



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

**Matematiklaborationer: Planering, genomförande
och utvärdering**

av

Samy Sancho

2010 - No 6

Sammanfattning

Detta arbete består av några laborationer i matematik. Den pedagogiska modellen har varit att planera, genomföra och utvärdera laborationerna utifrån didaktiska tankar och mål. Syftet har varit att empiriskt observera och lära om laborationers för- och nackdelar i framförallt begreppsbildning hos elever. De begrepp som är aktuella i detta arbete är: Geometri (likformighet och trigonometri i rätvinkliga trianglar), derivata och differentialekvationer.

Arbetets syfte har varit att ta fram användbara laborationer för undervisning på gymnasiet och förbättra dessa i ljuset av observationer och elevutvärdering. De didaktiska aspekter som diskuteras har en empirisk utgångspunkt och är inte ämnade som färdiga eller säkra slutsatser. Om någon skulle få användning för detta arbete på något sätt så är det bara en extra bonus.

Genomförandet av laborationerna har väckt många didaktiska tankar som jag har försökt att ta vara på och förstå utifrån en väldigt begränsad undervisningserfarenhet.

Målet har för mig varit att utveckla ett laborativt arbetssätt genom praktisk användning och resultatet är för mig tillfredställande då jag har identifierat många förbättringsmöjligheter och alternativ i mitt laborativa arbetssätt.

Innehållsförteckning

1. Inledning.....	6
2. Bakgrund	7
3. Syfte.....	8
4. Styrdokument och teori	8
4.1 Läroplan och kursplan	8
4.2 Pedagogiska teorier i korthet	9
5. Metod	10
5.1 Planering.....	10
5.2 Genomförande	11
5.3 Utvärdering.....	11
6. Laborationen: mätning av avstånd.....	12
6.1 Originalversionen Mätning av avstånd.....	12
Versionen som testades på eleverna	15
6.3 Matematiska och didaktiska tankar	16
6.3.1 Användbarheten av likformighet i verkligheten.....	16
6.3.2 Det historiska perspektivet och tankens kraft	16
6.3.3 Det horisontella perspektivet.....	16
6.3.4 Likformiga trianglar	17
6.3.5 Användning av likformighet	17
6.4 Didaktiska och pedagogiska mål.....	17
6.4.1 Samarbete	17
6.4.2 Utomhusaktivitet.....	17
6.4.3 Förbättra mätningen	18
6.4.4 Enhetsomvandling	18
6.4.5 Resultat, noggrannhet och felkällor	18
6.5 Upplägg	18
6.5.1 Genomgång	18
6.5.2 Grupperna	19
6.5.3 Mätsituationen	19
6.6 Utvärdering.....	19
6.6.1 Utomhusaktiviteten.....	19
6.6.2 Allmänna praktiska aspekter	19
6.6.3 Mätresultaten.....	20

6.7 Diskussion.....	20
7. Laborationen mätning av höjder med trianglar	21
7.1 Laborationsinstruktion för mätning av höjder	21
7.2 Matematiska och didaktiska tankar	23
7.2.1 Modellen	23
7.2.2 Trigonometri i rätvinkliga trianglar	23
7.2.3 En praktisk uppgift.....	23
7.2.4 Matematikens kraft	23
7.2.5 Samarbete mellan elever	23
7.2.6 Förbättra mätningen	24
7.2.7 Konstruera en kikare	24
7.2.8 Felkällor och rimlighetskontroll.....	24
7.3 Didaktiska och pedagogiska mål.....	24
7.3.1 En praktisk uppgift.....	24
7.3.2 Samarbete	25
7.3.3 Förbättra mätningen	25
7.3.4 Enhetsomvandling	25
7.3.5 Felkällor och rimlighet.....	25
7.4 Upplägg.....	25
7.4.1 Genomgång	25
7.4.2 Gruppindelning.....	26
7.4.3 Uppgiften.....	26
7.4.4 Felkällor och rimlighet.....	26
7.5 Utvärdering.....	26
7.5.1 Aktiviteten	26
7.5.2 Mätinstrumentet	26
7.5.3 Metoden.....	27
7.5.4 Mätningen	27
7.5.5 Rimligheten	27
7.5.6 Diskussion om felkällor.....	27
7.6 Diskussion.....	27
8. Laborationen: Derivata med vasgrafer.....	28
8.1 Laborationsinstruktion	28
8.2 Matematiska och didaktiska tankar med laborationen	31

8.2.1 Modellen	32
8.3 Didaktiska och pedagogiska mål.....	32
8.3.1 Funktionsbegreppet	32
8.3.2 Förändringshastigheter och derivatan i en punkt.....	32
8.3.3 Funktioner och funktioners derivator	32
8.3.4 Den grafritande räknaren	33
8.4 Upplägg.....	33
8.4.1 Tidpunkten	33
8.4.2 Begrepp	33
8.4.3 Gruppen.....	33
8.5 Utvärdering av laborationen	34
8.5.1 Syfte och idé	34
8.5.2 Under laborationen	34
8.5.3 Matematiken	34
8.5.4 Uppgiften.....	34
8.6 Diskussion.....	34
9. Laborationen: Radioaktivt sönderfall med tärningar	35
9.1 Originalversionen av laborationen "radioaktivt sönderfall"	35
9.2 En kort version av laborationsinstruktion för "radioaktivt sönderfall med tärningar"	37
9.3 Matematiska och didaktiska tankar	38
9.3.1 Läroboken.....	38
9.3.2 Modellen	39
9.3.3 Den grafritande räknaren	40
9.3.4 En konkret men överklig situation	40
9.3.5 Matematiken som ett kraftfullt naturvetenskapligt redskap.....	40
9.4 Didaktiska och pedagogiska mål.....	40
9.4.1 Differentialekvationer och exponentiella förlopp.....	40
9.4.2 Radioaktivt sönderfall.....	41
9.4.3 Den grafritande räknaren	41
9.5 Upplägg.....	41
9.5.1 Tidpunkten	41
9.5.2 Kort genomgång	41
9.5.3 Grupperna	41
9.5.4 Uppgiften.....	41

9.6 Utvärdering.....	42
9.6.1 Modellen och arbetsinsatsen	42
9.6.2 Den matematiska modellen	42
9.6.3 Fysiken.....	42
9.6.4 Utvärdering av laborationen	42
9.7 Diskussion.....	43
10. Slutdiskussion	44
10.1 Kontexten	44
10.2 Styrningen	45
10.3 Elevers samarbete och grupparbete	46
10.4 Utvärdering.....	47
Bilaga 1	48
Referenslista.....	49

1. Inledning

Efter att ha studerat matematik och fysik på Stockholms universitet inom kombinationsutbildningen med matematik som första ämne tog jag en gymnasielärartjänst på Hersby gymnasium där jag gjorde min "långa" VFU-period.

Att vara lärare i Matematik är i dagens läge en utmaning, givet dels svenska elevers försämrade resultat i matematik och dels en negativ attityd till ämnet och undervisningen i ämnet. Denna utmaning är det som motiverar mig till att försöka förbättra min undervisning och på så sätt bidra på något sätt till att elever får bättre matematikkunskaper och utvecklar en positiv attityd till ämnet.

Alltför ofta hörs elever klaga på att skolmatematiken är abstrakt, svår, arbetskrävande och t.o.m. trist. Samtidigt växer kraven på nationell nivå på en förändring i matematikundervisning mot ett mer varierat och anpassat arbetssätt.

I nationalencyklopedin definieras laboration som: praktiskt naturvetenskapligt arbete, experiment, vanligen i undervisningssyfte (Nationalencyklopedin 1993, s. 49) och laborativ undervisning som: metoder för undervisning och inläring med stöd av experiment och försök, vanligen i naturvetenskapliga ämnen (Nationalencyklopedin 1993, s. 49).

Den pedagogiska tanken med laborationer kan enklast beskrivas med John Deweys metod "learning by doing" och innebär att eleverna genom ett praktiskt och konkret experiment, uppgift eller problem har möjlighet att upptäcka, studera och använda matematik.

Begränsningarna för laborationer är att de är tids- och materielkrävande, eleverna är ovana vid arbetssättet, stora krav på läraren i uppgiftsformuleringen, under genomförandet och vid bedömningen. Fördelarna är att laborationer erbjuder ett annorlunda upplägg som är mer konkret och verkligt, vilket kan ha effekten att eleverna har lättare att ta till sig och förstå det matematiska innehållet och förhoppningsvis utvecklar mer intresse för och lust inför matematikämnet i stort.

Uppgiften som en lärare står inför vid användning av laborationer är att med begränsade resurser och mot en skeptisk elevattityd förmå att lägga upp en intressant uppgift som alla elever kan finna nytta och glädje i.

Trots mycket forskning inom ämnet så finns inga definitiva slutsatser eller råd i hur arbetet bör läggas upp eller genomföras då varje praktisk situation erbjuder ett stort

antal parametrar som kan påverka resultatet. Arbetet med laborationer är då en ständig process och utveckling utifrån verkliga situationer.

2. Bakgrund

Svenska elevers resultat har försämrats de senaste åren (enligt internationella undersökningar som PISA 2006 och TIMSS 2003). Internationella jämförelser ger inte en rättvis bild; då skillnader i system mellan länderna t.ex. fortlöpande mot kurssystem, skillnader i urval av de deltagande eleverna och en rad andra faktorer. Däremot kan Sverige dels jämföras med "snarlika" länder och dels så kan inte skillnaderna helt förklara det dåliga genomsnitt som Sverige har. Enligt Skolverket "Sveriges genomsnitt har försämrats från 2003 till 2006 enligt Pisa undersökningar" i rapporten "PISA 2006: Svenska 15-åringar presterar sämre i naturvetenskap". (Skolverket 2007)

Enligt en annan rapport med utgångspunkt från TIMSS undersökningar 2003 och 2008 så konstateras en: "Kraftig försämring av gymnasieelevernas kunskaper i matematik och fysik" och "Sverige sämre 2008 än 1995 enligt TIMSS undersökningar".

Några tänkbara förklaringar:

- Eleverna har sämre kunskaper med sig från grundskolan. Därmed måste undervisningstid i gymnasieskolan läggas på repetition av grundskolekunskaper.
- Svenska elever ägnar mycket tid åt individuellt arbete på lektionerna.
- Studier tyder på att undervisningen är mer procedurinriktad och att det ägnas mindre tid åt begreppslig förståelse." (Skolverket 2009)

Jämförelsen är av Sveriges resultat år 1995, 2003 och 2008.

Dessutom konstateras i TIMSS 2008 att försämringen är större bland lågpresterande elever (Skolverket 2009). Dessa elever skulle då gynnas av ett varierat och laborativt arbetssätt som har fördelen att vara mer konkret och verklighetsnära.

Enligt NU 2003 framgår att ca hälften av de svenska eleverna tycker att de lär sig mycket onödiga saker i matematik (Myndigheten för skolutveckling 2004). Det har även framkommit (Myndigheten för skolutveckling 2004) att elevers intresse för matematik är sämre än för andra ämnen. Ämnet beskrivs som svårt och ointressant och eleverna har ingen motivation till att göra sitt bästa i ämnet.

Mot denna dystra bakgrund så växer behovet av att ändra/variera/komplettera matematikundervisningen med andra former än individuellt arbete som helt är beroende av läroboken. Samtidig krävs en ändrad syn på att kvantitet av räknade uppgifter skulle vara av central betydelse. Ett laborativt arbetssätt som är väl genomtänkt och genomfört erbjuder i många fall den önskade variationen.

3. Syfte

Syftet med detta arbete är att utveckla mitt laborativa arbetssätt genom att ta fram ett laborativt arbetsmaterial som introducerar och/eller förklarar vissa centrala matematiska begrepp. Intentionen är att resultatet ska vara praktiskt användbart i undervisningssituationer främst för mig och kanske så småningom för andra lärare som finner delar av mitt arbete användbara i sin undervisning.

Målet är att för vissa centrala begrepp inom matematiken (likformighet, trigonometri, derivata och differentialekvationer) utveckla och planera en laboration för varje begrepp, genomföra laborationen i en verklig undervisningssituation och utvärdera hela processen i syfte att förbättra materialet inför kommande årskurser.

Målet är att ge eleverna en variation och en alternativ väg till förståelsen av de aktuella begreppen och samtidigt själv skaffa en viss erfarenhet av de svårigheter och möjligheter som matematiklaborationer erbjuder. Främst söker jag som lärare att lära mig identifiera och reflektera över resultaten och hitta alternativa upplägg och förbättringsmöjligheter för materialet.

Min fokus ligger på kopplingen mellan didaktiska och pedagogiska tankar och mål, och den återkoppling som observationer och utvärderingar ger.

4. Styrdokument och teori

4.1 Läroplan och kursplan

I Lpo 94 beskrivs kunskap som mångfacetterad och skolan ombeds att ta hänsyn till och planera för att olika kunskapsformer och inlärningssätt ska samverka med varandra.

