



# EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Navier-Stokes ekvationer. Några enkla lösningar  
och tillämpningar inom meteorologi

av

**Sebastian Böö**

2008 - No 6



Navier-Stokes ekvationer. Några enkla lösningar  
och tillämpningar inom meteorologi

Sebastian Böö

---

Examensarbete i matematik 15 högskolepoäng, påbyggnadskurs

Handledare: Paul Vaderlind

2008



## **Abstract**

The aim of this thesis is to give a fundamental introduction to the Navier-Stokes equations. First the formation of the equations is viewed from a historical perspective. Then the equations are derived from physical assumptions of conservation of mass and momentum, whereupon the classical solutions of Poiseuille and Couette are studied. This is followed by a description of how the equations can be modified to be practically solvable in meteorological applications. Finally, the problem of proving existence of solutions to the entire Navier-Stokes equations is considered.



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Historisk bakgrund</b>	<b>4</b>
2.1	Claude-Louis Navier (1785-1836) . . . . .	4
2.2	George Gabriel Stokes (1819-1903) . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Härledning av ekvationerna</b>	<b>6</b>
3.1	Kontinuum-antagandet . . . . .	6
3.2	Totalderivata (materiederivata) . . . . .	6
3.3	En balansekvation . . . . .	7
3.4	Bevarande av massa - kontinuitetsekvationen . . . . .	8
3.5	Bevarande av rörelsemängd . . . . .	8
3.6	Fundamentala krafter . . . . .	9
3.7	Tryckgradientkraft . . . . .	9
3.8	Viskositet . . . . .	10
<b>4</b>	<b>NSE i kartesiska koordinater</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Enkla lösningar</b>	<b>15</b>
5.1	Plan-parallell strömning . . . . .	15
5.2	Poiseuille-strömning . . . . .	15
5.3	Couette-strömning . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Användning av NSE inom meteorologi</b>	<b>17</b>
6.1	Lösningar av modifierade NSE . . . . .	17
6.1.1	Införande av Corioliskraften och tyngdkraften . . . . .	17
6.2	Numerisk lösning av NSE . . . . .	18
6.3	Reynolds medelvärdesbildade ekvationer . . . . .	18
6.4	Gradient-transport teori ( <i>K</i> -teori) . . . . .	19
6.5	Ekmanspiralen . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Några olika tillämpningsområden för NSE</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>Existerar lösningar till fullständiga NSE?</b>	<b>23</b>
8.1	Problembeskrivning . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Sammanfattning</b>	<b>25</b>
<b>10</b>	<b>Referenslista</b>	<b>26</b>
10.1	Litteratur . . . . .	26
10.2	Elektroniska källor . . . . .	26





# 1 Inledning

Navier-Stokes ekvationer (NSE) är ett system av ickelinjära partiella differentialekvationer, som beskriver fluiders rörelser. Ekvationerna har fått sina namn efter fransmannen Claude-Louis Navier (1785-1836) och irländaren George Gabriel Stokes (1819-1903). NSE är betydelsefulla, eftersom de beskriver fysiken bakom ett stort antal fenomen på många olika skalor. De kan användas för att modellera atmosfäriska rörelser, strömningar i havet, vätskeflöden i rör och många andra strömningsfenomen.

Ickelinjariteten gör det svårt att lösa ekvationerna analytiskt. Lösningar är kända endast för väldigt förenklade fall och det är inte känt om det existerar någon lösning till de fullständiga ekvationerna. De enkla fallen innebär ofta en laminär (icke-turbulent) strömning, med låg hastighet och hög viskositet, som dessutom befinner sig i ett stationärt tillstånd.

För praktiska lösningar blir situationen ofta mer komplex och ekvationerna måste lösas numeriskt med datorers hjälp.

I maj 2000 uppmärksammade Clay Mathematics Institute (CMI) i Cambridge, Massachusetts, sju genom åren olösta problem inom matematiken. En prissumma på en miljon dollar utfästes till vart och ett av problemen. Deras presentation var influerad av David Hilberts föreläsning hundra år tidigare där han sammanfattade matematikens olösta problem. Hilberts föreläsning kom att peka ut riktningen för 1900-talets forskning. CMI:s ambition är dock inte att inte deras initiativ skall bli vägledande för 2000-talets forskning. Snarare vill de uppmärksamma ett antal bestående matematiska problem. Ett av dessa problem är att avgöra om NSE överhuvudtaget är analytiskt lösbara. För att lyckas hävdas (Fefferman 2000) att det kan behövas en ny matematisk teori.

Syftet med den här uppsatsen är att ge en grundläggande allmänorientering kring NSE. Därför görs först en historisk tillbakablick på personerna bakom ekvationerna, varpå de fullständiga ekvationerna härleds utifrån fysikaliska antaganden om bevarande av massa och rörelsemängd. Därpå studeras några klassiska lösningar till ekvationerna, dels Poiseuilles (1840) lösning och dels Couettes lösning (1890). Vidare är det intressant att se på några speciella metoder och knep för att komma runt svårigheter med att lösa ekvationerna. Detta görs genom att studera några praktiska metoder som används inom meteorologi. Där presenteras även lösningen av ett specialfall inom oceanografi och meteorologi, den så kallade Ekmanspiralen. Sedan lyfts några av ekvationernas många tillämpningsområden fram, varpå det slutligen följer ett avsnitt som behandlar problemet att avgöra om det existerar lösningar till de fullständiga NSE och CMI:s officiella problembeskrivning.

## 2 Historisk bakgrund

Intresset sträcker sig historiskt tillbaka till år 1687 då Newton (Newton 1687) initierade teorin om viskösa fluiders rörelser. Han förstod inte helt naturen bakom de verkande krafterna på partiklarna i ett kontinuum, men beskrev det hela intuitivt. Det som vi idag kallar NSE kom till först nästan 200 år senare.

### 2.1 Claude-Louis Navier (1785-1836)

När Claude-Louis Navier var 8 år gammal dog hans far. I samband med faderns död flyttade hans mor från Paris där de bodde, till sin hemstad. Den som tog hand om Navier kom att bli hans mors farbror. Farbrodern var en ledande civilingenjör i landet och väckte Naviers intresse för ingenjörsvetenskap. Farbrodern verkar dock inte ha lyckats särskilt bra med att lära upp Navier, eftersom han nått och jämt lyckades kvalificera sig in på École Polytechnique 1802. Väl där gjorde han dock sådana framsteg att han var bland de bästa studenterna efter första terminen och blev utvald för ett specialutformat andra år i Boulogne. Under sitt första år vid École Polytechnique hade Navier Fourier som lärare i matematisk analys. Fourier hade en väldigt stark inverkan på den unge Navier och de kom att få en livslång vänskap. 1804 började Navier vid ingenjörsskolan École Nationale des Ponts et Chaussées, där farbrodern arbetade. Inte långt efter att Navier tagit examen dog hans farbroder. Navier blev då erbjuden att fortsätta med farbroderns arbete och tackade ja.

Farbrodern hade arbetat traditionellt empiriskt för att angripa problem inom ingenjörsvetenskap. Här skall Navier ha infört ett mer analytiskt angreppssätt. Han skrev böcker för verksamma ingenjörer och nu började en grund läggas för en ingenjörsvetenskap, som inte längre enbart var empirisk.

1830 blev Navier professor vid École nationale des ponts et Chaussées. Han ledde undervisningen vid skolan och ändrade skolans kursplan till förmån för mer fysik och matematisk analys. Dessutom ersatte han Cauchy som professor vid École Polytechnique 1831, men kritiserades av Poisson beträffande sättet att lära ut Fouriers teori om värmeledning.

