SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Slumpföljder

av

Klara Lundholm

2012 - No 7

Slumpföljder

Klara Lundholm

Stjärnor har sina banor
därute i mörka alltet
Jag har mina vanor
på ägg lägger jag saltet
Ricky Bruch

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

Sammanfattning

En slumpföljd är en oändlig följd av element genererade av en slumpprocess. Men hur definieras den matematiskt? Enligt klassisk sannolikhetsteori är varje följd lika sannolik, men singlar vi slant och får alltför många klavar i rad är vi benägna att misstänka att myntet vi begagnar inte är rättvist. Ett sådant utfall tycks oss allt för ”osannolikt”. Richard von Mises var i början av förra seklet först med att diskutera en matematisk formalisering av begreppet slumpföljd, men han vann aldrig något allmänt erkännande för sina resultat. Det var först på 60-talet som Per Martin-Löf formulerade den definition som ansetts vara den första tillfredsställande och än idag betraktas som mest universell. Detta arbete är en överskådlig redogörelse för dessa två helt olika förslag på definition av slumpföljd - vitt skilda till såväl utformning som bakgrund och motivation.

Under följande genomresa tvärs slumpens vildmark gör vi alltså uppehåll endast vid två av slumpföljdshistoriens viktigaste bosättningar. Detta i vad som blir en studie av sannolikhetsteorins grundvalar såväl som en relativt lättsam matematisk-filosofisk introduktion till det vidsträckta forskningsfält som är slumpens.

Innehåll

1 Introduktion

Det var relativt sent i tänkandets historia som slumpen gjorde entré som föremål för vetenskapliga undersökningar. I tusentals år hade då fenomenet inom de flesta kulturer betraktats som ett med ödet, som mystiska ledtrådar som spådom kunde tolka till omen, alternativt som ett sätt för övre makter att kommunicera med människan. [11] De gamla grekerna hade uppfattningar om slump i egenskap av motpol till lagbundenhet men gjorde aldrig några försök att formalisera begreppet matematiskt. Kineserna var troligen de första att cirka 1000 år f.Kr. konfrontera problemet genom systematiska undersökningar av odds i slumpspel. Det skulle dock dröja ända till 1600-talet i Italien innan vetenskapsmän, med Galileo Galilei i spetsen, skulle lägga grunderna till vad vi idag känner som en matematisk teori om slump och sannolikhet. [4, 11]

Den morgontrötta debatten har efter sitt uppvaknande icke varit desto mindre het och har bland annat kretsat kring frågor som huruvida slumpen verkligen är en inbyggd faktor i naturen, eller bara en illusion som uppstår ur vår hjärnas begränsade förmåga att sortera inkommande intryck. I och med kvantfysikens framväxt är allt fler benägna att tro att genuin slump faktiskt existerar som ett naturens inneboende fenomen. [11] Utan att känna till verklighetens djupaste hemligheter kan vi emellertid betrakta resultaten av försök vars utgångar framstår som genuint oförutsägbara. Denna uppsats ägnas åt att diskutera den matematiska beskrivningen av följder producerade genom slumpprocesser, det vill säga åt det vi benämner *slumpföljder*.

Låt oss betrakta de två binära strängarna, ”00000000000000000” och ”10001010111000010”, den första bestående av 17 på varandra följande nollor och den andra som representationen av resultatet av 17 stycken slantsinglingar. Enligt klassisk sannolikhetsteori är dessa båda strängar så som resultatserier av slumpförsök med diskret likformig sannolikhetsfördelning mellan 0 och 1 precis lika sannolika. Men en stark intuition säger oss att den andra är mer slumpmässig än den första. I det följande behandlas uppgiften att och svårigheterna kring att översätta denna intuition till en formell matematisk definition. Är det ens möjligt? frågar vi oss initialt. A prioriska skäl som anförts mot projektets görlighet är exempelvis:

- Så fort slumpmässighet kan definieras, upphör det att vara äkta slumpmässigt.
- Slumpmässighet är en egenskap hos en process, inte hos följder producerade genom sådan process.
- Det är karaktäristiskt för slumpprocesser att de kan generera vilken följd som helst.

Vi ska lämna dessa argument oanalyserade så länge och fokusera på den intuition som säger att det finns ett meningsfullt begrepp att definiera. Därtill föreligger, vilket vi kommer att se, skäl att mena att vissa matematiska teoriers applicerbarhet på verkligheten är beroende av en definition av slumpmässig följd för sin förklaring. [5, s.8-9]

Richard von Mises var den förste att systematiskt diskutera möjligheten och därtill nödvändigheten av en definition av slumpmässig följd. Han hade funnit behov av detta genom sitt arbete med att axiomatisera sannolikhetsteorin och menade att om sannolikhet ska kunna tolkas som relativ frekvens är dess applicerbarhet på verkliga fenomen beroende av att dessa besitter vissa slumpmässiga egenskaper. Von Mises kom att kalla sina slumpföljder för *kollektiv* och introducerade en urvalsmetod kallad *platsurval*, genom vilken han definierade dem. [5, s.9] Termen platsurval lämnades emellertid matematiskt vag och även om förfiningar av definitionen gjordes av exempelvis Abraham Wald under 30-talet har begreppet aldrig ansetts helt klargjort. [5, s.40] Dödsstöten för von Mises teori om slumpföljder har många betraktat som Jean André Villes motexempel från slutet av 30-talet. Genom detta lyckades Ville enligt de flesta visa att vissa av de följder som von Mises definition klassade som slumpmässiga i sanning inte kunde sägas vara det. [8, s.30]

En nystart innebar det för teorin då Per Martin-Löf 1966 publicerade en artikel på ämnet. Han hade studerat under Andrej Kolmogorov och utgick från en måtteoretisk grundvalssyn på sannolikhet. Den idé som ledde till genombrottet gick ut på att formellt definiera ett test för slumpmässighet genom så kallade *konstruktiva noll-övertäckningar*. En följd som passerade detta test uppfyllde alla sannolikhetsteorins gränsvärdeslagar. Denna definition av slumpföljd är än idag den mest allmänt accepterade och använda. Som ett av skälen till dess popularitet har anförts den rika och tilltalande matematisk teori den låter utveckla. Det har exempelvis visat sig att Martin-Löf-slumpmässighet tillåter ett flertal olika intuitiva karaktäriseringar och är ekvivalent med slumpföljdsdefinitioner som härstammar ur andra matematiska modeller för problemet. [3, s.226]

I Michiel van Lambalgens avhandling från 1987 behandlas ämnet slumpföljdens definition grundligt, bland annat genom en noggrann jämförelse von Mises och Martin-Löfs förslag emellan. Van Lambalgen vill försöka förstå och ge liv åt den sedan länge tystnade debatt som insomnade i mitten på förra seklet med ryggen vänd mot von Mises. Van Lambalgen ger den senare viss upprättelse och mer än så då han exempelvis sammanfattar: ”...the conclusion of the discussion is, in a nutshell, that wheras von Mises theory is philosophically rigorous, but technically less so, with Martin-Löf’s definition it is just the other way around”. [5, s.10] Martin-Löfs definition bygger

därtill på en grundvalssyn på sannolikhetsteori väsentligen skild från von Mises vilket van Lambalgen poängterar bör tas i noggrann beaktande vid varje jämförelse definitionerna emellan. [5, s.10]

