



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Ramseytalen för cykel mot cykel

av

Mikael Hansson

2012 - No 2

Ramseytalen för cykel mot cykel

Mikael Hansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jörgen Backelin

2012

Kandidatuppsats
RAMSEYTALEN FÖR CYKEL MOT CYKEL

Mikael Hansson

2 februari 2012

Sammanfattning

Ramseyteori kan sägas handla om strukturer med vissa delstrukturer, och hur stora dessa strukturer måste vara för att de garanterat ska innehålla vissa givna delstrukturer. Det här arbetet behandlar klassisk, dvs. grafteoretisk, Ramseyteori, där strukturerna är grafer och delstrukturerna är delgrafer. Det mest studerade problemet inom grafteoretisk Ramseyteori är att, givet s grafer $G_1, \dots, G_s$, beräkna det så kallade Ramseytalet $R(G_1, \dots, G_s)$, dvs. det minsta heltalet n , sådant att om varje kant i den kompletta grafen K_n på n hörn färgas med någon av färgerna $f_1, \dots, f_s$, så innehåller K_n garanterat en f_i -färgad G_i , för något $i \in \{1, \dots, s\}$. I det här arbetet bevisas först några grundläggande, allmänna egenskaper hos Ramseytalen, bland andra att de alltid existerar. Därefter bevisas en sats som beskriver samtliga tvåfärgsramseytal, sådana att G_1 och G_2 är godtyckliga cykler.

Innehåll

1	Introduktion	7
1.1	Inledande exempel	7
1.2	Definitioner och beteckningar	9
1.3	Grundläggande egenskaper hos Ramseyfunktionen	11
1.4	Formulering av $R(C_n, C_k)$ -fallen	13
2	Bevis för $R(C_n, C_k)$-fallen	15
2.1	Bevis för $R(C_3, C_3)$ -, $R(C_4, C_4)$ - och $R(C_n, C_3)$ -fallen	16
2.2	Bevis av de undre gränserna för $R(C_n, C_k)$	18
2.3	Två förberedande lemmor	19
2.4	Översikt över beviset av de övre gränserna	23
2.5	Bevis av de övre gränserna för $R(C_n, C_k)$	26
3	Referenser	38

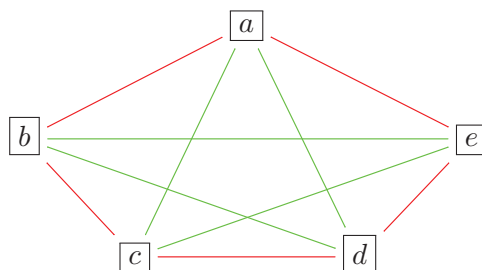
1 Introduktion

1.1 Inledande exempel

Följande exempel används ofta för att introducera Ramseyteori (efter den engelske matematikern Frank Ramsey (1903-1930)): Anta att det för varje par av personer på en fest gäller att de antingen känner varandra eller inte känner varandra. Vilket är det minsta antalet personer som måste närvara på festen för att det garanterat ska finnas tre personer som alla känner varandra eller tre personer där ingen känner någon av de övriga två? Detta kan modelleras med grafer: Låt hörnen utgöra personerna på festen och dra en kant mellan två hörn om och endast om dessa två personer känner varandra. Ekvivalent kan man dra en röd kant mellan två hörn om dessa två personer känner varandra och en grön kant annars. Frågan ovan kan nu formuleras såhär: "Vilket är det minsta antalet hörn som en graf måste innehålla för att den garanterat ska innehålla en 3-klick (tre hörn med en kant mellan varje par av hörn) eller tre oberoende hörn (tre hörn utan kanter mellan varandra)?" respektive "Vilket är det minsta antalet hörn som en komplett röd-grön graf (ett antal hörn med en kant, röd eller grön, mellan varje par av hörn) måste innehålla för att den garanterat ska innehålla en röd 3-klick eller en grön 3-klick?" Låt $R(3,3)$ beteckna det sökta antalet personer/hörn. Nedan visas att $R(3,3) = 6$.

Proposition 1.1.1. $R(3,3) = 6$.

Bevis. $R(3,3) \geq 6$: Vi måste visa att det finns en komplett röd-grön 5-hörnsgraf som inte innehåller någon enfärgad triangel. Låt hörnen vara a, b, c, d och e . Låt de fem kanterna ab, bc, cd, de och ea vara röda, och låt de resterande fem kanterna ac, ce, eb, bd och da vara gröna. Denna kompletta 5-hörnsgraf innehåller ingen enfärgad triangel, ty den består av en röd och en grön 5-kantscykel (se Figur 1).



Figur 1: $R(3,3) \geq 6$.

$R(3, 3) \leq 6$: Vi måste visa att varje komplett röd-grön 6-hörnsgraf innehåller en enfärgad triangel. Låt hörnen vara v, a, b, c, d och e . Åtminstone tre av kanterna va, vb, vc, vd och ve har samma färg; säg att (åtminstone) va, vb och vc är röda. Om ab, ac eller bc är röd, så har vi en röd triangel (vab, vac respektive vbc). Om å andra sidan ab, ac och bc alla är gröna, så har vi en grön triangel (abc). $\square$

Det är naturligt att gå vidare med att försöka besvara den mer generella frågan "Vilket är det minsta antalet hörn som en komplett röd-grön graf måste innehålla för att den garanterat ska innehålla en given röd delgraf eller en given grön delgraf (de två delgraferna kan vara olika)?" Detta är i allmänhet ett mycket svårt problem – redan talet $R(5, 5)$, där den röda och den gröna delgrafen båda är 5-klickar, är okänt (man vet bara att ligger mellan 43 och 49) – men många av dessa så kallade Ramseytal är trots det kända, till exempel $R(C_n, C_k)$, där den röda och den gröna delgrafen är en n - respektive en k -kantscykel. Det här arbetet handlar framför allt om Ramseytalen $R(C_n, C_k)$; jag nämner också en generalisering av dem (se detta avsnitts sista stycke).

I Avsnitt 1.3 bevisas några grundläggande, allmänna egenskaper hos Ramseytalen, bland andra att de alltid existerar (här väljer jag att inte begränsa antalet färger till två). Alla resultat i detta avsnitt är kända sedan tidigare, men bevisen är mina egna, förutom beviset av Ramseys sats (Sats 1.3.4). I Avsnitt 1.4 ges först en kort beskrivning av hur man kan beräkna några av Ramseytalen för klick mot klick. Beskrivningen återfinns i Graham-Rothschild-Spencer [4] i fallet två färger, men jag har generaliserat den till ett godtyckligt antal färger. Därefter formuleras en sats som beskriver samtliga Ramseytal för cykel mot cykel, dvs. samtliga Ramseytal på formen $R(C_n, C_k)$; satsen bevisas sedan i Kapitel 2.

Beviset följer till stor del en artikel av G. Károlyi och V. Rosta [5]. Förutom att presentera deras bevis, bevisar jag de specialfall av $R(C_n, C_k)$ och de påståenden som de lämnar som övningar åt läsaren, gör en del omdispositioner av argumenten för att få ett klarare bevis, lägger till argument som de utelämnar, men som jag anser behövs, eller åtminstone underlättar, samt rättar några mindre fel. I inledningen av Kapitel 2 ges en mer detaljerad beskrivning av hur beviset skiljer sig från Károlyi-Rostas artikel.

En generalisering av Ramseytalen för cykel mot cykel, är att studera mängd av cykler mot mängd av cykler eller, ännu mer generellt, mängd av grafer mot mängd av grafer. Frågan som man försöker besvara är då "Vilket är det minsta antalet hörn som en komplett röd-grön graf måste innehålla för att den garanterat ska innehålla en röd delgraf tillhörande en given mängd

av grafer eller en grön delgraf tillhörande en given mängd av grafer (de två grafmängderna kan vara olika)?” Jag har för avsikt att undersöka mängd av cykler mot mängd av cykler i en kommande uppsats, men i det här arbetet kommer jag inte att nämna denna generalisering fler gånger.

1.2 Definitioner och beteckningar

I detta avsnitt definieras framför allt de grafteoretiska begrepp som används i det här arbetet.

Definition 1.2.1. Om X är en mängd, låt $|X|$ vara antalet element i X och låt $\binom{X}{k} = \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$. Om A och B är två mängder, låt $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ och låt (som vanligt) $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ och } b \in B\}$.

Definition 1.2.2. Låt $\mathbf{R}$ vara de reella talen, låt $\mathbf{Z}$ vara heltalen och låt $\mathbf{N}$ vara de icke-negativa heltalen. Om $x \in \mathbf{R}$, låt $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\}$ och låt $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq x\}$. Om $a \in \mathbf{Z}$, låt $a \bmod n$ vara det minsta icke-negativa heltal kongruent med a modulo n . Om $n \in \mathbf{N}$, låt $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ (så $[0] = \emptyset$). Om $a \leq b$ är heltal, låt $[a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\}$, och om $a > b$ är heltal, låt $[a, b] = \emptyset$. $x \equiv a$ betyder att $x \equiv a \pmod{2}$. $\text{sgd}(a, b)$ betecknar den största gemensamma delaren av a och b . $b \mid a$ betyder att b delar a .

Definition 1.2.3. En *graf* G är ett par (V, E) , där V är en ändlig icke-tom mängd och $E \subseteq \binom{V}{2}$; elementen i V kallas *hörn* och elementen i E kallas *kanter*. (Alla grafer i det här arbetet är alltså ändliga och icke-tomma samt, vad man brukar kalla, enkla och oriktade.) Om G är en graf, låt $V_G = V(G)$ och $E_G = E(G)$ beteckna dess hörn- respektive kantmängd. Grafen $H = (V_H, E_H)$ säges vara en *delgraf* till grafen $G = (V_G, E_G)$ om $V_H \subseteq V_G$ och $E_H \subseteq E_G$; H säges vara en *inducerad delgraf* till G om, dessutom, $E_H = \binom{V_H}{2} \cap E_G$. Hörnet v och kanten $\{x, y\}$ säges vara *incidenta* om $v = x$ eller $v = y$. Hörnen u och v säges vara *grannar* om $\{u, v\} = \{v, u\}$ är en kant i grafen. Ofta skriver vi uv eller vu för kanten $\{u, v\}$.

Definition 1.2.4. Två grafer G_1 och G_2 säges vara *isomorfa* om det finns en bijektion $V(G_1) \xrightarrow{\varphi} V(G_2)$, sådan att $\{u, v\} \in E(G_1)$ om och endast om $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(G_2)$, för alla $u, v \in V(G_1)$. Låt *isomorfiklassen* $[G]$ av en given graf G bestå av alla grafer som är isomorfa med G , och låt $\mathcal{P}$ beteckna mängden av alla isomorfiklasser av grafer.

Definition 1.2.5. Grafen K_n består av n hörn och alla $\binom{n}{2}$ möjliga kanter; den kallas för den *fullständiga* eller den *kompleta* grafen på n hörn, eller *n-klicken*. Den *diskreta* grafen på n hörn består av n hörn och noll kanter. Om

$n \geq 1$ är ett heltal, låt $P_n = (\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\})$ (en *stig* av längd $n-1$; beteckningen $P_n = x_1x_2 \cdots x_n$ används). Om $n \geq 3$ är ett heltal, låt $C_n = (\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\})$ (en *cykel* av längd n ; beteckningen $C_n = x_1x_2 \cdots x_nx_1$ används). En graf $G = (V, E)$ säges vara *bipartit* om det finns två disjunkta delmängder V_1 och V_2 till V , sådana att $V = V_1 \cup V_2$ och alla kanter $e \in E$ är på formen $e = v_1v_2$, där $v_1 \in V_1$ och $v_2 \in V_2$; G säges vara *komplett bipartit* om, dessutom, $v_1v_2 \in E$, för alla $v_1 \in V_1$ och alla $v_2 \in V_2$.

Definition 1.2.6. Låt $C = x_1x_2 \cdots x_nx_1$ vara en cykel. En j -korda till C är en kant på formen x_ix_{i+j} , där $j \bmod n \notin \{1, n-1\}$. Hörnindex tolkas genomgående modulo längden av cykeln vi för tillfället betraktar. Till exempel är $x_{11} = x_3$ i en cykel av längd 8.

Definition 1.2.7. Låt A vara en icke-tom mängd. En *färgning* ρ av en mängd X är en funktion $X \xrightarrow{\rho} A$; $\rho(x)$ kallas *färgen* av x ($x \in X$). Låt $s \geq 1$ vara ett heltal. En s -färgning ρ av en mängd X är en funktion $X \xrightarrow{\rho} [s]$. En *kantfärgning* av en graf (V, E) är en färgning av E ; den kantfärgade grafen betecknas (V, E, ρ) och säges vara en *färggraf*. En färggraf (V, E, ρ) säges vara *röd-grön* om $\rho(e) \in \{\text{röd}, \text{grön}\}$, för alla $e \in E$; hörnen u och v säges vara *röda* respektive *gröna grannar* om $\{u, v\}$ är en röd (grön) kant i grafen. En delgraf $H = (V_H, E_H, \rho_H)$ till färggrafen $G = (V_G, E_G, \rho_G)$ säges ha den *inducerade färgningen* om $\rho_H(e) = \rho_G(e)$, för alla $e \in E_H$. Om G är en färggraf och $\Gamma \subseteq V_G$, låt $G[\Gamma]$ beteckna den inducerade delgrafen på Γ med den inducerade färgningen.

Definition 1.2.8. Låt n och s vara positiva heltal, och låt $G_1, \dots, G_s$ vara (ofärgade) grafer. $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$ betyder att det för varje s -kantfärgning ρ av K_n finns ett $i \in [s]$, sådant att K_n innehåller en delgraf H_i isomorf med G_i , sådan att $\rho(e) = i$ för alla $e \in E(H_i)$; ofta uttrycker vi detta som att (K_n, ρ) (eller bara K_n) innehåller en i -färgad G_i . $n \rightarrow (t_1, \dots, t_s)$ betyder samma sak som $n \rightarrow (K_{t_1}, \dots, K_{t_s})$. *Ramseytalet* $R(G_1, \dots, G_s)$ betecknar det minsta heltal $n \geq 1$ sådant att $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$; $R(t_1, \dots, t_s)$ betyder samma sak som $R(K_{t_1}, \dots, K_{t_s})$. Eftersom Ramseytalet $R(G_1, \dots, G_s)$ endast beror av isomorfiklasserna av $G_1, \dots, G_s$, kan vi definiera en funktion, kallad *Ramseyfunktionen*, från $\mathcal{P}^s \stackrel{\text{defn}}{=} \mathcal{P} \times \dots \times \mathcal{P}$ (s gånger) till mängden av alla positiva heltal, genom $([G_1], \dots, [G_s]) \mapsto R(G_1, \dots, G_s)$. Observera att det inte är uppenbart att det för varje heltal $s \geq 1$ och alla grafer $G_1, \dots, G_s$, finns ett heltal $n \geq 1$ sådant att $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$. I nästa avsnitt visas dock att så är fallet, så Ramseyfunktionen är väldefinierad.

