SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Iterationer på ett intervall

av

Fredrik Bratt

2011 - No 3

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Iterationer på ett intervall

Fredrik Bratt

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Andrzej Szulkin

2011

Sammanfattning

Detta arbete är en introduktion till iterationer.
Iterationer är upprepningar av ett visst förlopp efter en given regel. Varje upprepning ger små förändringar i starttillståndet vilket kan leda till stora förändringar i sluttillståndet. En liten händelse kan vid en senare tidpunkt ge upphov till en stor händelse.

Iterationer studeras med hjälp av fixpunkter, periodiska banor och deras stabilitet.

När man ändrar ett systems parametrar kan nya fixpunkter och periodiska banor uppstå. Det vill säga en bifurkation.

Känsligt beroende betyder att om man väljer två punkter som är godtyckligt nära varandra så kommer ändå skillnaden vara förhållandevis stor efter ett antal iterationer. Det krävs alltså en väldigt liten skillnad i utgångsläget för att skillnaden skall bli stor efter ett antal iterationer.

Inledning

Denna uppsats om iterationer följer huvudsakligen kapitel ett i boken Chaos, an introduction to dynamical systems av Kathleen T. Alligood et al. [1]. Iterationer är upprepningar av ett visst förlopp. De är deterministiska, vilket betyder att man kan bestämma nuvarande tillstånd, till exempel i en population, som beroende av föregående tillstånd. Den oberoende variabeln (till exempel tiden) är diskret.

Ett dynamiskt system består av en mängd tillstånd tillsammans med en regel för övergång från ett tillstånd till nästa. Om starttillståndet betecknas med x_0, får man en bana $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Av speciellt intresse är banors stabilitet, det vill säga om små ändringar i startvärdet medför små ändringar i banorna även efter en mycket lång tid. Kaotiska dynamiska system är system då små skillnader i starttillståndet leder till oförutsägbara skillnader i sluttillståndet. En liten händelse kan vid en senare tidpunkt ge upphov till en stor händelse.

Viktigt vid analysen av ett dynamiskt system är också fixpunkter, det vill säga punkter x_0 sådana att $x_n = x_0$ för alla $n \geq 1$ och periodiska banor, det vill säga banor där man kommer tillbaka till utgångspunkten efter ett antal iterationer. När man ändrar systemets parametrar kan nya fixpunkter och periodiska banor uppstå. Detta kallas bifurkation.

Känsligt beroende betyder att om man väljer två punkter som är godtyckligt nära varandra så kommer ändå skillnaden vara förhållandevis stor efter ett antal iterationer. Det krävs alltså en väldigt liten skillnad i utgångsläget för att skillnaden skall bli stor efter ett antal iterationer.

I denna uppsats kommer iterationer att åskådliggöras med hjälp av utvecklingen i en bakteriepopulation, men tillämpningar finns på ett flertal områden. Betrakta en bakteriestam där x_0 är antalet bakterier vid tiden 0, och deras utveckling beskrivs som $x_{n+1} = ax_n, a > 1$. Det vill säga om det finns x_n bakterier vid tiden n , så är de $x_{n+1} = ax_n$ vid tiden $n + 1$. Man ser att $x_1 = ax_0, x_2 = ax_1 = a^2x_0$ och så vidare. Så $x_n = a^nx_0$. Detta är inte realistiskt, för en population växer inte mot oändligheten. Mer realistiskt är följande utveckling: $x_{n+1} = ax_n(1-x_n), 0 < x_0 < 1$. Så tillväxten dämpas då x_n närmar sig 1. Ovanstående ger upphov till avbildningen $f_a(x) = ax(1-x)$. Man ser att om $0 < a \leq 4$, så avbildar f_a intervallet $[0,1]$ in i sig själv, det vill säga $f_a : [0,1] \to [0,1]$. I senare avsnitt kommer denna avbildning att studeras närmare för olika värden på a . Mer generellt, låt X vara ett metriskt rum, till exempel ett intervall, (en delmängd av) ett komplext talplan eller ett flerdimensionellt rum. Vi betraktar avbildningar $f : X \to X$. Om det finns störningar i ett system kan de komma att förstärkas ju fler gånger man itererar och det kan ge upphov till kaos.