I det följande kommer endast en bråkdel av alla de resultat och vindlande implikationer som står att finna i sammanhanget att tas upp. De två olika definitionerna har jag valt att behandla på det sätt de inbjuder till. Detta har effekten att närmast förestående avsnitt om von Mises och kollektiven till en början har en filosofisk snarare än strikt matematisk karaktär. Här kommer vi att ges lika stor anledning att betänka sannolikhetsteorins grundvalar som slumpföljdens definition. I 2.4 och 2.5 behandlas invändningar mot von Mises teori av mer matematisk karaktär och vi får anledning att introducera ett sannolikhetsmått samt titta närmare på några sannolikhetsteoretiska satser. I del 3 studerar vi inledningsvis benägenhetstolkningen av sannolikhet samt försöker utröna hur denna förhåller sig till von Mises sannolikhetsteori. I resterande del av avsnittet samlas bakgrundsmaterial nödvändigt för att förstå Martin-Löfs definition, med en översiktlig redogörelse för teorin om beräkning samt för begreppet Kolmogorovkomplexitet. Avsnitt 4 ägnas åt Martin-Löf-slumpmässighet och innehåller jämförelsevis många tekniska detaljer kulminerande i beviset för existensen av ett universellt Martin-Löf-test samt konstruktionen av ett sådant. Det sista avsnittet består i en sammanfattning samt en kort, avslutande diskussion.

Uppsatsen i sin helhet syftar inte på något sätt till att göra en uttömmande matematisk redogörelse för eller jämförelse mellan de olika definitionerna av slumpföljd. Snarare har jag försökt att ge en någorlunda lättillgänglig och överskådlig introduktion till ett synnerligen vidsträckt forskningsfält.

Låt oss med andra ord inleda den chartrade jakten på en matematisk definition av slumpföljd. I egenskap av er guide har jag tilldelats ett pressat schema och kommer medelst stötdämpad jeep bana er väg bland djur som går att klappa och mat som passar även för ovana magar. Jag kan inte garantera att vi kommer att få se slumpen med egna ögon. Men jag kan lova att vi i alla fall kommer att stanna till vid två av slumpföljdsdefinitionens allra viktigaste monument och att alla ska få chansen att lägga handen på deras invarianta ytor och lukta på de diskussionens vindar som viner omkring dem. Lägg ner bössan och ta fram kameran! Nu bär det av på slumpföljdssafari.

2 Von Mises och kollektiven

Under tidigt 30-tal publicerades två böcker på ämnet sannolikhetsteorins grunder som representerade två vitt skilda uppfattningar; Richard von Mises *Probability Theory* 1931 och Andrej Kolmogorovs *Foundations of Probability Theory* 1933. [5, s.5] Von Mises presenterade en strikt frekventistisk åskådning och definierade med andra ord sannolikheten för en händelse som gränsvärdet för händelsens relativa frekvens i ett stort antal försök. Han liknade sannolikhetsteorin vid en ”matematikens naturvetenskap” genom att understryka dess roll som beskrivande av verkliga strukturer. Kolmogorov hade en väsentligen annan inställning då han introducerade en strikt axiomatisk teori i vilken *sannolikhet* behandlades som rätt och slätt ett mått och förekom som primitiv term i definitionen. Det är den senare som många av oss känner från grundläggande studier i sannolikhetsteori och det var denna som skulle komma att närmast genomgående anammas. Von Mises teori å sin sida, blev tämligen kvävd i sin linda av en massiv kritikerstorm. Detta bland annat genom beskyllningar om det fatala i att utgöra en sammanblandning av empiriska och matematiska överväganden, samt om inkonsistens. Michiel van Lambalgen framför i sin avhandling *Random sequences* från 1987 idén om att mycket av denna kritik var missriktad och delvis helt felaktig. I innevarande avsnitt görs en översiktlig framställning av von Mises sannolikhetsteori i vilken en definition av slumpföljd ingår. [5, s.16-17]

2.1 Frekventistisk tolkning av sannolikhet

Redan 1919 hade Richard von Mises publicerat det första försöket till axiomatisering av sannolikhetsteorin. Essentiell i denna var en viss slags följd av element från utfallsrummet - följder von Mises kallade *kollektiv*. I beskrivningen av dessa försökte han fånga det som intuitivt utmärker en slumpmässig följd. Som vägledning använde han egenskaper hos slantsingling, väl verifierade genom erfarenheten. Karaktäristiskt för resultatserier från dylika slumpspel menade han var [5, s.17]:

1. Approximativ stabilitet av den relativa frekvensen för en händelse när antalet observationer ökar;

2. Det omöjliga i att finna en lyckad spelstrategi, med andra ord, avsaknaden av möjligheten att tjäna obegränsat med pengar i ett slumpspel under användning av något system (som baserat på tidigare utfall talar om vilka kommande man ska satsa på och inte).

Med utgångspunkt från dessa kan en första informell formulering av von Mises frekvenstolkning av sannolikhet ges:

Definition 1. *Sannolikheten för en händelse i ett kollektiv är lika med den relativa frekvensen för händelsen i kollektivet.*

Denna åskådning och varje annan som explicit likställer sannolikhet med relativ frekvens i utfallsrummet ska kallas *strikt frekventistisk*. Den informella karaktäriseriseringen av slumpföljder utgör essensen i von Mises definition. [5, s.18] Många av hans övriga ståndpunkter uttrycktes implicit och hans arbetsmetoder färgades av en bakgrund inom tillämpad matematik. Resultatet blev vad som skulle kunna betraktas som ett något inhomogent, för att inte säga obalanserat, matematiskt universum, mycket olikt den strikt mängdteoretiska utgångspunkten hos många av hans motståndare. [5, s.9] Stora delar av van Lambalgens avhandling går ut på att göra en matematiskt grundlig formalisering av von Mises teori. Först efter att detta har gjorts är det nämligen möjligt att rättmätigt jämföra den med andra. [5, s.18] Detta, menar han, är något som aldrig tidigare ordentligt gjorts. Von Mises formulerade sina intuitioner i följande matematiska termer, vilka är att betrakta som en definition av kollektivet likaväl som axiom för sannolikhetsteorin [5, s.23]:

Definition 2. *Låt M beteckna utfallsrummet, det vill säga den ändliga mängden av möjliga utfall i något försök, och M^ω mängden av alla oändliga följder av element från M. Om $A \subseteq M$, låt då $1_A(x)$ beteckna funktionen som antar värdet 1 om $x \in A$ och 0 annars.*

En följd $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in M^\omega$ kallas ett kollektiv *om*

(i) för alla $A \subseteq M$, existerar $P(A) := \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1_A(x_k)$

(ii) Låt $A, B \subseteq M$ vara icke-tomma, disjunkta mängder och anta att $A \cup B$ förekommer oändligt ofta i x. Utvinn ur x en ny följd x', också den i M^ω, genom att ta bort alla termer x_n som inte hör till varken A eller B. Låt vidare Φ vara ett tillåtet platsurval*, det vill säga, ett urval av delföljder $\Phi x'$ från x' som gjorts på så vis att beslutet att välja en term x'_n sker oberoende av dess värde.*

Då gäller att

$P'(A) := \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1_A(\Phi x')_k$ *och* $P'(B) := \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1_B(\Phi x')_k$

existerar och att

$\frac{P'(A)}{P'(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ *när* $P(B) \neq 0$.