”Kunskap är inget entydigt begrepp. Kunskap kommer till uttryck i olika former, såsom fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet, som förutsätter och samspelar med varandra. Skolans arbete måste inriktas på att ge utrymme för olika kunskapsformer och att skapa ett lärande där dessa former balanseras och blir till en helhet” (Lpo 94)

I Lpo94 strävans mål står det:

”Skolan skall sträva efter att varje elev

- utvecklar tillit till sin egen förmåga,
- lär sig att utforska, lära och arbeta både självständigt och tillsammans med andra”(Lpo 94)

I lpf94 betonas vikten av samband och erfarenheter:

”Elevernas kunskapsutveckling är beroende av om de får möjlighet att se samband. Skolan ska ge eleverna möjligheter att få överblick och sammanhang, vilket fordrar särskild uppmärksamhet... Eleverna ska få möjlighet att reflektera över sina erfarenheter och tillämpa sina kunskaper” (Lpf 94)

Vidare ombeds lärare att variera sitt arbetssätt och inkludera eleverna i detta:

"Läraren skall:

låta eleverna pröva olika arbetssätt och arbetsformer, och tillsammans med eleverna utvärdera undervisningen"(Lpf 94)

Kursplanerna i matematik uppmuntrar integrering av matematiken i problemlösning i grupp:

"Mål att sträva mot:

Skolan ska i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp ... samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet"(gymnasieskolans kursplan i matematik 2000)

Att visa på matematikens roll som människans sätt att beskriva verkliga fenomen och förlopp:

"Matematikens kraft som verktyg för förståelse och modellering av verkligheten blir tydlig om ämnet tillämpas på områden som är välbekanta för eleverna"

"(gymnasieskolans kursplan i matematik 2000)

"Matematik är en mänsklig tankkonstruktion oh matematisk problemlösning är en skapande aktivitet" "(gymnasieskolans kursplan i matematik 2000)

4.2 Pedagogiska teorier i korthet

John Dewey kallas den funktionella psykologins fader och introducerade begreppet "learning by doing" som kort innebär en aktivitetspedagogik, där all kunskap måste ha nytta och ha anknytning till verkligheten. De mest lärorika övningarna är de som eleverna kan ha verklig nytta av och se som verkliga.

Ett laborativt arbetssätt rekommenderas också utifrån ett socialkonstruktivistiskt perspektiv. Enligt denna teori föredras att eleven är aktiv då hon/han bygger sin kunskap. Mötet med diverse artefakter rekommenderas. Lärandesituationen bör läggas upp utifrån elevens egna erfarenheter och begrepp. Kunskapen ses som distribuerad och det är i mötet och kommunikationen med andra (elever och lärare) som eleven lär sig. Läraren uppmanas att vara aktiv i organisationen av undervisningen.

Enligt kognitivismen med Jean Piaget (1896-1980) som främsta företrädare utvecklas intellektet när eleven gör nya upptäckter och korregerar sin världsbild. "man bör lägga vikt vid att barnet tillägnar sig allt genom sin egen aktivitet; att denna aktivitet utgår från barnets intresse; att barnet är socialt, dvs. att samvaro och utbyte av tankar och

handlingar främjar aktiviteten; att en eventuell styrning och strukturering från pedagogens sida ska ha karaktär av utmaning..” (Jerlang. E 2006, s. 268)

5. Metod

Som redan nämnts så är syftet att planera, genomföra och utvärdera några matematiklaborationer. Under dessa moment har arbetet lagts upp på snarlikt sätt, trots att innehållet har varierat. Nedan följer en allmän beskrivning av metoden.

5.1 Planering

Planeringen börjar med att ta fram en allmän modell för laborationen. Detta går ut på att komma på nya idéer, göra om befintliga modeller eller kombinera idéer (mer specifika detaljer hittas i anslutning till varje laboration). När en modell är framtagen börjar arbetet med att anpassa denna utifrån pedagogiska och praktiska parametrar som är viktiga.

Laborationen måste passa in i planeringen dvs. tidpunkten för laborationen är viktig för att uppnå önskad effekt. Om laborationen kommer då eleverna har fått för lite undervisning om begreppet så kan den upplevas som svår och obegriplig, medan om den ligger efter det att eleverna har fått för mycket undervisning i och kring begreppet så kan den upplevas som för lätt och meningslös. Dessutom måste tid avsättas för laborationen som inte påverkar den vanliga undervisningen så att denna blir lidande.

Viss hänsyn måste tas till lärobokens upplägg och introduktion av begreppet så att laborationen har en tydlig koppling till vad eleverna har och kommer att lära sig med hjälp av läroboken. Avviker laborationen för mycket från läroboken så kan den upplevas som främmande och poänglös, medan om den slaviskt följer läroboken så faller poängen för aktiviteten då det bara är en upprepning av innehåll.

Laborationen ska vara anpassad för att kunna genomföras på en timme (klocktimme) av alla elever oavsett nivå samtidigt som den inte får vara för kort för de snabbaste eleverna, då dessa kommer i så fall att sitta inaktiva för länge.

Undervisningsgruppen är av stor betydelse då grupperna är s.k. nivågrupperade till normalgrupper där det övervägande är lågpresterande elever och fördjupningsgrupper där det mest går högpresterande elever. Detta gör att laborationen måste i vissa fall förenklas (t.ex. genom att utelämna vissa moment eller ge mer ledning och instruktioner) och i andra fall utökas med fler moment eller extra uppgifter med relativt lite ledning och instruktioner.

Tekniska hjälpmedel såsom grafitande räknare eller dator måste integreras på ett ”smart” sätt så att de används som verktyg och inte blir dominerande och ”skymmer” det matematiska innehållet. Samtidigt måste elevernas vana att hantera dessa hjälpmedel studeras och i nödvändiga fall måste de få instruktioner och vägledning i det rent ”tekniska”.

En viss anpassning måste ske utifrån tillgängligt materiel på skolan. Det måste finnas tillräckligt med materiel för att alla grupper (av önskad storlek) ska kunna laborera bekvämt.

5.2 Genomförande

Den skriftliga laborationsinstruktionen börjar med en kort introduktion till uppgiften och är menad som en viss förankring i något som eleverna kan relatera till. I aktuella fall ingår det kanske en kort historisk berättelse eller referens.

Utifrån inledningen beskrivs bakgrunden och syftet kortfattat men ändå tillräckligt för att vara tydlig för eleverna. Målet med laborationen specificeras så att eleverna förstår vad de ska göra.

Utförandet av laborationen beskrivs i olika steg beroende på önskad svårighetsgrad och resultatredovisningsformen anges. Önskad tolkning och diskussion av resultatet kommer på slutet och ibland ges även en extra uppgift som syftar till att testa förståelsen i samband med slutresultatet.

Innan laborationen börjar har jag en muntlig genomgång där jag går igenom laborationsinstruktionen i syfte att förtydliga innehållet och se till så att alla elever vet vad som förväntas av dem. Denna genomgång är mer eller mindre utförlig beroende på gruppnivå, frågor från elever och laborationens komplexitet.

Under laborationen är det viktigt att noga observera processen och uppmana elever till eftertanke och inte ge för mycket ledning. Däremot måste elever som "kört fast" hjälpas att komma vidare. Ett annat skäl till observation är att jag kan identifiera eventuella problem som eleverna stöter på som kan vara till hjälp för att förbättra laborationsuppgiften i framtiden.

5.3 Utvärdering

Förutom små korta diskussioner med eleverna under laborationens gång har jag en kort genomgång/diskussion direkt efter att eleverna är klara med uppgiften. Målet med denna är att studera och diskutera elevernas resultat och spontana reaktioner.

Eleverna får även fylla i ett utvärderingsformulär för ge sina synpunkter på hela laborationen. Se Bilaga 1.

Utvärderingsformuläret består av öppna frågor som har fördelen att ofta innehålla mer information jämfört med kryss- eller flervalsfrågor. Detta är enligt mig att föredra då målet för utvärderingen är att förbättra laborationen och inte att föra statistik.

Frågorna på formuläret riktar in sig på helhetsintrycket; dvs. den allmänna känslan hos eleverna. Arbetsinsatsens rimlighet bedöms dvs. om laborationen är för krävande eller om det är ont om tid för att genomföra uppgiften.

Eleverna ombeds beskriva vad som var bra och dåligt med laborationen helt öppet. Förhoppningen är att eleverna ska berätta vad de tycker utan att vara bundna till någon specifik aspekt.

I anslutning till detta ombeds eleverna ge förbättringsförslag utifrån sin kritik. Detta kan också avslöja eventuella delar som är otydliga eller komplicerade.

En annan fråga riktar in sig på det pedagogiska resultatet dvs. om laborationen gav en bättre förståelse för begreppet som behandlas. Eleverna kanske inte kan bedöma detta fullt ut, men vissa insikter och indikationer kan ändå uppmärksammas.

Allt som framkommer genom diskussioner, observationer och formuläret måste analyseras i syfte att identifiera de delar/uppgifter som kan förbättras eller ändras.

6. Laborationen: mätning av avstånd

Eftersom jag är relativt ny i rollen som lärare så har jag märkt att jag tenderar att vilja inkludera alldeles för mycket information. Detta medför en risk att laborationen såsom jag tänkte mig den kanske inte riktigt passar för det aktuella laborationstillfället eller gruppen. Laborationen måste ibland anpassas redan innan den ska genomföras. Nedan följer en originalversion för denna laboration följt av en anpassad version.

6.1 Originalversionen Mätning av avstånd

Mätning av avstånd med trianglar

Inledning och bakgrund

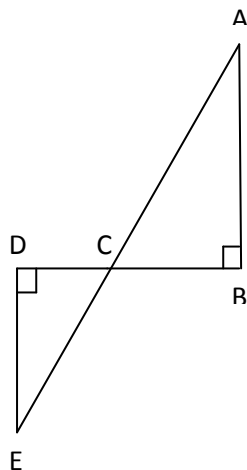
Geometri betyder "jordmätning". Det var så denna del av matematiken uppstod för mer än 2000 år sedan. Under historiens gång har människans behov av att kunna mäta geometriska/fysiska storheter i sin omgivning bara ökat och varierats. Nuförtiden har vi mätutrustning för det mesta. Men det finns situationer då vi inte har tillgång till utrustning. Då är det bra om vi kan andra metoder för mätning av t.ex. avstånd eller höjd. Även om vi har tillgång till utrustning så är det bra att kunna principerna bakom de mättekniker som apparaterna använder.

De begrepp som vi kommer att använda i den här laborationen är likformighet och trigonometriska samband i en rätvinklig triangel.

Mätning av avstånd

Tänk dig att du står på stranden och tittar på en färja ganska långt ut i havet. I handen har du en pinne. Hur kan du bestämma avståndet till färjan?

En grekisk filosof och naturvetare vid namnet Thales kom med svaret. Du tittar på färjan (vi kallar punkten A) och du står i en punkt vi kallar B på stranden, sedan vrider du 90 grader och går några steg (alltså vinkelrätt mot AB) och sedan trycker ner pinnen i sanden så att den står lodrätt. Pinnen står i punkt som vi kallar C. Gå från C några steg i riktning BC (samma riktning som du gick nyss, bort från B) och stanna. Vi kallar den punkt som du stannar vid för D. Vänd dig så att du har havet bakom dig och sedan börja gå. Gå tills du ser att du, pinnen och färjan ligger i linje. Kalla punkten där du stannade för E.



Triangelarna ABC och CDE har samma vinkel i C och en rät vinkel i B respektive D. Två trianglar som har två vinklar som är lika är likformiga. Detta betyder att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika. Alltså:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}$$

Genom att mäta BC, CD och DE kan vi sedan enkelt räkna ut AB.

Uppgift:

I grupper om 3-4 elever kommer ni nu att använda metoden för att mäta några avstånd.

Materiel:

Ett långt måttband, packtejp.

Utförande:

Placera ut en elev någonstans på gården (Denna elev kommer att vara färjan dvs. punkten A). Placera ut en annan elev på ett lagom avstånd (Ett avstånd som är relativt lätt att kontrollmäta med måttbandet!). Denna elev står nu i punkten B. Markera punkt B med tejp. Vrid 90 grader till vänster och ta några lika långa steg som du räknar, stanna i punkt C. Placera ut en elev i C. Ta några steg till som du räknar och stanna i punkten D. Markera punkten D med tejp. Vrid 90 grader till vänster och börja gå, räkna dina steg och stanna när du och dina två kamrater i helt i linje. Fyll i dina avstånd i tabellen nedan och räkna sedan ut avståndet AB. Det avstånd som du har fått är i steg, mät upp ett steg och räkna sedan om avståndet AB till meter. Kontrollmät avståndet AB med måttbandet och jämför ditt resultat med detta.

Resultattabell:

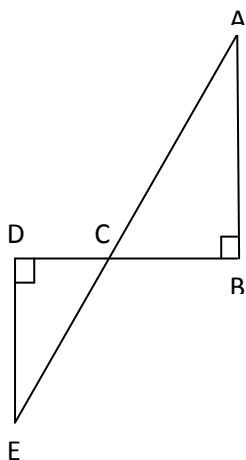
	1	2	3	4	5
BC					
CD					
DE					
AB (i steg)					
AB (i meter)					
AB (mätt)					

- 1- Hur väl stämmer dina resultat? Fundera över vilka felkällor som vi har i det här experimentet!
- 2- Hur kan vi välja avstånden BC och CD för att underlätta mätningarna och uträkningen av det sökta avståndet?

Versionen som testades på eleverna

Tänk dig att du står på stranden och tittar på en färja ganska långt ut i havet. I handen har du en pinne. Hur kan du bestämma avståndet till färjan?

En grekisk filosof och naturvetare vid namnet Thales kom med svaret. Du tittar på färjan (vi kallar punkten A) och du står i en punkt vi kallar B på stranden, sedan vrider du 90 grader och går några steg (alltså vinkelrätt mot AB) och sedan trycker ner pinnen i sanden så att den står lodrätt. Pinnen står i punkt som vi kallar C. Gå från C några steg i riktning CD (samma riktning som du gick nyss) och stanna. Vi kallar den punkt som du stannar vid för D. Vänd dig så att du har havet bakom dig och sedan börja gå. Gå tills du ser att du, pinnen och färjan ligger i linje. Kalla punkten där du stannade för E.