Definition 1.2.9. Om $G = (V, E)$ är en (ofärgad) graf, låt dess *komplementgraf* $\overline{G}$ vara grafen $(V, \binom{V}{2} - E)$. Om $G = (V, E, \rho)$ istället är en komplett röd-grön graf, låt dess *komplementfärggraf* $\overline{G}$ vara den kompletta röd-gröna grafen $(V, E, \overline{\rho})$, där

$$\begin{cases} \overline{\rho}(e) = \text{röd} & \text{om } \rho(e) = \text{grön} \\ \overline{\rho}(e) = \text{grön} & \text{om } \rho(e) = \text{röd}. \end{cases}$$

Observera att sammanhanget avgör vad $\overline{G}$ står för.

1.3 Grundläggande egenskaper hos Ramseyfunktionen

Proposition 1.3.1. Låt $s \geq 1$ vara ett heltal. Då gäller att

$$n \rightarrow (G_1, \dots, G_s) \quad \text{om och endast om} \quad n \rightarrow (G_1, \dots, G_s, 2).$$

Bevis. ($\Rightarrow$) Fixera en godtycklig $(s+1)$ -kantfärgning av K_n . Om den innehåller en $(s+1)$ -färgad kant, så har vi en $(s+1)$ -färgad K_2 . Om inte, så har vi (per antagande) en i -färgad G_i , för något $i \in [s]$.

($\Leftarrow$) Fixera en godtycklig s -kantfärgning av K_n . Eftersom den inte innehåller någon $(s+1)$ -färgad K_2 , så har vi (per antagande) en i -färgad G_i , för något $i \in [s]$. $\square$

Proposition 1.3.2. Låt $s \geq 1$ vara ett heltal och låt σ vara en permutation av $[s]$. Då gäller att

$$n \rightarrow (G_1, \dots, G_s) \quad \text{om och endast om} \quad n \rightarrow (G_{\sigma(1)}, \dots, G_{\sigma(s)}).$$

Bevis. ($\Rightarrow$) Ta en godtycklig s -färgning ρ av K_n . Vi vill visa att (K_n, ρ) innehåller en i -färgad $G_{\sigma(i)}$, för något $i \in [s]$. Vi får en ny s -färgning ρ' av K_n , genom att låta de i -färgade kanterna bli $\sigma(i)$ -färgade, för alla $i \in [s]$ ($\rho' = \sigma \circ \rho$). Eftersom $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$, innehåller (K_n, ρ') en j -färgad G_j , för något $j \in [s]$. Eftersom σ är surjektiv, innehåller (K_n, ρ') en $\sigma(i)$ -färgad $G_{\sigma(i)}$, för något $i \in [s]$. Vi ser att den tidigare färgningen (K_n, ρ) , måste ha innehållit en $G_{\sigma(i)}$ i de färger som σ avbildar på $\sigma(i)$, dvs. en i -färgad $G_{\sigma(i)}$ (eftersom σ är injektiv).

($\Leftarrow$) För varje $i \in [s]$, låt $H_i = G_{\sigma(i)}$; notera att $H_{\sigma^{-1}(i)} = G_i$. Eftersom $n \rightarrow (H_1, \dots, H_s)$, fås från $\Rightarrow$ -delen att $n \rightarrow (H_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, H_{\sigma^{-1}(s)})$, dvs. att $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$. $\square$

Proposition 1.3.3. Låt $s \geq 1$ vara ett heltal. Om H_i är en delgraf till G_i , för alla $i \in [s]$, så gäller att $R(H_1, \dots, H_s) \leq R(G_1, \dots, G_s)$ (förutsatt att högerledet existerar).

Bevis. Låt $n = R(G_1, \dots, G_s)$. Per definition av $R(G_1, \dots, G_s)$ gäller att $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$, vilket uppenbarligen medför att $n \rightarrow (H_1, \dots, H_s)$; alltså är $R(H_1, \dots, H_s) \leq n$. $\square$

Låt $s \geq 1$ vara ett heltal. Notera att om $E(G_i) = \emptyset$, för något $i \in [s]$, så gäller att

$$R(G_1, \dots, G_s) = \min_{i \in [s]} \{|V(G_i)| \mid E(G_i) = \emptyset\} \geq 1.$$

För godtyckliga grafer $G_1, \dots, G_s$ gäller alltså att

$$R(G_1, \dots, G_s) \geq \min_{i \in [s]} \{|V(G_i)|\} \geq 1$$

(förutsatt att vänsterledet existerar).

Sats 1.3.4 (Ramseys sats).

(a) $R(t) = t$, för alla $t \geq 2$.

(b) Om $s \geq 2$, $t_i \geq 2$, för alla $i \in [s]$, och $t_j = 2$, för något $j \in [s]$, så gäller att

$$R(t_1, \dots, t_s) = R(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_s).$$

(c) Om $s \geq 1$ och $t_i \geq 3$, för alla $i \in [s]$, så gäller att

$$R(t_1, \dots, t_s) \leq \left(\sum_{i=1}^s R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \right) - s + 2.$$

(d) För varje heltal $s \geq 1$ och alla heltal $t_1, \dots, t_s \geq 2$, finns ett heltal $n \geq 2$ sådant att $n \rightarrow (t_1, \dots, t_s)$; alltså existerar $R(t_1, \dots, t_s)$.

(e) För varje heltal $s \geq 1$ och alla grafer $G_1, \dots, G_s$, finns ett heltal $n \geq 1$ sådant att $n \rightarrow (G_1, \dots, G_s)$; alltså existerar $R(G_1, \dots, G_s)$.

Anmärkning. I (b)- och i (c)-delen förutsätts att högerleden existerar, vilket bevisas i (d)-delen.

Bevis. (a) Inses lätt.

(b) Använd Propositioner 1.3.1 och 1.3.2.

(c) Om $s = 1$, så följer resultatet direkt från (a)-delen. Alltså kan vi från och med nu anta att $s \geq 2$. Låt

$$n = \left(\sum_{i=1}^s R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \right) - s + 2$$

och fixera en godtycklig s -färgning ρ av K_n . Fixera ett hörn $x \in K_n$ och definiera Γ_i^x , för varje $i \in [s]$, som mängden $\{y \in K_n \mid \rho(xy) = i\}$. För något $j \in [s]$ gäller att $|\Gamma_j^x| \geq R(t_1, \dots, t_j - 1, \dots, t_s)$. (Anta motsatsen, dvs. att $|\Gamma_i^x| \leq R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) - 1$, för alla $i \in [s]$. Då fås att

$$\sum_{i=1}^s |\Gamma_i^x| \leq \left(\sum_{i=1}^s R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \right) - s = n - 2,$$

men vi har ju att $\sum_{i=1}^s |\Gamma_i^x| = n - 1$ (antalet grannar till x .) Per definition av $R(G_1, \dots, G_s)$, innehåller $K_n[\Gamma_j^x]$ antingen en i -färgad K_{t_i} , för något $i \in [s] - \{j\}$, eller en j -färgad K_{t_j-1} . I det förra fallet är vi klara; i det senare fallet innehåller $K_n[\Gamma_j^x \cup \{x\}]$ en j -färgad K_{t_j} .

(d) Använd Sats 1.3.4 (a)-(c) och induktion.

(e) Använd (d)-delen och Proposition 1.3.3. □

Eftersom vi nu vet att $R(G_1, \dots, G_s)$ alltid existerar, följer följande resultat från Proposition 1.3.2.

Proposition 1.3.5. *Låt $s \geq 1$ vara ett heltal och låt σ vara en permutation av $[s]$. Då gäller att*

$$R(G_1, \dots, G_s) = R(G_{\sigma(1)}, \dots, G_{\sigma(s)}).$$

1.4 Formulering av $R(C_n, C_k)$ -fallen

Tvåfärgsramseytalen $R(m, n)$ för klick mot klick är förmodligen det mest studerade fallet av Ramseyfunktionen, men trots det är inte särskilt många sådana Ramseytal kända. För Ramseytalen $R(C_n, C_k)$ för cykel mot cykel är situationen annorlunda: alla sådana Ramseytal är kända. Nedan visas först hur man kan beräkna några av de mindre Ramseytalen $R(m, n)$; därefter beskrivs Ramseytalen $R(C_n, C_k)$ i detalj.

Olikheten i Sats 1.3.4 (c) är strikt om

$$(1) \quad \begin{cases} R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \equiv 0, \text{ för något } i \in [s], \text{ och} \\ |\{i \in [s] \mid R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \equiv 1\}| \equiv s. \end{cases}$$

Anta nämligen att vi har likhet i ovan nämnda olikhet. Då finns en komplett s -färgad graf G med

$$\gamma \stackrel{\text{defn}}{=} \left(\sum_{i=1}^s R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \right) - s + 1$$

hörn, sådan att G inte innehåller någon i -färgad K_{t_i} . För varje hörn $x \in G$ och varje $i \in [s]$, gäller att x har högst $R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) - 1$ i -färgade

grannar (annars fås en j -färgad K_{t_j} , för något $j \in [s]$), och således precis $R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) - 1$ i -färgade grannar. Således är antalet i -färgade kanter i G lika med $\gamma(R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) - 1)/2$, vilket alltså är ett heltal. Så är fallet om och endast om $R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \equiv 1$, för alla $i \in [s]$, eller $|\{i \in [s] \mid R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_s) \equiv 1\}| \neq s$, dvs. om och endast om (1) inte gäller.

I fallet $s = 2$, har vi alltså att $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1) - 1$ om $R(m - 1, n)$ och $R(m, n - 1)$ båda är jämna. Från detta resultat och $R(m, 2) = R(2, m) = m$ (se Sats 1.3.4 (a)-(b)) fås att $R(3, 3) \leq 6$, $R(4, 3) \leq 9$, $R(5, 3) \leq 14$ och $R(4, 4) \leq 18$. Det finns konstruktioner som visar att dessa olikheter är likheter (se Kapitel 4 i [4]). De enda övriga kända Ramseytalen $R(m, n) = R(n, m)$ är $R(m, 3)$, $6 \leq m \leq 9$, och $R(5, 4)$ (se [6]); för dessa Ramseytal ger tekniken ovan övre gränser som är större än de sanna värdena.

Ramseytalen $R(C_n, C_k)$, däremot, är alltså kända för alla värden på n och k . De sista okända fallen (vilka var ganska många) bevisades oberoende av V. Rosta [7] respektive av R. Faudree och R. Schelp [3], i början av 1970-talet. I Kapitel 2 presenteras ett ungefär 30 år yngre bevis, av G. Károlyi och V. Rosta [5]. Sådär lyder resultatet:

Sats 1.4.1 (Sats 1.1 i [5]). *Låt $n \geq k \geq 3$ vara heltal. Då gäller att*

$$R(C_n, C_k) = \begin{cases} 6 & \text{om } (n, k) \in \{(3, 3), (4, 4)\} \\ n + k/2 - 1 & \text{om } 0 \equiv n \not\equiv 4 \text{ och } k \equiv 0 \\ \max\{n + k/2 - 1, 2k - 1\} & \text{om } n \equiv 1 \text{ och } k \equiv 0 \\ 2n - 1 & \text{om } k \equiv 1 \text{ och } n \not\equiv 3. \end{cases}$$

För att underlätta beviset av Sats 1.4.1, låt $\beta(n, k)$ vara respektive högerled ovan.

2 Bevis för $R(C_n, C_k)$ -fallen

I Avsnitt 2.1 bevisas några specialfall av $R(C_n, C_k)$, nämligen $(n, k) = (4, 4)$ och $k = 3$, i Avsnitt 2.2 bevisas övriga undre gränser, i Avsnitt 2.3 formuleras och bevisas två förberedande lemmor, nödvändiga för beviset av övriga övre gränser, i Avsnitt 2.4 ger jag en översikt över beviset av övriga övre gränser, och i Avsnitt 2.5 bevisas dem.

Hur beviset av Sats 1.4.1 skiljer sig från Károlyi-Rostas artikel

Bevisen för $R(C_3, C_3)$ - och $R(C_4, C_4)$ -fallen lämnar Károlyi-Rosta som en övning, men jag genomför dessa bevis i Avsnitt 2.1 (se Proposition 2.1.1). I samma avsnitt bevisar jag också $R(C_4, C_3)$ -fallet (se Proposition 2.1.2), vilket Károlyi-Rostas bevis av de övre gränserna inte verkar omfatta explicit.¹ Slutligen presenteras ett bevis för $R(C_n, C_3)$ -fallen, för $n \geq 4$, med hjälp av $R(C_4, C_3)$ -fallet och induktion; Károlyi-Rosta väljer att istället, eftersom deras bevis av de övre gränserna omfattar $R(C_n, C_3)$ -fallen för $1 \equiv n \geq 5$, bevisa $R(C_n, C_3)$ -fallen för $0 \equiv n \geq 6$, med hjälp av $R(C_n, C_{n-1})$ -fallen.

Bevisen i detta kapitel är från Károlyi-Rosta [5]², förutom bevisen av Sats 2.1.3 (som är från Chartrand-Schuster [2]), ovan nämnda Propositioner 2.1.1 och 2.1.2, samt Lemma 2.3.1.

Jag har gjort en del omdispositioner av argumenten för att få ett klarare bevis. Tre exempel är Fall 1c och Fall 2a i beviset av Lemma 2.5.1, samt inledningen av beviset av Lemma 2.5.2. Flera påståenden har jag också skrivit om som små lemmor med bevis (påståendena (2) och (3), samt Påstående 2, Påstående 3 och Påstående 5). Ibland har jag också skrivit om saker på ett tydligare sätt, till exempel definitionen av R_i i Fall 2b i beviset av Lemma 2.5.1.