Några anmärkningar:

1. Funktionen P definierad i (i) ska kallas *sannolikhetsfördelningen inducerad av kollektivet x* i enlighet med definitionen. Frasen ”ett rättvist

mynt" ska i enlighet med detta åsyfta ett mynt vars relativa frekvens vid singlingsförsök är lika med $\frac{1}{2}$. [5, s.23]

2. Uttrycket "$x \in M^\omega$ är invariant under ett tillåtet platsurval Φ" ska tolkas som att de relativa frekvenserna i följder valda av Φ är de samma som i hela x. Uttrycket "Φx" för delföljderna utvalda av Φ ur x ska tills vidare inte tolkas som appliceringen av en funktion $\Phi : M^\omega \to M^\omega$, eftersom det inte är klart att ett tillåtet platsurval verkligen *är* en funktion. Uttrycket "Φx" är vagt och det ska visa sig att djupare analyser av von Mises teori i första hand kretsar just kring tolkningen av detta. [5, s.24]

3. Ett kollektiv x är fullständigt bestämt av sin fördelning. Det är inte möjligt att specificera en funktion $n \to x_n$. För att inse detta, betrakta situationen då vi väljer ett $A \subseteq M$ sådant att $0 < P(A) < 1$. Om en funktion av ovan nämnda slag existerade skulle vi kunna använda den för att definiera ett tillåtet val av delföljd till x som skulle bestå av element ur A endast. Från definitionen av kollektiv vet vi att ett sådant urval inte existerar. Denna konsekvens visar på essensen hos ett nytt begrepp: kollektiv innehåller inga andra regulariteter än frekvensmässiga sådana. De utgör därmed ett *nytt* matematiskt objekt som inte är möjligt att konstruera utifrån tidigare definierade sådana. [5, s.26]

4. Den multiplikativa egenskapen för sannolikheter erhålls per automatik då dessa definieras genom kollektiv. Följande exempel antyder hur: Betänk situationen vid upprepad slantsingling. Den approximativa sannolikheten för klave i motsvarande kollektiv är $\frac{1}{2}$, och sannolikheten för två på varandra följande klavar är $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Den relativa frekvensen $\frac{1}{2}$ får alltså kallas sannolikhet endast om denna multiplikativa egenskap håller. Vi kommer att se att Von Mises axiom på så vis utmärker sig i jämförelse med Kolmogorovs. Den senare kräver av en sannolikhet endast att den är ett tal mellan 0 och 1. Den multiplikativa egenskapen slinker in först efteråt då han definierar begreppet *oberoende* händelser som två händelser vars union är lika sannolik som produkten av sannolikheterna för respektive händelse. Som väntat påpekar han att det är just oberoendebegreppet som skiljer sannolikhetsteori från måtteori. [5, s.18]

5. Vanligt i framställningar av von Mises definition är ett utelämnande av den första delen i (ii), där x' erhålls ur x genom att alla element som inte ingår i $A \cup B$ avlägsnas. En intressant iakttagelse är emellertid att just detta specifika förfarande är nödvändigt för att garantera

giltigheten hos regeln för betingade sannolikheter:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

> Denna regel måste alltså helt tydligt byggas in i axiomen för att gälla, något som understryker dess empiriska ursprung. [1] Luigi Accardi har försökt visa att klassisk sannolikhetsteoris icke-tillämpbarhet på kvantmekaniken beror just av detta villkor.[2] [5, s.24]

Von Mises definition är inte den enda som upprättar en koppling mellan sannolikhet och relativ frekvens. Vi skall snart se hur man i benägenhetstolkningen av sannolikhet gör detsamma, men då under användning av en viss hypotes. [5, s.21] Vad övrigt är finns inget som säger att von Mises trodde att hans definition inrymde allt som står att veta om sannolikhet. Att det existerar någon slags naturens inneboende tendenser som står bakom observerade relativa frekvenser motsade han sig inte, men detta övriga, menade han, varken behövde eller borde figurera i definitionen. [5, s.19] Denna var tänkt att utifrån empiriska fakta forma en teori avsedd för att transformera data i termer av sannolikheter till förutsägelser eller förklaringar, också dessa i termer av sannolikheter. De empiriska sakförhållandena gjorde von Mises inget försök att förklara. [5, s.21-22]

Vi har hittills betraktat följder av element ur den godtyckliga, ändliga mängden M. Det skulle inte innebära några särskilda svårigheter att fortsätta med detta. För enkelhetens skull kommer vi emellertid i det följande att i första hand betrakta följder i Cantorrummet, det vill säga mängden av alla oändliga binära följder och beteckna denna 2^ω. Jo jag sa just att:

Definition 3. *Låt 2^ω beteckna mängden av alla oändliga följder av 0 och 1.*

Efter denna framställning av von Mises sannolikhetsteori står det klart att definitionen av kollektiv, och i synnerhet (ii), inte är fullständigt matematiskt rigorös. [5, s.24] I nästa avsnitt ska vi ge luft åt kritik som riktades mot von Mises teori men även åt försök att bemöta denna. Diskussionen kommer blottlägga såväl brister gällande gemensam utgångspunkt för debatten som behovet av en närmare analys av begreppet ”tillåtet platsurval”.

2.2 Existerar kollektiv?

Mellan 1919 och 1933 var von Mises definition den enda explicita axiomatiseringen av sannolikhetsteorin som fanns att tillgå, varför behovet av att göra kollektiven matematiskt anständiga under denna period ansågs stort.

[1] Se [5, s.32-33] för detaljerna.

[2] Se L. Accardi, The probabilistic roots of the quantum mechanical paradoxes, som finns med i S. Diners The Wawe-Particle Dualism, Reidel (1984), 297-330.

[5, s.40] Definitionen av kollektiv visar på två olika egenskaper hos dessa: global regularitet (i och med existensen av gränsvärde för relativ frekvens), och lokal irregulariet (invarians under tillåtna platsurval implicerar att kollektiv är oförutsägbara). Dessa karaktäristika har båda kritiserats, såväl i konjunktion som varför sig. [5, s.25] Nedan ska den kanske allra mest alarmerande anklagelsen, den om teorins avsaknad av konsistens, behandlas. Denna invändning sällskapar ofta med uppfattningen att den abstrakta logiska existensen av ovan nämnda platsurval är en illusion och att kollektiv i den mening som beskrivits (se anmärkning 3 ovan), med andra ord inte existerar. Van Lambalgen återger resonemanget i Erich Kamkes rapport till Deutsche Mathematiker Verein från 1932 [5, s.28]:

Antag att $x \in 2^\omega$ är ett kollektiv som inducerar en fördelning P med $0 < P(\{1\}) < 1$. Betrakta mängden av strikt växande följder av positiva heltal. Denna mängd kan bildas oberoende av x och bland dess element finns den strikt växande oändliga följden $\{n|x_n = 1\}$. Denna följd definierar ett tillåtet platsurval som väljer delföljden 11111..... *ur x. Därmed är x inget kollektiv, och inkonsistensen hos definitionen är bevisad.*