Triangelarna ABC och CDE har samma vinkel i C och en rät vinkel i B respektive D. Två trianglar som har två vinklar som är lika är likformiga. Detta betyder att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika. Alltså:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}$$

Genom att mäta BC, CD och DE kan vi sedan enkelt räkna ut AB.

Uppgift:

I grupper om 3-4 elever kommer ni nu att använda metoden för att mäta några avstånd.

Materiel:

Mätband, plastkoner

Utförande:

Ställ dig vid den ena fasta konen och titta rakt på den andra, du är nu vid punkt B. Vrid 90 grader och gå några jämna steg som du räknar. Du är nu vid punkt C. Gå nu några steg till som du räknar så kommer du till punkt D. När du nu står vid punkt D vrid 90 grader så att du går bort från A medan du mäter dina jämna steg och med jämna mellanrum tittar snett tillbaka på punkt A. När du har punkterna C och A i linje med din synlinje så ska du stanna. Du är nämligen framme vid punkt E.

Du kan nu räkna ut avståndet AB. Kontrollmät AB genom att stega. Omvandla dina resultat till meter och för in resultaten i tabellen på redovisningsbladet. Gå vidare till nästa avstånd som ska mätas.

6.3 Matematiska och didaktiska tankar

6.3.1 Användbarheten av likformighet i verkligheten

Det som oftast är problematiskt för elever (och ibland även för vuxna) är att inse matematikens användbarhet i praktiska situationer. I denna laboration är ett av målen att eleverna ska få använda en matematisk metod för att utföra en praktisk uppgift (mätning av ett avstånd). Genom att använda likformighet är förhoppningen att elever ska få en bättre förståelse för begreppet samtidigt som de får insikt i hur matematiken kan (och har genom tiderna!) förenkla livet.

6.3.2 Det historiska perspektivet och tankens kraft

Eftersom laborationen inte kräver någon större utrustning så är det naturligt att undra hur det är möjligt att mäta ett avstånd med en acceptabel noggrannhet utan någon större ansträngning. Svaret kan bara ligga i matematiken som är inblandad; i det här fallet begreppet likformighet. Detta ger ett visst svar och insikt i hur matematiken utvecklades som en mänsklig konstruktion för att lösa verkliga problem. Detta får en att vilja blicka tillbaka på historien; i det här fallet tillbaka till Thales och den grekiska tiden då människor med all säkerhet hade färre instrument och redskap än vi har idag men klarade av vardagen genom att utveckla matematisk kunskap och använda den.

Eleverna får mäta avstånden i steg i den här laborationen. Ett skäl är att skolan inte hade så långa mätband. Ett annat är att människor genom historien har mätt i steg, så förhoppningen är att det ska ge en viss "historisk känsla" av enkelhet. Dessutom har steg (och är fortfarande på vissa håll i världen) en enhet för mätning av avstånd.

6.3.3 Det horisontella perspektivet

Det genialiska i Thales metod som används i den här laborationen, är att han kunde se problemet uppifrån dvs. kunde få ett horisontellt perspektiv av situationen dvs. trianglarna. Genom att vrida trianglarna 90 grader får betraktaren dvs. Thales och nu eleverna ett enklare perspektiv att arbeta med!

Denna förmåga lärs enligt min mening inte ut på ett direkt sätt. Dessutom tar nog utvecklingen av denna färdighet mycket lång tid och övning. Tanken är att visa färdigheten och få elever att "känna" på den och i viss mån öva på den.

6.3.4 Likformiga trianglar

Problemet i den aktuella situationen är att den "intressanta" triangeln är oåtkomlig för mätning; ute till havs. Det starka "draget" är att relatera den till en triangel som är åtkomlig med hjälp av likformighet.

Triangelarna har naturligt en vinkel som är lika; med spetsen i pinnen/konen. Konstruktionen med en rät vinkel i varje triangel gör så att dessa blir likformiga.

Tanken här är att lära in alternativt förstärka detta kriterium för likformighet dvs. två trianglar som har två vinklar som är lika är likformiga.

6.3.5 Användning av likformighet

Likformighet innebär ju att förhållandet mellan motsvarande sidor är densamma dvs. kvoten av två motsvarande sidor är lika med kvoten av två andra motsvarande sidor. Det enklaste fallet är när triangelarna konstrueras så att de är kongruenta (lika stora). Fördelen med detta förhållande är att det sökta avståndet fås direkt utan beräkning; så fort eleven har pinnen och båten i linje.

En nackdel uppstår om det avstånd som ska mätas är stort. Det kan vara omständligt att "stega" och t.o.m. omöjligt om det inte finns tillräckligt med plats dvs. stranden/fotbollsplan inte är tillräckligt bred.

Eleverna får reflektera över hur mätningen kan underlättas i en situation då nackdelen med kongruenta trianglar uppstår. Tanken är att "manipulera" förhållandet mellan trianglarna så att det avstånd som motsvarar det sökta avståndet blir kortare.

Detta kan visa på ännu en fördel med likformighet som anger ett förhållande till skillnad från en formel som ger ett "fast" resultat.

6.4 Didaktiska och pedagogiska mål

6.4.1 Samarbete

Uppgiften är sådan att den lämpar sig för att flera elever hjälps åt, även om det inte är omöjligt för en person att utföra mätningen. Den sökta fördelen med ett samarbete är att eleverna diskuterar begreppet, mätningen, metoden och för- och nackdelar med varandra. Detta hoppades jag skulle få dem att lära av varandra och att "prata" matematik med varandra.

6.4.2 Utomhusaktivitet

Uppgiften är praktisk i den bemärkelsen att det finns ett precist mål; mäta ett visst avstånd. Det avstånd som avses i originalversionen av problemet lämpar sig inte att

representeras inomhus inte ens i en stor hall eftersom eleverna har en viss uppfattning om hur stor rummet/hallen är och kan uppskatta avstånd med hjälp av det. Utomhus är det svårare att uppskatta avstånd; även om eleverna säkert vet att ett fotbollsplan är ca 100 meter långt osv.

En annan fördel är att eleverna mår bra av att komma ut och röra på sig och när de har en uppgift att lösa är de inte ens medvetna om detta.

6.4.3 Förbättra mätningen

När eleverna har fått känsla för metoden/problemet får de reflektera över att ändra förhållandet mellan tringlarna i syfte att underlätta mätningen. För mätning av ett avstånd kommer en byggnad att vara i vägen om man använder "kongruenta" trianglar dvs. 1:1 förhållande. Det som söks här är en förståelse för metoden och känsla för dess flexibilitet.

6.4.4 Enhetsomvandling

Avstånden mäts i steg på grund av dels att vi inte har tillgång till väldigt långa mätband och dels att visa på det enkla historiska perspektivet. Ett annat mål är att eleverna ska kunna omvandla steg till meter; alltså att öva enhetsomvandling. Ett praktiskt problem uppstår med denna omvandling; ska man mäta ett steg, fem steg eller tio steg? Vad får det för utslag? Målet är att visa att mätfelet minskas om man mäter flera steg.

6.4.5 Resultat, noggrannhet och felkällor

När eleverna har fått ett resultat ombeds de kontrollera det aktuella avståndet. Detta stillar en viss nyfikenhet och ger upphov till jämförelser och reflektioner över resultatets överensstämmelse med verkligheten och resultatets rimlighet som i sin tur kanske utvecklar vissa elevers rumsuppfattning. Detta leder på ett relativt direkt sätt in på möjliga felkällor som skulle kunna förklara vissa avvikelser från det kontrollerade värdet. Vissa felkällor som går att förutse är: Att hålla jämna steg, att gå rakt, att kunna vrida 90 grader utan hjälpmedel, att använda lämpligt förhållande (inte för stort men inte heller för litet!), att ha en bra enhetsomvandling från steg till meter.

6.5 Upplägg

6.5.1 Genomgång

Innan laborationen gjordes en genomgång med eleverna som redan kände till begreppet likformighet. Det fall som genomgången handlade om var det kongruenta fallet dvs. när trianglarna har förhållandet 1:1. Vikt lades också på att dels visa att konstruktionen gör så att trianglarna delar två vinklar som i sin tur gör de likformiga, och dels på att visa att det går att vika ner den ena triangeln på den andra; alltså kongruens.

Originalsituationen med en båt gör konstruktionen värdefull då den möjliggör en indirekt mätning av en otillgänglig sträcka.

Nästa fråga som naturligt uppstod är hur bra noggrannhet detta gav och det var det som eleverna praktiskt skulle ta reda på. Eleverna ombads att tänka på omvandlingen mellan steg och meter skulle ske.

6.5.2 Grupperna

Eleverna delades in i grupper om fyra. Indelningen skedde slumpmässigt genom att dela ut spelkort till var och en och sedan fick all äss bilda en grupp, alla kungar tillsammans osv. Eleverna fick tipset att fördela arbetsuppgifterna mellan sig; hur detta skulle ske fick de själva komma överrens om.

6.5.3 Mätsituationen

Fyra plastkoner av olika färg ställdes ut på skolans fotbollsplan så att de bildade en fyrhörning med olika sidlängder och där diagonalerna inte var lika med någon sida. Grupperna skulle mäta fyra avstånd bland de sex avstånd som fyrhörningen erbjuder. På detta sätt så skulle eleverna vara sysselsatta med mätning hela tiden då det alltid måste finnas "ett ledigt avstånd" att mäta. Varje grupp fick tre plastkoner av samma färg som skulle vara markeringskoner (mätkoner). Efter varje mätning skulle eleverna kontrollera det aktuella avståndet i steg. Syftet med detta var att ha något resultat att jämföra med.

6.6 Utvärdering

Utvärderingen av laborationen baseras på dels på svaren från utvärderingslappen som eleverna fick fylla i och dels på spontana reaktioner, frågor och observationer under själva laborationen.

6.6.1 Utomhusaktiviteten

De allra flesta elever uppskattade att aktiviteten var utomhus. Detta var i sig roligt och kändes mer verkligt. Någon enstaka elev tyckte att det var lite kyligt och inte så roligt så tidigt på morgonen (Mellan 8.00 och 9.00).

6.6.2 Allmänna praktiska aspekter

Tiden räckte för alla elever och de tyckte att det var en rimlig arbetsinsats. Den grupp som var klar först hade tio minuter över och sista gruppen var klar precis vid tidens slut.

Några elever hade lite svårt att komma igång med mätningen och fick lite hjälp att relatera uppgiften till den verkliga situationen. Vissa elever reagerade också när de fick avvikande resultat från kontrollmätningen och ville ha hjälp att göra om mätningen för att få ett bättre resultat. För dessa tog det längre tid att bli klara och de upplevde mätningen som tekniskt svår. Några grupper fick vänta lite då kommunikationen mellan grupperna inte fungerade felfritt. Problemet var dels att hitta ett avstånd mitt i röran av all elever och koner. Vissa elever började diskutera sina resultat direkt efter kontrollmätningen och tänkte inte på att ta bort sina koner så att en annan grupp fick

tillgång till deras avstånd. Det hände också att två grupper ville mäta samma avstånd och ena gruppen blev erbjuden ett annat alternativ.

En grupp mätte fel då de mätte till en annan grupps mätkon och inte till den kon som var fast. En stund senare togs den aktuella mätkonen bort och eleverna fick börja om vilket orsakade lite frustration.

6.6.3 Mätresultaten

Resultaten av mätningarna varierade mellan en överrensstämmelse på ett steg när till uppemot nio steg. På detta blev reaktionerna varierande. De grupper som fick bättre överrensstämmande resultat var glada och förvånade över att metoden var användbar i ett praktiskt sammanhang och imponerade över att mätnoggrannheten kunde vara så god. Elever som fick mer avvikande resultat blev besvikna och vissa frustrerade och tyckte att det hela var bökigt. De var dock ganska medvetna om vissa möjliga orsaker till att mätresultatet inte stämde så bra med det förväntade resultatet. Först tyckte eleverna att det var lite svårt att hålla lika långa steg; speciellt när antalet steg var litet. Ett annat problem var att gå helt rakt och i en given riktning samtidigt. Ett tredje problem var att vrida 90 grader och hålla den riktningen.

Ett problem med mätsituationen som nog gjorde att mätsvårigheterna ovan fick stora utslag, var att avstånden som skulle mätas var stora. Detta innebär att en liten avvikelse i vinkel och/eller riktning gav ett större fel.

Gemensamt för de flesta elever är att de tyckte att idén var smart och löste ett problem med enkla, små medel

6.7 Diskussion

Laborationen som helhet var uppskattad inte minst att aktiviteten skedde utomhus. Eleverna skrev långt senare i sin kursutvärdering att de hade uppskattat aktiviteten. Frågan i utvärderingen var om de fick en varierad undervisning. Modellen kan betraktas som användbar men kanske kan eller behöver förbättras.

En förbättring i genomgången innan är att mer koppla teorin till praktiken; kanske genom ett exempel som knyter an till den praktiska mätningen. Gruppstorleken var nog bra men gruppindelningen kanske kan göras med större eftertanke på elevernas nivåer.

Eleverna kan öva att stega innan de utför mätningen; t.ex. genom att de får stega ett känt avstånd. Detta kan också användas som övning i att gå rakt. En annan idé är att använda ett snöre/rep för att hålla linjen. Detta kan kanske kombineras med användningen av en gradskiva för att få exakt 90 grader.