Argument som Károlyi-Rosta utelämnar, men som jag anser behövs, eller åtminstone underlättar, har jag ofta, men inte alltid, satt inom parentes. Större argument har jag alltid satt inom parentes, med följande undantag:

- I beviset av Lemma 2.3.2 (d) har jag förklarat hur cyklerna konstrueras i de tre olika fallen (Fall 1, Fall 2a respektive Fall 2b), samt varför

¹Den övre gränsen för $R(C_4, C_3)$ kan bevisas med hjälp av $R(C_4, C_4)$ -fallet och Lemma 2.3.2 (d) (se Anmärkning 2 efter formuleringen av Lemma 2.3.2), något som bara delvis konstateras av Károlyi-Rosta. (De skriver, i en parentes i beviset av Lemma 2.5.1, att om en komplett röd-grön graf innehåller en grön C_n , men inte en grön $(k-1)$ -korda, så fås, från Lemma 2.3.2 (d), en röd C_n eller en grön C_k , om $(n, k) = (4, 3)$.)

²Károlyi-Rosta använder färgerna "red" och "blue" medan jag använder färgerna "röd" och "grön".

påståendena (2) och (3) är sanna.

- I beviset av Lemma 2.5.1 har jag bevisat Påstående 1, Påstående 2 och Påstående 3, samt förklarat varför P_l^+ och P_l^- är röda stigar av längd $n' - 1$.
- I beviset av Lemma 2.5.2 har jag bevisat Påstående 4, Påstående 5 och Fall 4 i Påstående 7.

Károlyi-Rosta skriver kortfattat, och vissa påståenden stämmer inte för enstaka värden. Sådana fall har jag noterat i fotnoter.

2.1 Bevis för $R(C_3, C_3)$ -, $R(C_4, C_4)$ - och $R(C_n, C_3)$ -fallen

Eftersom $C_3 = K_3$, gäller att $R(C_3, C_3) = R(3, 3) = 6$.

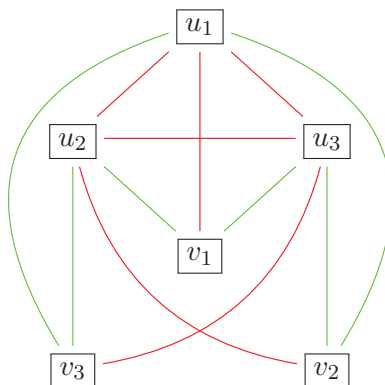
Proposition 2.1.1. $R(C_4, C_4) = 6$.

Bevis. $R(C_4, C_4) \geq 6$: Den kompletta röd-gröna grafen med hörnmängd $\{a, b, c, d, e\}$ och

$$\begin{cases} \rho(ab) = \rho(bc) = \rho(cd) = \rho(de) = \rho(ea) = \text{röd} \\ \rho(ac) = \rho(ce) = \rho(eb) = \rho(bd) = \rho(da) = \text{grön} \end{cases}$$

innehåller ingen enfärgad C_4 (samma konstruktion som i beviset av Proposition 1.1.1).

$R(C_4, C_4) \leq 6$: Fixera en godtycklig röd-grön färgning av K_6 . Vi vet att $R(C_3, C_3) = 6$, så det finns en enfärgad C_3 ; säg att $\triangle$ är en röd C_3 . Om något hörn utanför $\triangle$ har minst två röda grannar i $\triangle$, har vi en röd C_4 , så anta att varje hörn utanför $\triangle$ har högst en röd granne eller, ekvivalent, minst två gröna grannar, i $\triangle$. Om två hörn utanför $\triangle$ har två gemensamma gröna grannar i $\triangle$, har vi en grön C_4 , så anta att så inte är fallet. Då har vi följande figur:



Om det finns en röd kant mellan två hörn utanför $\triangle$, har vi en röd C_4 (om $v_i v_j$ är röd, är $v_i v_j u_j u_i v_i$ en röd C_4), och om så inte är fallet, har vi en grön C_4 (till exempel $v_1 v_2 v_3 u_2 v_1$). $\square$

Proposition 2.1.2. $R(C_4, C_3) = 7$.

Bevis. $R(C_4, C_3) \geq 7$: Den kompletta röd-gröna grafen med hörnmängd $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ och

$$\begin{cases} \rho(x_i x_j) = \rho(y_i y_j) = \text{röd} \\ \rho(x_i y_j) = \text{grön} \end{cases}$$

innehåller varken en röd C_4 eller en grön C_3 .

$R(C_4, C_3) \leq 7$: Fixera en godtycklig röd-grön färgning av K_7 . Vi vet att $R(C_3, C_3) = 6$, så det finns en enfärgad C_3 . Om grön C_3 är vi klara, så anta att vi har en röd C_3 , säg $\triangle$. Om något hörn utanför $\triangle$ har minst två röda grannar i $\triangle$, har vi en röd C_4 , så anta att varje hörn utanför $\triangle$ har högst en röd granne eller, ekvivalent, minst två gröna grannar, i $\triangle$. Eftersom $\triangle$ innehåller tre hörn, har varje par av hörn utanför $\triangle$, minst en gemensam grön granne i $\triangle$. Om något par av hörn utanför $\triangle$ är gröna grannar, har vi alltså en grön C_3 , och om så inte är fallet, bildar hörnen utanför $\triangle$ en röd K_4 , och vi har en röd C_4 . $\square$

Beviset av följande sats är från Chartrand-Schuster, men jag har för-
enklat Fall 2b.

Sats 2.1.3 (Sats 2 i [2]). $R(C_n, C_3) = 2n - 1$, för alla $n \geq 4$.

Bevis. $R(C_n, C_3) \geq 2n - 1$: Den kompletta röd-gröna grafen med hörnmängd $\{x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ och

$$\begin{cases} \rho(x_i x_j) = \rho(y_i y_j) = \text{röd} \\ \rho(x_i y_j) = \text{grön} \end{cases}$$

innehåller varken en röd C_n eller en grön C_3 (en generalisering av konstruktionen i beviset av Proposition 2.1.2).

$R(C_n, C_3) \leq 2n - 1$: Vi använder induktion över n . Basfall: Vi vet att $R(C_4, C_3) = 7$. Induktionssteg: Anta att $R(C_n, C_3) \leq 2n - 1$, för något $n \geq 4$, dvs. att varje komplett röd-grön graf G , sådan att $|V(G)| = 2n - 1$, innehåller en röd C_n eller en grön C_3 . Vi ska visa att $R(C_{n+1}, C_3) \leq 2(n+1) - 1 = 2n + 1$, dvs. att varje komplett röd-grön graf G , sådan att $|V(G)| = 2n + 1$, innehåller en röd C_{n+1} eller en grön C_3 .

Så, låt G vara en godtycklig komplett röd-grön graf, sådan att $|V(G)| = 2n + 1$. Om G innehåller en grön C_3 är vi klara, så anta att så inte är fallet. Då fås från induktionsantagandet att G innehåller en röd C_n , säg $C = u_1u_2 \cdots u_nu_1$; låt de övriga hörnen i G vara $v_1, \dots, v_{n+1}$.

Fall 1. Något u_i har grön kant till alla v_j . Eftersom G inte innehåller någon grön C_3 , är alla kanter $v_{j_1}v_{j_2}$ röda; således är $G[\{v_1, \dots, v_{n+1}\}]$ en röd K_{n+1} , och G innehåller en röd C_{n+1} .

Fall 2. Varje u_i har röd kant till något v_j .

(2a) Det finns u_i och u_{i+2} sådana att $u_iv_{j_1}$ och $u_{i+2}v_{j_2}$, $v_{j_1} \neq v_{j_2}$, är röda; säg att u_1v_1 och u_3v_3 är röda. Om u_2v_1 eller u_2v_3 är röd, så innehåller G en röd C_{n+1} ($u_1v_1u_2u_3 \cdots u_nu_1$ respektive $u_1u_2v_3u_3u_4 \cdots u_nu_1$). Å andra sidan, om u_2v_1 och u_2v_3 båda är gröna, så är v_1v_3 röd (eftersom G inte innehåller någon grön C_3), och $u_1v_1v_3u_3u_4 \cdots u_nu_1$ är en röd C_{n+1} .

(2b) Det finns inte u_i och u_{i+2} sådana att $u_iv_{j_1}$ och $u_{i+2}v_{j_2}$, $v_{j_1} \neq v_{j_2}$, är röda. u_1 har röd kant till något v_j (enligt antagandet i Fall 2), säg v_1 . Upprepade tillämpningar av antagandena i Fall 2 respektive i (2b) ger att u_iv_1 är röd, för varje $i \equiv 1$, och antagandet i (2b) ger sedan att u_1v_j är grön, för alla $j \neq 1$.

u_2 har röd kant till något v_j (enligt antagandet i Fall 2). Om $v_j = v_1$ är $u_1v_1u_2u_3 \cdots u_nu_1$ en röd C_{n+1} , så anta att $v_j \neq v_1$; säg att $v_j = v_2$. (Notera att $n \equiv 0$ om $v_j \neq v_1$, ty vore $n \equiv 1$, skulle u_1v_1 röd och upprepade tillämpningar av antagandena i Fall 2 respektive i (2b), ge att u_iv_1 är röd, för varje $i \in [n]$.) Upprepade tillämpningar av antagandena i Fall 2 respektive i (2b) ger att u_iv_2 är röd, för varje $i \equiv 0$, och antagandet i (2b) ger sedan att u_2v_j är grön, för alla $j \neq 2$.

Eftersom u_1v_2 och u_1v_3 är gröna och G inte innehåller någon grön C_3 , är v_2v_3 röd. Eftersom u_2v_1 och u_2v_3 är gröna och G inte innehåller någon grön C_3 , är v_1v_3 röd. Således är $u_1v_1v_3v_2u_4u_5 \cdots u_nu_1$ en röd C_{n+1} . $\square$

2.2 Bevis av de undre gränserna för $R(C_n, C_k)$

I detta avsnitt bevisas de undre gränserna i Sats 1.4.1, dvs. att $R(C_n, C_k) \geq \beta(n, k)$.

Bevis av Sats 1.4.1, undre gränser. Vi har redan bevisat de undre gränserna för $(n, k) = (4, 4)$ och för $k = 3$, så vi kan anta att $n \geq k \geq 4$, $(n, k) \neq (4, 4)$.³

$0 \equiv n \neq 4$ och $k \equiv 0$ eller $n \equiv 1$, $k \equiv 0$ och $n + k/2 - 1 \geq 2k - 1$: Den kompletta röd-gröna grafen med hörnmängd $\{x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{k/2-1}\}$

³Beviset fungerar för alla $(n, k) \notin \{(3, 3), (4, 4)\}$.

och

$$\begin{cases} \rho(x_i x_j) = \rho(y_i y_j) = \text{röd} \\ \rho(x_i y_j) = \text{grön} \end{cases}$$

innehåller varken en röd C_n eller en grön C_k .

$n \equiv 1$, $k \equiv 0$ och $n + k/2 - 1 \leq 2k - 1$. Den kompletta röd-gröna grafen med hörnmängd $\{x_1, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1}\}$ och

$$\begin{cases} \rho(x_i x_j) = \rho(y_i y_j) = \text{grön} \\ \rho(x_i y_j) = \text{röd} \end{cases}$$

innehåller varken en röd C_n eller en grön C_k .

$k \equiv 1$ och $n \neq 3$: Den kompletta röd-gröna grafen med hörnmängd $\{x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ och

$$\begin{cases} \rho(x_i x_j) = \rho(y_i y_j) = \text{röd} \\ \rho(x_i y_j) = \text{grön} \end{cases}$$

innehåller varken en röd C_n eller en grön C_k (samma konstruktion som i beviset av Proposition 2.1.3). $\square$

2.3 Två förberedande lemmen

I detta avsnitt formuleras och bevisas två förberedande lemmen, nödvändiga för bevisen av de tre lemmerna i Avsnitt 2.5.

Vi börjar med följande lemma, som är en lätt generalisering av Proposition 2.2 i Károlyi-Rosta [5]; det används för att bevisa nästa, större lemma (Lemma 2.3.2).

Lemma 2.3.1. *Låt G vara en komplett röd-grön graf, låt $C = x_1 x_2 \cdots x_n x_1$ ($n \geq 4$) vara en grön (röd) cykel i G och fixera $j \in [2, n-2]$. Då innehåller G en grön (röd) C_{n-j+1} eller så är varje j -korda till C röd (grön).*

Bevis. Om kanten $x_i x_{i+j}$ är grön, så är $x_i x_{i+j} x_{i+j+1} \cdots x_i$ en grön C_{n-j+1} (och $x_i x_{i+j} x_{i+j-1} \cdots x_i$ är en grön C_{j+1}). $\square$

Lemma 2.3.2 (Lemma 2.1 i [5]). *Låt G vara en komplett röd-grön graf.*

- (a) *Om G innehåller en enfärgad C_{2l+1} , för något $l \geq 3$, så innehåller G en enfärgad C_{2l} .*
- (b) *Om G innehåller en enfärgad C_{2l} , för något $l \geq 3$, så innehåller G en enfärgad C_{2l-2} .*

- (c) Om G innehåller en grön cykel $C = x_1x_2 \cdots x_{2l}x_1$, för något $l \geq 2$, men inte en enfärgad C_{2l-1} , så är både $G_1 = G[\{x_1, x_3, \dots, x_{2l-1}\}]$ och $G_2 = G[\{x_2, x_4, \dots, x_{2l}\}]$ röda K_l .
- (d) Om G innehåller en grön cykel $C = x_1x_2 \cdots x_{2l}x_1$, för något $l \geq 2$, sådan att både G_1 och G_2 är röda K_l , så gäller åtminstone ett av följande tre fall:
- (i) G innehåller en röd C_m för varje $m \in [3, 2l]$.
 - (ii) G innehåller en grön C_k för varje $k \in [4, 2l+1]$ (om $l \geq 3$) respektive för varje $k \in [3, 2l+1]$ (om $l = 2$).
 - (iii) G innehåller en grön C_k för varje $0 \equiv k \in [4, 2l]$ och en röd C_m för varje $m \in [3, \min\{\lceil |V(G)|/2 \rceil, 2l\}]$.