Navier var den första som utvecklade en teori om hängbroar, som tidigare enbart byggts efter empiriska principer. Hans stora projekt, att bygga en hängbro över Seine blev dock ett misslyckande, kanske mest beroende på att det inte stöddes av stadens styrande.

Under sitt liv arbetade han inom med tillämpad matematik inom olika områden, t ex fluiddynamik, elasticitet och Fourier-serier tillämpade på fysikaliska problem. Navier är idag antagligen mest känd för Navier-Stokes ekvationer. 1821 publicerade han Navier-Stokes ekvationer för en inkompressibel fluid. Ett år senare presenterade han ekvationer för viskösa fluider.

Navier härledde ekvationerna, men förstod inte skjuvspänning och hans sätt att beskriva fluidens friktion blev därför aldrig helt korrekt.

## 2.2 George Gabriel Stokes (1819-1903)

George Stokes var den yngste av åtta barn i en protestantisk familj i byn Skreen i nordvästra Irland. Hans far var präst och hans mor var dotter till en präst, så hans uppväxt var religiöst präglad och alla hans tre äldre bröder blev präster.

Efter att Stokes studerat vid en skola i Dublin och vid Bristol College i Bristol, skrevs han in vid Pembroke College i Cambridge 1837. Under sin tid vid Bristol College visade Stokes sin matematiska talang och fick flera utmärkelser, så även vid Pembroke College. Han tog examen 1841 och erbjöds därefter omedelbart en forskartjänst.

Efter de framgångsrika studierna vid Cambridge uppmanades Stokes att ta sig an forskning inom hydromekanik. Stokes inspirerades av George Greens färska arbeten inom området och 1842 publicerades *On the steady motion of incompressible fluids*. Strax därefter kom det till hans kännedom att fransmannen Duhamel redan hade erhållit ett liknande resultat, men genom att studera fasta kroppars värmeledning. Stokes menade att hans eget arbete ändå var värt att publicera, eftersom bådas arbete hade helt olika utgångspunkter. Stokes fortsatte sin forskning genom att studera situationen där han inkluderade intern friktion för strömmande fluider. Efter att ha härlett de korrekta rörelseekvationerna (det vi kallar Navier-Stokes ekvationer), upptäcktes återigen att han inte var först med resultatet. Tidigare hade Navier, Poisson och Saint-Venant beaktat problemet. Speciellt märkligt är att Saint-Venant gjort en korrekt härledning av ekvationerna två år före Stokes, utan att hans namn kommit att användas för att associera till ekvationerna (Anderson 1997).

Anledningen till dessa dubbla resultat var helt enkelt engelsmännens bristande kännedom om kontinentala matematikers arbeten.

Återigen bestämde sig Stokes för att hans resultat var intressant att publicera med motivet att han hade gjort väsentligt annorlunda antaganden. 1845 publicerades därför *On the theories of the internal friction of fluid in motion*.

Under denna tid arbetade Stokes även inom andra områden, t ex studerade han pendelrörelser i fluider, vilket ledde fram till Stokes lag (1851). Lagen beskriver terminalhastigheten hos en sfär som på grund av sin egen tyngd sjunker ned genom en viskös fluid. Han publicerade även flera viktiga artiklar beträffande ljusets vågnatur, däribland en artikel om diffraktion 1849. Tre år senare förklarade han fenomenet fluorescens och namngav det. 1854 gav Stokes även en teoretisk förklaring till Fraunhofer-linjer i det solara spektrumet.

Från och med 1857 kom Stokes att arbeta allt mindre med den teoretiska forskningen och alltmer med administration. Under sitt fortsatta liv fick Stokes senare flera utmärkelser och han innehade en rad prestigefyllda positioner innan han dog 1903.

### 3 Härledning av ekvationerna

För att härleda NSE behövs ett par antaganden och definitioner klargöras.

#### 3.1 Kontinuum-antagandet

Kontinuum-antagandet innebär att fluider betraktas som kontinuerliga trots att de egentligen består av diskreta molekyler som kolliderar med varandra. Kvantiteter såsom densitet, tryck, temperatur och hastighet antages vara väldefinierade i väldigt små 'punkter'.

En 'punkt' i kontinuumet kan betraktas som ett väldigt litet volymselement, men som ändå är av tillräcklig utsträckning för att innehålla ett stort antal molekyler. Vi kallar dessa små volymselement för *fluidelement*.

#### 3.2 Totalderivata (materiederivata)

Betrakta en i rummet strömmande fluid. Strömningen beskrivs genom att man i varje punkt  $(x, y, z)$  anger hastighetsvektorn  $\mathbf{u}$  hos de strömmande fluid-elementen. Vidare beror  $\mathbf{u}$  av tiden  $t$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t).$$

Strömningen beskrivs alltså av ett med tiden varierande vektorfält i rummet. En partikel som följer strömmen följer en bana (strömlinje). Inför nu beteckningarna

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1)$$

Strömningslinjens tangentvektor vid tiden  $t$  är

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = \mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t).$$

Låt  $L(x, y, z, t)$  vara en reellvärd funktion som beskriver någon kvantitet (densitet, tryck, rörelsemängd, . . .) hos fluiden. Det går att studera  $L$  genom att i en *fix* punkt  $(x, y, z)$  betrakta dess variation med tiden, dvs funktionen

$$t \mapsto L(x, y, z, t).$$

Den partiella derivatan

$$\frac{\partial}{\partial t} L(x, y, z, t)$$

beskriver då den tidsmässiga förändringen av funktionen.

Ibland är det praktiskt att undersöka hur  $L$  varierar för en observatör, som

följer med längs en bana (1). För en sådan betraktare har  $L$  vid tidpunkten  $t$  värdet

$$L(x(t), y(t), z(t), t).$$

Förändringen med tiden hos denna funktion är

$$\frac{d}{dt}L(x, y, z, t).$$

Med kedjeregeln fås att

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t), z(t), t) = \frac{\partial L}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial L}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial L}{\partial z}z'(t) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

där alla derivator av  $L$  i högerledet skall tas i punkten  $(x(t), y(t), z(t), t)$ . Vi kallar denna bildning totalderivatan med avseende på hastighetsfältet  $\mathbf{u}$  och betecknar den  $\frac{DL}{Dt}$ . Vi använder operatoren  $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  och eftersom  $(x'(t), y'(t), z'(t), t)$  är lika med hastighetsvektorn  $\mathbf{u}$  kan vi skriva totalderivatan

$$\frac{DL}{Dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla L. \quad (2)$$

### 3.3 En balansekvation

Låt  $B$  vara ett godtyckligt klot i strömningsområdet  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ . Vissa kvantiteter  $t$  ex massa, rörelsemängd eller energi bevaras i  $B$ . Låt  $L$  beteckna en godtycklig sådan kvantitet. Vid varje tidpunkt  $t$  måste det gälla att:

$$\text{ökning/tidsenhet} = \text{produktion} - \text{utflöde}.$$

Vi väljer att beteckna produktionen med  $Q$ . Vidare kan vi uttrycka oss på följande vis

$$\frac{d}{dt} \iiint_B L \, dx \, dy \, dz = \iiint_B Q \, dx \, dy \, dz - \iint_{\partial B} L \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} \, dS. \quad (3)$$

Vänsterledet kan skrivas om

$$\frac{d}{dt} \iiint_B L \, dx \, dy \, dz = \iiint_B \frac{\partial L}{\partial t} \, dx \, dy \, dz.$$

Vidare ger Gauss sats

$$\iint_{\partial B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{u} dx dy dz.$$

Samband (3) kan därmed skrivas

$$\iiint_B \left( \frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot L\mathbf{u} - Q \right) dx dy dz = 0.$$

Eftersom detta gäller alla kontrollvolymen  $B$  följer att

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot L\mathbf{u} - Q = 0. \quad (4)$$

### 3.4 Bevarande av massa - kontinuitetsekvationen

(4) är ett generellt samband som gäller för en viss kvantitet  $L$ . Vi kan således ersätta  $L$  med densiteten  $\rho$ . Vidare antas att det inte finns några källor, eller sänkor av massa,  $Q = 0$ . Vi kan begränsa oss till en inkompressibel fluid och då är  $\rho$  konstant. Ekvationen kan nu förenklas till

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

Detta samband kallas *kontinuitetsekvationen* för en inkompressibel fluid.