En fördel är om avstånden inte är allt för långa så att felmarginalerna blir stora och överskuggar målet med hela mätningen; dvs. användbarheten och vikten av begreppet

likformighet. Avstånden får dock inte bli för korta för då faller hela metoden och upplägget.

I det praktiska upplägget kan antalet avstånd som kan mätas utökas för att minimera väntetider och krockar. Dessutom skulle man kanske styra ordningen för mätningen så att eleverna har ett schema att följa. Detta skulle kanske underlätta logistiken men samtidigt så kan det kanske gå ut över det önskade samarbetet eleverna emellan. Det kan också påverka elevernas känsla att de planerar och utför en uppgift själva och den ansvarskänsla som detta för med sig.

De mätkoner som används skulle kunna vara av samma färg för alla grupper så att mätkonerna skiljer sig från de fasta konerna. Detta skulle minimera sammanblandningar.

Till sist en fundering om att ha ett avstånd som inte skulle gå att mäta med 1:1 förhållande och på så sätt tvinga eleverna att använda ett annat förhållande t.ex. 1:2. Detta skulle kanske fungera för en duktig stark grupp medan det skulle vara svårt; eventuellt hämmande för en svagare grupp.

7. Laborationen mätning av höjder med trianglar

7.1 Laborationsinstruktion för mätning av höjder

Mätning av höjder

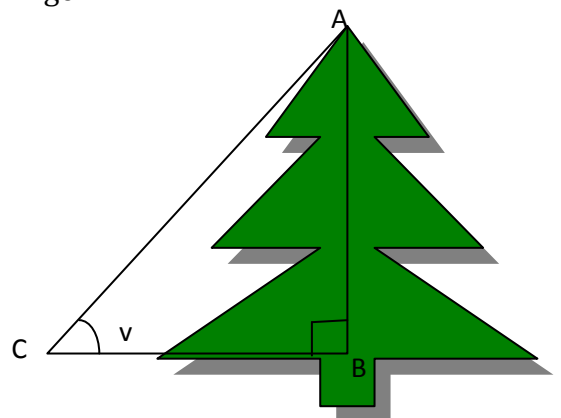
Du och en kompis står och tittar på ett högt träd och ni undrar hur högt trädet kan vara. Höjd är som bekant svårare att uppskatta än avstånd. Men med lite kunskaper i geometri kan ni t.o.m. mäta höjden på trädet.

Teori

När du står och tittar på trädet så bildar höjden, avståndet till trädet längs marken och avståndet mellan dig och trätoppen en rätvinklig triangel. Den räta vinkeln är då mellan själva trädet och markriktningen.

Trigonometriska samband i en rätvinklig triangel:

$$\sin(v) = \frac{AB}{AC} \quad , \quad \cos(v) = \frac{CB}{AC} \quad , \quad \tan(v) = \frac{AB}{BC}$$



Alla tre samband innehåller tre storheter. Två av dem innehåller AB som är höjden vi söker. Men för att kunna bestämma AB så måste de andra storheterna vara kända eller åtminstone vara möjliga att mäta.

Det enda samband som uppfyller detta är: $\tan(v) = \frac{AB}{BC}$

Avståndet BC kan vi mäta och vinkeln v kan vi bestämma/mäta. Om vi dessutom väljer $v=45^\circ$ så får vi:

$$\tan(v) = 1, \text{ alltså } \frac{AB}{BC} = 1 \text{ vilket innebär } AB = BC$$

Om vi mäter avståndet CB så får vi reda på trädets höjd AB genom att till BC addera höjden mellan marken och punkten C.

Uppgift

I grupper om 3-4 elever använda metoden för att mäta några höjder.

Materiel

Gradskiva, ett sugrör/annat rör, ett mätband, tejp.

Utförande

Börja med att tejpa fast sugröret på gradskivan i en riktning som bildar 45 grader mot basen av gradskivan. Träna lite på att titta genom sugröret samtidigt som basen av gradskivan är parallell med marken. Bestäm ett en bekväm höjd att ha din "kikare" på. Denna höjd mäter vi och behåller genom hela laborationen.

Mät nu höjden på några träd/hus/flaggstång genom att titta i kikaren samtidigt som du går bort från trädet tills du ser trädtoppen. Stanna och låt dina kamrater mäta avståndet från trädet till dig. Mätning sker med mätband eller genom att räkna steg och sedan omvandla till meter. För in dina resultat i tabellen nedan:

	1	2	3	4
Avståndet BC				
Totala höjden				

1. Verkar dina resultat rimliga? Vilka felkällor finns det?
2. Kan vi välja vinkel på ett sätt som underlättar mätningen

7.2 Matematiska och didaktiska tankar

7.2.1 Modellen

Inspirationen fick jag från en uppgift i nämnares uppslagsbok. Uppgiften där går ut på att mäta en höjd på precis samma sätt men bara genom att använda vinkeln 45 grader. Dessutom relaterar den inte till något trigonometriskt samband. Resonemanget är att om en vinkel är rät och den andra vinkeln är 45 grader så måste den tredje vinkeln vara 45 grader. Detta leder till att den rätvinkliga triangeln måste vara likbent dvs. höjden och kateten längs marken vara lika. Jag tyckte att uppgiften var bra men ville bygga på den lite genom att ställa upp förhållandet mellan höjden och avståndet längs marken med ett trigonometriskt samband. Detta skulle hjälpa mig att använda trigonometri i en laboration samtidigt som det gav en flexibilitet vad gäller vinkeln dvs. det går att mäta med en annan vinkel och resultatet blir ett annat förhållande mellan höjden och den andra kateten i triangeln. Detta faktum kan användas för att för att underlätta mätningen så att eleverna får mäta en kortare sträcka längs marken. Detta skulle då ge en bättre förståelse för det trigonometriska sambandet.

7.2.2 Trigonometri i rätvinkliga trianglar

Till skillnad från likformighet mellan två trianglar så innebär ett trigonometriskt samband en kvot mellan två sidor i samma rätvinkliga triangel och en relation till en vinkel i triangeln. Sidorna kan ha vilka längder som helst så länge de har en viss kvot. I ett trigonometriskt samband kan eleverna räkna ut den önskade höjden om de känner till vinkel och kateten längs marken.

7.2.3 En praktisk uppgift

Mätuppgiften är simpel och lätt att ta till sig. Många har säkert undrat hur högt ett hus/träd eller något annat är. Många har säkert också reagerat när de har åkt fritt fall på Gröna Lund (ca 80 meter högt) över den svindlande höjden. Vår uppfattning om avstånd skiljer sig från vår uppfattning om höjd. Det är nog så också att vi uppfattar höjd på olika sätt om vi tittar nerifrån och upp mot om vi tittar uppifrån och ner.

Dessa aspekter gör att det är lätt för elever att anamma uppgiften och göra den till sin egen alltså att deras nyfikenhet väcks vilket leder till engagemang.

7.2.4 Matematikens kraft

Det är det matematiska begreppet möjliggör i den här situationen en mätning som annars skulle kräva större resurser. Detta visar på matematikens kraft och tankens kraft. Förhoppningen är att eleverna upptäcker detta och kanske fascinerar av det. Resultatet skulle i så fall bli ett större intresse för matematiken allmänt eller åtminstone för geometri. En annan effekt är att matematiken knyts till en praktisk och vardaglig situation vilket gör den mer levande och aktuell och samtidigt mer intressant.

7.2.5 Samarbete mellan elever

Uppgiften är av praktisk karaktär vilket ställer krav på eleverna att få en rimlig mätnoggrannhet. För detta behöver de dels konstruera ett instrument/kikare och dels

mäta ett avstånd samtidigt som de hanterar sina instrument rätt dvs. håller kikaren parallell med marken och på samma höjd hela tiden.

Att pricka trädets topp eller husets tak kan också vara problematiskt. Detta leder till att eleverna måste få till ett effektivt samarbete för att utföra uppgiften.

7.2.6 Förbättra mätningen

Problemet för eleverna är att hantera sina instrument och gå en relativt lång sträcka samtidigt. En förenkling är om sträckan de måste gå är kortare. I vissa situationer kan det också vara så att avståndet längs marken är blockerad av t.ex. en byggnad och det mätta avståndet måste kortas. Detta leder till att eleverna måste lösa ett praktiskt problem genom att ändra vinkel dvs. ändra förhållandet mellan höjden och det mätta avståndet. Genom att göra detta fås eleverna att reflektera över sambandet och förhoppningsvis förstå det.

7.2.7 Konstruera en kikare

För att genomföra uppgiften är eleverna tvungna att konstruera ett instrument som består av en gradskiva (vanlig skolmodell) på vilken de fäster ett sugrör/annat rör i en given riktning till att börja med 45 grader. Denna riktning måste kunna ändras, så röret kan inte limmas fast i skivan samtidigt som det inte får vara för löst för då blir inte riktningen exakt. Denna uppgift kräver lite handarbete, koncentration och samarbete mellan eleverna för att få till ett fungerande instrument. Här är tanken att elever ska motivera och engagera varandra och tillslut få sin belöning i form av ett välbyggt instrument.

7.2.8 Felkällor och rimlighetskontroll

Ett problem med denna laboration är att det är svårt att kontrollmäta höjder. Däremot kan man alltid ha en diskussion om resultatets rimlighet genom att t.ex. räkna våningar, jämföra med en någorlunda känd höjd eller ta reda på hur högt ett visst träd kan bli. En annan diskussion kan man ha om vilken mätnoggrannhet man kan förvänta sig utifrån uppgiftens upplägg.

Nyttigt är också att elever lär sig identifiera felkällor och uppskatta hur mycket fel det blir i olika situationer t.ex. om instrumentet inte är parallellt med marken, eller om instrumentets höjd ändras.

7.3 Didaktiska och pedagogiska mål

7.3.1 En praktisk uppgift

Uppgiften är konkret i den bemärkelse att det finns ett givet mål som är att mäta några olika bestämda höjder. Målet är dessutom ganska rimligt då det är i vissa situationer intressant att veta hur hög skolbyggnaden är t.ex. Denna uppgift kräver vissa

förberedelser i form av att förstå mätsituationen och tillverka ett hjälpmedel (kikare) för att använda i mätsituationen. Mätinstrumentet utgör ett konkret mål för förberedelserna och innebär i sig en praktisk konstruktionsuppgift som kräver en viss färdighet, tålamod och även samarbete.

7.3.2 Samarbete

Genom alla delar av laborationen förberedelse, mätning och diskussion och redovisning krävs att flera elever hjälps åt för att utföra uppgifterna. Detta leder till att eleverna måste diskutera med varandra när de ska planera, utföra och värdera uppgiften. I den diskussionen har de möjlighet att lära av varandra, rätta varandra, jämföra olika sätt och allmänt prata matematik.

7.3.3 Förbättra mätningen

Målet är att eleverna ska få en förståelse för det trigonometriska sambandet och dess användbarhet. Elever kommer dels att ombes reflektera över hur mätningen kan förenklas och dels försöka mäta en höjd som inte går att mäta med en 45-graders vinkel. I de diskussioner som uppstår är förhoppningen att eleverna själva ska komma på att ändra vinkeln för att få ett kortare avstånd att mäta.

7.3.4 Enhetsomvandling

Eleverna kommer att mäta avståndet längs marken i steg och kommer att behöva konvertera resultatet till meter innan de lägger på kikarens höjd över marken för att få ett resultat. Det är samma övning som i laborationen "avståndsmätning med likformighet".

7.3.5 Felkällor och rimlighet

Det är relativt många faktorer som kan gå fel vilket kan påverka det slutgiltiga resultatet. Målet är att eleverna ska lära sig att känna igen dessa och få en uppfattning om de olika faktorernas vikt. Detta leder indirekt till en förståelse av metoden, begreppet och utvecklar det logiska och naturvetenskapliga tänkandet. Målet är att eleverna främst ska diskutera med varandra men även kan få viss hjälp på traven av läraren (mig).

Resultatets rimlighet är också värd att diskutera speciellt relativt mätmetoden. Hur bra noggrannhet kan man förvänta sig? Hur stort är det i förhållande till resultatet (relativt fel!)? Hur kan man få en uppfattning om rimligheten?

7.4 Upplägg

7.4.1 Genomgång

Genomgången inför laborationen var uppdelad i två delar. Den ena delen var en teorigenomgång om trigonometriska samband i en rätvinklig triangel med tyngdpunkten på relationen mellan en vinkel och det förhållande mellan sidorna som ett trigonometriskt samband faktiskt representerar. Några exempel visades med olika vinklar och vad de trigonometriska sambanden gav för dessa. Tolkningen i kvot mellan två sidor i triangeln gjordes i alla exempel. Den andra delen handlade om själva

uppgiften och mätningen. Eleverna fick förslag på hur de skulle sätt ihop sina kikare men fick själva bestämma hur de skulle göra i slutändan. Eleverna blev också varnade om att det var en del som kunde vara lite knepigt att få till med själva mätningen.

7.4.2 Gruppindelning

Eleverna delades in i grupper om fyra. Indelningen var slumpmässig precis som i laborationen "mätning av avstånd med likformighet". De ombads också att fundera över uppdelningen av arbetsuppgifter sinsemellan. Ett exempel är att en elev hanterar kikaren en elev kontrollerar det hela, två elever hjälps åt att stega och anteckna/räkna. Gruppstorlekarna kändes rimliga och eleverna accepterade indelningen utan protester.