1 Fixpunkter och periodiska punkter

Låt $f^k(x) = f(f(...f(x)))$ och låt k vara givet. För att beteckna avbildningen f sammansatt med sig själv k gånger, skriver man ibland $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k gånger) eller $f^{\circ k}$ för att urskiljas från potenser. Alltså är k antalet iterationer. Nedan följer några definitioner som behövs i fortsättningen.

Definition 1.1 *Låt $x_0 \in X$. Den rekursivt definierade följden $x_{k+1} = f(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots$ kallas en bana för x_0 under f. Observera att $x_k = f^k(x_0)$.*

Definition 1.2 *En punkt $p \in X$ kallas en fixpunkt för f om $f(p) = p$.*

Definition 1.3 *$N_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$, där d är avståndet i det metriska rummet X. Speciellt gäller att om X är den reella tallinjen $\mathbb{R}$, så är $N_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \epsilon\}$.*

Definition 1.4 *En fixpunkt p kallas stabil om $x_k = f^k(x_0)$ konvergerar mot p för alla $x_0 \in N_\epsilon(p)$, där $\epsilon > 0$ är tillräckligt litet.*

Definition 1.5 *Låt f vara en avbildning på $\mathbb{R}$ och låt p vara ett reellt tal sådant att $f(p) = p$. Om alla punkter tillräckligt nära p dras mot p, så kallas p för en sänka. Det vill säga, om det finns ett $\epsilon > 0$ så att för alla x i omgivningen $N_\epsilon(p)$ gäller att $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p$, så kallar vi p för en sänka. Om alla punkter tillräckligt nära p rör sig bort från p, så kallas p för en källa. Med andra ord, om det existerar ett $\epsilon > 0$ så att för alla $x \in N_\epsilon(p)$, $x \neq p$, existerar k så att $f^k(x) \notin N_\epsilon(p)$, så kallas p för en källa.*

Sats 1.6 *Låt f vara en avbildning av klass C^1 på $\mathbb{R}$ och låt p vara en fixpunkt för f.*
(i) p är en sänka om $|f'(p)| < 1$
(ii) p är en källa om $|f'(p)| > 1$

Vid $|f'(p)| = 1$, kan man inte dra någon generell slutsats utan man måste undersöka sådana punkter från fall till fall.
Här följer ett bevis av sats 1.6.
Bevis: Enligt derivatans definition så är

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p).$$

Därav följer att

$$\lim_{x\to p} |\frac{f(x) - f(p)}{x - p}| = |f'(p)|. \tag{1}$$

Om $|f'(p)| < 1$: Välj ett r med $|f'(p)| < r < 1$. (1) medför att $|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}| \leq r$, om x ligger tillräckligt nära p. Mer exakt: för ett tillräckligt litet $\delta > 0$, gäller att

$$|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}| \leq r \tag{2}$$

om $|x-p| < \delta$, det vill säga $x \in N_\delta(p)$. (2) ger $|f(x)-f(p)| \leq r|x-p|$ om $x \in N_\delta(p)$. Men $f(p) = p$ (p är en fixpunkt), vilket ger $|f(x)-p| = |f(x)-f(p)| \leq r|x-p|$ så $r < 1$ medför att $|f(x)-p| \leq |x-p| < \delta$, det vill säga $f(x) \in N_\delta(p)$. Vidare:

$$|f^2(x)-p| = |f(f(x))-p| \leq r|f(x)-p| \leq r^2|x-p|$$

$$|f^3(x)-p| = |f(f^2(x))-p| \leq r|f^2(x)-p| \leq r^3|x-p|.$$

Efter k steg får vi

$$|f^k(x)-p| \leq r^k|x-p| \quad \text{för alla} \quad k \geq 1.$$

Slutsatsen blir att

$$\lim_{k\to\infty} |f^k(x)-p| \leq \lim_{k\to\infty} r^k|x-p| = 0,$$

det vill säga $f^k(x) \to p$, så p är en sänka. Låt nu $|f'(p)| > 1$. Välj ett r så att $|f'(p)| > r > 1$. Då får vi

$$|f(x)-f(p)| \geq r|x-p| \quad \text{om} \quad x \in N_\delta(p)$$

och eftersom $f(p) = p$, så är

$$|f(x)-p| \geq r|x-p| \quad \text{om} \quad x \in N_\delta(p).$$

Iteration ger

$$|f^k(x)-p| \geq r^k|x-p|,$$

vilket går så länge som $|f^l(x)-p| < \delta$ då $l = 1, 2, ..., k$. Nu är $\lim_{x\to\infty} r^k|x-p| = \infty$, så man lämnar $N_\delta(p)$ för något k om $x \neq p$.

