots,n-1$. Vi har använt oss av de vanliga derivations reglerna för att beräkna derivatan för $T_n(x)$.

$\cos(f(x))' = -f'(x)\sin(f(x))$, $\sin(f(x))' = f'(x)\cos(f(x))$, $\arccos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

så $\quad \forall\, x \in [-1,1]$, $T_n'(x) = \dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$.

- Om vi sätter in $x = x_k'$:

$$T_n'(x_k') = \frac{n}{\sqrt{1-x_k'^2}}\sin(n\arccos x_k')$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}\sin\left(n\arccos\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}\sin(k\pi) \quad = 0$$

- Nu ska vi räkna ut $T_n'(x_k)$. Sätt $x = x_k'$ så vi har:

$$T_n(x_k') = \cos(n\arccos x_k')$$

$$= \cos\left(n \arccos \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$= \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= \cos(k\pi) = \pm 1 = (-1)^n .$$

(e) Vi kan ifrån detta dra slutsatsen att $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

(f) Sätt $I = \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) w(x)\, dx$ för att förkorta formelskrivningen.

Vi ska utföra ett variabelbyte, $x = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad dx = -\sin\alpha\, d\alpha$ så:

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{\cos n\alpha.\cos m\alpha.\sin\alpha}{|\sin\alpha|} d\alpha$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos n\alpha.\cos m\alpha.d\alpha$$

Vi använder oss av följande trigonometriska formler

$$\cos(n\alpha + m\alpha) = \cos n\alpha.\cos m\alpha - \sin n\alpha.\sin m\alpha$$

$$\cos(n\alpha - m\alpha) = \cos n\alpha.\cos m\alpha + \sin n\alpha.\sin m\alpha$$

som ger oss:

$$\cos(n\alpha)\cos(m\alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\alpha + \cos(n-m)\alpha\right]$$

Sätt in dem. Då får vi:

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left(\cos(n+m)\alpha + \cos(n-m)\alpha\right).d\alpha .$$

- För $n = m = 0$:

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left(\cos(n+m)\alpha + \cos(n-m)\alpha\right).d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(2.\cos\left(0\right)\right).d\alpha$$

$$=\int_0^{\pi} d\alpha = \pi .$$

- För $n = m \neq 0$:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(n+m\right)\alpha+\cos\left(n-m\right)\alpha\right).d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(2n\alpha\right)+1\right).d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\left(2n\alpha\right)d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\alpha. =\left[\frac{\sin\left(2n\alpha\right)}{4n}\right]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

för att första termen försvinner eftersom $\sin\left(2n\pi\right)=\sin\left(0\right)=0$.

- För $n \neq m$:

$$I = \frac{1}{2.\left(n+m\right)}\left[\sin\left(n+m\right)\alpha\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2.\left(n-m\right)}\left[\sin\left(n-m\right)\alpha\right]_0^{\pi}$$

$$= 0,$$

eftersom $\sin\left(n \pm m\right)\pi=\sin\left(0\right)=0$.

II.4 Problem:

Sambandet (6) i sats I.6.3 beskriver förhållandet mellan approximationspolynomet $p_n\left(x\right)$, $f(x)$ och $R_n(x)$. Observera att $\left|R_n\right|$ är en produkt av faktorerna $\frac{1}{\left(n+1\right)!}\left|\max_{x\in[a,b]} f^{(n+1)}\left(\xi\right)\right|$ och $\max_{x\in[a,b]}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\right|$.

Vi ska nu söka för n given, en indelning av $\left[a,b\right]$ $a \leq x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_n \leq b$ där:

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\right| \text{ är minimum.}$$

Syftet med detta är att hitta interpolations punkter $\left(x_k\right)$ med $\left\{k=0,1,\ldots,n\right\}$ så att:

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\right| \quad \le \quad \max_{x\in[a,b]}\left|p(x)\right|,$$

för alla $p\in \tilde{P}_n$, där $\tilde{P}_n$ är mängden av alla polynomer med *grad n* där första koefficienten är 1.

Med ett enkelt variabelbyte $\left\{ x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t \right\}$ kan vi transformera intervallet $\left[a,b\right]$ till $\left[-1,1\right]$. Då får vi problemet:

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\right| \quad \le \quad \max_{x\in[-1,1]}\left|p(x)\right|. \tag{24}$$

För att göra $\max_{x\in[a,b]}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\right|$ så litet så möjligt upptäckte Tschebyscheff att interpolations punkter x_k för $k=0,1,\ldots,n$ måste vara rötter för Tschebyscheffs polynom T_n. Detta betyder att dessa interpolations punkter löser uttrycket (24).