7.4.3 Uppgiften

Eleverna fick reda på vilka höjder som skulle mätas. Huvudbyggnaden, idrottshallen, en annan byggnad (F-huset) och ett gammalt träd. Det så kallade F-huset ligger i utkanten av skolområdet och har två sidor mot vägar, en sida mot matsalen och den fjärde sidan mot en lutning. Detta fick bli den svåra uppgift som eleverna fick lista ut hur de skulle lösa.

7.4.4 Felkällor och rimlighet

Eleverna ombads att under laborationen diskutera med varandra för att identifiera felkällor och avgöra deras effekt på resultatet. De ombads också att tänka på ett sätt att kontrollera rimligheten i sina resultat.

7.5 Utvärdering

7.5.1 Aktiviteten

De flesta elever tyckte att laborationen var meningsfull och rolig. Vissa elever klagade över svårigheter att sätta ihop sin kikare så att den höll hela vägen, andra klagade över svårigheter att hantera kikaren dvs. hålla den rak osv. Andra tyckte att laborationen innehöll många moment och kändes mer som ett projekt. De flesta elever höll dock med om att uppgiften var rimlig och att alla moment var lagom svåra var för sig.

7.5.2 Mätinstrumentet

Vissa elever upplevde hopsättningen som enkel men hållfastheten som svårare. De flesta löste det med en stor mängd tejp då de inte fick limma eller permanent sätta fast röret. Motiveringen var att fler elever skulle kunna använda gradskivorna och att de var skolans egendom. Båda argumenten är i högsta grad sanna men att instrumentet skulle vara omställningsbar fick eleverna upptäcka själva. Många elever tyckte ändå att det roligt att sätta ihop ett instrument. Vissa var stolta och visade upp sina instrument för varandra och andra dekorerade sina instrument med pappersbitar med namn och ritningar på.

7.5.3 Metoden

De flesta elever tyckte att mätmetoden var en värdefull användning av matematik för att lösa uppgiften. Eleverna kände inte till några andra metoder att mäta höjd vilket gjorde att de inte hade så mycket att jämföra med. De tyckte ändå att det var kraftfullt att med så enkla medel klara av uppgiften.

7.5.4 Mätningen

Mätuppgiften krävde en del organisation. De praktiska problem som uppstod handlade mest om att hantera kikaren att få den rak, att inte darra på handen och att instrumentet satt ihop och röret hade samma riktning och önskad riktning. Att stega och omvandla till meter gick mycket bättre än i laborationen "avståndsmätning med likformighet". Ett annat problem var att sugrörets tjocklek täckte flera graderingar på gradskivan och eleverna försökte få det centrerat vid önskat gradtal men eftersom röret inte satt fast ordentligt så var det hela lite vingligt.

7.5.5 Rimligheten

Eleverna tyckte att det var svårt att avgöra om resultatet var rimligt. Detta var väntat. Vissa elever hade idéer t.ex. att jämföra mellan grupper, att mäta flera gånger samma höjd, att byta person som höll i kikaren, att söka på internet, att försöka fråga rektorn.

7.5.6 Diskussion om felkällor

Eleverna var i allmänhet bra på att identifiera felkällor i mätningen. Det mesta är faktorer de har haft lite svårt med t.ex. att hålla kikaren rak. Däremot är feluppskattning lite svårare för dem. Detta var också väntat då de inte har några erfarenheter i sammanhanget. Vi hade en diskussion i ämnet och tog reda på tillsammans hur en avvikelse på en grad påverkade en höjd på 20 meter enligt följande:

$$20 \cdot \tan(44) = 19,31 \text{ och } 20 \cdot \tan(46) = 20,71$$

Om vinkeln är 60 grader:

$$20 \cdot \frac{\tan(59)}{\tan(60)} = 19,22 \text{ och } 20 \cdot \frac{\tan(61)}{\tan(60)} = 20,83$$

Att $\tan(v)$ inte är ett heltal om vinkeln är skild från 45 grader tycktes irriterande, vissa elever hade avrundat och gjort uträkningarna med hjälp av miniräknaren. Diskussionen handlade mest om att exakta beräkningar tar bort avrundningsfel och är att föredra ur matematisk synvinkel.

7.6 Diskussion

Även i denna laboration uppstår frågan om det skulle vara bättre att styra aktiviteten noggrannare. Gruppsammansättningar kan säkert göras så att grupperna blir mer heterogena eller mer homogena. Frågan är bara vilket som är bäst, om detta debatteras det ständigt och jag har i alla fall inte hört något slutresultat från diskussionen. Dessutom riskerar en sådan styrning att upplevas som påtvingad och resultera i en negativ känsla inför hela laborationen.

Nästa fråga är om instruktionerna borde vara mer detaljerade dvs. att styra vad eleverna ska göra i detalj och även i vilken ordning de ska göra alla moment. T.ex. skulle man kanske be eleverna att först få ett tillfredställande läge för kikaren dvs. titta exakt mot takets kant och kontrollera att det hela är rakt och att röret är i önskad riktning innan de börjar mäta sträckan längs marken. Detta skulle underlätta mätningen men skulle hindra eleverna att själva lösa den praktiska svårigheten och de positiva effekter som det skulle resultera i.

Mätningen kan underlättas genom att använda ett vattenpass för att kontrollera om kikaren är horisontell. Problemet är att det bara fanns ett enda på hela skolan. Kanske går det att få tag i små billiga varianter som kan användas i detta syfte. En idé som jag fick efteråt är att använda stora gradskivor av den modell som använd vid tavlan (Gula och i plast) för att minimera felet i vinkeln.

Höjderna som eleverna får mäta skulle kunna mätas i förväg så att eleverna hade ett värde att jämföra sina resultat med. Detta skulle underlätta feluppskattningen men skulle också ta bort det kreativa i att försöka avgöra rimligheten i resultaten. Själv tycker jag att det är önskvärt att bygga upp en reflex hos eleverna som får de att reflektera över rimligheten i sina resultat.

Att underlätta arbetet med laborationen kan ha effekten att eleverna upplever uppgiften som mindre omständlig men riskerar att passivisera eleverna.

Laborationen som helhet är användbar men kan säkert förbättras och justeras för att möta andra behov såsom gruppnivå och om man vill åt vissa effekter framför andra.

8. Laborationen: Derivata med vasgrafer

8.1 Laborationsinstruktion

Vasgrafer: Funktioner och derivator.

Inledning

När vi studerar naturen försöker vi att utifrån experiment och mätningar och med hjälp av naturlagar och olika teorier hitta samband i vår omgivning. I vår analys tar vi till matematiken som redskap. Utifrån den verkliga situationen skapar vi en matematisk modell som vi analyserar för att få fram ett resultat. Detta resultat tolkas sedan tillbaka till den verkliga situationen och prövas. Det är vad som kallas den naturvetenskapliga processen.

När vi studerar ett förlopp/händelseutveckling så är funktionsbegreppet mycket användbart. Vi kan då studera hur funktionen/förloppet beror av olika parametrar och analysera detta beroende. En funktion kan presenteras i tabellform, som en formel eller som en graf. De olika representationsformerna är ekvivalenta (likvärdiga) men lämpar sig olika bra beroende på vilken aspekt av funktionen som är av

Intresse. Oftast är vi också intresserade av hur snabbt eller långsamt funktionen/storheten växer eller avtar. Detta beskrivs matematiskt av funktionens derivata.

I den här laborationen kommer vi att studera ett förlopp i huvudsak grafiskt och dra slutsatser om kopplingen mellan en graf, en funktion och verkligheten. Genom studier av funktioners variationer med tiden kommer begreppet derivata in.

Idé och upplägg

Vi kommer att studera hur höjden beror av volymen i några behållare när vi håller vatten i dessa.

De flesta har säkert någon gång observerat att vattennivån stiger olika snabbt i olika behållare/kastruller/vaser även fast vattenmängden som tillförs är densamma (har samma hastighet). T.ex. om vi håller vatten i en cylindrisk vas/behållare så kan vi förvänta oss att vattennivån dvs. höjden kommer att öka på samma sätt för samma vattenmängd. Däremot om vasen blir smalare så kan vi förvänta oss att höjden kommer att successivt öka i snabbare takt. Blir vasen bredare så kommer höjden att öka långsammare.

Vi kommer att studera hur höjden varierar i några olika vaser/behållare av olika form i takt med att vi håller i vatten.

Materiel

4 olika behållare, ett mätglas, en linjal, karamellfärg, en hink med vatten.

Utförande

Vi kommer att för varje vas hälla i en mängd vatten (alltså en viss volym!) och mäta höjden, vi kommer också att titta på höjdskillnaden från gång till gång.

Genom att varje gång mäta upp och hälla i 5, 10 eller 20 cl kommer vi att kunna mäta höjden i lugn och ro (mot om vi skulle ha en rinnande kran och tidtagarur) och eftersom vi håller i samma volym varje gång så kommer vi att lättare kunna se hur vattenhöjden varierar för de olika vaserna. Karamellfärgen är bara till för att underlätta höjdmätningen.

Tänk på att alltid mäta höjden på samma sätt dvs. om du t.ex. mäter underkanten så ska du göra det genom alla mätningar.

Mata in dina värden i räknarens listor så här: volymen i L1, höjden i L2 och i L3 beräknas värdet i t.ex. 1 som: $\frac{\text{värdet för 2 i L2} - \text{värdet för 0 i L2}}{2}$

Del 1

1. Först rita en skiss som beskriver hur du tror att grafen kommer att se ut.
2. Plotta L2 mot L1 med sammanbundna punkter och jämför med din skiss.
3. Plotta L3 mot L1 med sammanbundna punkter och försök tolka resultatet.
4. Räkna ut $\frac{\Delta h}{\Delta V}$ mellan 1 och 9, 2 och 8, 3 och 7, 4 och 6. Vilken tendens visar dessa värden?

jämför med värdet i (4) för V=5! Försök tolka resultaten!

5. Vad finns det för samband mellan grafen (L1,L2) och grafen (L1,L3)? Vad visar grafen (L1,L3)?

Del 2

För den cylindriska vasen

1. Vad är det för slags funktion som beskriver höjden som funktion av volymen?
2. Vad är det för sorts funktion som beskriver höjdskillnaden som funktion av volymen?
3. Anpassa linreg(ax+b) L1,L2,Y1
4. Anpassa linreg(ax+b) L1,L3,Y2
5. Vad är linjens lutning i punkten 3?
6. Jämför lutningen med värdet av funktionen i uppgift 4!
7. Jämför med ett beräknat värde med nDeriv eller dy/dx
8. Slutsatser?
9. Vad är derivatan av en linjär funktion? Vad är basytan av behållaren?

För den runda vassen och den "utsvängda"

1. Funktionen som beskriver höjden som funktion av volymen är en potensfunktion
2. Vad är det för sorts funktion som beskriver höjdskillnaden som funktion av volymen?
- 3.
4. Anpassa pwrreg(ax+b) L1,L2,Y1
5. Anpassa pwrreg(ax+b) L1,L3,Y2
6. Rita en tangent i x=3 till Y1! Vad har tangenten för lutning?
7. Jämför lutningen med värdet av funktionen i uppgift4!
8. Jämför med ett beräknat värde med nDeriv eller dy/dx
9. Slutsatser?

För den koniska vassen

1. Funktionen som beskriver höjden som funktion av volymen är potensfunktion.
2. Vad är det för sorts funktion som beskriver höjdskillnaden som funktion av volymen?
3. Anpassa pwrreg(ax+b) L1,L2,Y1
4. Anpassa pwrreg(ax+b) L1,L3,Y2
5. Rita en tangent i x=3 till Y1! Vad har tangenten för lutning?
6. Jämför lutningen med värdet av funktionen i uppgift4!
7. Jämför med ett beräknat värde med nDeriv eller dy/dx
8. Slutsatser?

8.2 Matematiska och didaktiska tankar med laborationen

Derivata introduceras i den aktuella läroboken (Matematik 4000 C) med hjälp av sekant och deras lutningar; ett slags geometriskt gränsvärde mot lutningen av tangenten.

Tolkningen av sekantens lutning är en medeltillväxthastighet mellan två punkter på grafen.

Tangentens lutning är då ett momentanvärde som gäller i den aktuella punkten; alltså bara i en punkt. Derivatans definieras därefter på vanligt vis som ett gränsvärde av differenskvoten. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tanken är att behålla detta upplägg i laborationen av flera anledningar: Ett nytt upplägg riskerar att förvirra mer än att skapa förståelse eller känsla för begreppet, begreppet gränsvärde är beskrivet på ett väldigt förenklat och kursivt sätt vilket gör att en iterativ

beräkning kanske är att föredra, att kunna växla mellan den geometriska och den algebraiska tolkningen är en färdighet som efterfrågas.

Jag valde att dela upp laborationen i två delar en del som har som mål att ta fram derivatan i en punkt. Andra delen behandlar derivatan som funktion även om vi också visar på att derivatans värde i en punkt är lutningen för tangenten i samma punkt.

8.2.1 Modellen

Modellen med vasgrafer är hämtad från nämnares uppslagsbok går övningen ut en koppling mellan grafen och verkligheten dvs. den aktuella vassen/behållaren. Denna uppgift har också förekommit i ett nationellt prov 2002.

Denna koppling behålls men utvidgas i del1 till att studera sekanters lutningar runt en punkt, där skärningspunkterna ligger tätare och tätare; en sorts "gränstendens" som jämförs med en differens som är listad på förhand. Lutningarna kopplas till genomsnittliga förändringshastigheter i intervall runt punkten.