Nedan följer tre exempel på en fixpunkt p sådan att $|f'(p)| = 1$ och p är en källa, sänka respektive ingetdera.

1. $f(x) = x + x^3$

För att finna fixpunkten sätter man $f(x) = x + x^3 = x$ vilket ger $x^3 = 0$, det vill säga 0 är den enda fixpunkten och $|f'(0)| = 1$. Låt $x_0 \neq 0$ vara givet. Sätt $x_{n+1} = f(x_n) = x_n + x_n^3$ för $n = 0, 1, 2, ...$ Antag att $x_0 > 0$. Då får vi

$$x_1 = x_0 + x_0^3 > x_0 > 0$$

$$x_2 = x_1 + x_1^3 > x_1 > x_0 > 0$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n + x_n^3 > x_n > \ldots > 0$$

Vi ser att x_n är en växande följd. Alltså $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar och är p, där $0 < p \leq \infty$. Om p är ändligt, så får vi

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}_{=p} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}_{=f(p)}$$

Slutsatsen blir att p är en fixpunkt, det vill säga $p = f(p)$. Det följer nu att $p = 0$. Vilket är omöjligt för $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$. Så $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Antag nu att $x_0 < 0$. Då fås

$$x_1 = x_0 + x_0^3 < x_0 < 0$$

$$x_2 = x_1 + x_1^3 < x_1 < x_0 < 0$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n + x_n^3 < x_n < \ldots < 0,$$

så x_n är en avtagande följd. Alltså $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar och är p där $-\infty \leq p < 0$. Om p är ändlig så är $p = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Så p är en fixpunkt: $p = f(p)$. Detta medför att $p = 0$, vilket är omöjligt för $0 > x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Slutsatsen är att $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Sammantaget har vi att fixpunkten $x = 0$ är en källa.

2. $f(x) = x - x^3$

För att finna fixpunkter sätter man $f(x) = x - x^3 = x$ vilket ger oss att 0 är den enda fixpunkten. Vi har också $|f'(0)| = |1 - 3(0)^2| = 1$. Tag $x_0 \in (0, 1)$. Vi får då

$$x_1 = x_0 - x_0^3 < x_0 < 1$$

$$x_2 = x_1 - x_1^3 < x_1 < x_0 < 1$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - x_n^3 < x_n < ... < 1.$$

Eftersom

$$x_n - x_n^3 = x_n(1 - x_n^2),$$

medför vårt villkor $x_0 < 1$ att $x_n - x_n^3 > 0$. Alltså $x_n \in (0, 1)$ och följden $\{x_n\}$ är avtagande. Så $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, där $0 \leq p \leq 1$. Så $p = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Det vill säga p är en fixpunkt så att $p = f(p)$. Detta medför att $p = 0$, det vill säga $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Vi har alltså en sänka från höger. Antag nu att $-1 < x_0 < 0$. Då är

$$x_1 = x_0 - x_0^3 > x_0 > -1$$

$$x_2 = x_1 - x_1^3 > x_1 > x_0 > -1$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - x_n^3 > x_n > \ldots > -1.$$

Således existerar $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, där $-1 \leq p \leq 0$. Eftersom $p = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$, är p en fixpunkt så att $p = f(p)$. Detta medför att $p = 0$, det vill säga $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Så även i detta fall får man en sänka och eftersom föregående fall också är en sänka har vi att $x = 0$ är en sänka från båda hållen.