Anmärkning 1. Notera att vi i (c)- och i (d)-delen, liksom i Lemma 2.3.1, kan byta plats på "grön" och "röd".

Anmärkning 2. $R(C_4, C_3) \leq 7$ kan bevisas med hjälp av $R(C_4, C_4) = 6$ och (d)-delen: Fixera en godtycklig röd-grön färgning av K_7 . Vi vet att $R(C_4, C_4) = 6$, så det finns en enfärgad C_4 . Om röd C_4 är vi klara, så anta att vi har en grön C_4 , säg $C = x_1x_2x_3x_4x_1$. Om x_1x_3 eller x_2x_4 är grön, har vi en grön C_3 , så anta att $x_1x_3 = G_1$ och $x_2x_4 = G_2$ båda är röda. Från (d)-delen fås då en röd C_4 eller en grön C_3 .

Bevis av Lemma 2.3.2 (a). Låt $C = x_1x_2 \cdots x_{2l+1}x_1$ vara en enfärgad, låt oss säga grön, C_{2l+1} och anta att G inte innehåller en enfärgad C_{2l} . Lemma 2.3.1 medför att varje 2-korda till C är röd, så

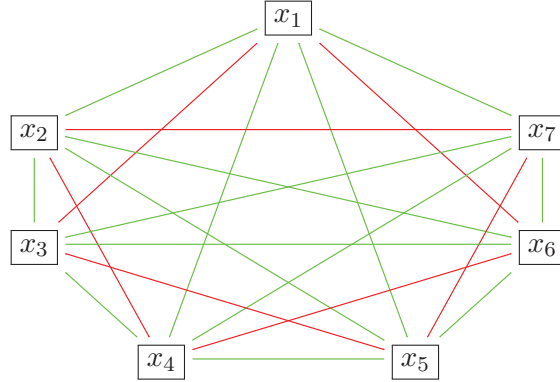
$$C' = x_1x_3 \cdots x_{2l+1}x_2x_4 \cdots x_{2l}x_1$$

är en röd C_{2l+1} . Lemma 2.3.1 medför att varje 2-korda till C' eller, ekvivalent, varje 4-korda till C , är grön (Figur 2 illustrerar fallet $l = 3$).

Om C har en grön 3-korda, säg x_1x_4 , så är $x_1x_4x_3x_2x_6x_7 \cdots x_{2l+1}x_1$ (alla x_i utom x_5) en grön C_{2l} ; en motsägelse. Å andra sidan, om varje 3-korda till C är röd, så är $x_1x_4x_7x_9 \cdots x_{2l+1}x_2x_{2l}x_{2l-2} \cdots x_6x_3x_1$ (alla x_i utom x_5) en röd C_{2l} ; återigen en motsägelse. Alltså innehåller G en enfärgad C_{2l} . $\square$

Bevis av Lemma 2.3.2 (b). $l = 3$: $|V(G)| \geq 6$ och $R(C_4, C_4) = 6$, så G innehåller en röd C_4 eller en grön C_4 . $l \geq 4$: Låt $C = x_1x_2 \cdots x_{2l}x_1$ vara en enfärgad, låt oss säga grön, C_{2l} .

Fall 1. G innehåller en enfärgad C_{2l-1} . (a)-delen medför att G innehåller en enfärgad C_{2l-2} .



Figur 2: C , dess röda 2-kordor och dess gröna 4-kordor.

Fall 2. G innehåller inte en enfärgad C_{2l-1} . Lemma 2.3.1 (med $j = 2$) medför att varje 2-korda till C är röd. Anta att G inte innehåller någon grön C_{2l-2} . Lemma 2.3.1 (med $j = 3$) medför att varje 3-korda till C är röd, så $x_1x_{2l-1}x_{2l-3} \cdots x_3x_{2l}x_{2l-2} \cdots x_4x_1$ (alla x_i utom x_2) är en röd C_{2l-1} ; en motsägelse. Alltså innehåller G en grön C_{2l-2} . $\square$

Bevis av Lemma 2.3.2 (c). Vi måste visa att alla $2j$ -kordor till C är röda, för varje $j \in [1, \lfloor l/2 \rfloor]$. Lemma 2.3.1 medför att det gäller för $j = 1$; således gäller (c)-delen för $l \in \{2, 3\}$. Låt $l \geq 4$, och ta en $2j$ -korda, för något $j \in [2, \lfloor l/2 \rfloor]$, säg x_1x_{2j+1} . Betrakta cyklerna

$$x_1x_{2j+1}x_{2j}x_{2j-1} \cdots x_2x_{2j+3}x_{2j+4} \cdots x_{2l}x_1$$

och

$$x_1x_2 \cdots x_{2j-1}x_{2l}x_{2l-1} \cdots x_{2j+1}x_1,$$

båda av längd $2l - 1$ (alla hörn i C utom x_{2j+2} respektive utom x_{2j}). Alla kanter ovan är gröna, utom möjligen x_1x_{2j+1} , x_2x_{2j+3} och $x_{2j-1}x_{2l}$. G innehåller inte någon enfärgad C_{2l-1} , så om x_1x_{2j+1} är grön, måste både x_2x_{2j+3} och $x_{2j-1}x_{2l}$ vara röda. Men då är $x_2x_4 \cdots x_{2l}x_{2j-1}x_{2j-3} \cdots x_{2j+3}x_2$ (alla hörn i C utom x_{2j+1}) en röd C_{2l-1} (vi har ju visat att alla 2-kordor till C är röda); en motsägelse. Alltså är x_1x_{2j+1} röd. $\square$

Bevis av Lemma 2.3.2 (d). Vi delar upp beviset i två olika fall.

Fall 1. Anta först att det finns två oberoende röda kanter mellan G_1 och G_2 (dvs. att det finns $u_1 \neq v_1$ i $V(G_1)$ och $u_2 \neq v_2$ i $V(G_2)$, sådana att u_1u_2 och v_1v_2 är röda). Då innehåller G en röd C_m , för varje $m \in [3, 2l]$.

Låt oss se varför: $m = 3$: G_1 innehåller en röd C_3 , förutsatt att $l \geq 3$, vilket alltid är fallet i Fall 1 (om $l = 2$, så är alla kanter mellan G_1 och

G_2 gröna). $m = 2\beta$, $\beta \in [2, l]$: P_β i G_i med ändhörn u_i och v_i , $i \in [2]$.
 $m = 2\beta - 1$, $\beta \in [3, l]$: P_β i G_1 med ändhörn u_1 och v_1 , $P_{\beta-1}$ i G_2 med ändhörn u_2 och v_2 .

Fall 2. Anta nu att alla röda kanter mellan G_1 och G_2 har ett gemensamt hörn x (det kan hända att det finns en eller ingen röd kant mellan G_1 och G_2). Vi kan utan inskränkning anta att $x \in V(G_1)$. $V(G_1) \subseteq V(C)$, så det finns åtminstone två gröna kanter mellan x och G_2 (om $x = x_i$, så är xx_{i-1} och xx_{i+1} gröna, med $x_{i-1}, x_{i+1} \in V(G_2)$). Eftersom alla kanter mellan G_1 och G_2 , som inte innehåller x , är gröna, kan vi utvidga den gröna stigen $x_{i-1}xx_{i+1}$ till en grön C_k , för varje $0 \equiv k \in [4, 2l]$. Låt nu $D = V(G) - V(C)$.

(2a) Om det finns ett hörn $y \in D$ med grön kant till både $v_1 \in V(G_1)$ och $v_2 \in V(G_2)$, så kan vi hitta en grön C_k , för varje $1 \equiv k \in [5, 2l+1]$; om $l = 2$ kan vi även hitta en grön C_3 (nämligen $v_1yv_2v_1$).

Låt oss se hur: Låt $k = 2\beta + 1$, $\beta \in [2, l]$. $v_1 \neq x$: Gå grön kant från v_1 till v_2 , gå grön kant från v_2 till något $u_1^2 \in G_1$, gå grön kant från u_1^2 till något $u_2^2 \in G_2$, och så vidare, gå grön kant från $u_2^{\beta-1}$ (definiera $u_2^1 = v_2$) till något $u_1^\beta \in G_1$, gå grön kant från u_1^β till något $u_2^\beta \in G_2$, gå grön kant från u_2^β tillbaka till v_1 . Första gången som möjligheten att gå grön kant från något av hörnen $v_2, u_2^2, \dots, u_2^{\beta-1}$ till x infinner sig, gör det. Det garanterar att vi kan gå grön kant från x till något nytt hörn i G_2 . Ersätts sedan v_1v_2 med v_1yv_2 , fås en grön $C_{2\beta+1}$. $v_1 = x$: På samma sätt som vi tidigare utvidgade den gröna stigen $x_{i-1}xx_{i+1}$ till en grön C_k , $0 \equiv k \in [4, 2l]$, kan vi nu utvidga stigen $x_{i-1}v_1v_2$ till en "nästan grön" $C_{2\beta}$ (alla kanter är gröna, utom möjligen v_1v_2); ersätts sedan v_1v_2 med v_1yv_2 , fås en grön $C_{2\beta+1}$.

(2b) Om antagandet i (2a) inte gäller, så finns ett $i \in [2]$ och en delmängd $F \subseteq D$ med $|F| \geq \lceil |D|/2 \rceil$, sådana att

$$(2) \quad \text{varje kant mellan } F \text{ och } G_i \text{ är röd.}$$

Vidare gäller att

$$(3) \quad |F \cup G_i| \geq \lceil |V(G)|/2 \rceil.$$

Vi kan därför hitta en röd C_m , för varje $m \in [3, \min\{\lceil |V(G)|/2 \rceil, 2l\}]$.

Låt oss se hur: Vi betraktar två olika fall och visar, i respektive fall, hur en längsta röd cykel kan konstrueras; utifrån den är det lätt att hitta resterande cykler.

$|F| < |G_i| = l$: En längsta röd cykel är

$$u_1v_1u_2v_2 \cdots u_{|F|}v_{|F|}u_{|F|+1}u_{|F|+2} \cdots u_lu_1,$$

där $u_1, \dots, u_l \in G_i$ och $v_1, \dots, v_{|F|} \in F$; den har längd $|F \cup G_i| \geq \lceil |V(G)|/2 \rceil$.

$|F| \geq |G_i| = l$: En längsta röd cykel är

$$u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_l v_l u_1,$$

där $u_1, \dots, u_l \in G_i$ och $v_1, \dots, v_l \in F$; den har längd $2l$.

Bevis av (2): Det finns inte något hörn $y \in D$ med grön kant till både G_1 och G_2 , så för varje hörn $y \in D$ gäller att alla kanter från y till G_1 är röda eller att alla kanter från y till G_2 är röda. För varje $i \in [2]$, låt

$$D_i = \{y \in D \mid yv \text{ är röd för varje } v \in G_i\}.$$

Då är $|D_1| + |D_2| \geq |D|$, så $|D_i| \geq \lceil |D|/2 \rceil$, för något $i \in [2]$; låt $F = D_i$.

Bevis av (3): F och G_i är disjunkta, så

$$|F \cup G_i| = |F| + |G_i| = |F| + l \geq \lceil |V(G)|/2 \rceil,$$

eftersom $|F| \geq \lceil |D|/2 \rceil = \lceil (|V(G)| - |V(C)|)/2 \rceil = \lceil |V(G)|/2 \rceil - l$. $\square$

2.4 Översikt över beviset av de övre gränserna

I nästa avsnitt formuleras och bevisas tre lemmor, nödvändiga för att visa de övre gränserna i Sats 1.4.1, dvs. för att visa att $R(C_n, C_k) \leq \beta(n, k)$. När lemmorna väl är bevisade, följer de övre gränserna lätt. Däremot är bevisen av lemmorna, åtminstone två av dem, mycket omfattande, med många olika fallstudier och detaljer. Av den anledningen ger jag i detta avsnitt en ganska så detaljerad översikt över dem. Syftet med översikten är dels att presentera de olika fallstudierna, och visa att alla möjliga fall verkligen täcks upp av beviset (vilket kräver att en del detaljer och beteckningar förklaras), dels att lyfta fram några av idéerna, så att det blir lättare att se dem och ta till sig beviset.

Lemma 2.5.1 används i det slutliga beviset av de övre gränserna och för att motivera att den begränsning som görs i beviset av Lemma 2.5.2, inte innebär en förlust i allmängiltighet. Beviset av Lemma 2.5.1 använder Lemma 2.3.2 (d) och en teknik från beviset av Lemma 2.3.2 (c). Lemma 2.5.2 och Korollarium 2.5.3 används för att bevisa Lemma 2.5.4 (Korollarium 2.5.3 är ett specialfall av Lemma 2.5.2). Lemma 2.5.4 används i det slutliga beviset av de övre gränserna. Beviset av Lemma 2.5.4 använder, förutom Lemma 2.5.2 och Korollarium 2.5.3, Lemma 2.3.2 (a)-(d).

Lemma 2.5.1 säger att om en komplett röd-grön graf G innehåller en grön C_n , säg $C = x_1 x_2 \cdots x_n x_1$, och uppfyller vissa ytterligare villkor, så innehåller G en röd C_n eller en grön C_k . Det inses lätt att så är fallet om $k = n$ eller om C har en grön $(k-1)$ -korda, och alltså antas att så inte är

fallet. Beviset delas sedan upp i två olika fall: ”alla 2-kordor till C är röda” respektive ” C har en grön 2-korda, säg x_1x_3 ”. I det senare fallet antas, utan förlust i allmängiltighet, att om inte alla 2-kordor till C är gröna, så är x_2x_4 röd.

- Det första fallet inleds med att observera att G innehåller en röd C_n om $n \equiv 1$ eller om både n och k är jämna, och alltså antas att så inte är fallet. Därefter noteras att om C inte har en grön korda av jämn längd, så medför Lemma 2.3.2 (d) att G innehåller en röd C_n eller en grön C_k , och alltså antas att C har en grön korda av jämn längd, säg x_1x_{2j+1} . Om det finns hörnindex α och β av olika paritet, sådana att både $x_\alpha x_\beta$ och $x_{\alpha-2}x_{\beta+2}$ är röda, så hittas lätt en röd C_n , och alltså antas att så inte är fallet. Nu görs en ny falluppdelning, den här gången utifrån storleken på k .