I del2 anpassar eleverna funktioner dels för själva förloppet dels för skillnaderna. Dessa används för att jämföra lutningen av tangenten i en punkt med värdet av den deriverade funktionen i samma punkt.

8.3 Didaktiska och pedagogiska mål

8.3.1 Funktionsbegreppet

Ursprungsmodellen syftar till att etablera en koppling mellan ett verkligt förlopp och ett verkligt objekt (Vas/behållare) och en beskrivande graf i första hand men också en funktion som grafen representerar. Detta är centralt för förståelsen av uppgiften och utgör en grund för fortsatt arbete.

8.3.2 Förändringshastigheter och derivatan i en punkt

Genom att börja med att räkna ut genomsnittliga förändringshastigheter som tas över smalnande intervall behålls lärobokens upplägg men kompletteras med en praktisk och visuell dimension. Meningen är att eleven ska se tendensen och förvänta sig ett slutvärde som då hämtas från differenslistan.

Övningen har också som mål att ge en viss känsla för begreppet gränsvärde som tyvärr inte går igenom så noga i läroböckerna.

8.3.3 Funktioner och funktioners derivator

Genom att anpassa en funktion till mätvärdena från förloppet visas att funktionen är en beskrivning av verkligheten och då uppstår frågan vad beskriver funktionen som är anpassad efter differenserna?

Geometriskt är tangenten gränsfallet för alla sekanter runt en punkt. En fördel är att låta den grafitande räknaren rita en tangent i en punkt (Räknaren ger även ekvationen för tangenten) Lutningen jämförs med värdet av differensfunktionen i samma punkt.

Med utgångspunkt från dessa växlande tolkningar mellan geometrisk och analytisk är målet att ge en känsla för att den deriverade funktionen innehåller information om ursprungsfunktionens beteende i alla punkter.

8.3.4 Den grafitande räknaren

Grafitande räknare är idag integrerade i matematikundervisningen. Som hjälpmedel och rätt använd så kan räknaren och datorn bidra med en viss praktisk hjälp i matematiska sammanhang. Att tillhandahålla listor utgör nog ingen stor skillnad mot manuell hantering av mätdata. Däremot att kunna rita upp en graf, anpassa funktioner och rita upp dessa, dra en tangent och få en ekvation för denna är funktioner som är tidsbesparande och frigör energi till fördel för det studerade förloppet och de aktuella begreppen. Färdigheter i hanteringen av den grafitande räknaren efterfrågas i såväl matematik som andra naturvetenskapliga ämnen; främst fysik där laborationer är en helt integrerad del av undervisningen.

8.4 Upplägg

8.4.1 Tidpunkten

Vid tiden för laborationen hade vi i gruppen gått igenom genomsnittliga förändringshastigheter och derivatans definition i en punkt samt tolkningen av derivatans värde i en punkt som lutningen av tangenten i samma punkt. Vi hade också börjat titta på derivator av vissa elementära funktioner såsom polynom med hjälp av derivatans definition.

8.4.2 Begrepp

Detta arbete innebär en del algebraisk hantering samtidigt som det använder flera nya begrepp: Tangent, derivata, gränsvärde, förändringshastighet i en punkt.

Målet är att utgå från en viss förförståelse, (alternativt att skapa en sådan) av en vasgraf och en geometrisk syn på förloppet utifrån formen på själva vaser/behållaren, och använda denna som grund för hela laborationen och på så sätt få en naturlig koppling till verkligheten.

8.4.3 Gruppen

Gruppen är en s.k. normalgrupp vilket innebär att den innehåller flera svaga elever. Detta skapar enligt mig ett behov av precisa och detaljerade instruktioner genom laborationen. Behov finns nog också av ledning och hjälp under utförandet av laborationen.

8.5 Utvärdering av laborationen

8.5.1 Syfte och idé

Eleverna tyckte allmänt att syftet bakom laborationen framgick tydligt, instruktionerna var tillräckligt tydliga; vilket betyder att instruktionen säkert kan förbättras. Vissa elever tyckte att det var många uppgifter vilket också stämmer i viss mån (mer om det i diskussionen). De tyckte att aktiviteten var annorlunda och mer "fysiklik" vilket är helt sant.

8.5.2 Under laborationen

Det var lite svårt att komma igång, vissa elever fick byta mätglas och behållare med färgat vatten. Vissa elever tyckte att det var svårt att se ordentligt för att mäta höjden. De tittade med olika vinklar och fick dålig utveckling på värdena. Kort sagt så var laborationen lite rörig men det hela gick att sortera ut.

8.5.3 Matematiken

De flesta elever fick en viss förståelse för kopplingen mellan grafen och förloppet. En viss förståelse för koppling mellan graf och anpassad funktion. Till slut så verkar det som att eleverna fick insikten att den deriverade funktionen var en generator av lutningar för tangenter. Några elever hade förväntat sig att graferna av den anpassade funktionen och dess derivata skulle uppvisa likheter eller kanske symmetrier. En viss känsla för den deriverade funktionens värde i att förenkla arbetet med differenskvoter.

8.5.4 Uppgiften

Uppgiften i sig är lite omständlig i den bemärkelsen att det är många mätningar, mycket hantering av materiel och mycket hantering av mätvärden. Vissa elever tyckte att man lika gärna kunde derivera den anpassade funktionen med hjälp av räknaren istället för handarbetet. Detta är i sig en vinst då de eleverna har förstått "deriveringsmekanismen".

8.6 Diskussion

Laborationen gick bra som helhet men det verkar som att eleverna tyckte att den tog för lång tid och krävde många moment. Detta kan förklaras med att gruppen är övervägande svag och eleverna var ovana att laborera och tänka matematik samtidigt dvs. att det praktiska tar upp det mesta av energin. Detta kan säkert tränas bort genom att använda ett laborativt arbetssätt oftare och konsekvent så att eleverna vänjer sig.

En förbättring skulle kunna uppnås genom att dela upp laborationen i två delar. En del med uppritning och med grafisk bestämning av derivatan utifrån en "plot" och den andra med anpassningar och analytisk koppling.

Koppling mellan den uppritade kurvan och förloppet var god och eleverna hade överlag en bra känsla för kopplingen mellan derivata och den aktuella vasen.

En koppling som inte är lika självklar är att den deriverade funktionen beskriver alla möjliga lutningar/förändringshastigheter. Detta tror jag kommer från att läroboken introducerar derivatan i en punkt först och noggrant men hastar igenom den deriverade funktionen som någon slags konsekvens. I detta avseende tycker jag att anpassningen till en funktion fyller en viktig funktion.

Gruppen går i tvåan vilket innebär att de precis har börjat med fysik och laborationer allmänt. Detta syntes i att eleverna var olika vana att hantera den grafritande räknaren. Laborationen erbjuder på så sätt en träning som även är nyttig i fysik. Samtidigt så kan den upplevas som ett hinder i början men det går att öva bort denna känsla.

De anpassade funktionerna och derivator uppvisar bara delvis överensstämmelse med de förväntade funktionerna. Frågan är om det finns en vinst att uppnå genom att diskutera felkällor och möjliga orsaker till skillnaderna eller om det är klokare att bara konstatera att en rad orsaker gör att vi får en skillnad.

Jag upplevde att en viss styrning av arbetsgången var nödvändig under den här laborationen, detta kan ha berott på elevernas nivå och ovana vid situationen. I en starkare grupp skulle det vara intressant att lätta på styrningen av arbetsuppgifter och lämna över mer ansvar till eleverna; under diskret övervakning.

Avslutningsvis så tycker jag att laborationen erbjuder en konkret uppgift som kopplas till begreppet derivata på ett relativt överskådligt sätt. Den praktiska hanteringen kan vara nyttig men också tröttsamt. En idé är att för svagare grupper kanske presentera färdiga tabeller som grund; alltså slipper de mätningen och alla praktiska moment för alla alternativt några vaser.

9. Laborationen: Radioaktivt sönderfall med tärningar

9.1 Originalversionen av laborationen "radioaktivt sönderfall"

Radioaktivt sönderfall och differentialekvationer

Inledning och bakgrund

När vi studerar naturen försöker vi att utifrån experiment och mätningar och med hjälp av naturlagar och olika teorier hitta samband i vår omgivning. I vår analys tar vi till Matematiken som redskap. Utifrån den verkliga situationen skapar vi en matematisk modell som vi analyserar för att få fram ett resultat. Detta resultat tolkas sedan tillbaka till den verkliga situationen och prövas. Det är vad som kallas den naturvetenskapliga processen.

När vi studerar en storhet så är funktionsbegreppet mycket användbart. Vi kan då studera hur funktionen beror av olika parametrar och analysera detta beroende. Oftast är vi också intresserade av hur snabbt eller långsamt funktionen/storheten växer eller avtar. Detta beskrivs matematiskt av funktionens derivata.

När ett förlopp beskrivs av ett samband som inkluderar en funktion och dess derivata/derivator får vi en differentialekvation. När funktionen som beskriver den storhet som är av intresse inte är känd kan vi få ett uttryck för denna genom att lösa den differentialekvation som beskriver förloppet.

Exempel på förlopp som kan beskrivas med differentialekvationer är fritt fall med eller utan luftmotstånd, populationstillväxt, pendelrörelse som är dämpad eller odämpad, blandningsproblem där ett visst ämne kontinuerligt tillförs och en blandning studeras, sönderfall då ett visst ämne sönderfaller med en viss hastighet..

Teori

En ekvation där en funktion och dess derivata/derivator ingår kallas en differentialekvation. Högsta derivatan som ingår i ekvationen bestämmer ordningen på diff.ekvationen. T.ex. om en differentialekvation bara innehåller funktionen och dess första derivata så är diff.ekv av första ordningen, om andra derivatan förekommer så är diff.ekv av andra ordningen..osv.

En differentialekvation av första ordningen innehåller funktionen och dess första derivata:

$$y' + ky = f(x) \quad (1)$$

Om $f(x)=0$ kallas differentialekvationen homogen annars kallas den inhomogen.

Om vi betraktar en homogen differentialekvation:

$y' + ky = 0$ så inser vi att funktionen y och derivatan y' måste vara besläktade dvs. av samma typ för att kunna ta ut varandra. Funktionen som bäst uppfyller detta är $y = e^{-kx}$. Funktionen $y = e^{-kx}$ är då den homogena lösningen till ekvationen $y' + ky = 0$.

Om $f(x) \neq 0$ i (1) så måste vi lösa ekvationen i två steg:

1. Lös den homogena ekvationen, kalla den lösningen $y_{\square}$
2. Finn en funktion som löser (1) genom att ansätt/pröva en funktion som är av samma typ som $f(x)$, kalla denna y_p

Den totala lösningen för (1) är då $y = y_{\square} + y_p$.

Radioaktivt sönderfall

Vid radioaktivt sönderfall studerar vi hur atomkärnor sönderfaller med tiden. Det som normalt är av intresse är då antalet kärnor som sönderfaller och hur snabbt detta sker. Om vi kallar y antalet kärnor som finns kvar så kommer y' att vara sönderfallshastigheten.

Syftet med laborationen är att simulera och studera ett radioaktivt sönderfall.

Eftersom radioaktivt sönderfall inte lämpar sig för klassrumsmiljö på grund av en mängd olika faktorer såsom utrustning, säkerhet, tidsaspekt osv, kommer vi att simulera/efterlikna processen med hjälp av tärningar.

Materiel

Ett stort antal tärningar, grafitande miniräknare.

Utförande

Antalet kärnor som är kvar kommer att representeras av ett antal tärningar $N=100$ (I själva verket är detta ett mycket litet antal jämfört med verkligheten), vid tiden 0 kommer vi alltså att ha 100 kärnor kvar, för att simulera ett tidsintervall kastar vi tärningarna en gång. Det motsvarar att det har gått en viss tid lät oss säga 1 s. Alla tärningar som visar en sexa kommer att motsvara de kärnor som har sönderfallit efter 1 μ s. Detta innebär att sönderfallshastigheten $y'=1/6$. När vi räknat de kärnor som är kvar (eller de som sönderfallit och dra bort dessa från det antal som vi hade innan kastet) kastar vi dessa och räknar de kärnor som är kvar osv. tills det bara finns några kärnor kvar.

1. För varje kast mata in kastets nr i L1 och motsvarande antal kärnor som är kvar i L2.
2. Anpassa dina mätvärden med en exponentialfunktion ($y = Ne^{kx}$). Expreg L1,L2,Y1
3. Lös differentialekvationen $y' + \frac{1}{6}y = 0$
4. Jämför resultaten från steg 2 och 3.

Vad drar du för slutsatser av din jämförelse

9.2 En kort version av laborationsinstruktion för "radioaktivt sönderfall med tärningar"

Radioaktivt sönderfall med tärningar

Vid radioaktivt sönderfall studerar vi hur atomkärnor sönderfaller med tiden. Det som normalt är av intresse är då antalet kärnor som sönderfaller och hur snabbt detta sker. Om vi kallar N antalet kärnor som finns kvar så kommer N' att vara sönderfallshastigheten.

Syftet med laborationen är att simulera och studera ett radioaktivt sönderfall matematiskt.

Materiel

Ett stort antal tärningar, grafritande miniräknare.