3. $f(x) = x - x^2$

Sätt $f(x) = x - x^2 = x$, vilket ger $x^2 = 0$, det vill säga 0 är den enda fixpunkten och $|f'(0)| = |1 - 2(0)| = 1$. Låt $x_0 \neq 0$ vara givet och sätt $x_{n+1} = f(x_n) = x_n - x_n^2$ för $n = 0, 1, 2, ...$ Om nu $x_0 > 0$, så får vi

$$x_1 = x_0 - x_0^2 < x_0$$

$$x_2 = x_1 - x_1^2 < x_1 < x_0$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n < \ldots < x_0.$$

Enligt vårt villkor $x_0 > 0$ har vi att $x_n - x_n^2 < x_0$. Så $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ existerar, där $0 \leq p \leq x_0$. Som tidigare ser vi att $p = f(p)$. Det vill säga p är en fixpunkt som är lika med noll. Härav följer att $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Betrakta nu fallet $x_0 < 0$. Då får vi

$$x_1 = x_0 - x_0^2 < x_0$$

$$x_2 = x_1 - x_1^2 < x_1 < x_0$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n < \ldots < x_0.$$

Vi ser att nu är $x_{n+1} < x_n < x_0$ och alltså är en avtagande följd. Vi har också att om $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ existerar ändligt, så är p en fixpunkt. Men då måste $p = 0$. Detta är omöjligt eftersom $x_0 < 0$. Så $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
Det betyder att punkten $x = 0$ varken är en sänka eller en källa (den är en sänka från höger och en källa från vänster).

Definition 1.7 *p är en periodisk punkt med period k om k är det minsta positiva heltalet sådant att $f^k(p) = p$.*

En periodisk punkt av en funktion är en punkt som kommer tillbaka till sig själv efter ett antal iterationer. En fixpunkt p är en periodisk punkt med period 1 så att $f(p) = p$. Observera också att man har definierat perioden som ett minsta antal iterationer för att komma tillbaka till samma punkt. Om p till exempel är en periodisk punkt med period 2, då är p en fixpunkt för avbildningen $h = f^2$. Men det omvända behöver inte gälla. En fixpunkt för $h = f^2$ kan också vara en fixpunkt för f. Till exempel, om p är en fixpunkt för f, kommer den också vara det för f^2, men enligt definitionen är den inte en period två cykel på f. Med andra ord kan man använda sats 1.6 på h.
Kedjeregeln hjälper till att derivera sammansatta funktioner

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Om $f = g$ har man

$$(f^2)'(x) = f'(f(x))f'(x).$$

Om nu p_1, p_2 är en period två cykel av f, så säger kedjeregeln att derivatan av f^2 av en punkt på en period 2 cykel, är produkten av f's derivator i de två punkterna. Om p_1, p_2 är en period 2 cykel, så är $f^2(p_1) = f(f(p_1)) = f(p_2) = p_1$ och $f^2(p_2) = f(f(p_2)) = f(p_1) = p_2$.

Definition 1.8 *Låt f vara en avbildning och antag att p är av period k. Period k banan av p är en periodisk sänka om p är en sänka för avbildningen f^k. Banan för p är en periodisk källa om p är en källa för avbildningen f^k.*

Sats 1.9 *Den periodiska cykeln $p_1, ..., p_k$ är en sänka om*

$$|f'(p_k) \cdots f'(p_1)| < 1$$

och en källa om
$$|f'(p_k) \cdots f'(p_1)| > 1.$$

Cykeln är en fixpunkt för $h = f^k$, så sats 1.6 kan användas på $h = f^k$. För $k = 2$ har man $h'(p_1) = f'(f(p_1))f'(p_1) = f'(p_2)f'(p_1)$, så $|h'(p_1)| < 1$ om och endast om $|f'(p_2)f'(p_1)| < 1$. Det vill säga vi har en sänka då. Motsvarande gäller för en källa nämligen att $|h'(p_1)| > 1$ om och endast om $|f'(p_2)f'(p_1)| > 1$. Då $k = 3$ får vi på liknande sätt att$|f'(p_3)f'(p_2)f'(p_1| < 1$ eller > 1, och så vidare för $k > 3$.