De två första fallen följer båda samma mall: α och β tilldelas två värden av olika paritet, varefter en grön C_k konstrueras, först i fallet $x_\alpha x_\beta$ grön och sedan i fallet $x_{\alpha-2}x_{\beta+2}$ grön. Det sista fallet, $k = n - 1$, är det klart mest omfattande. Först visas att om både vx_i och vx_{i+1} är gröna, för något hörn $v \in D \stackrel{\text{defn}}{=} V(G) - V(C)$ och något $i \in [n]$, så innehåller G en röd C_n eller en grön C_k , och alltså antas att

$$(4) \quad vx_i \text{ eller } vx_{i+1} \text{ är röd, för varje hörn } v \in D \text{ och alla } i \in [n].$$

Om varje kant mellan C och D är röd, så hittas lätt en röd C_n , och alltså antas att det finns en grön kant vx_l mellan C och D ; enligt (4) är vx_{l-1} och vx_{l+1} röda. Därefter antas att G inte innehåller någon grön C_k . Då fås, på samma sätt som i beviset av Lemma 2.3.2 (c), att fyra olika kordor till C är röda. Efter en sista falluppdelning, den här gången utifrån storleken på l , konstrueras, med hjälp av dessa kordor, en röd C_{n-1} innehållande kanten $x_{l-1}x_{l+1}$; ersätts den med den röda stigen $x_{l-1}vx_{l+1}$, fås en röd C_n .

- Det andra fallet inleds med att definiera $d = \text{sgd}(n, k - 1)$ och, för varje $l \in [n]$, två röda stigar P_l^+ och P_l^- , båda av längd $n' - 1$. Om $d = 1$, så är $P_1^+x_1$ en röd C_n , och alltså antas att $d \geq 2$. Nu antas att G inte innehåller någon grön C_k , varefter en ny falluppdelning görs, den här gången utifrån storleken på d .

I det första fallet, $d = k - 1$, sätts ett antal P_l^+ -stigar samman till en röd stig av längd $n - 1$. Om x_2x_4 är röd, kan den slutas till en röd C_n , och om x_2x_4 är grön, är alltså alla 2-kordor till C gröna, och ett antal P_l^+ -stigar och en P_l^- -stig kan sättas samman till en röd C_n .

I det andra fallet, $1 < d < k - 1$, konstateras att ett antal P_l^+ -stigar kan sättas samman till en röd C_n , såvida inte ett antal $(k - d)$ -kordor är gröna. Med hjälp av dessa kordor, definieras ett antal gröna stigar. Dessa stigar kan sedan sättas samman till en grön C_k , vilket motsäger antagandet att

G inte innehåller någon grön C_k , och alltså innehåller G en röd C_n . Att de gröna stigarna kan sättas samman till en grön C_k , visas genom att betrakta tre olika fall: $d \equiv 1$, ($d \equiv 0$ och $2d - k + 3 \leq 1$) respektive ($d \equiv 0$ och $2d - k + 3 \geq 2$) ($2d - k + 3 > 2$ kan dock inte inträffa).

Lemma 2.5.2 säger att om en komplett röd-grön graf G uppfyller vissa villkor, så innehåller G en enfärgad C_l , för något $l \geq n$, eller en grön C_k . Det inses lätt att det finns en enfärgad C_4 i G , varefter det antas att en längsta enfärgad cykel i G är av längd $L \leq n - 1$. Därefter visas att det räcker att visa att G innehåller en grön C_k , givet att G innehåller en röd C_L , säg $C = x_1x_2 \cdots x_Lx_1$. Maximaliteten hos L , dvs. att L är längden av en längsta röd cykel i G , används flitigt genom hela beviset.

Låt $D = V(G) - V(C)$. Det visas att G innehåller en grön C_4 , och alltså antas att $k \geq 6$. Därefter definieras begreppet alternerande stig, ett begrepp som spelar en avgörande roll för resten av beviset. En alternerande stig är en grön stig som har vartannat hörn i D och vartannat hörn i C , och som uppfyller vissa ytterligare villkor. Det visas att det finns en alternerande stig i G (här används, bland annat, att $k \geq 6$), varefter P antas vara en alternerande stig i G av maximal längd. Det inses lätt att P , utan förlust i allmängiltighet, kan skrivas på formen $P = u_1x_1u_2 \cdots u_{s-1}x_tu_s$, där $u_1, \dots, u_s \in D$, $s \leq k/2 - 1$, $t \leq L - 3$ och om $x_i \in P$, så är nästa hörn i P som tillhör C , x_{i+1} eller x_{i+2} .

Först visas att om $s < k/2 - 1$, så är $t \geq L - 5$, och om $s < k/2 - 1$ och $t = L - 5$, så $x_{t-1} \in P$. Sedan visas att P kan modifieras till en grön C_{2s+2} (om $t \leq L - 4$) respektive till en grön C_{2s+1} eller till en grön C_{2s+2} (om $t = L - 3$). Beviset av det senare påståendet bygger på en omfattande fallstudie. För att förstå falluppdelningen, krävs några förklaringar: Ta $u \in D - V(P)$ och låt $j \in \{1, s\}$. Om det finns en grön stig u_jx_iu , för något $i \in [t+1, L]$, låt Q_j vara en av dem, och om så inte är fallet, låt Q_j vara kanten u_ju (som då måste vara grön, enligt maximaliteten hos L). I fallet $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 3$, välj Q_1 och Q_s så att $V(Q_1) \cup V(Q_s)$ innehåller så många element som möjligt. Fall 1, $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 3$ och $|V(Q_1) \cup V(Q_s)| = 5$, och Fall 2, $|V(Q_1)| = 3$ och $|V(Q_s)| = 2$ eller vice versa, är okomplicerade. Fall 3, $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 2$, kräver mer arbete. Fall 4, $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 3$ och $|V(Q_1) \cup V(Q_s)| = 4$, är med marginal det mest omfattande fallet, och delas upp i delfallen (a) $i \geq t + 4$, (b) $i < t + 4$ och $i \leq L - 3$, (c) $t = L - 3$ respektive (d) $t = L - 4$, $x_i \in \{x_{t+2}, x_{t+3}\}$ eller $t = L - 5$, $x_i = x_{t+3}$. Observera att om $t = L - 4$ och $x_i \notin \{x_{t+2}, x_{t+3}\}$, $t = L - 5$ och $x_i \neq x_{t+3}$ eller $t \leq L - 6$, så gäller antagandet i (a) eller antagandet i (b).

Nu följer Lemma 2.5.2 med en enkel fallstudie: Inget av fallen $t = L - 3$, $t = L - 4$ eller ($t = L - 5$, $x_{t-1} \in P$) kan inträffa, ty då skulle G , enligt

påståendet i den andra meningen i föregående stycke, innehålla en grön cykel av längd åtminstone $L + 1$. Oavsett huruvida ($t = L - 5$, $x_{t-1} \notin P$) eller $t \leq L - 6$ gäller, fås från påståendet i den första meningen i föregående stycke, att $s = k/2 - 1$; men G innehåller en grön C_{2s+2} , enligt påståendet i den andra meningen i föregående stycke, så G innehåller en grön C_k .

Lemma 2.5.4, slutligen, säger att om en komplett röd-grön graf G uppfyller vissa villkor, så innehåller G en enfärgad C_n eller en grön C_k . Beviset inleds med att anta att så inte är fallet. Lemma 2.5.2 och Korollarium 2.5.3 medför då att G innehåller en enfärgad C_L , för något $L \geq n + 1$, och (a)- och (b)-delen av Lemma 2.3.2 medför att $n \equiv 1$ och att G innehåller en enfärgad C_{n+1} , säg C . Beviset delas sedan upp i två olika fall: C grön respektive C röd. I vart och ett av fallen, fås från (c)- och (d)-delen av Lemma 2.3.2 att G innehåller en enfärgad C_n eller en grön C_k ; en motsägelse. Alltså innehåller G en enfärgad C_n eller en grön C_k .

2.5 Bevis av de övre gränserna för $R(C_n, C_k)$

I detta avsnitt formuleras och bevisas alltså tre lemmen, från vilka de övre gränserna följer lätt.

Lemma 2.5.1 (Lemma 3.3 i [5]). *Låt $n \geq k \geq 3$; anta dessutom att $k \geq 4$ om $0 \equiv n \geq 6$. Vidare, låt G vara en komplett röd-grön graf, sådan att G innehåller en grön C_n ; anta dessutom att $|V(G)| \geq 2n - 1$ om $n \equiv 0$ och $k \equiv 1$. Då innehåller G en röd C_n eller en grön C_k .*

Bevis. Låt $C = x_1x_2 \cdots x_nx_1$ vara en grön C_n . C är en grön C_k om $k = n$, så anta att $k \leq n - 1$, $n \geq 4$. Om C har en grön $(k - 1)$ -korda, så innehåller G en grön C_k , så anta att alla $(k - 1)$ -kordor till C är röda.

Fall 1. Anta först att alla 2-kordor till C är röda. Om $n \equiv 1$, är $x_1x_3 \cdots x_nx_2x_4 \cdots x_{n-1}x_1$ en röd C_n , och om både n och k är jämna, är $x_3x_5 \cdots x_1x_kx_{k-2} \cdots x_{k+2}x_3$ en röd C_n , så anta att $n \equiv 0$ och $k \equiv 1$. Om $G_1 = G[\{x_1, x_3, \dots, x_{n-1}\}]$ och $G_2 = G[\{x_2, x_4, \dots, x_n\}]$ är röda $K_{n/2}$, fås från Lemma 2.3.2 (d) att G innehåller en röd C_n eller en grön C_k (eftersom $k \geq 4$ om $0 \equiv n \geq 6$ och eftersom $|V(G)| \geq 2n - 1$), så anta att så inte är fallet, dvs. anta att C har en grön $2j$ -korda, säg x_1x_{2j+1} , för något $j \in [2, \lfloor n/4 \rfloor] - \{(k - 1)/2\}$. Notera att $n \geq 8$ och $k \geq 5$.

Om det finns hörnindex α och β av olika paritet ($\alpha \equiv 0$ och $\beta \equiv 1$ eller $\alpha \equiv 1$ och $\beta \equiv 0$), sådana att både $x_\alpha x_\beta$ och $x_{\alpha-2}x_{\beta+2}$ är röda, är $x_\alpha x_{\alpha+2} \cdots x_{\alpha-2}x_{\beta+2}x_{\beta+4} \cdots x_\beta x_\alpha$ en röd C_n , så anta att så inte är fallet. Eftersom $2j + 1 \neq k$, gäller att $1 \equiv k \in [5, n - 1] - \{2j + 1\}$. Vi måste, för varje sådant k , visa att G innehåller en röd C_n eller en grön C_k ; vi betraktar tre olika fall.

(1a) $5 \leq k \leq 2j - 1$. (Notera att $j \geq 3$ i det här fallet.) Låt $\alpha = k - 2 \equiv 1$ och låt $\beta = 2j + 2 \equiv 0$. Antingen är $x_\alpha x_\beta$ grön, i vilket fall $x_1 x_2 \cdots x_\alpha x_\beta x_{2j+1} x_1$ är en grön C_k , eller så är $x_{\alpha-2} x_{\beta+2}$ grön, i vilket fall $x_1 x_2 \cdots x_{\alpha-2} x_{\beta+2} x_{\beta+1} x_\beta x_{2j+1} x_1$ är en grön C_k . ($k \geq 5$, så $\alpha - 2 \geq 1$; $n \geq 8$ och $2j \leq n/2$, så $\beta + 2 \leq n$.)

(1b) $2j + 3 \leq k \leq n - 3$. (Notera att $n \geq 10$ i det här fallet.) Låt $\alpha = 2j \equiv 0$ och låt $\beta = k \equiv 1$. Antingen är $x_\alpha x_\beta$ grön, i vilket fall $x_1 x_2 \cdots x_\alpha x_\beta x_{\beta-1} \cdots x_{2j+1} x_1$ är en grön C_k , eller så är $x_{\alpha-2} x_{\beta+2}$ grön, i vilket fall $x_1 x_2 \cdots x_{\alpha-2} x_{\beta+2} x_{\beta+1} \cdots x_{2j+1} x_1$ är en grön C_k . ($k \leq n - 3$, så $\beta + 2 \leq n - 1$.)

(1c) $k = n - 1$. Definiera $D = V(G) - V(C)$ och ta $v \in D$. Anta först att både vx_1 och vx_2 är gröna. Om $x_i x_{i+3}$ är grön, för något $i \in [2, n - 2]$, är $x_1 v x_2 x_3 \cdots x_i x_{i+3} x_{i+4} \cdots x_1$ en grön C_k , och om så inte är fallet, är $x_2 x_n x_{n-2} \cdots x_4 x_7 x_9 \cdots x_5 x_2$ en röd C_n (här krävs att $n \geq 6$, och vi vet ju att $n \geq 8$). Argumentet ovan, med vx_1 och vx_2 , fungerar för alla vx_i och vx_{i+1} , $i \in [n]$, ty vi har inte använt att just $x_1 x_{2j+1}$ är grön; således kan vi fråna och med nu anta att

(5) vx_i eller vx_{i+1} är röd, för varje hörn $v \in D$ och alla $i \in [n]$.

Notera att $|D| \geq n/2$. Således kan vi lätt hitta en röd C_n om varje kant mellan C och D är röd. Anta att så inte är fallet, dvs. anta att det finns ett hörn $v \in D$ och ett $l \in [n]$, sådana att vx_l är grön. Då är vx_{l-1} och vx_{l+1} röda, enligt (5).

Om G innehåller en grön C_k är vi klara, så anta att så inte är fallet. Då fås, på samma sätt som i beviset av Lemma 2.3.2 (c), att

(6) $x_{2j-1} x_n$, $x_2 x_{2j+3}$, $x_{2j} x_{n-1}$ och $x_3 x_{2j+2}$ är röda.