Utförande

Antalet kärnor som är kvar kommer att representeras av ett antal tärningar $N=100$ (I själva verket är detta ett mycket litet antal jämfört med verkligheten), vid tiden 0 kommer vi alltså att ha 100 kärnor kvar, för att simulera ett tidsintervall kastar vi tärningarna en gång. Det motsvarar att det har gått en viss tid, låt oss säga 1 s. Alla tärningar som visar en sexa kommer att motsvara de kärnor som har sönderfallit efter 1 s. Detta innebär att sönderfallshastigheten $N' = -1/6N$ eller $N' + \frac{1}{6}N = 0$. När vi räknat de kärnor som är kvar (eller de som sönderfallit och dra bort dessa från det antal som vi hade innan kastet) kastar vi dessa och räknar de kärnor som är kvar osv. tills det bara finns några kärnor kvar.

5. För varje kast mata in kastets nr i L1, motsvarande antal kärnor som är kvar i L2 och antalet sönderfallna kärnor i L3.
6. Anpassa dina mätvärden med en exponentialfunktion ($N = N_0 e^{kx}$). Expreg L1,L2,Y1
7. Lösningen till differentialekvationen $N' + \frac{1}{6}N = 0$ är $N = N_0 e^{-\frac{1}{6}t}$. Jämför ditt resultat i 2 med detta.
8. Aktiviteten (dvs. antal sönderfall/s) $R = \lambda N$. Om $N = N_0 e^{-\frac{1}{6}t}$ så blir $R = \lambda N_0 e^{-\frac{1}{6}t}$ eller $R = R_0 e^{-\frac{1}{6}t}$. Kontrollera detta genom att anpassa Expreg L1,L3,Y2
9. Bestäm sönderfallskonstanten λ från 2 och 3 och jämför dessa.
10. Halveringstiden $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$. Bestäm denna.

9.3 Matematiska och didaktiska tankar

9.3.1 Läroboken

I läroboken (natur och kultur 4000 kurs E) introduceras differentialekvationer som en ekvation som innehåller en funktion y och dess derivata y' i en linjär kombination med heltalskoefficienter på ena sidan och 0 på andra sidan t.ex. $y' + 3y = 0$. Eleverna börjar med att verifiera lösningar till sådana ekvationer. I exemplet ovan kan elever få verifiera att: $y = e^{-3x}$ löser ekvationen genom derivering och insättning av både funktion och derivata i differentialekvationen. Om resultatet blir noll så konstateras att den givna funktionen löste ekvationen, i annat fall så var den inte en lösning.

Nästa steg är att konstatera att lösningsfunktionerna har alltid utseendet: $y = e^{-kx}$ där k är koefficienten framför y' . Upplägget baserar sig på verifiering och mönsterigenkänning och det fungerar.

Ett alternativ är ett resonemang om själva ekvationen: $y' + ky = 0$. Första punkten är att variabeln är en funktionsvariabel och inte en vanlig variabel. Sedan följer en tolkning av DE (differentialekvationen); t.ex. lösningen är en funktion som adderad till k multiplicerat med funktionens derivata, så blir summan 0. Detta betyder att funktionen och en konstant multiplicerad med derivatan ska ta ut varandra. Det innebär att funktionen och dess derivata måste vara av samma sort/typ. Nu uppstår frågan: Vilken funktionstyp har derivatan som är av samma typ. Slutsatsen blir en exponentialfunktion med basen e .

I kurs C introduceras basen e med hjälp av att derivatan av $y = e^x$ blir just funktionen $y = e^x$.

Laborationen använder just en modell där den studerade funktionen och dess derivata är relaterade genom ett linjärt samband.

9.3.2 Modellen

Grundmodellen hittade jag i en gammal matematiklärobok som en aktivitet (Jag tror att det var Natur och kultur 3000 kurs A). I den modellen simuleras tillväxt med tärningar och man tänker sig ett kapital som representeras av alla tärningar (t.ex. varje tärning är värd 100000 kr) och ett motsvarar att det har gått ett år. Alla sexor motsvarar vinst. Det finns två sätt att hantera vinsten. Man kan spara den och återanvända startkapitalet och då växer kapitalet ungefär linjärt dvs. ökar med en sjättedel av det ursprungliga kapitalet. Det andra sättet att hantera vinsten är att investera den. Detta går ut på att använda hela det tillgängliga kapitalet inklusive vinst till nästa år dvs. nästa kast. Då växer det totala antalet tärningar med en sjättedel varje gång/kast. På detta sätt fås en exponentiell tillväxt.

Motsvarande gäller om man efter varje kast avlägsnar alla sexor och använder resterande tärningar vid nästa kast. Då fås en exponentiellt avtagande funktion.

Jag hade hört av en kollega att en av hans lärare hade simulerat radioaktivt sönderfall med tärningar och tyckte att det var en bra modell. Hur denna lärare gjorde framgick inte.

När eleverna går i årskurs tre så lär de sig differentialekvationer ungefär samtidigt som de läser om atomkärnan i Fysik. Min idé var då att kombinera båda delarna i en enda laboration som handlade om den matematiska modellen för sönderfall och differentialekvationer samtidigt. Tanken var att göra en laboration som liknade en fysiklaboration men med mest matematiskt innehåll.

9.3.3 Den grafitande räknaren

Grafitande räknare är idag en integrerad del av både matematik- och fysikundervisningen. Allt i enlighet med läroplaner och kursplaner. Användningen av räknare måste ske med viss försiktighet så att den bara underlättar hanteringen av beräkningar, grafer och formler istället för att ta över och skymma innehållet.

I den här laborationen är tanken att eleverna ska använda sig av den grafitande räknaren som ett redskap och hjälpmedel för att lösa laborationsuppgiften.

Färdigheten att använda räknaren för att rita grafer och göra funktionsanpassningar är en färdighet som eleverna delvis har och delvis behöver öva på. Denna färdighet används en hel del i fysiklaborationer och kommer förhoppningsvis att användas mer inom matematik.

9.3.4 En konkret men överklig situation

Laborationen simulerar ett förlopp som är svår att visa i klassrummiljö. Eleverna får genom association tänka sig att tärningar är atomkärnor. En fördel är att inga elever har någon bild att jämföra med vilket skulle göra det lättare för dem att ta till sig associationen. En atomkärna skulle lika gärna se ut som en tärning! Matematiken som sedan ingår är inte på något sätt svår. Att eleverna faktiskt får utföra experimentet själva kan förstärka deras tilltro till matematiska modeller som en naturvetenskaplig beskrivning av verkligheten.

9.3.5 Matematiken som ett kraftfullt naturvetenskapligt redskap

Att koppla ihop Matematik och fysik kan vara gynnsamt för undervisningen i båda ämnena. Fysiken är till sin natur mer verklighetsförankrad då det visas många experiment och eleverna får upptäcka, bekräfta och jämföra många fysikaliska fenomen och förlopp genom laborationen. Matematiken kommer in när vi lämnar det beskrivande stadiet och börjar utföra beräkningar och ställa upp fysiklagar som formler.

Matematiken är till sin natur mer abstrakt än Fysik och att integrera båda ämnena kan hjälpa att visa matematikens användning, verklighetsförankring och syften.

9.4 Didaktiska och pedagogiska mål

9.4.1 Differentialekvationer och exponentiella förlopp

Målet är att visa på en relativt verklighetstrogen situation där den matematiska modellen används som tolkning. Differentialekvationen beskriver ett förlopp som är exponentiellt avtagande. Förloppet exponentiella egenskaper tolkas också till differentialekvationen.

Genom laborationen framgår att derivatan av en exponentialfunktion med basen e är en besläktad exponentialfunktion.

9.4.2 Radioaktivt sönderfall

Laborationen ger också inblick i att ett radioaktivt sönderfall är en slumpmässig process.

Ett tärningskast är slumpmässigt. Sönderfallskonstanten $1/6$ är en sannolikhet; alltså ett förväntat värde. Kopplingen mellan den matematiska modellen och den fysiska är viktig, då den ger en konkretisering av den matematiska modellen.

9.4.3 Den grafritande räknaren

Att använda räknaren är tidsbesparande, då mätvärdena matas in direkt i räknaren. Detta frigör energi till fördel för det studerade förloppet och de aktuella begreppen.

Räknaren bör dock användas med viss försiktighet, då risken finns att eleverna förlitar sig för mycket på hjälpmedlet. Frågor som kräver rimlighetskontroll bör alltid ingå i sammanhang där räknaren används.

9.5 Upplägg

9.5.1 Tidpunkten

Vid laborationstillfället hade eleverna gått igenom differentialekvationer av första ordningen och i fysik så hade de precis börjat studera radioaktivitet. Tanken var att tidpunkten var mer lämpad för ett radioaktivt sönderfall än en exponentiell tillväxt t.ex. ett företag vars kapital växer exponentiellt.

9.5.2 Kort genomgång

Precis innan eleverna började gick jag igenom uppgiften och svarade på en del frågor; mest om användningen av listor på räknaren. Eleverna ombads säga till då de skulle säga till när de hade gjort sina anpassningar för att få vidare instruktioner. Skälet till detta var att räknaren anpassade en exponentialfunktion enligt: $y = Ca^x$ istället för $y = Ce^{kx}$ och de flesta elever behövde hjälp att konvertera mellan dessa.

9.5.3 Grupperna

Eleverna fick arbeta två och två. Grupperna valdes så att de blev någorlunda heterogena dvs. eleverna hade olika nivåer. Förhoppningen var att eleverna skulle hjälpas åt att lösa uppgiften och diskutera sig fram till lösningar.

9.5.4 Uppgiften

Rent praktiskt så ombads eleverna att mata in resultaten efter varje kast direkt in i räknaren.

De fick själva fördela arbetsuppgifterna emellan sig. Eleverna som alla gick i årskurs 3 var vana vid att laborera i Fysiken och de hade inte så många frågor.

9.6 Utvärdering

9.6.1 Modellen och arbetsinsatsen

Det allmänna uttrycket efter den här laborationen var positivt. De flesta elever tyckte att arbetsinsatsen var rimlig. Modellen tyckte de var rolig och likheten med det verkliga förlopp det försöker efterlikna lätt att att till sig. Genomgången och instruktionerna var godtagbara. Eleverna uppvisade viss frustration över att de inte kunde anpassa en exponentialfunktion med den naturliga basen e från början. Detta är en stark poäng och måste gå att ordna på något sätt. Vissa elever undrade varför de skulle spara och hålla reda på antalet sönderfallna tärningar.

9.6.2 Den matematiska modellen

Eleverna tyckte att de fick en förståelse av den matematiska modellen för sönderfall. Detta efter att ha accepterat att modellen är approximativ. Antalet tärningar var väldigt begränsat vilket gav något avvikande resultat. Att sönderfallskonstanten var $1/6$ var förståeligt för modellen, men gav lite krångliga beräkningar och är inte så verklighetstroget.

9.6.3 Fysiken

Eleverna tyckte att modellen gav en inblick i det slumpmässiga vid sönderfall, eftersom ett tärningskast är uppenbart slumpmässigt. Detta ledde till en förståelse för att atomkärnor sönderfaller med lika stor sannolikhet hela tiden.

Vissa elever frågade hur det kom sig att aktiviteten; i det här fallet de sönderfallna kärnorna, också avtog exponentiellt med samma sönderfallskonstant. Diskussionerna ledde till följande:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \text{ och } R = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \leftrightarrow R = R_0 e^{-\lambda t}.$$

En liten insikt i exponentialfunktioner och lite algebra.

9.6.4 Utvärdering av laborationen

Det allmänna intrycket efter denna laboration var positivt. Det framgick från utvärderingsenkäten och diskussioner jag hade med eleverna. De flesta elever gillade modellen och uttryckte på olika sätt sin förvåning, ibland förtjusning över att det gick att simulera ett verkligt fysiskt förlopp med en så enkel modell och ändå få relativt nära resultat. Detta tror jag gav en viss förståelse för slumpmässigheten i processen för ett radioaktivt sönderfall.

Instruktionerna uppfattades som ganska klara, kanske lite för utförliga. Detta är värt att tänka över. Hänsyn måste dock tas till att gruppen var heterogen vilket innebär att det kan finnas elever som behöver utförliga instruktioner. En idé är att bestämma laborationsgrupperna så att varje grupp innehåller alla elevnivåer. Då individuella skillnader är svåra att mäta är risken att grupperna blir ojämna hur man än gör.

Elevernas respons mot den matematiska modellen var positivt, förutom det faktum att räknaren anpassar mot en exponentialfunktion med godtycklig bas. Den erhållna basen fick jämföras med $e^{-\frac{1}{6}}$ innan en slutsats kunde dras. Duktiga elever mindes att basen måste vara en förändringsfaktor som innebär en minskning med 1/6, dvs. 0,84...

Andra elever upplevde nog detta som lite krångligt. För att få ut sönderfallskonstanten $\lambda=1/6$ fick eleverna göra följande uträkning:

$$a = e^{-\lambda} \leftrightarrow -\lambda = \ln a \leftrightarrow \lambda = -\ln a$$

En positiv effekt är enligt mig är en övning och en förståelse för basbyte i exponentialfunktioner. Eventuellt också en viss förståelse för den naturliga basen e .

Det skulle kanske vara bättre att hitta ett sätt att anpassa en exponentialfunktion med basen e , med hjälp av ett datorprogram. Jag har gjort detta och fann att avvikelserna var ännu större från det förväntade värdet 1/6. En variant är att låta vissa grupper anpassa mot godtycklig bas och andra mot basen e och sedan ha en diskussion.