2 Bifurkation

Vi betraktar funktionen $f_a(x) = ax(1-x)$, där $0 < a \leq 4$ är fixerat. Som nämnts tidigare avbildar f_a intervallet $[0,1]$ in i sig själv för sådana a. $f_a(x) = ax(1-x)$ har två fixpunkter, nämligen $p = 0$ och $p = 1 - \frac{1}{a}$. Fixpunkten $p = 0$ är en sänka om $0 < a < 1$, detta för att $|f'_a(0)| = a < 1$ och en källa då $1 < a \leq 4$, eftersom då har vi $|f'_a(0)| > 1$. Då $a = 1$ sker en övergång från sänka till källa. Den andra fixpunkten $p = 1 - \frac{1}{a}$ är en sänka om $1 < a < 3$ eftersom $|f'_a(p)| = |a-2| < 1$, och en källa om $0 < a < 1$ eller $3 < a \leq 4$, ty då är $|f'_a(p)| > 1$. Intervallet $0 < a < 1$ är ointressant för den här fixpunkten eftersom $1 - \frac{1}{a}$ inte finns inom $[0,1]$. Då $a = 3$ övergår fixpunkten från att vara en sänka till en källa och blir då också instabil. Då a passerar 3 uppstår en förgrening i två och senare även i flera periodiska sänkor. Ett ord för detta beteende är bifurkation. Alltså först så får vi en period två sänka. När sedan a växer tappar den stabilitet och blir en källa, då a fortsätter att växa uppstår en period fyra sänka som även den övergår till en källa och detta beteende fortsätter sedan. Det förhåller sig så att det finns en hel följd sådana sänkor för varje period 2^n, $n = 1, 2, 3, ...$ Man brukar kalla detta för en periodfördubblingskaskad. När a passerat ett visst värde kommer hela intervallet $[0,1]$ slumpmässigt att fyllas ut, men det kan finnas punkter som tidvis är stabila. När a närmar sig 4, till exempel $a = 3,86$, uppkommer kaotiska attraktorer som är mycket svårare att beskriva än periodiska sänkor. Utmärkande för kaotiska attraktorer är att de plötsligt kan uppkomma eller försvinna, eller ändra storlek diskontinuerligt. Fallet $a > 4$ är i detta fall ointressant för oss eftersom f_a inte avbildar $[0,1]$ in i $[0,1]$. Men hade man

fortsatt skulle man komma fram till att för $a > 4$ så finns inga attraherande mängder. Allt detta beskrivs i avsnitt 1.5 av [1].
Om man tar en bakteriestam som exempel så kommer populationen att avta snabbare än vad den ökar då $0 \leq a < 1$. Då $1 < a < 3$ kommer populationen att konvergera mot ett visst värde, den når ett stabilt läge. Då $a = 3$ kommer grafen att sprida sig i två spår. Populationen hamnar i en regelbunden svängning mellan två värden. En bra tidsperiod följs av en dålig. Då a närmar sig 4 kan man inte dra några slutsatser utan populationen avtar och tilltar slumpmässigt.
Nedan följer ett exempel på en period 2 cykel. För att finna period 2 banan till $G(x) = f_4(x) = 4x(1-x)$ sätter man $G^2(x) = x$ vilket ger ekvationen

$$-64x^4 + 128x^3 - 80x^2 + 16x = x.$$

Denna ekvation har fyra reella rötter, men två är fixpunkter för $G(x)$, nämligen $x = 0$ och $x = \frac{3}{4}$. Dessa rötter hjälper oss att lösa fjärdegradsekvationen, till exempel genom polynomdivision. Slutligen får vi fixpunkterna till $G^2(x)$,

$$\{\frac{5+\sqrt{5}}{8}, \frac{5-\sqrt{5}}{8}\} = \{p_1, p_2\},$$

vilka inte är fixpunkter för $G(x)$. Alltså är dessa punkter en period två bana. För att avgöra om det rör sig om en sänka eller en källa använder vi sats 1.9, vi har först vår funktion

$$G(x) = f_4(x) = 4x(1-x),$$

som deriverat blir

$$G'(x) = f_4'(x) = 4 - 8x.$$

Nu använder vi sats 1.9:

$$|(f_4^2)'(p_1)| = |f_4'(f_4(p_1))f_4'(p_1)| = |f_4'(p_2)f_4'(p_1)|,$$

som med p_1 och p_2 insatta blir

$$\left|\big(4 - 8(\frac{5+\sqrt{5}}{8})\big)\big(4 - 8(\frac{5-\sqrt{5}}{8})\big)\right|,$$

som uträknat blir $|-4| = 4$ som alltså är större än ett, och därmed en källa.