### 3.5 Bevarande av rörelsemängd

Den mest generella formen av Navier-Stokes ekvationer erhålls då vi använder samband (4) för rörelsemängd. Vi skriver rörelsemängd som  $\rho u_i$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) - Q_i = 0$$

Index  $i$ , betecknar att ekvationen används för alla tre komponenter  $x, y, z$ . Vidare är en kraft en källa till rörelsemängd,  $f_i = Q_i$ . Vi kan skriva om uttrycket

$$u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla(\rho u_i) \cdot \mathbf{u} + \rho u_i \nabla \cdot \mathbf{u} = f_i$$

$$u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla u_i \cdot \mathbf{u} + \rho u_i \nabla \cdot \mathbf{u} = f_i$$

$$u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_i + \rho u_i \nabla \cdot \mathbf{u} = f_i$$

$$u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i \right) = f_i$$

$$u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) + \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i \right) = f_i.$$

Antag att  $\rho$  är konstant. Den första parentesen i vänsterledet blir enligt kontinuitetsekvationen (5) lika med noll. Vi uttrycker återstoden på vektorform med totalderivatans notation

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i \right) = f_i$$

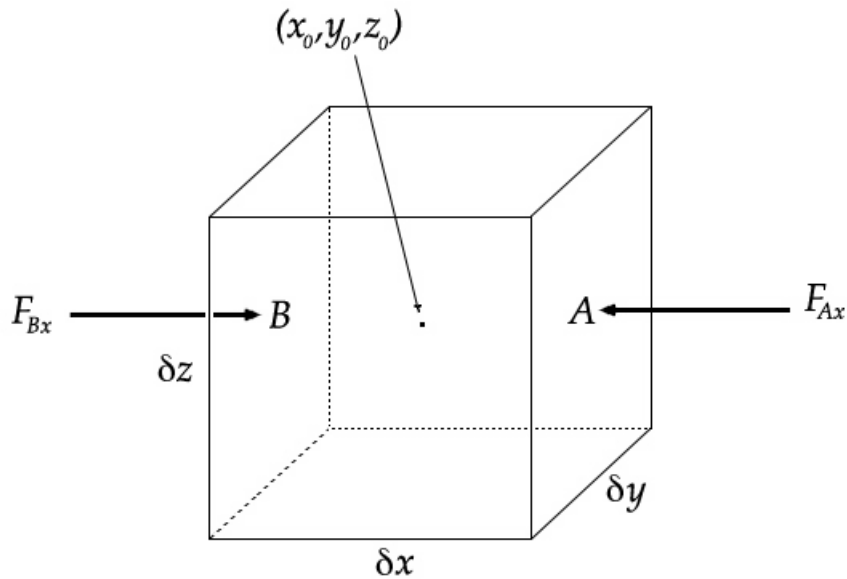
$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f}. \quad (6)$$

### 3.6 Fundamentala krafter

Högerledet i (6) betecknar de verkande krafterna på ett fludelement. I NSE förekommer alltid två krafter, *tryckgradientkraften* och *viskositeten*. Nedan görs härledningarna av uttrycken för dessa krafter relativt kortfattat. För en mer heltäckande diskussion kring dessa två krafter hänvisas till någon lärobok i fysik t ex Holton (1992).

### 3.7 Tryckgradientkraft

Betrakta ett fludelement  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ , som är centrerat i punkten  $(x_0, y_0, z_0)$  enligt figur 1.



Figur 1: Tryckgradient-kraftens  $x$ -komponent på ett fludelement

På grund av fluidens slumpmässiga molekyllära rörelser kommer rörelsemängd kontinuerligt ges till fludelementets väggar. Överföringen av rörelsemängden per tidsenhet och areaenhet är just *tryck*. Antag att trycket i fludelementets mitt är  $p_0$ . Då kan trycket på fludelementets vägg A uttryckas med en Taylor-utveckling

$$p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + h.o.t.$$

Om vi försummar högre ordningens termer kan tryck-kraften på fludelementets vägg A uttryckas

$$F_{Ax} = - \left( p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z. \quad (7)$$

Av symmetriskäl är kraften på vägg B

$$F_{Bx} = \left( p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z. \quad (8)$$

Summerar vi uttrycken (7) och (8) får vi  $x$ -komponenten av tryckkraften på fludelementet

$$F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z.$$

Eftersom kraften i (6) är angiven per volym, skall även tryckgradientkraften uttryckas per volym.

$$\frac{F_x}{\delta V} = f_x = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analogt får vi fram uttrycken för  $y$ - och  $z$ -komponenterna. Summerar vi sedan dessa kan vi uttrycka tryckgradientkraften på vektorform

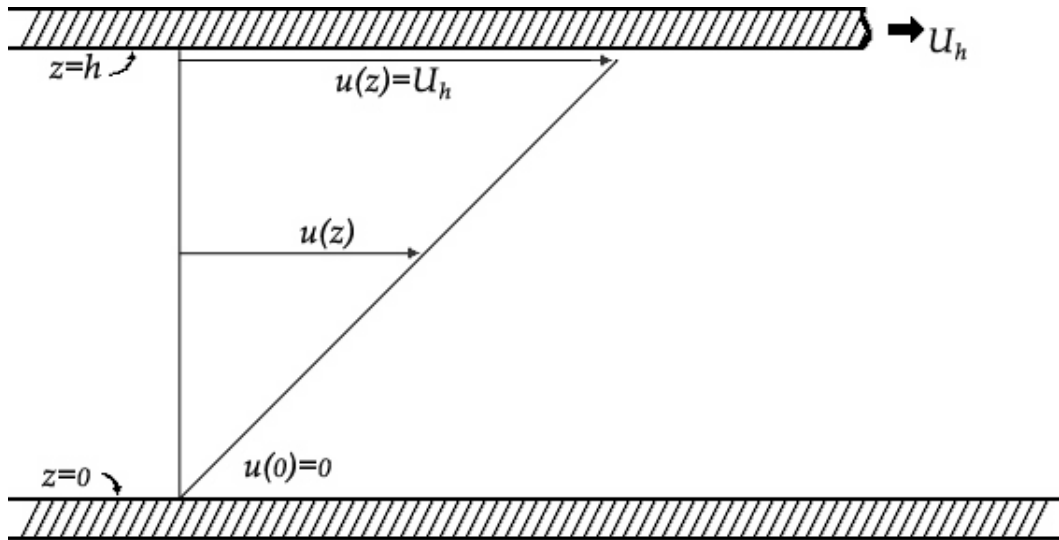
$$\mathbf{f}_p = - \nabla p \quad (9)$$

där  $p = p(x, y, z, t)$  för  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  och  $p > 0$ .