Hur som helst är antalet tärningar för litet för att slumpens inverkan inte ska spela någon roll. Att öka antalet tärningar så drastiskt innebär att laborationen skulle ta för lång tid och det praktiska riskerar att bli för långtråkigt. Dessutom har inte skolan så många tärningar så att det räcker till alla. En idé är att minska sönderfallskonstanten t.ex. genom att bestämma att en tiondel av alla sexor har sönderfallit dvs. få en sönderfallskonstant $\lambda=1/60$.

En positiv effekt uppnåddes enligt mig i att eleverna fick se att aktiviteten; sönderfallshastigheten avtog enligt samma exponentiella modell. Detta inses lätt ur:

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ och $R = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \leftrightarrow R = R_0 e^{-\lambda t}$. Detta tycker jag lämpar sig att visa som avslutning; dvs. efter att eleverna själva har konstaterat att det stämmer.

9.7 Diskussion

Modellen är godtagbar som beskrivning av ett sönderfall under förutsättning att man poängterar att den är approximativ. Att antalet tärningar inte är i närheten av att vara rimligt. En idé är att låta varje tärning motsvara 10000 eller 100000 kärnor för att få verklighetskänsla.

Modellen är begränsad av sannolikheter som är multiplar av 1/6 som är dels för stor och dels omständlig att räkna med. En idé är att kombinera att låta tärningarna representera t.ex. 100000 kärnor var med att ändra sönderfallskonstanten till t.ex. 1/60 eller 1/600.

Antalet tärningar på skolan är begränsat (1000 totalt) vilket leder till en begränsning. En idé är att laborera i helgrupp med dator och projektor vid tavlan; då används alla tärningar för en stor studie. Detta kan t.ex. organiseras så att eleverna sköter tärningarna och läraren sköter datorn och leder diskussionerna. Den här modellen

ställer vissa krav på läraren för att fungera. Diskussionerna bör vara dels för att leda elever in på lösningsspår och dels för att engagera dem i det aktuella förloppet och matematiken bakom det.

En annan idé är att ta en verklig sönderfallsprocess och försöka efterlikna den så mycket som möjligt i antal tärningar och de kärnor dessa representerar och i sönderfallskonstant (Ta det närmaste som är möjlig) och räkna med heltalsdelar för att slippa decimaltal.

Givet trivseln och meningsfullheten under den här enkla laborationen så tror jag att modellen tål lite utveckling utan att det behöver gå ut över innehållet.

I den här laborationen ser jag möjligheten att testa att minska sönderfallskonstanten och se om det ger möjligheten att få en bra anpassning med basen e .

En viss förbättring borde också kunna fås om grupperna komponerades med större omsorg och eftertanke. Detta i kombination med att instruktionerna ändras lite för att uppnå målet att få eleverna att anstränga sig lite mer och tillsammans uppnå en bättre förståelse.

10. Slutdiskussion

Antalet faktorer och parametrar som påverkar en undervisningssituation är stort. Att försöka ta hänsyn till alla tänkbara möjligheter är förstås ännu svårare. Målet med det här arbetet har varit att utifrån en genomtänkt modell få en elev feedback och egna observationer få ett underlag för att reflektera och förbättra de ingående laborationerna och motsvarande undervisningssituationer.

Trots laborationernas olikheter och elevernas olika nivåer, åldrar och ambitioner så finns vissa aspekter som verkar vara återkommande i laborativa sammanhang. Målet är att identifiera och diskutera några sådana aspekter.

10.1 Kontexten

Det är i det här läget givet att en matematiklaboration utgör en situation som eleverna i skolan allmänt är ovana vid. Detta utgör enligt mig både hinder och möjligheter.

Om laborationen lämpar sig för att genomföras i en annan miljö än klassrummet så tror jag att det finns en vinst i att ett miljöombyte kan ge positiv energi och samtidigt få elevernas uppmärksamhet bort från den vanliga undervisningen och kan allmänt uppfattas som positivt. Till grund för detta ligger att eleverna och kanske i viss mån lärarna associerar klassrummet med en viss stämning, arbetssätt och metod.

Enligt forskare och med stöd av bland andra den sociokulturella lärandeteorin skulle ovannämnda fenomen kunna förklaras med det associativa minnet. Människor skapar associationer i minnet till olika känslor, intryck, sinnesstämningar, aktivitetsnivå. Det

skulle kunna liknas vid en slags betingning. Kort sagt, en människa är mer benägen att vara positiv och energisk i en miljö som associeras med trevliga och glada minnen och mer benägen att vara negativ och oengagerad i en miljö som associeras med tråkiga och icke-stimulerande händelser.

De flesta lärandeteorier lyfter fram både den fysiska miljön och den sociala miljön som en viktig faktor i lärandesituationen och lärandeprocessen. Utan att gå in på specifika detaljer kan man säga att det är i mötet med situationen och de olika fysiska och sociala faktorer som ingår som ett effektivt lärande uppstår och gynnas.

Själva innehållet i laborationen bör då matcha miljön, annars är det nog lätt att falla tillbaka i samma mönster och attityder från den vanliga undervisningen. Om innehållet erbjuder en verklighetsförankring så tycker jag att den borde värnas och klargöras i syfte att öka elevernas intresse för innehållet och i förlängningen förbättra deras prestationer. Den matematiska kopplingen bör göras enkel och överskådlig och man bör lägga tid och energi på att lyfta fram kopplingen mellan matematiken och den aktuella verkliga situationen. Detta är säkert lättare sagt än gjort, men ett tips är att som lärare försöka planera laborationen utifrån givna mål och tankar och sedan genomföra laborationen själv. Alltså, testköra laborationen och sedan försöka justera upplägg och kanske t.o.m. innehåll utifrån vad som framgick av försöket.

Enligt en kognitivistisk syn så ingår detta i lärarens roll som skapare av lärandesituationen så att denna motsvarar en lagom utmaning för eleven. En mer sociokulturell syn lägger mer tyngd på interaktionen med andra elever och innehållet. Läraren är mer aktiv under genomförandet men aktiviteten är fortfarande viktig.

Kort sagt! Bör man i laborativa sammanhang (och även i traditionell undervisning) söka att skapa en känsla av sammanhang och mening hos eleverna. Ett enkelt och standardiserat sätt att göra detta tror jag inte existerar, så man får göra sitt bästa och lära av verkligheten sedan.

10.2 Styrningen

Eftersom eleverna av en rad olika anledningar uppfattar laborationer som en ovanlig och främmande situation så är det nog viktigt att leda dem så att de kan klara av uppgiften de står inför. Däremot så kan för mycket styrning döda all spänning och risken är att det hela upplevs som påtvingat, enformigt och tråkigt. Detta tror jag resulterar i sämre förståelse och en negativ association till innehållet.

Alla de etablerade lärande fokuserar på intresset hos eleven både som utgångspunkt och drivkraft för lärande. Att behålla en balans mellan intresse, energi, engagemang och känslan av meningsfullhet är nog lärarens största utmaning. Dewey förespråkade frihet som en väg till skapande.

Enligt ett kognitivistiskt perspektiv så skulle målet för eleven vara en lustkänsla av att ha klarat uppgiften och uppnått en inre balans. Ur sociokulturellt perspektiv så skapas lusten i och med interaktionerna i själva lärandesituationen.

Fördelen med en verklighetslik och praktisk uppgift kan överskugga det matematiska innehållet och vice versa. Så en balans måste råda och eftersträvas. I detta ingår att hänsyn måste tas till elevernas utgångspunkt vad gäller kunskapsnivå, flit och ålder.

Elever med bättre resultat är i regel mer självgående och behöver mer guidas genom situationen medan svagare elever behöver mer detaljerade instruktioner och hjälp för att känna sig trygga och få självförtroendet att kunna genomföra uppgiften på ett meningsfullt sätt.

Min erfarenhet är att eleverna tar till sig bättre av att se och höra dvs. en kort genomgång som introducerar situationen och uppgiftens alla delar. Detta betyder inte att en skriftlig instruktion är överflödigt utan att dessa kompletterar varandra. Under laborationen har jag sett elever gå tillbaka och läsa instruktionen för att lista ut nästa steg. Genomgången kan göras mer eller mindre omfattande utifrån gruppens eller enskilda elevers behov.

10.3 Elevers samarbete och grupparbete

Målet med att eleverna laborera i grupp är att de ska samarbeta på ett konstruktivt sätt. Att elever lär av varandra, väcker tankar os varandra och hjälps åt att lösa uppgiften är det optimala. Därför är det viktigt att underlätta detta samarbete. Vissa elever behöver hjälp att dela upp arbetet och andra löser de flesta praktiska problem själva. Konsten är att avgöra hur mycket ledning och styrning av samarbetet som är nödvändig och tillräcklig i varje situation och för varje elev.

En avgörande faktor i detta sammanhang är gruppindelningen. Diskussionen om heterogena och homogena grupper är pågående och mycket mer komplex än att någon lösning skulle hittas här. Däremot så kan man utifrån val av strategi vara medveten om vissa konsekvenser.

I en homogen grupp så behöver eleverna ungefär lika mycket genomgång och ledning. Det ställs också krav på att uppgiften är på rimlig nivå i förhållande till gruppens nivå.

Detta kräver nästan att uppgiften grå att differentiera för att passa olika nivåer, eftersom alla i klassen sällan har samma nivå. Öppna uppgifter som går att lösa på olika nivåer skulle då vara lämpliga. Nackdelen är att sådana uppgifter är svåra att komponera. En lösning som används är att dela ut ledtrådar efter behov till olika grupper. Då gäller det att inte ge för mycket eller för lite ledning.

I en heterogen grupp är problemet att vissa elever kan ta över och lösa uppgiften på bekostnad av att svagare gruppmedlemmar blir helt passiva och inte lär sig så mycket.

Lyckas man med att komponera en balanserad heterogen grupp så tror jag att eleverna kan hjälpas åt på flera olika nivåer vilket gynnar alla.

Vad gäller antalet elever i en grupp så beror det helt på uppgiften. Vissa uppgifter lämpar sig bäst för två och andra för fyra. Jag tror själv att ett jämnt antal är att föredra då kommunikationen oftast sker parvis.

Både den kognitiva och sociokulturella lärandeteorier betonas vikten av interaktion och samarbete mellan eleverna. Skillnaderna mellan dessa teorier ligger i synen på samarbetets roll; som antingen en grund för lärande för kognitivisterna och som en integrerad del av lärandet för sociokulturella.

10.4 Utvärdering

Eftersom det laborativa arbetssättet kräver att olika upplägg och metoder testas så ligger det i lärarens intresse att utvärdera arbetet tillsammans med eleverna. En idé är att ha en diskussion direkt efter laborationen för att samla ihop intryck och reaktioner och diskutera dessa. En skriftlig utvärdering är också bra om frågorna ställs rätt. Själv fördrar jag öppna frågor för då upplever jag att eleverna tvingas tänka och använda sina egna ord. En annan fördel är att elever som inte gillar att tala inför gruppen kan skriva ner sina tankar. Även små spontana korta diskussioner under arbetets gång kan avslöja viktiga fördelar eller brister. Viktigt är enligt mig att försöka ha en öppen och avslappnad diskussion så att eleverna vågar uttrycka sina tankar eller kritik. Kort sagt, vill man höra hur det är får man ge utrymme för och acceptera det som sägs.

Som lärare kan man och bör man vara koncentrerad och observant under laborationen på vad eleverna gör, hur de gör det, hur det går osv. och försöka analysera det i syfte att lära sig empiriskt för att kunna förbättra laborationen och underlätta elevernas lärande.

Och låt oss komma ihåg:

”Läraren skall:

låta eleverna pröva olika arbetssätt och arbetsformer, och tillsammans med eleverna utvärdera undervisningen” (Lpf 94)

Bilaga 1

Utvärdering av laborationen

1. Framgick syftet och idén bakom labben på ett bra sätt?
2. Var laborationen meningsfull som en matematisk aktivitet?

3. Var instruktionerna tydliga och lätta att följa?
4. Var elevarbetsinsatsen rimlig?
5. Gav laborationen en bättre förståelse för det matematiska innehållet?
6. Var det någon skillnad mot en klassisk genomgång av samma innehåll? Vilken?
7. Sammanfattningsvis, ditt allmänna intryck?

Referenslista

Gymnasieskolans kursplaner i matematik, 2000 , Mål att sträva mot

Gymnasieskolans kursplaner i matematik, Ämnets karaktär och uppbyggnad

Jerlang Espen m.fl (2006) Utvecklingspsykologiskateorier: Liber
Utbildningsförlaget

Lpo94, Läroplan för de ofrivilliga skolformerna, 1994. Skolans uppdrag

Lpo94, Läroplan för de ofrivilliga skolformerna, 1994. Kunskaper och lärande

Lpf 94, läroplan för de frivilliga skolformerna, 1994. Kunskaper och lärande

Lpf 94, läroplan för de frivilliga skolformerna, 1994. 2.3 elevernas ansvar och inflytande

Nationalencyklopedin nr 12, 1993, s.49 Höganäs: Bokförlaget Bra Böcker.

Myndigheten för skolutveckling, NU2003: Den nationella utvärderingen av grundskolan 2003- Skolverket, rapport 2004a

Skolverket 2007 rapporten "PISA 2006: Svenska 15-åringar presterar sämre i naturvetenskap"

Skolverket, 2009 rapporten " *Kraftig försämring av gymnasieelevernas kunskaper i matematik och fysik- Sverige sämre 2008 än 1995 enligt TIMSS undersökningar*"

Matematiklaborationer: Planering, genomförande och utvärdering

Samy Sancho

Självständigt arbete i matematik 30 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2010