Van Lambalgen har tydliga invändningar mot just givna resonemang. Först och främst menar han att det förhåller sig på ett mycket okänsligt vis till von Mises intensioner, då det på ett uppenbart sätt negligerar det faktum att kollektiv *inte* kan beskrivas genom en funktion. Mängden $\{n|x_n = 1\}$ definierar *inte* ett tillåtet platsurval på x då det använder sig av förhandsinformation om värdena på elementen i x. Svårare än att avvisa detta argument, menar van Lambalgen, är det att förstå hur det en gång kunde uppfattas som övertygande. Van Lambalgen tar detta som ett typexempel på ett återkommande fenomen, nämligen avsaknaden av gemensam utgångspunkt för diskussionen mellan von Mises och oliksinnade. Kamke uppbär ett mycket strikt mängdteoretiskt perspektiv då han betraktar mängden av alla oändliga binära följder som existerande ”där ute”, tillsammans med alla sina element, ibland vilka vissa är kollektiv. Von Mises å sin sida visar klara konstruktivistiska tendenser då han betraktar kollektiven som *nya* matematiska objekt som, likt intuitionistiska urvalsföljder, ges av en *konstruktion* snarare än som ett existerande, abstrakt objekt. För Kamke är mängden $\{n|x_n = 1\}$ tillgänglig som ett tillåtet platsurval men detta kan omöjligen godtas av von Mises. Funktionen $n \to x_n$ har inte konstruerats och är därmed att betrakta som illegitim. [5, s.28-29]

Vi börjar få anledning att tro att mängdteori över lag inte är särskilt användbart i syfte att förstå von Mises idéer, utan snarare leder till att man går miste om dess förtjänster. [5, s.27] Von Mises axiomatisering erbjuder en matematisk beskrivning av en viss slags fysikaliska fenomen. Dess sanningshalt är på intet sätt självklar utan på sin höjd ett faktum grundat i

erfarenheten. Medan Kamke talar om vad som *skulle kunna hända*, talar von Mises snarare om vad som, genom en endast stegvis beskrivbar process, *faktiskt händer*.

Van Lambalgen drar slutsatsen att von Mises definition i vart fall går fri från anklagelser om rent självmotsägande. Vi kan vidare fundera över teorins metamatematiska status och blir då tvungna att ännu en gång ta dess informella karaktär i beaktan. Definitionen av kollektiv introducerar två primitiva termer: *kollektivet* och *det tillåtna platsurvalet*. Teorin kan därigenom betraktas som två i en: en *sannolikhetsteori*, för vilken det tas för givet att kollektiv är invarianta under vissa platsurval, samt en *förklaring av invariansen via ett tillåtelsebegrepp*. Strukturen hos den första delen menar van Lambalgen är klar som kristall [5, s.30] och utgör därtill, vad han kallar, en ovanligt matematiskt rigorös version av frekvenstolkningen för sannolikhet [5, s.20]. Denna kan ges en fullständig framställning i vanliga matematiska termer och gjordes så av Abraham Wald 1936.[3] Walds arbete kan betraktas som ett bevis för konsistensen hos en *kontextuell* version av teorin, för vilken verifikationen av att kollektiv verkligen är invarianta under en viss mängd platsurval måste ske empiriskt. [5, s.30]

Den andra delen, som gör anspråk på att förklara invarians under tillåtet platsurval, är mindre klar, men för den sakens skull, menar van Lambalgen, varken inkonsistent eller meningslös. Begreppet är tillräckligt klart för att kunna visa giltigheten hos flera satser med anknytning till definitionen enligt mönstret: Om Φ är ett tillåtet platsurval på x, är Ψ ett tillåtet platsurval på y. Van Lambalgen menar dessutom att denna del av teorin äger tillräcklig grad av fysikalisk rimlighet för att vidare försök till formalisering ska vara meningsfulla. [5, s.31]

I nästa avsnitt ska vi titta närmare på begreppet *tillåtet platsurval* och åter visa på distinktionen mellan en kontextuell läsning av teorin och den som gör försök att explicit konstruera kollektiven. Diskussionen kommer att leda oss rakt in i armarna på vad som brukar betraktats som den kraftfullaste invändningen mot von Mises teori: Villes konstruktion. [8, s.30]

2.3 Tillåtna platsurval

Tillåtna platsurval kan intuitivt betraktas som genomförbara spelstrategier. Om n väljs innebär det en satsning på utfallet i det n:te försöket. [5, s.25] Vi betraktar följande exempel på två olika slags spelstrategier, båda utformade för den enklaste formen av slumpspel - serier av slantsinglingar, det vill säga, kollektiv x i 2^ω:

[3] Konststycket står att finna i "Die Widerspruchsfreiheit des kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Ergebnisse eines math. Koll. 8*, (1936), 38-72.

Exempel 1. *Välj det n:te utfallet om n är ett primtal.*

Exempel 2. *Tag ett andra mynt, som antags vara helt oberoende av det första, (inte sammanlänkat med detta genom trådar, magnetiska krafter eller dylikt). Välj därefter utfallet i det n:te kastet om det andra myntet i det n:te kastet visar 1.*

Villkor (ii) i definitionen av kollektiv (s. 6) är intuitivt satisfierat i båda dessa exempel. Vi ska kalla urval av typ 1 och 2 för *laglika* respektive *slumpmässiga*. I arbetet med att göra kollektiven matematiskt respektabla kan två möjliga angreppssätt skönjas [5, s.40]:

1. Ett *a priori* begränsande av klassen tillåtna platsurval och försök att explicit konstruera kollektiv utifrån dessa.

2. Bevis för att von Mises teori är konsistent i *kontext*, det vill säga, ett rättfärdigande av antagandet att varje enskild tillämpning kan associeras med ett platsurval anpassat för tillämpningen.

I en artikel [4] från 1936 kunde Abraham Wald, som redan nämnts, visa på konsistensen hos en kontextuell version av teorin. Detta under antagandet att varje specifik beräkning använder som mest ett uppräkneligt antal platsurval. [5, s.50] Von Mises var mycket nöjd med detta resultat och sägs i senare framställningar nästan uteslutande ha förespråkat en läsning av sin egen teori genom vilken en precis definition av kollektiv utelämnades. Van Lambalgen menar att i beräkningssammanhang är en dylik instrumentalistisk tolkning tillfredsställande men i jakten på sanning och en filosofisk förklaring till sannolikhetsteorins applicerbarhet på den verkliga världen räcker den föga. Det senare kräver anspråken i tidigare tappningar av von Mises - en explicit konstruktion av kollektiven. [5, s.45-46]

Gemensamt för de flesta försök till 1 är förvissning om att ”tillåtet platsurval” ska tolkas som ”platsurval givet av en matematisk regel”. Frekvensen av försök att formulera dessa regler sjönk naturligen ganska snabbt efter att Kolmogorov 1933 publicerat sina sannolikhetsaxiom och dessa vunnit allmän acceptans. Ett undantag utgjordes emellertid av Alonzo Church som 1940 lät publicera ”On the concept of a random sequence” [5] i vilken han använde sig av den nyligen utvecklade teorin om beräkning för att tolka von Mises begrepp. [5, s.40] Enkelt uttryckt definierade han ett tillåtet platsurval som det urval som kan representeras av en rekursiv funktion som, på basis av de n första elementen i en följd bestämmer huruvida det $n+1$:a ska

[4] Har ni inte läst den än? Nåväl, det är bara att sätta igång! Det gäller alltså ”Die Widerspruchsfreiheit des kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Ergebnisse eines math. Koll. 8*, (1936), 38-72.