### 3.8 Viskositet

Vanliga fluider, såsom gaser och vätskor påverkas av en intern friktion, viskositet, som motverkar fluidens rörelser. Betrakta ett lager av en inkompressibel fluid som är innesluten mellan två begränsningsplan på avståndet  $h$  ifrån varandra, se figur (2). Det undre planet är fixerat och det övre rör sig i positiva  $x$ -riktningen med hastigheten  $u(h) = U_h$ . Friktionen tvingar fludelementen allra närmast den övre begränsningsytan att röra sig med samma hastighet som begränsningsytan. För  $z = 0$  har fluiden hastigheten  $u(0) = 0$  och för





Figur 2: Friktionen mellan fluiden och begränsningsplanen genererar en skjuvning. Kraften som behövs för att åstadkomma detta är ett mått på fluidens viskositet.

$z = h$  så har fluiden alltså hastigheten  $u(h) = U_h$ . Kraften tangentiellt med den övre begränsningsytan som behövs för att hålla den i konstant rörelse visar sig vara proportionell mot väggens area, hastigheten och omvänt proportionell mot avståndet mellan väggarna. Vi kan således skriva  $F_r = \mu \frac{AU_h}{h}$ , där  $\mu$  är en proportionalitetskonstant, den dynamiska viskositetskoefficienten.

Denna kraft måste vara precis lika stor som kraften som utövas av den övre begränsningsytan på fluiden precis under begränsningsytan. I ett tillstånd med konstant strömning, måste varje lager av djup  $\delta z$  utöva samma kraft på fluiden inunder. Detta kan uttryckas som  $F_r = \mu A \frac{\delta u}{\delta z}$  där  $\delta u = \frac{U_h \delta z}{h}$  är skjuvningen i hastighet över lagret  $\delta z$ . Viskositetskraften per enhetsarea, eller skjuvspänningen kan definieras som

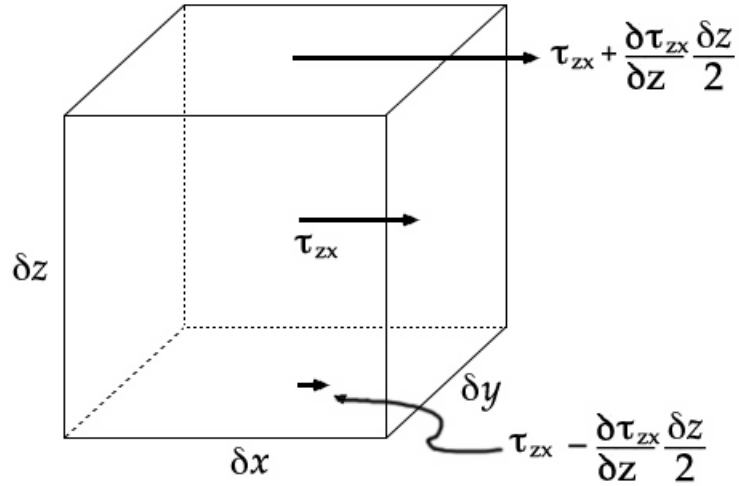
$$\tau_{zx} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \mu \frac{\delta u}{\delta z} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ur ett molekylärt perspektiv orsakas skjuvspänningen av ett nedåtriktat nettoflöde av rörelsemängd av molekylernas slumpmässiga rörelser.

Eftersom medelrörelsemängden ökar med höjden, måste molekylerna som passerar nedåt genom ett tänkt horisontellt tänkt plan vid varje tidpunkt i medeltal ha mer rörelsemängd än de som passerar uppåt genom planet. Det sker därför ett nedåtriktat flöde av rörelsemängd i  $x$ -led. Denna transport per enhetstid och enhetsarea är alltså skjuvspänning.

På samma vis transporterar slumpmässiga molekylära rörelser värme (eller andra spårämnen) nedför en medeltemperaturgradient. I sådant fall kallas transporten molekylär diffusion. Den molekylära diffusionen motverkar alltid oregelbundenheter i fältet som diffunderar. I det enkla tvådimensionella fallet som just studerats finns ingen resulterande viskös kraft som verkar på fluid-elementen, eftersom skjuvspänningen som verkar på fluidelementens

övre begränsningsytor är lika, men med motsatt tecken som vid fludelementens undre begränsningsytor. För det mer generella fallet med icke-stabil tvådimensionell strömning med skjuvning i en inkompressibel fluid betraktar vi ett fludelement centrerat i punkten  $x_0, y_0, z_0$  med sidorna  $\delta x, \delta y, \delta z$  enligt figur 3. Vi betecknar skjuvspänningen i  $x$ -riktningen som verkar i mitten av fludele-



Figur 3: Den vertikala skjuvspänningens  $x$ -komponent på ett fludelement.

mentet med  $\tau_{zx}$ . Spänningen som verkar över den övre begränsningsytan på fluiden under kan approximativt uttryckas

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2}. \quad (10)$$

Spänningen som verkar över den undre begränsningsytan på fluiden ovanför är

$$-\left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right). \quad (11)$$

Summeras (10) och (11) fås den resulterande viskösa kraften på fludelementet i  $x$ -riktningen.

$$\left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y. \quad (12)$$

Kraften per enhetsvolym på grund av vertikal skjuvning av rörelse i  $x$ -led blir nu

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (13)$$

För konstant  $\mu$  kan högerledet skrivas  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . Analogt härleds viskösa spänningar (viscous stresses) i  $y$ - och  $z$ -riktningarna. Dessa uttryck kan sedan summeras och vi kan uttrycka resultatet på vektorform

$$\mathbf{f}_r = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (14)$$

där

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (15)$$

## 4 NSE i kartesiska koordinater

För en inkompressibel strömning kan NSE skrivas

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + f_x(x, t) \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + f_y(y, t) \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + f_z(z, t)\end{aligned}\tag{16}$$

och kontinuitetsekvationen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\tag{17}$$

där  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  och  $t \geq 0$ . Hastighetsvektorn  $\mathbf{u}$  har här uttryckts på komponentform där vi infört beteckningarna  $(u, v, w) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ . Vidare betecknar  $f_x, f_y$  och  $f_z$  eventuella ytterligare verkande krafter i respektive led.  $\nu$  är den kinematiska viskositetskoefficienten,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

Ekvationerna utgör således inget annat än Newtons andra lag,  $F = ma$  ( $a = \frac{F}{m}$ ), för ett fludelement som utsätts för en tryckgradientkraft, viskositet och därutöver den eventuella kraftresultanten  $f_i$ . Den resulterande kraften ger upphov till en acceleration från områden med högre tryck mot områden med lägre tryck. Dessutom accelereras ett fludelement av omkringliggande fludelement av högre eller lägre hastighet.

Ett alternativt sätt att härleda (16) är att utgå från Newtons andra lag, vilket görs av Rodgers (1992).

När de fysikaliska förutsättningarna tillåter att viskositeten, eller friktionen kan försummas reduceras ekvationerna till *Eulers* ekvationer. Dessa ekvationer betraktas som lämpliga för att till exempel beskriva rörelsen hos vissa fluider långt ifrån avgränsningsytor. Ett praktiskt sådant exempel är strömningen högt uppe i atmosfären.