Nedan visar vi att det finns en period k bana för G för varje $k \geq 1$.

Lemma 2.1 $G^k(0) = G^k(1) = 0$.
G^k antar värdet 0 exakt $2^{k-1}+1$ gånger och värdet 1 exakt 2^{k-1} gånger. Om a' och a'' är två efterföljande nollställen för G^k, så finns det exakt ett $b \in (a', a'')$ sådant att $G^k(b) = 1$. Dessutom är $(G^k)'(x) > 0$ för alla $x \in (a', b)$ och $(G^k)'(x) < 0$ för alla $x \in (b, a'')$.

Bevis: Om $k = 1$, så är $G(0) = G(1) = 0$ och $G(\frac{1}{2}) = 1$. Eftersom $G'(x) > 0$ för $0 < x < \frac{1}{2}$ och $G'(x) < 0$ för $\frac{1}{2} < x < 1$, är påståendet sant för $k = 1$. Antag nu att påståendet gäller för ett visst $k \geq 1$. Vi visar att påståendet också stämmer för $k + 1$. $G^{k+1}(0) = G(G^k(0)) = G(0) = 0$ och $G^{k+1}(1) = G(G^k(1)) = G(0) = 0$. Låt a', a'' vara två på varandra följande nollställen för G^k och låt $b \in (a', a'')$ vara sådant att $G^k(b) = 1$. Enligt induktionsantagandet är $(G^k)'(x) > 0$ för $x \in (a', b)$ och $(G^k)'(x) < 0$ för $x \in (b, a'')$. Det finns även ett $c \in (a', b)$ sådant att $G^k(c) = \frac{1}{2}$. Då är $G^{k+1}(c) = G\big(G^k(c)\big) = G(\frac{1}{2}) = 1$. Dessutom så har vi att

$$(G^{k+1})'(x) = \underbrace{G'(G^k(x))}_{>0} \cdot \underbrace{(G^k)'(x)}_{>0} > 0 \quad \text{för alla} \quad x \in (a', c)$$

och

$$(G^{k+1})'(x) = \underbrace{G'\big(G^k(x)\big)}_{<0} \cdot \underbrace{(G^k)'(x)}_{>0} < 0 \quad \text{för alla} \quad x \in (c, b).$$

När x går från b till a'', går $G^k(x)$ från 1 till 0, så det finns ett d sådant att $G^{k+1}(d) = \frac{1}{2}$. Vi har alltså att

$$(G^{k+1})'(x) = \underbrace{G'\big(G^k(x)\big)}_{<0} \cdot \underbrace{(G^k)'(x)}_{<0} > 0 \quad \text{för alla} \quad x \in (b, d)$$

och

$$(G^{k+1})'(x) = \underbrace{G'\big(G^k(x)\big)}_{>0} \cdot \underbrace{(G^k)'(x)}_{<0} < 0 \quad \text{för alla} \quad x \in (d, a'').$$

Så mellan a' och a'' har $G^{k+1}(x)$ exakt två maxima ($G^k(x)$ har ett) och $G^{k+1}(x)$ har derivatan > 0 när $G^{k+1}(x)$ går från 0 till 1 och derivatan < 0 när $G^{k+1}(x)$ går från 1 till 0. Eftersom detta gäller på varje intervall $[a', a'']$ som ovan, fördubblas antalet maxima från 2^{k-1} till $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$. Antalet minima är alltså lika med antalet maxima plus ett, det vill säga $2^k + 1$. Så påståendet är sant för $k + 1$.

Lemma 2.2 *$G^k(x)$ har exakt 2^k fixpunkter.*

Bevis: Om a' och a'' är två efterföljande nollställen för G^k, enligt ovan, så skär kurvan $y = G^k(x)$ linjen $y = x$ två gånger mellan a' och a''. Då det finns 2^{k-1} sådana intervall, är antalet fixpunkter $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$.