(Betrakta k -cyklerna

$$x_1 x_2 \cdots x_{2j-1} x_n x_{n-1} \cdots x_{2j+1} x_1 \quad (\text{alla } x_i \text{ utom } x_{2j}),$$

$$x_1 x_{2j+1} x_{2j} x_{2j-1} \cdots x_2 x_{2j+3} x_{2j+4} \cdots x_n x_1 \quad (\text{alla } x_i \text{ utom } x_{2j+2}),$$

$$x_1 x_2 \cdots x_{2j} x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_{2j+1} x_1 \quad (\text{alla } x_i \text{ utom } x_n)$$

respektive

$$x_1 x_{2j+1} x_{2j} x_{2j-1} \cdots x_3 x_{2j+2} x_{2j+3} \cdots x_n x_1 \quad (\text{alla } x_i \text{ utom } x_2).$$

(1c α) $l \notin \{1, 2j, 2j + 2\}$. $x_2 x_4 \cdots x_n x_{2j-1} x_{2j-3} \cdots x_{2j+3} x_2$ (alla x_i utom x_{2j+1}) är en röd $(n - 1)$ -cykel, enligt (6). Ersätts kanten $x_{l-1} x_{l+1}$ med den röda stigen $x_{l-1} v x_{l+1}$, så fås en röd C_n .

(1c β) $l \in \{1, 2j, 2j+2\}$. $x_3x_5 \cdots x_{n-1}x_{2j}x_{2j-2} \cdots x_{2j+2}x_3$ (alla x_i utom x_1) är en röd $(n-1)$ -cykel, enligt (6). Ersätts kanten $x_{l-1}x_{l+1}$ med den röda stigen $x_{l-1}vx_{l+1}$, så fås en röd C_n . (Denna konstruktion fungerar för alla $l \notin \{2, 2j+1, n\}$; notera att $2j+2 < n$.)

Fall 2. Anta nu att C har en grön 2-korda, säg x_1x_3 . Vi kan, utan att förlora i allmängiltighet, dessutom anta att om inte alla 2-kordor till C är gröna, så är x_2x_4 röd.

Påstående 1 (Proposition 4.1 i [5]). *Om x_ix_{i+2} är grön, så innehåller G en grön C_k eller så är $x_{i+1}x_{i+k-1}$ och $x_{i+1}x_{i-k+3}$, samt x_jx_{j+k} för varje $j \in [i-k+2, i]$, röda.*

Bevis. Om $x_{i+1}x_{i+k-1}$ är grön, är $x_ix_{i+2}x_{i+3} \cdots x_{i+k-1}x_{i+1}x_i$ en grön C_k , om $x_{i+1}x_{i-k+3}$ är grön, är $x_{i+2}x_ix_{i-1} \cdots x_{i-k+3}x_{i+1}x_{i+2}$ en grön C_k , och om x_jx_{j+k} är grön, är $x_jx_{j+1} \cdots x_ix_{i+2}x_{i+3} \cdots x_{j+k}x_j$ en grön C_k (notera att $j \leq i$ och $i+2 \leq j+k$). $\square$

Låt $d = \text{sgd}(n, k-1)$, låt $n' = n/d$, låt för varje $l \in [n]$, P_l^+ beteckna den röda stigen $x_lx_{l+(k-1)} \cdots x_{l+(n'-1)(k-1)}$ av längd $n'-1$, och låt för varje $l \in [n]$, P_l^- beteckna den röda stigen $x_lx_{l-(k-1)} \cdots x_{l-(n'-1)(k-1)}$ av längd $n'-1$.

Låt oss se varför P_l^+ och P_l^- är röda stigar av längd $n'-1$. För det första, alla $(k-1)$ -kordor till C är röda. För det andra, $x_{l+\alpha(k-1)} \neq x_{l+\beta(k-1)}$ och $x_{l-\alpha(k-1)} \neq x_{l-\beta(k-1)}$ om $\alpha \neq \beta$. Låt nämligen $0 \leq \alpha \leq \beta \leq n'-1$ och anta att $x_{l+\alpha(k-1)} = x_{l+\beta(k-1)}$, dvs. att $\alpha(k-1) \equiv \beta(k-1) \pmod{n}$, dvs. att

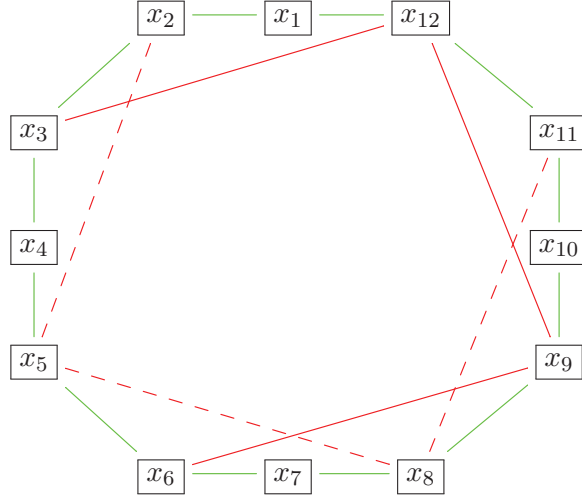
$$(7) \quad n \mid (k-1)(\beta - \alpha).$$

Vi har följande resultat:⁴ Låt a, b och c vara heltal, sådana att $(a, b) \neq (0, 0)$, och låt $d = \text{sgd}(a, b)$. Om $b \mid ac$, så $b \mid dc$. Tillämpat på (7) fås att $n \mid d(\beta - \alpha)$, dvs. att $n' \mid \beta - \alpha \xRightarrow{|\beta - \alpha| \leq n'} \alpha = \beta$.

Notera att $P_l^+x_l$ och $P_l^-x_l$ är samma röda $C_{n'}$, om $d < n/2$, medan P_l^+ och P_l^- båda är den röda kanten $x_lx_{l+(k-1)} = x_lx_{l+n/2}$ annars (dvs. om $d = n/2$);⁵ således är $\{V(P_l^\pm) \mid l \in [d]\}$ en partition av $V(C) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i d lika stora delar, var och en med $n/d = n'$ element (Figur 3 visar C , P_3^+ och P_2^- i fallet $n = 12, k = 10$).

⁴Detta är ett välkänt resultat, se till exempel Beachy-Blair [1]. Sådär kan det bevisas: Det finns heltal m och n sådana att $d = ma + nb \iff dc = mac + nbc = (mp + nc)b$, för något $p \in \mathbf{Z}$ (eftersom $b \mid ac$).

⁵Károlyi-Rosta skriver bara att $P_l^+x_l$ och $P_l^-x_l$ är röda $C_{n'}$ (det vill säga, oberoende av storleken på d), vilket alltså inte är helt korrekt.



Figur 3: C , P_3^+ (heldragen) och P_2^- (streckad) i fallet $n = 12$, $k = 10$.

Om $d = 1$, så är $n' = n$ och alltså är $P_1^+ x_1$ en röd C_n ; således kan vi från och med nu anta att $d \geq 2$. Vidare, anta att G inte innehåller någon grön C_k ; vi vill visa att G innehåller en röd C_n .

(2a) $d = k - 1$. Låt P^* beteckna stigen som fås från P_{k+1}^+ genom att ta bort dess sista hörn x_2 och motsvarande kant (det vill säga, låt $P^* = x_{k+1}x_{2k} \cdots x_{n-k+3}$).

Påstående 2. $\bar{P} = P_4^+ P_5^+ \cdots P_k^+ P^* P_3^+ x_2$ är då en röd stig av längd $n - 1$.

Anmärkning. Senare i beviset av Lemma 2.5.1 används att andra stigar är röda av längd $n - 1$, vilket visas på liknande sätt.

Bevis. $x_1 x_3$ är grön och G innehåller inte någon grön C_k , så Påstående 1 (med $i = 1$) medför att $x_2 x_k$ och $x_2 x_{n-k+4}$, samt $x_j x_{j+k}$ för varje $x_j \in \Gamma \stackrel{\text{defn}}{=} \{x_{n-k+3}, x_{n-k+4}, \dots, x_1\}$, är röda. Notera att $P_i^+ = x_i x_{i+d} \cdots x_{n-k+(i+1)}$, så för $i \in [4, k - 1]$ gäller att P_i^+ slutar med $x_{n-k+(i+1)}$ och P_{i+1}^+ börjar med x_{i+1} ; k -kordan dem emellan är röd om $x_{n-k+(i+1)} \in \Gamma$, dvs. om $i \in [2, k]$, vilket alltså är fallet. P_k^+ slutar med x_1 och P^* börjar med x_{k+1} ; k -kordan dem emellan är röd eftersom $x_1 \in \Gamma$. P^* slutar med x_{n-k+3} och P_3^+ börjar med x_3 ; k -kordan dem emellan är röd eftersom $x_{n-k+3} \in \Gamma$. P_3^+ slutar med x_{n-k+4} och $x_2 x_{n-k+4}$ är ju röd. $|V(\bar{P})| = (k - 3)n' + (n' - 1) + n' + 1 = (k - 1)n' = (k - 1)\frac{n}{k-1} = n$, så stigens längd är $n - 1$. $\square$

Om alla 2-kordor till C är gröna, betrakta k -cykeln $x_3 x_4 x_6 \cdots x_{2k} x_3$. Eftersom G inte innehåller någon grön C_k , är $x_3 x_{2k}$ röd. Påstående 1 (med

$i = 1$) medför nu att $P_3^+ P_4^+ \cdots P_k^+ P_{k+1}^- x_3$ är en röd C_n . Om så inte är fallet, är alltså $x_2 x_4$ röd, och Påstående 2 medför att $\bar{P} x_4$ är en röd C_n .

(2b) $1 < d < k - 1$. Låt $\alpha = k - d \geq 2$. Påstående 1 (med $i = 1$) medför att $P_j^+ P_{j+1}^+ \cdots P_{j+d-1}^+ x_j$ är en röd C_n , för något $j \in [2, \alpha + 2]$, såvida inte $x_{j-\alpha} x_j$ är grön, för varje $j \in [2, \alpha + 2]$. Om så är fallet, definiera de gröna stigarna $Q_i = x_i x_{i-\alpha} x_{i-\alpha+1} x_{i+1}$, för $i \in [2, \alpha + 1]$, och $R_i = x_{n+i} x_{n+i+1} \cdots x_{n+1}$, för $i \in [3 - n, 1]$ (notera att $R_1 = x_1$).

Påstående 3. Om $d \equiv 1$, är $Q_3 Q_5 \cdots Q_d x_{d+2} R_{d+2-\alpha} x_2 x_3$ en grön C_k , om $d \equiv 0$ och $d + 3 - \alpha \leq 1$, är $Q_3 Q_5 \cdots Q_{d+1} x_{d+3} R_{d+3-\alpha} x_3$ en grön C_k , och om $d \equiv 0$ och $d + 3 - \alpha \geq 2$, är $Q_3 Q_5 \cdots Q_{d-1} x_{d+1} x_{d+2} x_{d+3} x_2 x_1 x_3$ en grön C_k (notera att $Q_3 Q_5 \cdots Q_{d-1} x_{d+1} x_{d+2} x_{d+3} x_2 x_1 x_3$ är lika med $x_3 x_4 x_5 x_2 x_1 x_3$ i fallet $d = 2$).⁶

Bevis. Notera att $d \mid k - 1$ och $d < k - 1$ medför att $d \leq (k - 1)/2$. Vidare, notera att $|V(Q_i)| = 4$ och $|V(R_i)| = (n + 1) - (n + i) + 1 = 2 - i$.

$d \equiv 1$: Notera att $d + 2 - \alpha = d + 2 - (k - d) = 2d - k + 2 \leq 1$. Således är $|V(Q_3 Q_5 \cdots Q_d x_{d+2} R_{d+2-\alpha} x_2)| = \frac{d-1}{2} \cdot 4 + 1 + (2 - (d + 2 - \alpha)) + 1 = d + \alpha = k$.

$d \equiv 0$: Notera att $d + 3 - \alpha = d + 3 - (k - d) = 2d - k + 3 \leq 2$ med likhet om och endast om $d = (k - 1)/2$. Således är $|V(Q_3 Q_5 \cdots Q_{d+1} x_{d+3} R_{d+3-\alpha})| = \frac{d}{2} \cdot 4 + 1 + (2 - (d + 3 - \alpha)) = d + \alpha = k$ om $d + 3 - \alpha \leq 1$. Om $d + 3 - \alpha = 2$, har vi istället att $|V(Q_3 Q_5 \cdots Q_{d-1} x_{d+1} x_{d+2} x_{d+3} x_2 x_1)| = (\frac{d}{2} - 1) \cdot 4 + 5 = 2d + 1 = k$; alla kanter är gröna, ty $x_2 = x_{d+3-\alpha}$ (det krävs att $d + 3 \leq \alpha + 2$, dvs. att $2d + 1 \leq k$, vilket är fallet). $\square$

Påstående 3 motsäger antagandet att G inte innehåller någon grön C_k , och alltså innehåller G en röd C_n . Därmed har vi bevisat Lemma 2.5.1. $\square$

Lemma 2.5.2 (Lemma 3.1 i [5]). Låt $n \geq k \geq 4$, låt $n \geq 5$ och låt $k \equiv 0$. Vidare, låt G vara en komplett röd-grön graf, sådan att $|V(G)| \geq n + k/2 - 1$. Då innehåller G en enfärgad C_l , för något $l \geq n$, eller en grön C_k .

Korollarium 2.5.3 (Lemma 3.1 i [5]). Låt $0 \equiv m \geq 6$. Vidare, låt G vara en komplett röd-grön graf, sådan att $|V(G)| \geq 3m/2 - 1$. Då innehåller G en enfärgad C_l , för något $l \geq m$.

Bevis. Ta $n = m$ och $k = m$ i Lemma 2.5.2. $\square$

Bevis av Lemma 2.5.2. $n \geq 5$ och $k \geq 4$, så $|V(G)| \geq 6 = R(C_4, C_4)$, varför det finns en enfärgad C_4 i G . Anta att en längsta enfärgad cykel i G är av

⁶Károlyi-Rosta skriver bara att $Q_3 Q_5 \cdots Q_{d+1} x_{d+3} R_{d+3-\alpha} x_3$ är en grön C_k om $d \equiv 0$ (det vill säga, oberoende av storleken på $d + 3 - \alpha$); det verkar oklart hur detta skulle kunna fungera för $d + 3 - \alpha = 2$.

längd $L \leq n - 1$; notera att $L \geq 4$. Vi ska visa att G innehåller en grön C_k . Det räcker att visa följande:

(8) G innehåller en grön C_k , givet att G innehåller en röd C_L .