För en matematisk beskrivning av viskös strömning måste emellertid de fullständiga ekvationerna (16) och (17) betraktas. Dessa innehåller liksom Eulers ekvationer icke-linjära termer, men även viskositetstermen, vilket gör dem extremt svårarbetade. Analytiska lösningar är endast kända för väldigt förenklade fall. Dessa lösningar innebär oftast laminär strömning och de icke-linjära termerna har där förenklats, eller saknas helt. Två sådana lösningar presenteras i följande avsnitt. I avsnitt 6.5 presenteras även en lösning med tillämpning inom meteorologi och oceanografi.

## 5 Enkla lösningar

### 5.1 Plan-parallell strömning

Den allra enklaste typen av strömningar är endimensionella laminära strömningar mellan två oändligt utsträckta parallella plan. Vi väljer att lägga  $x$ -axeln så att den är orienterad längs med strömningsriktningen och  $y$ -axeln är riktad vinkelrätt mot avgränsningsytan.  $u = u(y)$ , dvs strömningen befinner sig i stationärt tillstånd ( $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ). För att upprätthålla en uniform strömning måste tryckgradientkraften vara konstant och riktad i strömningsriktningen. Vi har alltså  $p = p(x)$  och  $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{konstant}$ . För detta specialfall reduceras sambanden (16) till

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (18)$$

Detta samband kan lösas med olika randvillkor, vilket görs i följande avsnitt.

### 5.2 Poiseuille-strömning

Betrakta en laminär strömning mellan två fixerade parallella plan, som är separerade på ett avstånd  $h$ , från varandra. Ekvation (18) skall alltså lösas med randvillkoren:

$$\begin{cases} u = 0, & \text{då } y = 0 \\ u = 0, & \text{då } y = h. \end{cases} \quad (19)$$

Integration två gånger genererar tillsammans med dessa randvillkor en parabelformad hastighetsprofil

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(h - y). \quad (20)$$

Hastigheten är således maximal för  $y = h/2$  och en hastighetsprofil enligt (20) visas i figur 4.

### 5.3 Couette-strömning

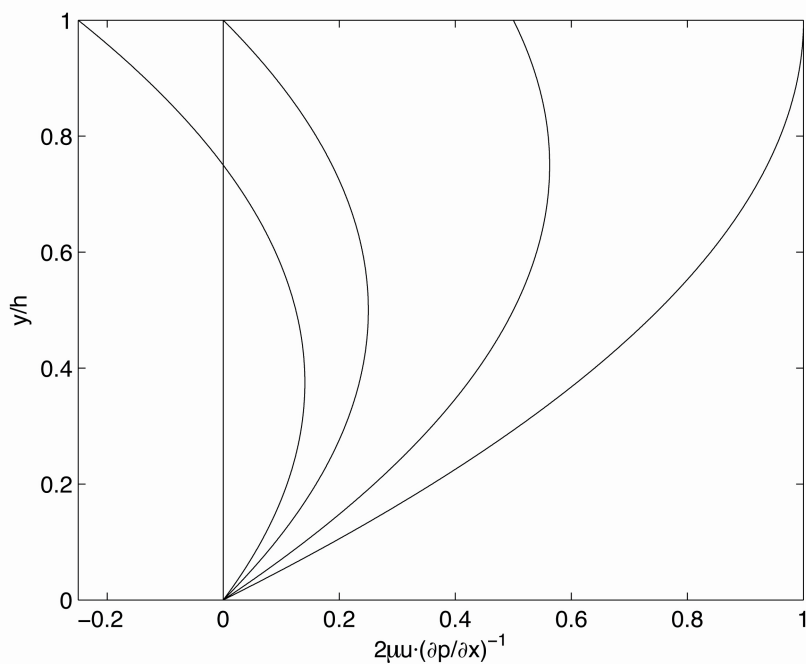
Betrakta nu en laminär strömning mellan två parallella plan, separerade på ett avstånd  $h$ , från varandra. Den undre gränsen är fixerad, men den övre rör sig med den konstanta hastigheten  $U_h$  i den positiva  $x$ -axelns riktning. Ekvation (18) skall alltså lösas med randvillkoren:

$$\begin{cases} u = 0, & \text{då } y = 0 \\ u = U_h, & \text{då } y = h. \end{cases} \quad (21)$$

Integration två gånger med användandet av de givna randvillkoren (21) ger lösningen

$$u(y) = U_h \frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(h-y). \quad (22)$$

Hastighetsprofiler till (22) visas i figur 4 för några olika värden på  $U_h$ .



Figur 4: Hastighetsprofiler för Poiseuille- och Couette-strömning. Den andra profilen från vänster svarar mot lösningen (20). Övriga kurvor svarar mot lösningen (22) för olika värden på  $U_h$ , från vänster:  $2\mu U_h (\frac{\partial p}{\partial x})^{-1} = -1/4, 1/2$  och  $1$ . I samtliga profiler antas  $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{konstant}$ .

## 6 Användning av NSE inom meteorologi

NSE har en viktig tillämpning inom meteorologi och speciellt då den gren av meteorologin som kallas gränsskiktsmeteorologi. Kortfattat kan gränsskiktet sägas vara den del av atmosfären som påverkas av markens friktion. Det rör sig alltså om strömningen närmast marken och upp till som mest ca 2 km höjd. Ovanför gränsskiktet kan viskositeten praktiskt taget försummas och NSE övergår då i Eulers ekvationer. I följande avsnitt diskuteras på vilket sätt NSE kan modifieras för att bli praktiskt lösbara för atmosfäriska rörelser. Därför tas en analytisk lösning av ett specialfall upp, den så kallade Ekmanspiralen.

### 6.1 Lösningar av modifierade NSE

För att använda NSE inom meteorologiska tillämpningar, måste de anpassas till de förhållanden som råder. Vi tar därför hänsyn till två ytterligare krafter; Corioliskraften och tyngdkraften. I detta kapitel studeras även hur NSE kan modifieras och behandlas för att bli praktiskt lösbara inom meteorologiska tillämpningar.

#### 6.1.1 Införande av Corioliskraften och tyngdkraften

För rörelser i ett roterande koordinatsystem uppkommer en fiktiv kraft, Corioliskraften. Denna betecknas

$$\mathbf{F}_c = f\mathbf{u} \quad (23)$$

där  $f = 2\Omega \sin \phi$  och där  $\Omega$  är jordrotationens vinkelhastighet och där  $\phi$  betecknar latitud. En komplett härledning av uttrycket för Corioliskraften är tämligen omfattande och den intresserade läsaren hänvisas till Holton (1992). För meteorologiska tillämpningar beaktas även jordens tyngdacceleration, som betecknas  $g$ . Tyngdkraftens roll beror på hur atmosfären är skiktad (dvs hur temperaturen avtar med höjden). Då dessa krafter inkluderas får NSE följande utseende

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fu + \nu \nabla^2 u \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fv + \nu \nabla^2 v \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (24)$$

## 6.2 Numerisk lösning av NSE

En tänkbar metod att lösa NSE (24) är genom direkt numerisk integration på kraftfulla datorer. En sådan metod kallas FTS (Full Turbulence Simulation). Svårigheten med detta förfarande ligger i den väldigt höga upplösningen som krävs för att kunna lösa upp turbulens från de allra minsta, till de största skalorna. Det skulle alltså i princip vara möjligt att simulera en atmosfärisk strömning med godtycklig noggrannhet, bara det fanns tillräckligt kraftfulla datorer.