Sats 2.3 *$G(x)$ har minst en bana med period k.*

Bevis: Varje k periodisk bana är en fixpunkt för G^k. Men om k är en multipel av l, så är även l periodiska banor fixpunkter för G^k. Summan av antalet fixpunkter för $G, G^2, \ldots, G^{k-1}$ är

$$2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2 \cdot \frac{2^{k-1} - 1}{2 - 1} = 2^k - 2 < 2^k,$$

så $G^k(x)$ har fixpunkter som inte är fixpunker till någon av $G, G^2, ..., G^{k-1}$. Alltså kan de inte ha period mindre än k, så minst två av dem måste vara nya fixpunkter.

Översätter vi till en bakteriestam så har vi på x-axeln x_n som är ett begynnelsevärde vid tiden n. På y-axeln har vi värdet $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ vid tiden $n + 1$. Vidare ses fixpunkter som jämviktslägen, det vill säga punkter där populationen varken växer eller avtar.

För $0 < a < 1$ sker en minskning av populationen mot 0. Att $a < 1$ betyder att förökningstakten är mindre än 1, det vill säga att varje generation bakterier ger upphov till en ny och mindre generation. Fixpunkten $x = 0$ är en sänka.

Då $1 < a \leq 3$ är fixpunkten $x = 0$ en källa, medan $x = 1 - \frac{1}{a}$ är en sänka. Detta betyder att bakteriestammen konvergerar mot $1 - \frac{1}{a}$ som är ett jämviktsläge.

För $a > 3$ är situationen mer komplicerad då det inte finns några fixpunkter som är sänkor. Däremot kan det för vissa värden på a uppstå periodiska banor som är sänkor. Kom ihåg att en 2 periodisk bana beskrivs som $f_a(p_1) = p_2$ och omvänt $f_a(p_2) = p_1$.

Ekvationen

$$f_a^2(x) = a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^3x^2 + a^2x^2 - a^2x = x$$

har lösningar $x = 0$ och $x = \frac{a-1}{a}$ som är kända sedan tidigare och således hör till period 1 banan (det vill säga är fixpunkter för f_a). Dessutom får vi två nya som tillhör period 2 banan. Nämligen $x_1 = \frac{a+1}{2a} - \frac{\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$ och

$x_2 = \frac{a+1}{2a} + \frac{\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$. Dessa rötter är komplexa för $0 < a < 3$, en dubbelrot då $a = 3$ och det finns två reella rötter då $3 < a \leq 4$. Man verifierar också enkelt att för $3 < a \leq 4$ är $0 < x_1 < x_2 < 1$, det vill säga x_1 och x_2 är en period 2 bana. Det gäller nu att finna det a där banan övergår från sänka till en källa. Vi har

$$f'_a(x_1) = a - 2ax_1 = -1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}$$

och

$$f'_a(x_2) = a - 2ax_2 = -1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}.$$

Därefter beräknas $f'_a(x_1) \cdot f'_a(x_2) = -(a^2 - 2a - 4)$. Vilket leder till att vi har en sänka om $|f'_a(x_1) \cdot f'_a(x_2)| < 1$, det vill säga vi får olikheterna $-1 < a^2 - 2a - 4 < 1$. Den vänstra olikheten gäller alltid för $a > 3$. Den högra olikheten gäller om $1 - \sqrt{6} < a < 1 + \sqrt{6}$, men eftersom vi bara är intresserade av $a > 3$ får vi således $3 < a < 1+\sqrt{6}$. Alltså för $3 < a < 1+\sqrt{6}$ är vår period 2 bana en sänka och för $1+\sqrt{6} < a \leq 4$ har vi en källa. Man kan visa att för $a > 1+\sqrt{6}$ så uppstår en period 4 bana som är en sänka. För ett visst $\tilde{a} > 1 + \sqrt{6}$ övergår även period 4 banan till att vara en källa samtidigt som det uppstår en period 8 bana som först är en sänka för att sedan bli en källa och så vidare. Det vill säga en periodfördubblingsbifurkation har inträffat. Fallet $a \geq 4$ är för vår del inte aktuellt.