Låt oss använda följande definition för att bevisa detta.

II.5 Definition

Definiera:

$$\tilde{T}_n\left(x\right)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n\left(x\right), \text{ och}$$

observera att $\tilde{T}_n\left(x\right)=x^n+$ andra termer av lägre grad.

II.6 Sats (Tschebyscheff)

$$\max_{x\in[-1,1]}\tilde{T}_n(x) \; = \; \max_{x\in[-1,1]}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\right| \quad \le \quad \max_{x\in[-1,1]}\left|p(x)\right|, \quad p\in\tilde{P}_n .$$

Här är $\quad x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \qquad \left\{k=0,1,\ldots,n\right\}.$

Bevis:

Eftersom $\tilde{T}_n\left(x\right)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n\left(x\right)$ så har $\tilde{T}_n\left(x\right)$ och $T_n\left(x\right)$ har samma rötter x_k för $k=0,1,\ldots,n$, där:

$$x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \qquad \left\{k=0,1,\ldots,n\right\}$$

Alltså kan $\tilde{T}_n\left(x\right)$ skrivas som följande:

$$\tilde{T}_n\left(x\right)=\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right).$$

Och dessutom har vi:

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right| = \max_{x\in[-1,1]}\left|\tilde{T}_n(x)\right|$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\max_{x\in[-1,1]}\left|T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}},$$

eftersom $\max_{x\in[-1,1]}\left|T_n(x)\right| = 1$.

Vi ska räkna ut $\tilde{T}_n(x_k')$ där $x_k' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ $\{k = 0,1,\dots,n\}$ som vi kommer att behöva senare i beviset :

$$\tilde{T}_n(x_k') = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x_k') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}, \qquad \text{(Proposition (d) } T_n(x_k') = (-1)^n\text{)}$$

Vi sätter in $\frac{1}{2^{n-1}}$ i stället för $\max_{x\in[-1,1]}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$ så får vi,att vi ska visa att

$$\frac{1}{2^{n-1}} \le \max_{x\in[-1,1]}\left|p(x)\right|.$$

Vi ska visa detta genom att använda ett motsägelse argument.
Vi antar att:

$$\frac{1}{2^{n-1}} > \max_{x\in[-1,1]}\left|p(x)\right|.$$

Eftersom $p(x)$ och $\tilde{T}_n(x) \in \tilde{P}_n$ (alltså deras *grad* är n och deras första koefficient är 1). Låt oss nu bilda funktionen $Q(x) = \tilde{T}_n(x) - p(x)$ ser vi att $Q(x) \in P_{n-1}$, ($grad\left(\tilde{T}_n - p\right) = n-1$) eftersom första termen försvinner.

Sätt in $x = x_k'$ så har vi:

$$Q(x_k') = \tilde{T}_n(x_k') - p(x_k')$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x_k'), \qquad \text{för } \{k = 0,1,2\dots,n\}.$$

eftersom $\tilde{T}_n(x_k') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$

- **Om** k **är jämn så:**

$$\tilde{T}_n(x_k') - p(x_k') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x_k') > 0 \text{ , eftersom } \frac{1}{2^{n-1}} \le |p(x)|.$$

- **Om k är udda så:**

$$\tilde{T}_n(x'_k) - p(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x'_k) < 0\text{, eftersom } \frac{1}{2^{n-1}} \le |p(x)|.$$

Observera att:

$$\left(\tilde{T}_n(x'_k) - p(x'_k)\right)\left(\tilde{T}_n(x'_{k+1}) - p(x'_{k+1})\right) < 0 \ , \ \{\forall\, k = 0,1,\ldots,n\}.$$

Detta betyder att $Q(x'_k) = \tilde{T}_n(x'_k) - p(x'_k)$ skiftar tecken $n+1$ gånger, så $Q(x)$ skiftar också tecken $n+1$ gånger. Därav följer att $Q(x)$ har n rötter, och eftersom $Q(x) \in P_{n-1}$ så måste $Q(x) \equiv 0$ och alltså $\tilde{T}_n(x) \equiv p(x)$.

Vi kan då skriva :

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Det är motsatsen till vårt antagelse, och vi kan då dra som slutsatsen att:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} &= \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \\ &= \max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)| \\ &\le \max_{x\in[-1,1]} |p(x)|. \end{aligned}$$

□

III. Referenser:

Litteratur

- [1] Philip J. Davis Interpolation and approximation. Dover publication, INC. NEW YORK 1975

- Erwin Kreyszig Advanced engineering mathematics. Library of congress cataloging in publication data, 1993.

Källor från internet.

- www.wikipedia.org 2007-10-17

- http://math.fullerton.edu 2007-08-22