En annan approach, som används inom meteorologi och fluidodynamik är så kallad LES (Large Eddy Simulation). Med LES simuleras endast rörelser ned till en specifik skala (den kommer då fånga fenomen mellan det minsta grid-avståndet och domänens dimensioner). Rörelser som inte går att lösa upp parametreras, eller ignoreras. I FTS används de 'primitiva' NSE (24), men i LES används samma ekvationer, men medelvärdesbildade över finita grid-volymer.

## 6.3 Reynolds medelvärdesbildade ekvationer

Att separera en medelströmning från den turbulenta strömningen, visar sig vara en fruktbar metod för att hitta approximativa lösningar till NSE. Strömningens variabler ( $u, v, w$  och  $p$ ) separeras i en medelströmning och i en strömning som avviker från medelvärdet, en fluktuation. Vi skriver detta som  $u = \bar{u} + u'$  där  $\bar{u}$  är medelströmningen och  $u'$  är fluktuationen. Medelströmningen ges av tidsmedelvärdet  $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt$ , där det samma medelvärdet ges då  $T \rightarrow \infty$ . Det är dock inte uppenbart hur lång  $T$  skall vara för tillämpningar på atmosfärens gränsskikt. Tiden bör vara tillräckligt lång för att försäkra ett stabilt medelvärde som jämnar ut småskaligt brus, men tillräckligt liten för att inte släta ut variationer över längre tid som man vill beskriva.

Ur förfarandet med medelvärdesbildningen följer definitionsmässigt att medelvärdet av en fluktuation är identiskt noll,  $\bar{u}' = 0$ .

Låt nu  $f$  och  $g$  vara två beroende variabler, eller funktioner (t ex hastighetskomponenter, eller tryck) med medelvärdena  $\bar{f}$  och  $\bar{g}$ . Vidare betecknar  $c$  en konstant. Räknereglerna för Reynolds medelvärdesbildning ges nu av

$$\begin{aligned}\overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{cf} &= c\bar{f} \\ \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} \\ \overline{\partial f / \partial s} &= \partial \bar{f} / \partial s \\ \int \overline{f ds} &= \int \bar{f} ds\end{aligned}$$

där  $s = x, y, z$ , eller  $t$ . Dessa regler används för att härleda ekvationer för medelvariabler från ekvationerna med momentana variabler. För att härleda medelvärdesbildade ekvationer substitueras  $u = \bar{u} + u'$ ,  $v = \bar{v} + v'$ ,  $w = \bar{w} + w'$  och  $p = \bar{p} + p'$ , i samband (16) och (17). Därefter tas medelvärdet



av ekvationerna. Följs denna procedur kan vi till slut komma fram till dessa samband som kallas Reynolds ekvationer

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= f\bar{v} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left( \frac{\partial u'u'}{\partial x} + \frac{\partial v'v'}{\partial y} + \frac{\partial w'w'}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= f\bar{u} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left( \frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'v'}{\partial y} + \frac{\partial v'w'}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= g \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left( \frac{\partial u'w'}{\partial x} + \frac{\partial v'w'}{\partial y} + \frac{\partial w'w'}{\partial z} \right)\end{aligned}\tag{25}$$

och kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.\tag{26}$$

Där  $\rho_0$  betecknar ett konstant medelvärde av densiteten (densiteten varierar egentligen med ca 10% i atmosfärens lägsta kilometer). Observera dock att densiteten tillåts variera i tyngdkraftstermen,  $g(\rho_1/\rho_0)$ , där  $\rho_1$  betecknar avvikelser från referensvärdet  $\rho_0$ . Denna approximation kallas Boussinesq approximation.

Reynolds medelvärdesbildning används i praktiskt taget alla grenar inom fluiddynamik (Randall 2006), speciellt har den vidsträckt tillämpningar inom meteorologi. Reynolds ekvationer kan sedan användas tillsammans med approximationer baserade på kunskap om vissa egenskaper hos turbulensen. Detta studeras vidare i nästa kapitel.

#### 6.4 Gradient-transport teori ( $K$ -teori)

I sambanden (25) och (26) finns det många fler okända variabler än det finns ekvationer, ekvationerna är alltså inte entydigt lösbara. Den vanligaste lösningsstrategin är baserad på ett antagande om analogi mellan molekylär och turbulent rörelse. Då kan den turbulenta skjuvspänningen i strömningsriktningen uttryckas som  $\tau = \rho K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ . För många tillämpningar är gradienterna i  $x$ - och  $y$ -riktningarna försumbara jämfört med den i  $z$ -riktningen.  $K$  kallas den turbulenta utbyteskoefficienten, vilken är analog med den molekylära kinematiska viskositetskoefficienten,  $\nu$ . Vi antar alltså att

$$\begin{aligned}\overline{u'w'} &\approx -K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \overline{v'w'} &\approx -K \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Dessa samband är inte baserade på någon rigorös teori, utan ett antagande om analogi mellan molekyllärt och turbulent utbyte.

Ett problem som uppstår är att bestämma  $K$ . Det enklaste antagandet är att anta att  $K$  är konstant över hela strömningsfältet, vilket har visat sig fungera bra i turbulenta strömningar i fria atmosfären, långt ifrån gränssytor. Nära gränssytor ger däremot konstant  $K$  inte tillfredsställande resultat. Där visar det sig att en linjär fördelning fungerar bättre under specifika omständigheter som är relaterade till atmosfären. Även om den så kallade  $K$ -teorin har sina begränsningar, är den praktiskt användbar och används vitt spridd i praktiken.

Om NSE medelvärdesbildas och  $K$ -teori tillämpas, kan NSE förenklas till

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= f\bar{v} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= f\bar{u} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - K \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (27)$$

Dessa samband kan sedan lämpligtvis lösas numeriskt med någon finit differensmetod. Observera att  $z$ -ekvationen inte används. Istället beräknas  $w$  indirekt ur kontinuitetsekvationen (26).

## 6.5 Ekmanspiralen

Betrakta sambanden (27). Låt oss anta att vi har en stationär strömning. Antag vidare att  $w = 0$ . Antag även att den molekyllära dissipationen är mycket mindre än den turbulenta dissipationen ( $\nu \nabla^2 \mathbf{u} \ll K \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$ ). Vidare görs en uppdelning av hastigheten i en s k geostrofisk del och en ageostrofisk del (Holton 1992),  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_a$ . En poäng med uppdelningen är att  $\mathbf{u}_g$  kan betraktas som konstant med avseende på  $z$  och då  $z \rightarrow \infty$  så gäller att  $\bar{u} \rightarrow u_g$ . Slutligen görs en s k geostrofisk approximation, vilken innebär att tryckgradientkraften precis balanserar corioliskraften ( $\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} = f \mathbf{u}_g$ ). För en mer ingående diskussion av dessa antaganden hänvisas till Arya (1988). När dessa antaganden gjorts är de ursprungliga NSE (16) knappt igenkännbara och vi får

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0 \quad (28)$$

$$K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0. \quad (29)$$

För att lösa detta ekvationssystem multipliceras (29) med  $i$  varpå ekvationerna adderas. Vi får nu en andra ordningens differentialekvation i den komplexa hastigheten ( $u + iv$ )

$$K \frac{\partial^2 (u + iv)}{\partial z^2} - if(u + iv) = -if(u_g + iv_g). \quad (30)$$