[5] Alltså närmare bestämt ”On the concept of a random sequence” *Bull.* AMS 46 (1940), 130-135

väljas. Slumpmässighet definierad av kollektiv i denna tappning har kallats Mises-Church-slumpmässighet och vilar på Turingtesen för beräkning [11]. I avsnitt 3.2 ska vi titta närmare på denna sats, på ett övergripande sätt bekanta oss mer med teorin om beräkning samt visa dess tillämpning i ett lite annat sammanhang. Church erbjöd alltså en matematisk tolkning av tillåtet platsurval i termer av beräkningsmässig effektivitet och vi frågar oss hur mycket, om något, som med detta var vunnet?

Att inskränka mängden tillåtna platsurval till rekursiva sådana är attraktivt på så vis att det innebär ett a priori begränsande av dessa. Van Lambalgen menar emellertid att det är osäkert huruvida klassen av rekursiva urval verkligen sammanfaller med klassen av adekvata sådana och menar att det finns argument såväl för att denna mängd är för liten som för att den är för stor. Istället tycks van Lambalgen luta åt ett förespråkande av det vi har kallat slumpmässiga urval, det vill säga urval bestämda genom någon fysisk process oberoende av den process som genererat kollektivet. Han går så långt som till att föreslå en generell konklusion: laglikhet är inte så fundamentalt som först kan tyckas. Vad som *är* fundamentalt är relationer av *fysiskt oberoende* mellan processer som genererar kollektiv och processer som bestämmer urval. En laglik urvalsregel är (så vitt vi vet) oberoende av slantsingling i denna mening, men det finns även andra urvalsprocesser. Sannolikhetsteorins rötter i den fysiska verkligheten, som von Mises teori så tydligt understryker, menar van Lambalgen, höljs i dunkel snarare än framhävs i Churchs version. [5, s.44-45] Men säg att vi (på något vis och så vitt det nu är möjligt) lyckades definiera dessa fundamentala fysiska processer som van Lambalgen talar om. Detta kanske skulle föra oss in i matematiskt trygg hamn, men skulle den vara filosofiskt nöjaktig?

Von Mises tycks ha trott att spelstrategier som kan resultera i obegränsade summor pengar måste vara sådana att de väljer delmängder vars relativa frekvenser är olik hela utfallsmängdens. Detta skulle den franske matematikern Jean André Ville emellertid visa var felaktigt. Så kallade Martingaler är spelstrategier som inte kan representeras av något platsurval. [5, s.25] Det var just i detta sammanhang som Ville introducerade Martingaler - ett sedermera centralt begrepp i spelteori. Villes konstruktion har av många ansetts som beviset för att kollektiv, hur än vi definierar platsurvalet, aldrig kan utgöra en tillfredsställande definition av slumpföljd. [10, s.2] Innan vi gör ett försök att förstå detta behöver vi veta något om sannolikhetsmått.

2.4 Ett sannolikhetsmått

Som förberedelse inför Villes konstruktion behöver definiera ett *sannolikhetsmått* på ett utfallsrum av oändliga följder samt redovisa ett måtteoretiskt

resultat av central betydelse. [6]

Följande definition gäller för ändliga mängder:

Definition 4. *En funktion μ är ett sannolikhetsmått på ett utfallsrum om:*

- *μ ger resultat i intervallet $[0,1]$, 0 för den tomma mängden och 1 för hela utfallsrummet.*
- *μ måste vara additiv, det vill säga, det måste gälla för varje familj $\{E_i\}$ av parvis disjunkta mängder att*

$$\mu(\bigcup_{i\in I} E_i) = \sum_{i\in I} \mu(E_i).$$

För att definiera ett mått på en mängd X, som inte nödvändigtvis är ändlig, ska vi anta att X är ett topologiskt rum. Måttet är endast definierat på vissa delmängder till X, inte alla, men åtminstone de öppna och ytterligare några. Exakt vilka beskrivs av begreppet σ-algebra.

Definition 5. *En σ-algebra, på en mängd X är en familj $\mathcal{A}$ av delmängder till X som är sådan att*

- *$\mathcal{A}$ är icke-tom.*
- *$\mathcal{A}$ är sluten under komplementsbildning: $E \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{A}$.*
- *$\mathcal{A}$ är sluten under uppräkneliga unioner. Det innebär att om mängderna $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ tillhör $\mathcal{A}$, så är deras union $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ också ett element i $\mathcal{A}$.*

Om $\mathcal{A}$ är en σ-algebra i X kallas ofta paret $(X, \mathcal{A})$ ett mätbart rum.

Den σ-algebra vi kommer att använda är den minsta σ-algebran som innehåller de öppna mängderna i X. Mängderna i denna kallas för *Borel*-mängder, och omfattar till exempel snitt av ett oändligt, men uppräkneligt antal, öppna mängder, liksom förstås godtyckliga unioner av öppna mängder (som ju är öppna).

Låt oss nu titta på rummet 2^{ω} som består av alla binära följder. Vi får de typiska öppna mängderna, de så kallade *basala* öppna mängderna, genom att specificera ett specifikt, ändligt antal element i följden på följande vis:

Låt $I \subset \mathbb{N}$ vara en ändlig delmängd, och $a_i \in \{0,1\}, \quad i \in I$, och sätt

$$O_{I,a} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} | x_i = a_i, \ i \in I\}.$$

[6] För den som tarvar lättillgänglig introduktion till den generella teorin om mått rekommenderas [2].

Denna öppna mängd består alltså av alla följder som på plats $i \in I$ antar värdet a_i. Nu kan vi definiera en topologi på 2^ω, genom att kräva att de öppna mängderna ska vara tomma mängden och rummet självt, samt alla mängder som är godtyckliga unioner av basala öppna mängder. Det är på Borelmängderna i denna topologi som vi ska definiera ett mått. Vi tänker oss att om $I = \{1, 2, ..., n\}$ så består $O_{I,a}$ av alla möjliga oändliga serier av slumpförsök, där resultatet i de n första är precis $a_1, a_2, ..., a_n$. Givet att sannolikheten för 0 är $1 - p$ och för 1 är p, så är sannolikheten för dessa serier precis $p^{\alpha_1}(1-p)^{\alpha_o}$, där α_0 är antalet 0 i $a_1, a_2, ..., a_n$ och α_1 antalet 1. Vi definierar alltså

$$\mu(O_{I,a}) = p^{\alpha_0}(1-p)^{\alpha_1},$$

vilket går att utvidga på ett unikt sätt, först till alla öppna mängder och sedan (via en gränsövergång) till alla Borel-mängder. [7] Vi har alltså åtminstone antytt hur man definierar ett sannolikhetsmått μ_p på mängden av alla följder 2^ω. Ett sådant mått är speciellt σ-additivt:

Definition 6. *Antag att A är en σ-algebra, och μ är ett mått definierat på mängderna i den. Om det för varje följd $A_1, A_2...$ av disjunkta mängder i A gäller att*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

säger vi att μ är uppräkneligt additiv *eller σ-additiv.*

Syftet med begreppet σ-algebra är att beskriva vilka delar av en given mängd X som går att "mäta" i någon intuitiv mening. Ett σ-additivt mått är på analogt vis en funktion som är definierad på en σ-additiv mängd och utgör en abstraktion av det intuitiva begreppet storleksmått (som mäter längd, area eller volym) på en mängd.