Anta nämligen att vi har visat (8) och att G innehåller en grön C_L , men inte en röd C_L . Betrakta komplementfärggrafen $\overline{G}$ till G . $\overline{G}$ innehåller en röd C_L , så från (8) fås att $\overline{G}$ innehåller en grön C_k , dvs. att G innehåller en röd C_k . Eftersom varje enfärgad cykel i G är av längd högst L , är $k \leq L$; således medför Lemma 2.5.1 (med $n = L$) att G innehåller en grön C_k (eftersom G inte innehåller någon röd C_L).

Alltså kan vi från och med nu anta att G innehåller en röd C_L , säg $C = x_1x_2 \cdots x_Lx_1$. Låt $D = V(G) - V(C)$; notera att $|D| \geq k/2 \geq 2$. Eftersom varje röd cykel i G är av längd högst L , gäller följande:

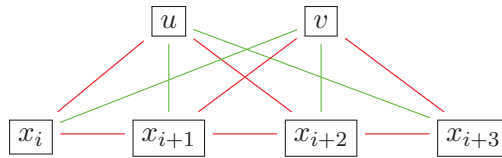
(9) Om yx_l är röd, för något $y \in D$, så är både yx_{l-1} och yx_{l+1} gröna.

Påstående 4 (Proposition 4.2 i [5]). Låt $u \neq v$ tillhöra D . För varje $i \in [L]$ finns ett $j \in [i, i + 3]$, sådant att både ux_j och vx_j är gröna.

Bevis. Till att börja med, notera att x_i, x_{i+1}, x_{i+2} och x_{i+3} alla är olika (eftersom $L \geq 4$). Anta nu att Påstående 4 inte gäller, dvs. anta följande:

(10) Det finns inget $j \in [i, i + 3]$, sådant att både ux_j och vx_j är gröna.

På grund av (10) är ux_i eller vx_i röd, säg ux_i . ux_i röd $\xrightarrow{(9)}$ ux_{i+1} grön $\xrightarrow{(10)}$ vx_{i+1} röd $\xrightarrow{(9)}$ vx_{i+2} (liksom vx_i) grön $\xrightarrow{(10)}$ ux_{i+2} röd $\xrightarrow{(9)}$ ux_{i+3} grön $\xrightarrow{(10)}$ vx_{i+3} röd (se Figur 4). Vi ser att $x_iux_{i+2}x_{i+1}vx_{i+3}x_{i+4} \cdots x_i$ är en röd C_{L+2} ; en motsägelse. Alltså finns ett $j \in [i, i + 3]$, sådant att både ux_j och vx_j är gröna. $\square$



Figur 4: Del av en röd C_{L+2} .

Påstående 5. *Påstående 4 medför att G innehåller en grön C_4 .*

Bevis. Vi delar upp beviset i två olika fall.

Fall 1. $L = 4$: Påstående 4 medför att både ux_j och vx_j är gröna, för något $x_j \in \{x_1, \dots, x_4\}$, säg x_1 . Om både ux_2 och vx_2 är gröna, är ux_1vx_2u en grön C_4 , så anta att en av dem är röd, säg ux_2 (fallet vx_2 röd behandlas på samma sätt, på grund av symmetri). (9) medför att ux_3 är grön. Om vx_3 är grön, är ux_1vx_3u en grön C_4 , så anta att vx_3 är röd. (9) medför att vx_4 är grön. Om ux_4 är grön, är ux_1vx_4u en grön C_4 , så anta att ux_4 är röd. Vore uv röd, skulle $x_1x_2uvx_3x_4x_1$ vara en röd C_{L+2} (en motsägelse), så uv är grön. Vore x_1x_3 röd, skulle $x_1x_3x_2ux_4x_1$ vara en röd C_{L+1} (en motsägelse), så x_1x_3 är grön och $x_1x_3uvx_1$ är en grön C_4 .

Fall 2. $L \geq 5$: Påstående 4, med $i = 1$, medför att både ux_{j_1} och vx_{j_1} är gröna, för något $x_{j_1} \in \{x_1, \dots, x_4\}$, och Påstående 4, med $i = j_1 + 1$, medför att både ux_{j_2} och vx_{j_2} är gröna, för något $x_{j_2} \in \{x_{j_1+1}, \dots, x_{j_1+4}\}$. Eftersom $L \geq 5$, är $x_{j_1} \neq x_{j_2}$ och $ux_{j_1}vx_{j_2}u$ är en grön C_4 . $\square$

På grund av Påstående 5 kan vi från och med nu anta att $k \geq 6$. Följande definition spelar en avgörande roll för resten av beviset av Lemma 2.5.2.

Definition. En grön stig $u_1z_1u_2z_2 \cdots u_{s-1}z_{s-1}u_s$ säges vara *alternerande* om

- (i) $2 \leq s \leq k/2 - 1$
- (ii) $u_1, \dots, u_s \in D$
- (iii) $z_1, \dots, z_{s-1} \in V(C)$
- (iv) $z_i = x_j \implies z_{i+1} \in \{x_{j+1}, x_{j+2}\}$, för alla $i \in [s-2]$
- (v) $z_i = x_{j_i} \implies \sum_{i=1}^{s-2} ((j_{i+1} - j_i) \bmod L) \leq L - 4$.

Notera att (iv) medför att $(j_{i+1} - j_i) \bmod L \in \{1, 2\}$.

Notera att $k/2 - 1 \geq 2$ (eftersom $k \geq 6$) och Påstående 4 medför att det finns en alternerande stig i G . Låt $P = u_1z_1u_2z_2 \cdots u_{s-1}z_{s-1}u_s$ vara en alternerande stig i G av maximal längd. Vi kan, utan att förlora i allmängiltighet, anta att $z_1 = x_1$, vilket medför att P kan skrivas på formen $P = u_1x_1u_2 \cdots u_{s-1}x_tu_s$, där $t \leq L - 3$ (på grund av (v)). För varje $i \in [2s-2]$, låt P_{-i} vara stigen som fås från P genom att ta bort dess i sista hörn (och motsvarande kanter).

Påstående 6 (Lemma 4.3 i [5]). Om $P = u_1x_1u_2 \cdots u_{s-1}x_tu_s$ är en alternerande stig av maximal längd, så är $s = k/2 - 1$ eller så är $L - 5 \leq t \leq L - 3$. Vidare, om $s < k/2 - 1$ och $t = L - 5$, så $x_{t-1} \in P$.

Bevis. Anta att $s < k/2 - 1$ och $t \leq L - 5$. Vi ska visa att $t = L - 5$ och att $x_{t-1} \in P$. Låt $y_1 \neq y_2$ tillhöra $D - V(P)$. (Eftersom $k \equiv 0$, medför $s < k/2 - 1$ att $s \leq k/2 - 2$, som i sin tur medför att $|D - V(P)| \geq 2$, eftersom $|D| \geq k/2$.) På grund av maximaliteten hos P gäller följande:

(11) Det finns inget $(j, m) \in [2] \times [2]$, sådant att stigen $u_sx_{t+m}y_j$ är grön.

(För att $Px_{t+m}y_j$ ska vara en alternerande stig längre än P krävs, enligt (v), att $(t+m) - 1 \leq L - 4$, dvs. att $t \leq L - (3+m)$, så här används att $t \leq L - 5$.) Vore u_sx_{t+1} grön, skulle $x_{t+1}y_j$ vara röda (på grund av (11)), y_jx_t och y_jx_{t+2} gröna (på grund av (9)), och $P_{-1}y_1x_{t+2}y_2$ en alternerande stig längre än P (även här krävs att $t \leq L - 5$); en motsägelse. Alltså är u_sx_{t+1} röd, u_sx_{t+2} grön (på grund av (9)), $x_{t+2}y_j$ röda (på grund av (11)), och y_jx_{t+1} och y_jx_{t+3} gröna (på grund av (9)). Vidare, vore y_1x_t eller y_2x_t grön, skulle $P_{-1}y_1x_{t+1}y_2$ respektive $P_{-1}y_2x_{t+1}y_1$ vara en alternerande stig längre än P (här krävs att $t \leq L - 4$); en motsägelse. Alltså är y_jx_t röda, och y_jx_{t-1} gröna (på grund av (9)). Nu fås från maximaliteten hos L att u_sx_{t-1} , u_sx_{t-2} , u_sx_{t+3} och u_sx_{t+4} är gröna. (Vore u_sx_{t-1} röd, skulle $x_{t-1}u_sx_{t+1}x_t y_1x_{t+2}x_{t+3} \cdots x_{t-1}$ vara en röd C_{L+2} , vore u_sx_{t-2} röd, skulle $x_{t-2}u_sx_{t+1}x_t y_1x_{t+2}x_{t+3} \cdots x_{t-2}$ vara en röd C_{L+1} , vore u_sx_{t+3} röd, skulle $x_t y_1x_{t+2}x_{t+1}u_sx_{t+3}x_{t+4} \cdots x_t$ vara en röd C_{L+2} , och vore u_sx_{t+4} röd, skulle $x_t y_1x_{t+2}x_{t+1}u_sx_{t+4}x_{t+5} \cdots x_t$ vara en röd C_{L+1} .) Vi ser att $P_{-3}u_sx_tu_{s-1}$ är en alternerande stig lika lång som P . Upprepas hela resonemanget på denna alternerande stig av maximal längd, så fås att $u_{s-1}x_{t-1}$, $u_{s-1}x_{t-2}$, $u_{s-1}x_{t+3}$ och $u_{s-1}x_{t+4}$ är gröna.

Nu inses att $x_{t-1} \in P$, ty annars skulle $P_{-2}x_{t-1}y_1x_{t+1}y_2$ vara en alternerande stig längre än P , och att $t = L - 5$, ty vore $t \leq L - 6$, skulle $P' = P_{-3}y_1x_{t+1}y_2x_{t+3}u_s$ vara en alternerande stig längre än P . (Notera att P' är en alternerande stig om och endast om $(t+3) - 1 \leq L - 4$, dvs. om och endast om $t \leq L - 6$.) $\square$

Påstående 7 (Lemma 4.4 i [5]). Låt $P = u_1x_1u_2 \cdots u_{s-1}x_tu_s$ vara en alternerande stig av maximal längd. Om $t \leq L - 4$, så kan P modifieras till en grön C_{2s+2} , och om $t = L - 3$, så kan P modifieras till en grön C_{2s+1} eller till en grön C_{2s+2} .

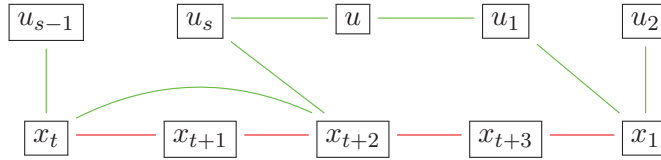
Bevis. Nedan använder vi $(*)$ som en förkortning av "maximaliteten hos L ". Ta $u \in D - V(P)$ och låt $j \in \{1, s\}$. ($|D| \geq k/2 \geq s + 1$, så $|D - V(P)| \geq 1$.) Om u_ju är röd, så fås från $(*)$ att det finns en grön stig u_jx_iu , för något

$i \in [t+1, L]$. Om $t \leq L-4$, så fås från Påstående 4 att en sådan stig finns, även om $u_j u$ är grön. Om en sådan stig finns, låt Q_j vara en av dem, och om en sådan stig inte finns, låt Q_j vara den gröna kanten $u_j u$. I fallet $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 3$, välj Q_1 och Q_s så att $V(Q_1) \cup V(Q_s)$ innehåller så många element som möjligt. Låt Q'_1 vara stigen som fås från Q_1 genom att genomlöpa dess hörn i omvänd ordning. Vi betraktar fyra olika fall.

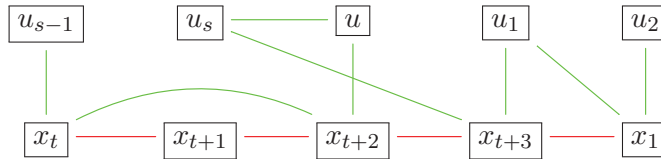
Fall 1. $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 3$ och $|V(Q_1) \cup V(Q_s)| = 5$. Då är $PQ_s Q'_1$ en grön C_{2s+2} .

Fall 2. $|V(Q_1)| = 3$ och $|V(Q_s)| = 2$ eller vice versa. Då är $t = L-3$ och $PQ_s Q'_1$ är en grön C_{2s+1} .

Fall 3. $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 2$. Då är $t = L-3$ och stigen $u_s u u_1$ är grön. $|V(Q_j)| = 2$ och (*) medför att (α) ($u x_{t+1}$, $u x_{t+3}$ och $u_j x_{t+2}$ röda) och ($u_j x_{t+1}$, $u_j x_{t+3}$ och $u x_{t+2}$ gröna) eller (β) vice versa. ($u x_{t+1}$ grön $\xrightarrow{|V(Q_j)|=2} u_j x_{t+1}$ röd $\xrightarrow{(*)} u_j x_{t+2}$ grön $\xrightarrow{|V(Q_j)|=2} u x_{t+2}$ röd $\xrightarrow{(*)} u x_{t+3}$ grön $\xrightarrow{|V(Q_j)|=2} u_j x_{t+3}$ röd. Fallet $u x_{t+1}$ röd behandlas på liknande sätt.) Vore $x_t x_{t+2}$ röd, skulle $x_t x_{t+2} x_{t+1} u x_{t+3} x_{t+4} \cdots x_t$ (i fallet (α)) respektive $x_t x_{t+2} x_{t+1} u_s x_{t+3} x_{t+4} \cdots x_t$ (i fallet (β)) vara en röd C_{L+1} ; en motsägelse. Alltså är $x_t x_{t+2}$ grön, varför $P_{-1} x_{t+2} u u u_1$ i fallet (β) är en grön C_{2s+1} (se Figur 5) och $P_{-1} x_{t+2} u u_s x_{t+3} u_1$ i fallet (α) är en grön C_{2s+2} (se Figur 6).



Figur 5: Del av en grön C_{2s+1} .



Figur 6: Del av en grön C_{2s+2} .