Orientera koordinatsystemet så att  $v_g = 0$ . Den allmänna lösningen till (30) är

$$(u + iv) = A \exp(\sqrt{if/K} z) + B \exp(-\sqrt{if/K} z) + u_g$$

Med randvillkoren

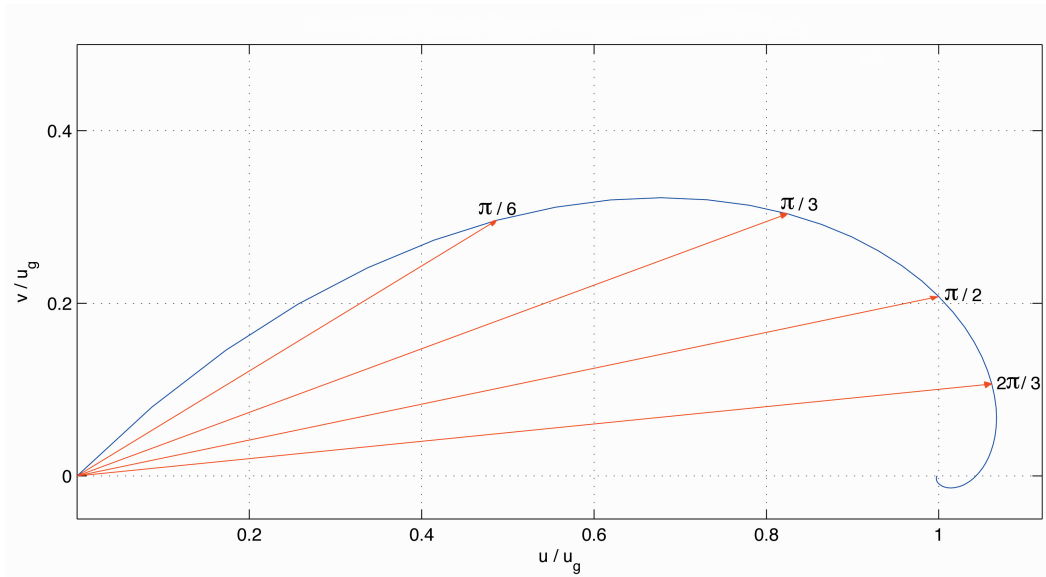
$$\begin{cases} u = 0, v = 0 & \text{då } z = 0 \\ u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0 & \text{då } z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (31)$$

fås att  $B = -u_g$ , varför

$$u + iv = -u_g \exp(-\gamma(1+i)z)$$

där  $\gamma = \sqrt{f/2K}$ . Vi använder Eulers formel  $\exp(-i\theta) = \cos i\theta - i \sin \theta$  och separerar realdel från imaginärdel

$$\begin{cases} u(z) = u_g(1 - \exp(-\gamma z)) \cos(\gamma z) \\ v(z) = u_g(1 - \exp(-\gamma z)) \sin(\gamma z) \end{cases} \quad (32)$$



Figur 5: Hodograf över hastighetskomponenterna i Ekmanspiralens lösning. Pilarna visar hastighetsvektorer för olika höjder och spiralen visar hastigheten som funktion av höjden. Värdena som står vid vektorerna visar olika värden på  $\gamma z$ , vilket är en ickedimensionell höjd.

Denna lösning kallas Ekmanspiralen efter den svenske oceanografen V. W. Ekman. Lösningen åskådliggörs på bästa sätt i en hodograf, se figur (5), vilken visar strömningens hastighet  $\mathbf{u}$  som funktion av höjden. Kvalitativt innebär lösningen att vindens riktning vider medurs med ökad höjd i norra hemisfären. Kvantitativt är dock lösningen av akademiskt intresse (Holton 1992) och (Arya 1988).

## 7 Några olika tillämpningsområden för NSE

NSE är en matematisk modell av den fysikaliska verkligheten och beskriver en fluids strömningar approximativt. På väldigt små skalor och under extrema förhållanden är modellen mindre tillfredställande, men för många fysikaliska fenomen är dock ekvationerna en utmärkt modell.

NSE kan användas för att beskriva fenomen på olika skalor – alltifrån storskaliga vädersystem på hundratals kilometers skala och ner till småskaliga fluiddynamiska laboratorieexperiment. Möjligheten att tillämpa NSE på så olika skalor borgar för en stor bredd i de vetenskapliga tillämpningarna. En fördjupad och bättre förståelse av ekvationerna skulle därför vara av oerhörd betydelse för en mängd grenar av naturvetenskapen.

Inom meteorologi används i grund och botten NSE för att modellera atmosfäriska rörelser. Det kan handla om allt ifrån att studera specifika meteorologiska fenomen, till rent operativ användning i väderprognosmodeller. Likaså används ekvationerna inom oceanografi för att studera strömningar i hav och sjöar.

Ett annat område där NSE tillämpas är inom hydrologi. De kan även användas i fluiddynamiska modeller av trafikflöden, samt för att beräkna massflöden av olja i pipelines. NSE kan användas för att studera hastigheter och tryck i artäriska blodflöden, men där måste de kompressibla NSE beaktas, eftersom blod är att betrakta som en kompressibel fluid. Vidare kan ekvationerna användas inom aerodynamik vid beräkning av bl a projektiltrajektorier och för att beräkna krafter på flygplan.

NSE kan kombineras med Maxwells ekvationer och är då tillämpbara inom magnetohydrodynamik, MHD. Magnetohydrodynamik är den vetenskap som studerar rörelser och svängningar hos elektriskt ledande vätskor, eller gaser. Exempel på sådana medier är saltvatten, flytande metaller och plasmor. Ursprunget är kosmo- och astrofysiken, där MHD fått betydande användning för att beskriva stjärnors och galaxers utveckling. Däribland studiet av de dynamoprocesser som genererar planeters magnetiska fält. MHD har även en viktig tillämpning inom fusionsforskning när det gäller fusion av tunga väteatomkärnor.

Ett annat tillämpningsområde är vid digital restaurering av fotografier. I princip går det till så att bildintensiteten behandlas som en strömfunktion i en 2D inkompressibel strömning. Detaljer/strukturer i bilden kan beräknas med hjälp av kännedom om den omgivande strömfunktionen. Tekniken tillåter automatisk restaurering av bilder, som t ex blivit repade och skulle även kunna användas för att fylla i luckor i video-sändningar, som sänds under förhållanden med mycket brus.

## 8 Existerar lösningar till fullständiga NSE?

NSE är ett av de mest studerade systemen av partiella differentialekvationer och ca 15-20 vetenskapliga artiklar som är relaterade till NSE publiceras varje vecka enligt Scientific Computing World (Mars/april 2003). Detta hindrar emellertid inte att de är bland de minst förstådda på teoretisk nivå. Girvan (2003) menar att korsbefruktning av olika vetenskapliga discipliner i framtiden kommer kunna bidra med ökad insikt i NSE, även om matematiska bevis av existens av lösningar kvarstår.

I maj 2000 uppmärksammade CMI, Clay Mathematics Institute problemet att avgöra huruvida det existerar lösningar till de fullständiga ekvationerna eller ej. Den som eventuellt löser problemet skall belönas med en miljon dollar. Syftet med utfästelsen är, enligt CMI, att uppmärksamma matematiska problem som genom historien förblivit olösta. Härpå följer deras officiella problembeskrivning.