Definition 7. *Låt*

$$STL(p) := \{x \in 2^\omega | \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = p\}.$$

Sats 1. *(De stora talens lag).*

$$\mu_p STL(p) = 1.$$

De stora talens lag är en av den klassiska sannolikhetsteorins mest centrala resultat som alltså, uttryckt i ord, talar om att gränsvärdet för den relativa frekvensen för en viss händelse när antalen försök går mot oändligheten med säkerhet sammanfaller med den teoretiska sannolikheten för händelsen.

Allt definierande ska nu ge utdelning genom tillämpning i den av alla invändningarna mot von Mises definition som ansetts allvarligast: Villes konstruktion.

[7] Se Kolmogorovs existence theorem, s. 228 i [1].

2.5 Villes kritik

Det fullständiga utarbetandet av Villes konstruktion är mycket omfattande och jag kommer här endast i sammandrag redogöra för satsen samt i någon mån diskutera dess effekter på von Mises teori.[8]

Vi ska nu ha Stora talens lag i åtanke när det ännu en gång drar ihop sig till slantsingling. Denna gång är den teoretiska sannolikheten att erhålla krona respektive klave $p = \frac{1}{2}$. $STL(\frac{1}{2})$ är då mängden av alla oändliga resultatföljder för vilka gränsvärdet för den relativa frekvensen för, låt säga klave, är $\frac{1}{2}$. Stora talens lag talar om att denna mängd innefattar "alla" resultatföljder, det vill säga, en följd har denna egenskap med sannolikhet 1.

Definition 8. *Låt H vara någon uppräknelig mängd av platsurval $\Phi : 2^\omega \to 2^\omega$, och låt för $x \in 2^\omega$, $x \in def\Phi$ betyda att x ingår i definitionsmängden för Φ. Sätt därefter*

$$K(H,p) := \{x | \forall \Phi \in H(x \in def\Phi \to \Phi x \in STL(p))\}$$

Villes invändning grundar sig på lagen om den itererade logaritmen[9] och i synnerhet observationen av att - med stor sannolikhet - kvantiteterna

$$\sum_{j=1}^{n} x_j - np$$

oscillerar kraftigt. Konstruktionen fortskrider vidare i två steg [5, s.50]:

1. Konstruktion av en följd $x \in 2^\omega$ med följande egenskaper:

   (i) $x \in K(H, \frac{1}{2})$ (I informella ordalag: x tillhör mängden av kollektiv med avseende på mängden platsurval H och sannolikheten $p = \frac{1}{2}$)

   (ii) $\forall n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq \frac{1}{2}$ (det vill säga att x kommer att nå gränsvärdet för den relativa frekvens uppifrån, en egenskap atypisk i ljuset av lagen om den itererade logaritmen).

2. Låt oss tillfälligt anamma von Mises ståndpunkt och tolka sannolikhetsmått på 2^ω som inducerade av kollektiv $\xi \in (2^\omega)^\omega$. Att $\mu_{\frac{1}{2}} A = 1$ måste då betyda:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_A(\xi_k) = 1$$

[8] Har du intresse för detaljer men kanske mindre för det franska språket? Då kan [10] vara det rätta för dig - något så ovanligt som en engelsk översättning av Jean Villes arbete. Detta av passagen på sidorna 55-63 ur *Étude critique de la notion de collectif* (1939)

[9] Se sidan 50 [5] för dess fullständiga formulering.

Hitintills har vi endast betraktat kollektiv i 2^ω, och vi har inte talat om hur platsurval $\Psi : (2^\omega)^\omega \to (2^\omega)^\omega$, alltså sådana som bestämmer delmängder till följder av följder, ska förstås. För argumentets skull räcker det emellertid att anta att Ville har gjort detta på ett tillfredsställande vis. Vi går vidare och sätter nu:

$$A := \{x \in 2^\omega \mid \forall k \exists n \geq k : (np - \sum_{j=1}^{n} x_j) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} n \log\log n}\}$$

Därefter visar Ville följande under användning av 1:

För varje uppräknelig mängd H av platsurval $\Psi : (2^\omega)^\omega \to (2^\omega)^\omega$, existerar $\xi \in (2^\omega)^\omega$ sådant att:

(iii) ξ inducerar $\mu_{\frac{1}{2}}$ och är ett kollektiv med avseende på H och

(iv) för A definierat som ovan gäller att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_A(\xi_j) = 0$.

Vi finner skäl att undra hur ”inducerar” i (iii) ska tolkas i ljuset av (iv) då vi har definierat ”ξ inducerar P” som: för ett (mätbart) $B \subseteq 2^\omega$ är $P(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_B(\xi_j)$. (iii) säger alltså att P ska vara ekvivalent med $\mu_{\frac{1}{2}}$ men enligt (iv) är ju $P(A) = 0$. Å andra sidan är enligt lagen om den itererade logaritmen $\mu_{\frac{1}{2}}(A) = 1 \neq 0$.

Van Lambalgen menar att detta visar på att relativ frekvens inte är ett σ-additivt mått. Om P varit ett sådant mått skulle dess värde ha sammanfallit med $\mu_{\frac{1}{2}}$. [5, s.52]

Vi kan i informella ordalag förstå resultatet som bevis för att oavsett hur vi definierar termen *platsurval* och begränsar mängden av tillåtna sådana, kommer ändå intuitionsmässigt atypiska följder att finnas med i den mängd von Mises vill kalla kollektiven. Dessa består exempelvis av följder som vid gränsövergång når sitt gränsvärde ensidigt, det vill säga i vilka andelen ändliga delmängder där den relativa frekvensen ligger över gränsvärdet skiljer sig från 50%. Ville belyser onekligen ett intressant fenomen som av många har betraktats som det slutgiltiga beviset för att kollektiven aldrig kan utgöra en tillfredsställande definition av slumpföljd. Innan vi bereder denna hållning permanent plats i samlingen av våra sanningar måste vi höra vad von Mises själv, och hans trogne vapendragare, har att säga om resultatet.

Von Mises sägs ha tagit saken med ro. Han accepterade satsen och lät den till och med ingå i sina egna diskussioner av betydelsen av sannolikhet 0. [5,

s.52] Van Lambalgen betraktar invändningen som korrekt men inte särskilt allvarlig. Han menar att von Mises axiom inte är någon formalisering av begreppet slumpmässig följd för vilken ingen framgångsrik spelstrategi existerar. Snarare är axiomen tänkta att formulera egenskaper som kan ligga till grund för sannolikhetsteoretiska lagar. Dessa egenskaper har en förbindelse med "principen om den uteslutna spelstrategin" och det kan mycket väl vara så att denna sanktionerar starkare former av axiomen. Så länge axiomen är tillräkliga för härledning av sannolikhetsteorin står det emellertid likväl klart att von Mises teori fyller ett syfte. [5, s.57]

Ville kom även att bygga en positiv teori för slumpföljder genom en korrigerad version av von Mises. Förbättringarna bestod framför allt i ett utbyte av von Mises *platsurval* mot begreppet *Martingal*. Skillnaden blev, enkelt uttryckt, att medan Von Mises urval bara använde resultaten i tidigare försök för att avgöra huruvida utfallet i nästa försök skulle inkluderas eller ej, generaliserade Ville principen genom att använda tidigare resultat för att bestämma vilken *andel* av spelarens *aktuella kapital* som borde satsas i nästa försök. Istället för att bara ställa krav på delföljders relativa frekvenser krävde han alltså också av en slumpföljd att ingen genomförbar spelstrategi skulle bita på den, det vill säga att kapitalet erhållet genom varje Martingal skulle förbli begränsat. [10, s.2]