Fall 4. $|V(Q_1)| = |V(Q_s)| = 3$ och $|V(Q_1) \cup V(Q_s)| = 4$.

(4a) Om $[t+1, L] - \{i\}$ innehåller tre konsekutiva tal mindre än i (dvs. om $i \geq t+4$), låt $t_k = t+k$, för alla $k \in [3]$, och (4b) om $[t+1, L] - \{i\}$ innehåller tre konsekutiva tal större än i , men inte tre konsekutiva tal mindre

än i , låt $t_k = L - k + 1$, för alla $k \in [3]$. $|V(Q_1) \cup V(Q_s)| = 4$ och $(*)$ medför, på samma sätt som i Fall 3, att (α) (ux_{t_1} , ux_{t_3} och $u_jx_{t_2}$ röda), ($u_jx_{t_1}$, $u_jx_{t_3}$ och ux_{t_2} gröna) eller (β) vice versa. Vore uu_s röd, skulle cykeln som innehåller stigen $x_{t_1}uu_sx_{t_2}$ (i fallet (α)) respektive $x_{t_1}u_sux_{t_2}$ (i fallet (β)) vara en röd C_{L+2} , så uu_s är grön. Betrakta först Fall 4a. Vore $x_tx_{t_2}$ röd, skulle vi ha samma röda C_{L+1} :or som i Fall 3. Alltså är $x_tx_{t_2}$ grön, varför $P_{-1}x_{t_2}uu_sx_{t_3}u_1$ (i fallet (α)) respektive $P_{-1}x_{t_2}u_sux_iu_1$ (i fallet (β)) är en grön C_{2s+2} . Fall 4b behandlas på liknande sätt som Fall 4a (nu är det $x_1x_{t_2}$, istället för $x_tx_{t_2}$, som visar sig vara grön).

(4c) $t = L - 3$. Om uu_1 eller uu_s är grön, är Px_iuu_1 respektive Pux_iu_1 en grön C_{2s+1} , så anta att uu_1 och uu_s båda är röda. Enligt antagandet i Fall 4, måste minst två av hörnen i $\{x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}\}$ ha minst en röd kant till $\{u, u_j\}$; enligt $(*)$ är de enda möjligeterna (ux_{t+1} och ux_{t+3} röda, resten gröna) eller (u_jx_{t+1} och u_jx_{t+3} röda, resten gröna) (alltså är $x_i = x_{t+2}$). Vore u_1x_{t+1} , u_1x_{t+3} , u_sx_{t+1} och u_sx_{t+3} röda, skulle cykeln som innehåller stigen $x_{t+1}u_suu_1x_{t+3}$ vara en röd C_{L+2} , så ux_{t+1} och ux_{t+3} är röda. Vore x_tx_{t+2} röd, skulle vi ha en röd C_{L+1} , så x_tx_{t+2} är grön, varför $P_{-1}x_{t+2}u_sx_{t+3}u_1$ är en grön C_{2s+1} .

(4d) $t = L - 4$, $x_i = x_{t+2}$ ($x_i = x_{t+3}$ behandlas på samma sätt, på grund av symmetri) eller $t = L - 5$, $x_i = x_{t+3}$. Vi betraktar två olika fall: ux_{i+1} grön respektive ux_{i+1} röd.

(4d.a) ux_{i+1} grön $\implies u_jx_{i+1}$ röda $\implies u_jx_{i+2}$ gröna $\implies ux_{i+2}$ röd. Vore uu_s röd, skulle cykeln som innehåller stigen $x_{i+1}u_sux_{i+2}$ vara en röd C_{L+2} , så uu_s är grön. Anta först att ux_{i-1} är grön $\implies u_jx_{i-1}$ röda $\xrightarrow{\text{om } t = L-5} u_jx_{i-2}$ gröna $\implies ux_{i-2}$ röd $\implies ux_t$ grön, så att $P_{-1}ux_iu_sx_{i+2}u_1$ är en grön C_{2s+2} . $t = L - 4$: Vore x_tx_i röd, skulle cykeln som innehåller stigen $x_tx_ix_{i-1}u_sx_{i+1}$ vara en röd C_{L+1} , så x_tx_i är grön, varför $P_{-1}x_iuu_sx_{i+2}u_1$ är en grön C_{2s+2} . Anta nu att ux_{i-1} är röd. Om $t = L - 4$ fås att ux_t är grön, så att $P_{-1}ux_iu_sx_{i+2}u_1$ är en grön C_{2s+2} . Om $t = L - 5$ fås att ux_{i-2} är grön, vilket medför att u_sx_{i-2} är röd, så att cykeln som innehåller stigen $x_{i-2}u_sx_{i+1}x_ix_{i-1}ux_{i+2}$ är en röd C_{L+2} , vilket motsäger $(*)$.

(4d.b) ux_{i+1} röd $\implies ux_{i+2}$ grön $\implies u_jx_{i+2}$ röda $\implies u_jx_{i+1}$ gröna. Anta först att ux_{i-1} är grön $\implies u_jx_{i-1}$ röda. Vore ux_t röd, skulle cykeln som innehåller stigen $x_tux_{i+1}x_ix_{i-1}u_sx_{i+2}$ vara en röd C_{L+2} (om $t = L - 4$) eller en röd C_{L+1} (om $t = L - 5$), så ux_t är grön, varför $P_{-1}ux_iu_sx_{i+1}u_1$ är en grön C_{2s+2} . Anta nu att ux_{i-1} är röd. Om $t = L - 4$ fås att ux_t är grön, så att $P_{-1}ux_iu_sx_{i+1}u_1$ är en grön C_{2s+2} . Om $t = L - 5$ fås att ux_{i-2} är grön, vilket medför att u_jx_{i-2} är röda. Vore uu_s röd, skulle cykeln som innehåller stigen $x_{i-2}u_sux_{i-1}$ vara en röd C_{L+2} , så uu_s är grön. Vore x_tx_{i+1} röd, skulle cykeln som innehåller stigen $x_tx_{i+1}x_ix_{i-1}x_{i-2}u_1x_{i+2}$ vara en röd

C_{L+1} , så $x_t x_{i+1}$ är grön, varför $P_{-1} x_{i+1} u_s u x_i u_1$ är en grön C_{2s+2} . $\square$

Nu har vi vad vi behöver för att fullborda beviset av Lemma 2.5.2. Vi har alltså en alternerande stig $P = u_1 x_1 u_2 \cdots u_{s-1} x_t u_s$ av maximal längd, där $t \leq L - 3$, och (per definition) att $L \leq n - 1$ är längden av en längsta enfärgad cykel i G . Vi ska visa att G innehåller en grön C_k .

Från (iv) fås att $t \leq 2s - 3$. Vore $t = L - 3$, skulle $L \leq 2s$, vilket motsäger maximaliteten hos L eftersom G , enligt Påstående 7, innehåller en grön C_{2s+1} eller en grön C_{2s+2} . Vore $t = L - 4$, skulle $L \leq 2s + 1$, vilket igen motsäger maximaliteten hos L eftersom G , enligt Påstående 7, då skulle innehålla en grön C_{2s+2} . Alltså är $t \leq L - 5$.

Från (iv) fås att $t \leq 2s - 4$ om $x_{t-1} \in P$. Alltså, vore $t = L - 5$ och $x_{t-1} \in P$, skulle $L \leq 2s + 1$, vilket ännu en gång motsäger maximaliteten hos L . Således fås från (i) och Påstående 6 att $s = k/2 - 1$. Från Påstående 7 fås nu att G innehåller en grön C_{2s+2} , dvs. en grön C_k . Därmed har vi bevisat Lemma 2.5.2. $\square$

Lemma 2.5.4 (Lemma 3.2 i [5]). *Låt $n \geq k \geq 3$ och låt $n \geq 5$.⁷ Vidare, låt G vara en komplett röd-grön graf, sådan att $|V(G)| \geq \beta(n, k)$. Då innehåller G en enfärgad C_n eller en grön C_k .*

Bevis. Anta att G varken innehåller en enfärgad C_n eller en grön C_k . Då innehåller G en enfärgad C_L , för något $L \geq n + 1$; om $k \equiv 0$, tillämpa Lemma 2.5.2 (här krävs att $(n, k) \neq (4, 4)$), om $k \equiv 1$ och $n \equiv 0$, tillämpa Korollarium 2.5.3, med $m = n$ (här krävs att $(n, k) \neq (4, 3)$), och om $k \equiv 1$ och $n \equiv 1$, notera att $|V(G)| \geq 2n - 1 \geq 3(n + 1)/2 - 1$ (eftersom $k \equiv 1$) och tillämpa Korollarium 2.5.3, med $m = n + 1$ (här krävs att $(n, k) \neq (3, 3)$).

Från (a)- och (b)-delen av Lemma 2.3.2 fås att $n \equiv 1$ och att G innehåller en enfärgad cykel C av längd $n + 1$. (Anta motsatsen till att $n \equiv 1$, dvs. att $0 \equiv n \geq 6$. Då är $1 \equiv n + 1 \geq 7$. $L \equiv 1 \xrightarrow{(a)}$ enfärgad $C_{L-1} \xrightarrow{(b)}$ enfärgad C_n (om inte $L = n + 1$; då har vi en enfärgad C_n redan efter $\xrightarrow{(a)}$); en motsägelse. $L \equiv 0 \xrightarrow{(b)}$ enfärgad C_n ; en motsägelse. Alltså är $1 \equiv n \geq 5$, så att $0 \equiv n + 1 \geq 6$. $L \equiv 1 \xrightarrow{(a)}$ enfärgad $C_{L-1} \xrightarrow{(b)}$ enfärgad C_{n+1} (om inte $L = n + 2$; då har vi en enfärgad C_{n+1} redan efter $\xrightarrow{(a)}$). $L \equiv 0 \xrightarrow{(b)}$ enfärgad C_{n+1} .)

⁷Károlyi-Rosta har följande villkor: "Låt $n \geq k \geq 3$; anta dessutom att $k \geq 4$ om $0 \equiv n \geq 6$." (3, 3) och (4, 4) kan dessutom anses vara uteslutna (vilket de måste vara), eftersom dessa lämnas som övning i beviset av Sats 1.4.1. Utöver (3, 3) och (4, 4) måste dock (4, 3) uteslutas på två ställen. Jag fångar upp allt detta med "låt $n \geq 5$ ". Däremot behöver man *inte* anta att $k \geq 4$ om $0 \equiv n \geq 6$.

Anta först att C är grön. Från (c)- och (d)-delen av Lemma 2.3.2 (med $l = (n + 1)/2$) fås att G innehåller en enfärgad C_n eller en grön C_k ; en motsägelse.⁸ (Fall (i): G innehåller en röd C_n . Fall (ii): G innehåller en grön C_n . Fall (iii): G innehåller en grön C_k om $k \equiv 0$. Om $k \equiv 1$, är $|V(G)| \geq 2n - 1$, så $\min\{\lceil |V(G)|/2 \rceil, 2l\} \geq n$ och G innehåller en röd C_n .)

Anta nu att C är röd. Ännu en gång, fås från (c)- och (d)-delen av Lemma 2.3.2 (med $l = (n + 1)/2$) att G innehåller en enfärgad C_n (till och med en röd C_n) eller en grön C_k ; igen en motsägelse. (Notera att vi i (c)- och i (d)-delen av Lemma 2.3.2 kan byta plats på ”grön” och ”röd”. Fall (i): G innehåller en grön C_k . Fall (ii): G innehåller en röd C_n . Fall (iii): Eftersom $1 \equiv n \geq k$, är $|V(G)| \geq 2k - 1$, så $\min\{\lceil |V(G)|/2 \rceil, 2l\} \geq k$ och G innehåller en grön C_k .) Således innehåller G en enfärgad C_n eller en grön C_k . $\square$

Bevis av Sats 1.4.1, övre gränser. Vi har redan bevisat de övre gränserna för $(n, k) = (4, 4)$ och för $k = 3$, så vi kan anta att $n \geq k \geq 4$, $(n, k) \neq (4, 4)$.⁹ Låt alltså G vara en godtycklig komplett röd-grön graf, sådan att $|V(G)| = \beta(n, k)$. Vi vill visa att G innehåller en röd C_n eller en grön C_k .

Från Lemma 2.5.4 fås att G innehåller en enfärgad C_n eller en grön C_k . Om röd C_n eller grön C_k är vi klara, så anta att G innehåller en grön C_n . Då fås, från Lemma 2.5.1, att G innehåller en röd C_n eller en grön C_k . $\square$

⁸Károlyi-Rosta skriver att G innehåller en röd C_n eller en grön C_k . För att man ska kunna dra den slutsatsen, måste man ha följande villkor i formuleringen av Lemma 2.5.4: Låt $n \geq k \geq 3$ och låt $n \geq 5$; anta dessutom att $k \geq 4$ om $n \equiv 1$ (och alltså inte om $0 \equiv n \geq 6$).

⁹Beviset fungerar även med följande, något mindre stränga, villkor: Låt $n \geq k \geq 3$, låt $n \geq 5$ och låt $k \geq 4$ om $n \equiv 0$.

3 Referenser

- [1] Beachy, J.; Blair, W.; *Abstract Algebra*; Waveland Press; 3:e upplagan (2006).
- [2] Chartrand, G; Schuster, S.; *On a Variation of the Ramsey Number*; Transactions of the American Mathematical Society; **173** (1972), 353-362.
- [3] Faudree, R.; Schelp, R.; *All Ramsey Numbers for Cycles in Graphs*; Discrete Mathematics; **8** (1974), 313-329.
- [4] Graham, R.; Rothschild, B.; Spencer, J.; *Ramsey Theory*; Wiley-Interscience; 2:a upplagan (1990).
- [5] Károlyi, G.; Rosta, V.; *Generalized and Geometric Ramsey Numbers for Cycles*; Theoretical Computer Science; **263** (2001), 87-98.
- [6] Radziszowski, S.; *Small Ramsey Numbers*; The Electronic Journal of Combinatorics; Dynamic Survey 1; Revision **13** (2011).
<http://www.combinatorics.org/Surveys/>
- [7] Rosta, V.; *On a Ramsey-Type Problem of J. A. Bondy and P. Erdős I & II*; Journal of Combinatorial Theory (Series B); **15** (1973), 94-120.