### 8.1 Problembeskrivning

NSE skall lösas för en okänd hastighetsvektor  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  och tryck  $p(x, y, z, t)$  där  $t > 0$  och  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ . Vi begränsar oss till inkompressibla fluider som fyller hela  $\mathbb{R}^3$ . NSE ges nu av (16) och (17). Utöver detta har vi initialvillkoret

$$\mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}^*(x, y, z) \quad (33)$$

där  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Här är  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  ett givet,  $C^\infty$  divergensfritt vektorfält på  $\mathbb{R}^3$ . För fysikaliskt rimliga lösningar vill vi att  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  inte växer obegränsat när  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ . Av den anledningen begränsar vi vår uppmärksamhet till initialvillkor  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  som uppfyller

$$|\nabla^\alpha \mathbf{u}^*(x, y, z)| \leq \frac{C_{\alpha K}}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^K} \quad (34)$$

på  $\mathbb{R}^3$  där  $\nabla^\alpha = (\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha})$  för något  $\alpha$  och  $K$  och krafter  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$  som uppfyller villkoret

$$|\nabla^\alpha \frac{\partial^m}{\partial t^m} \mathbf{f}(x, y, z, t)| \leq \frac{C_{\alpha m K}}{(1 + t + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^K} \quad (35)$$

på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  för något  $\alpha$ ,  $m$  och  $K$ .

Vidare så accepteras en lösning av (16), (17) och (33) som fysikaliskt rimlig endast om det uppfyller

$$p, \mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)) \quad (36)$$

och

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(x, y, z, t)|^2 dV < C \quad (37)$$

för alla  $t \geq 0$ .

Alternativt, för att undvika problemet med oändligheten, är det möjligt att leta efter periodiska lösningar i rummet till (16), (17) och (33). Vi antar att  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  och  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$  uppfyller villkoret

$$\begin{cases} \mathbf{u}^*(x + e_j, y, z) = \mathbf{u}^*(x, y, z), & \mathbf{f}(x + e_j, y, z, t) = \mathbf{f}(x, y, z, t) \\ \mathbf{u}^*(x, y + e_k, z) = \mathbf{u}^*(x, y, z), & \mathbf{f}(x, y + e_k, z, t) = \mathbf{f}(x, y, z, t) \\ \mathbf{u}^*(x, y, z + e_l) = \mathbf{u}^*(x, y, z), & \mathbf{f}(x, y, z + e_l, t) = \mathbf{f}(x, y, z, t). \end{cases} \quad (38)$$

Där  $e_j, e_k, e_l$  är enhetsvektorer i  $\mathbb{R}^3$ . Istället för (34) och (35) antar vi att  $\mathbf{u}^*$  är glatt (oändligt många gånger deriverbar) och att

$$|\nabla^\alpha \frac{\partial^m}{\partial t^m} \mathbf{f}(x, y, z, t)| \leq \frac{C_{\alpha m K}}{(1+t)^K} \quad (39)$$

på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  för något  $\alpha$ ,  $m$  och  $K$ .

Då accepteras en lösning av (16), (17) och (33) om den uppfyller

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x + e_j, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t), \\ \mathbf{u}(x, y + e_k, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t), \\ \mathbf{u}(x, y, z + e_l, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t), \end{cases} \quad (40)$$

och

$$p, \mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)). \quad (41)$$

Ett grundläggande problem är att avgöra om en sådan glatt, fysikaliskt rimlig lösning existerar för NSE. CMI efterlyser bevis för något av följande påståenden:

**(A) Existens av glatta lösningar av NSE på  $\mathbb{R}^3$ .** Antag  $\nu > 0$ . Låt  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  vara ett glatt, divergensfritt vektorfält, som satisfierar (34). Låt  $\mathbf{f}(x, y, z, t) = 0$ . Då existerar glatta funktioner  $p(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  som satisfierar (16), (17), (33), (36) och (37).

**(B) Existens av glatta lösningar av NSE på  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ .** Antag  $\nu > 0$ . Låt  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  vara ett glatt, divergensfritt vektorfält, som satisfierar (38). Låt  $\mathbf{f}(x, y, z, t) = 0$ . Då existerar glatta funktioner  $p(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  som satisfierar (16), (17), (33), (40) och (41).

**(C) Avsaknad av lösningar till NSE på  $\mathbb{R}^3$ .** Antag  $\nu > 0$ . Det existerar ett glatt divergensfritt vektorfält  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  på  $\mathbb{R}^3$  och en glatt funktion  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$  på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ , som uppfyller (34) och (35), för vilka det inte existerar några lösningar  $p, \mathbf{u}$  av (16), (17), (33), (36) och (37) på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

**(D) Avsaknad av lösningar till NSE på  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ .** Antag  $\nu > 0$ . Det existerar ett glatt divergensfritt vektorfält  $\mathbf{u}^*(x, y, z)$  på  $\mathbb{R}^3$  och en glatt funktion  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$  på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ , som uppfyller (38) (34) och (35), för vilka det inte existerar några lösningar  $p, \mathbf{u}$  av (16), (17), (33), (36) och (37) på  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

Fefferman (2000) diskuterar vad som är känt när det gäller NSE och dessa påståenden. Vidare menar han att dagens standardmetoder för att lösa partiella differentialekvationer inte verkar vara tillräckliga för att lösa problemet och tror att det behövs helt nya idéer.

## 9 Sammanfattning

NSE är ett system av ickelinjära partiella differentialekvationer. Ekvationerna kom till i sin nuvarande form i mitten av 1800-talet. I uppsatsen härleds ekvationerna utifrån antaganden om konserverande av massa och rörelsemängd. Det är inte känt om NSE i sin helhet har någon lösning, eller om ekvationerna ens är lösbara. Lösningar är kända endast för väldigt förenklade fall och i uppsatsen presenteras två klassiska lösningar.

Inom t ex fluidodynamik är det möjligt att lösa NSE numeriskt. Ett problem som uppstår är dock den höga upplösning som behövs för att lösa upp rörelser på väldigt små skalor. Det stora antalet gridpunkter innebär att väldigt många beräkningar behöver göras, vilket kräver oerhörd datorkraft. I praktiken är därför inte sådan numerisk lösning möjlig för t ex atmosfärisk strömning. Här studeras hur problemet kan undvikas genom att göra vissa matematiska och fysikaliska antaganden.

CMI presenterade 7 st genom åren olösta matematiska problem år 2000. Ett av dessa problem är att bevisa att NSE är lösbara, eller att bevisa motsatsen. Deras officiella problembeskrivning behandlas sist i den här uppsatsen.

## 10 Referenslista

### 10.1 Litteratur

Anderson, J. D. , *A History of Aerodynamics*, Cambridge University Press, New York, 1997.

Arya, S. P., *Introduction to Micrometeorology*, Academic press, San Diego (CA), 1988.

Drazin, P, & Riley, N, *The Navier-Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University press, Cambridge 2006

Fefferman, C. L., *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equations*, Departement of Mathematics at Princeton, Princeton, 2000

Girvan, R., *Going with the flow*, artikel i Scientific Computing World, Europa Science Ltd, Cambridge, Mars/April 2003

Holton, J. R., *An introduction to dynamic meteorology*, Academic press, San Diego (CA), 1992.

Newton, I., *Philosophiae Naturalis Principa Mathematica* (vol II, sektion IX, Hypothesis, Proposition LI), Royal Society, London, 1687

Persson, A & Böiers, L-C, *Analys i flera variabler*, Studentlitteratur, Lund, 1996

Randall, D. A., *Reynolds averaging*, Colorado State University, Fort Collins, 2006

Rodgers, D. F., *Laminar flow analysis*, Cambridge University press, Annapolis (MD), 1992.

### 10.2 Elektroniska källor

Om Navier-Stokes ekvationer på Clay Mathematics Institutes hemsida 2007.  
<http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes.Equations/>

Biografi om Claude-Louis Navier på St Andrews universitets hemsida 2008.  
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Navier.html>

Biografi om George Gabriel Stokes på St Andrews universitets hemsida 2008.  
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Stokes.html>