Genom att definiera slumpföljd på så vis kommer lagen om den itererade logaritmen att gälla, och ännu en av sannolikhetsteorins lagar var därmed satisfierad. Men det finns fler lagar och därmed anledning att fråga sig varför just dessa två - Stora talens lag och Lagen om den itererade logaritmen - är de enda som ska beaktas. Ville ansåg uttryckligen att valet av satisfierade sannolikhetslagar görs godtyckligt. Detta med den tråkiga konsekvensen att vi inte erhåller något *absolut* slumpmässighetsbegrepp, utan endast sådana relativt en specificerad uppräknelig mängd av egenskaper med sannolikhet noll. Problemet att matematiskt precisera begreppet om absolut slumpmässighet, som von Mises gjort anspråk på att lösa, i form av en följd besittandes alla möjliga stokastiska egenskaper, ansåg Ville vara olösligt. [5, s.33] Per Martin-Löf skulle komma att visa att han misstagit sig.

Martin-Löf menar att redan Wald lyckades överbrygga de rent matematiska problemen kring von Mises teori och att den kvarstående frågan bestod i huruvida von Mises matematiska begrepp utgjorde en adekvat idealisering av vår intuitiva idé om slumpmässighet eller inte. [8, s.30] Kan det vara så, som faktiskt även van Lambalgen antyder, att kollektiven må vara nog så trogna tjänare i sannolikhetsteorins tjänst, men kanske är till blott föga hjälp när vi vill städa i de vrår där våra egna konturfattiga intuitioner bor?

Vi har nu avverkat första etappen på vår färd och under denna sett hur

hur problemet att formulera slumpföljdens definition ursprungligen angreps och hur detta försök i sin tur angreps (enligt känt predatoriskt mönster). Långt ifrån alla frågor har besvarats, men vissa har åtminstone ställts och några av dem ska vi återkomma till i kommande avsnitt.

I nästa avsnitt ska vi fördjupa oss något i den i förhållande till frekvenstolkningen tämligen väsensskilda benägenhetstolkningen för sannolikhet. En viss inblick i denna kommer att bredda perspektiven och kanske skapa bättre förståelse för de starka meningsskiljaktigheter som uppstod. Vi ska även översiktligt betrakta beräkningsteorins framväxt och de resultat som skulle visa sig ha så viktiga konsekvenser på området. Dessa delavsnitt leder naturligt vidare till det i sammanhanget viktiga begreppet Kolmogorovkomplexitet och slumpmässighet definierat i termer av detta. Därefter är vi redo att bestiga Martin-Löfs definition i avsnitt 4.

3 Beräkningsteori och Kolmogorovkomplexitet

Vid en konferens anordnad av universitetet i Genève 1937 avgjordes slaget om universell acceptans i vilket von Mises axiomatisering av sannolikhetsteorin stod som förlorare mot Kolmogorovs måtteoretiska formalism. Van Lambalgen menar att knappt några av argumenten som fördes fram mot von Mises var giltiga. [5, s.62] Trots detta föredrog man alltså Kolmogorovs axiom som inte gjorde något försök att definiera sannolikhet explicit. Med dessa som grund åt sannolikhetsteorin försvann behovet av en definition av slumpföljd tillfälligt och i samband med publiceringen av Villes bok 1939 sågs popularitetsgraden för problemet stadigt gå mot 0. Många år senare, 1963, skulle emellertid Kolmogorov komma fram till att frekvenstolkningen i alla fall stod i behov av en precis formulering. Han publicerade en definition av slumpmässighet hos ändliga följder genom vilken begreppet Kolmogorovkomplexitet såg dagens ljus. [5, s.62]

Begreppet *Kolmogorovkomplexitet* spirar ur sannolikhetsteori, informationsteori och filosofiska aspekter på slumpmässighet med en bakomliggande idé som går att spåra ända tillbaka till Pierre Simon de Laplace och bygger på tanken om att en komplicerad värld kräver en längre beskrivning än en enkel. Efter många år i träda togs begreppet i bruk i oberoende texter av Ray Solomonoff och Andrej Kolmogorov, men brukar i samband med slumpföljder i första hand associeras med den senare. Idén är intimt relaterad till problem inom både sannolikhetsteori och informationsteori och uppstår i en slags glipa mellan omfånget av dessa discipliner och det intuitionen säger oss borde kunna förklaras. [6, s.49]

För att bli medveten om denna glipa: betrakta exempelvis något initialsegment av decimalutvecklingen på π och det faktum att inget statistiskt test man känner till kan avslöja någon form av regularitet bland dess element. Detta samtidigt som följden kan beskrivas genom det korta program som beräknar den. [6] Vi lämnas på ett liknande sätt otillfredsställda då vi ännu en gång betrakta exerciser med det gamla myntet. Om vi genom slantsingling erhåller hundra klavar på rad skulle vi utan tvekan med bestämdhet hävda att vårt mynt inte var rättvist. Klassisk sannolikhetsteori tilldelar emellertid varje utfall av hundra slantsinglingar samma sannolikhet, nämligen $\frac{1}{2^{100}}$. Den ger oss ingen möjlighet att bedöma ett utfall *efter* att det har inträffat utan kan endast uttrycka *förväntningar* på egenskaper hos utfallen av slumpprocesser. Klassisk sannolikhetsteori saknar förmåga att uttrycka *slumpmässighet hos en individuell följd*.

Det var först i och med den relativt nyligen utvecklade teorin om algoritmer blandat med vissa termer från statistiken som Kolmogorovkomplexitet och slumpmässighet i termer av sådan kunde formuleras. Komplexiteten hos ett

objekt definierades då som längden av det kortaste binära program från vilket objektet effektivt kunde konstrueras och kallades objektets *algoritmiska informationsinnehåll*. Denna kvantitet skulle visas sig vara absolut och en egenskap hos objektet ensamt. [6, s.47-48]

I detta avsnitt ges en introduktion till Kolmogorovkomplexitet och dess tillämpning på området. Som förberedelse för detta samt kommande avsnitt görs en översiktlig framställning av teorin om beräkning. Vi gav redan i 2.4 en framställning av Kolmogorovs sannolikhetsaxiom i form av definitionen av ett sannolikhetsmått. Nu ska vi formulera dessa axiom igen, på ett snarlikt men lite annorlunda och för många kanske mer välbekant vis. Detta följs av en diskussion med det främsta syftet att belysa skillnaderna mellan den från Kolmogorovs sannolikhetsaxiom utgående benägenhetstolkningen för sannolikhet och von Mises strikta frekventism.