3 Känsligt beroende av begynnelsevärden

Definition 3.1 *Låt f vara en avbildning på $\mathbb{R}$. I punkten x_0 är iterationerna känsligt beroende av begynnelsevillkoren om det finns ett avstånd d skilt från noll så att vissa punkter godtyckligt nära x_0 avbildas, efter ett antal iterationer, minst d enheter ifrån motsvarande bild av x_0. Mer precist, det finns ett $d > 0$ så att varje omgivning N av x_0 innehåller en punkt x sådan att $|f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d$ för något ickenegativt heltal k.*

Ovanstående betyder att om vi har de två värdena x och x_0, så finns ett x som är godtyckligt nära x_0 så att om vi itererar funktionen f för båda värdena så kommer ändå skillnaden $|f^k(x) - f^k(x_0)|$ vara förhållandevis stor. Dock betyder det inte att alla värden i en omgivning kring x_0 avviker, men

åtminstone ett värde gör det.
Alltså hur litet mätfelet än är, dock skilt från noll, så finns ett värde x som divergerar från det "verkliga" värdet x_0. Härav får man uttrycket känsligt beroende, det krävs alltså en väldigt liten skillnad för att systemet skall bli oigenkännligt.

Sats 3.2 *Antag att* $G(x) = 4x(1-x)$. *I banan* $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ *ges* x_n *av formeln* $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2^n \arccos(1-2x_0)\right)$.

Bevis: Om $n = 0$ så är högerledet i formeln lika med $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\arccos(1 - 2x_0)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + x_0 = x_0$, det vill säga formeln stämmer för $n = 0$. Antag att den stämmer för ett visst $n \geq 0$. För $n+1$ får vi

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$$

och ersätter vi nu värdena för x_n får vi

$$x_{n+1} = 4\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right)\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right)\right)\right].$$

Multiplicerar vi in 4 så fås

$$x_{n+1} = \left[1-\cos\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right)\right]\cdot\left[1+\cos\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right)\right] =$$

$$= 1-\cos^2\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right).$$

Enligt formeln för dubbla vinkeln som säger att $\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2v)$, så får vi

$$x_{n+1} = 1-\cos^2\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right) =$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2^{n+1}\arccos(1-2x_0)\right)\right),$$

härav

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2^{n+1}\arccos(1-2x_0)\right)$$

vilket skulle bevisas.

För vår funktion $G(x) = 4x(1-x)$ är banorna $x_0, x_1, x_2, ...$ där $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2^n\arccos(1-2x_0)\right)$. Med ett x_0 givet och $\tilde{x_0}$ nära x_0, låt

$$\arccos(1-2x_0) = v_0$$

och

$$\arccos(1-2\tilde{x_0}) = \tilde{v_0}.$$

Då är

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^n v_0)$$

och

$$\tilde{x_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^n \tilde{v_0}),$$

så

$$|x_n - \tilde{x_n}| = \frac{1}{2}|\cos(2^n \tilde{v_0}) - \cos(2^n v_0)|.$$

Om $\tilde{x_0}$ ligger nära x_0, där $\tilde{x_0} \neq x_0$, så hamnar även $\tilde{v_0}$ och v_0 nära varandra. Men allteftersom kommer avståndet mellan $2^n\tilde{v_0}$ och $2^n v_0$ bli större och större. Vi ser åtminstone intuitivt, att till slut blir avståndet mellan $2^n\tilde{v_0}$ och $2^n v_0$ sådant att $|\cos 2^n\tilde{v_0} - \cos 2^n v_0| \geq \frac{1}{2}$, det vill säga $|x_n - \tilde{x_n}| \geq \frac{1}{4}$. I avsnitt 1.8 av [1] visas detta på ett annat sätt, mer rigoröst.
Slutsatsen är att iterationerna är känsligt beroende av begynnelsevillkoren för varje x_0.

Referenser

[1] Alligood, Kathleen T., Sauer, Tim D., Yorke, James A., Chaos. An introduction to dynamical systems, Springer 2000.

[2] Benedicks, Michael, Periodfördubbling till kaos, Normat 31 (1983).