3.1 Kolmogorov och benägenhetstolkningen

Nedan ges en informell definition av sannolikhet i enlighet med benägenhetstolkningen, följd av Kolmogorovs sannolikhetsaxiom. [5, s.20]

Definition 9. *Sannolikheten för en händelse är en fysikalisk egenskap hos de involverade materiella tingen.*

Definition 10. *Sannolikheten P för någon händelse A i utfallsrummet Ω betecknas $P(A)$ och uppfyller följande:*

(i) $P(A) \in \mathbb{R}$ *och* $P(A) \geq 0$ *där* $A \in \Omega$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) För varje uppräknelig följd av parvis disjunkta händelser $A_1, A_2, ... \in \Omega$ *gäller att*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Som sagt och synes innehåller axiomen ingen explicit definition av begreppet ”sannolikhet”, utan detta behandlas som en primitiv term. Inom den formalistiska skolan, i sann Hilbertiansk tradition, menade man nämligen att sannolikhetsteorin var i lika lite behov av en definition av slumpmässiga följder och sannolikhet i termer av dessa, som geometrin var av att punkt och rät linje definierades explicit. Begreppet slumpföljd nämnde Kolmogorov endast implicit när teorin skulle sättas i relation till den verkliga världen. Om ett experiment upprepas ett stort antal gånger under identiska förutsättningar kan man nämligen räkna ut att den relativa frekvensen för en viss händelse i ett växande antal försök kommer avvika blott försumbart

från sannolikheten för händelsen. Att beskriva försöksserien i precisa matematiska termer såg Kolmogorov till en början ingen anledning att göra. Von Mises ville emellertid definiera slumpföljder just i en absolut mening. Detta kan man inte göra med utgångspunkt från Kolmogorovs axiom eftersom dessa tilldelar varje given oändlig följd sannolikheten 0 i produktmått och varje enskild följder på så vis är lika osannolik. [8, s.13]

Van Lambalgen skriver att det inte finns någon anledning att avvika från Kolmogorovs axiom i rent matematiska underökningar. Men ur dessa härleds, strikt talat, utsagor om mått endast. Von Mises teori är användbar, och därtill nödvändig, då den erbjuder en frekventistisk tolkning av sannolikhetsteorins satser. Som vi observerat är en sådan tolkning dock inte alltid möjlig. Villes sats visade att lagen om den itererade logaritmen formulerad för oändliga följder är ett sådant exempel. Detta är en intressant iakttagelse som Lambalgen menar skulle kunna leda till ett ifrågasättande av det egentliga empiriska innehållet i vissa måtteoretiska resultat. [5, s.17]

Benägenhetstolkningen gör gällande att sannolikhet primärt är att betrakta som materiell karaktäristik - en slags fysisk *benägenhet*. Förespråkare för denna tolkning brukar mena att den har ett högre förklaringsvärde än frekvenstolkningen då den senare anses kunna härledas ur den förra genom Stora talens lag. Låt exempelvis säga att ett mynt har den materiella sannolikheten p att landa med krona upp. Stora talens lag garanterar då att mängden av utfallssekvenser som visar den relativa frekvensen p för krona har μ_p -mått 1.

Då vi betraktar fallet $p = 1$ vill vi gärna att μ_1 ska kunna tolkas som punktmåttet på rummet av följder som ger värdet 1 till alla (mätbara) mängder som innehåller den konstanta följden av 1. Det svarar mot att den enda tänkbara följden av resultat är en följd av 1. Stora talens lag är ett mycket svagare uttalande om μ_1 då den säger att mängden av följder med asymptotiskt lika många 1 som element i följden har mått 1. Den mängden innehåller många följder som även innehåller 0. För att förklara den starkare valda sannolikhetstolkningen måste i dessa specialfall en hjälphypotes anropas, som ger oss tillåtelse att anta att sannolikheter med mått 0 är sannolikheter som kan försummas som vore de en omöjlighet.

Vi ser att benägenhetstolkningen tillgriper en frekventistisk tolkning för vissa värden på sannolikheter och von Mises undrade varför man då inte lika gärna kunde tillämpa en sådan tolkning generellt. Van Lambalgen menar att hjälphypotesen är av högsta teoretiska natur och i akut behov av rättfärdigande, om än det är oklart hur ett sådant rättfärdigande skulle se ut. [5, s.20-21]

Detta visar på en viktig skillnad von Mises och Kolmogorovs läror emellan: Enligt von Mises följde existensen av gränsvärden för relativa frekvenser i kollektiv på intet sätt från Stora talens lag. Han menade att det snarare förhöll sig omvänt - det är endast om vår följd av utfall satisfierar de två villkoren för kollektiv som stora talens lag kan härledas, som ett påstående om den relativa frekvensen hos en specifik händelse. [5, s.39-40] De stora talens lag antags snarast gälla för att den utgör en rimligt idealisering av naturen som vi känner den - inte som ett måtteoretiskt gränsvärdesresultat. [5, s.37]

Vi har redan framhållit några avseenden i vilka de två axiomatiseringarna skiljer sig åt. Vi har även sett hur vissa satser, så som lagen om den itererade logaritmen, som är härledbara i Kolmogorovs system inte nödvändigtvis äger meningsfull tolkning i von Mises. Det är relevant att fråga sig i vilken mån de två axiomatiseringarna över lag leder till samma resultat. Frågan är givetvis mycket intrikat. Van Lambalgen menar emellertid att vi utifrån von Mises axiom kan reproducera i stort sett alla delar av Kolmogorovs teori som inte essentiellt använder sig av σ-additiviteten hos mått. Detta kan ske med konventionella metmatiska metoder och resulterar i påståenden om *mått*. Dessa påståenden kan vidare i vissa fall tolkas som påståenden om sannolikheter. Till de resultat von Mises axiom inte kan härleda hör de starka gränvärdeslagarna för oändliga följder. Formulerade för ändliga följder är de dock fullt härledbara ur von Mises axiom. Detta gäller för såväl stora talens lag som lagen om den itererade logaritmen. [5, s.35-36]

Men (allvarligt talat) behöver vi kollektiven? En flyktig vetenskapsevolutionär begrundan sker till måtteorins fördel - Kolmogorovs axiom är ju de facto de som nästan uteslutande används. Ett totalt avfärdande av kollektiven menar van Lambalgen dock innebär ett misstag. Man kan nämligen visa att varje person som accepterar Kolmogorovs axiom samt produktregeln för oberoende händelser, och samtidigt accepterar en tolkning av sannolikhet som relativ frekvens, med nödvändighet också i någon mening ”tror” på kollektiven. [5, s.36] På 60-talet och alltså många år efter att Kolmogorov lanserat sina måtteoretiska grundvalar för sannolikhetsteorin, kom han mycket riktigt fram till att teorin behövde kompletteras med en precis definition av relativ frekvens och uttryckte sig på följande, aningen eftergivna vis om saken (och inledningsvis syftar han på sin egen teori om sannolikhet):

”This theory was so successful, that the problem of finding the basis of real applications of the results of the mathematical theory of probability became rather secondary to many investigators. [...however] the basis for the applicability of the results of the mathematical theory of probability to real ”random phenomena” must depend in some form on the *frequency concept of probability*, the unavoidable nature of which has been established

by von Mises in a spirited manner." [6, s.50]

Ett behov av att definiera slumpföljdsbegreppet explicit hade återigen uppstått. Möjligheten att göra detta hade vid det här laget utökats. Genom bland andra Turing och Gödels förtjänster hade nämligen algoritmbegreppet, som en precis matematisk formulering av den intuitiva idén om effektiv beräkningsbarhet, definierats matematiskt och vunnit acceptans. Kolmogorov såg nu möjligheten att använda det i en definition av slumpmässig följd och på så vis tillhandahålla en än mer säker grund åt sannolikhetsteorin. Martin-Löf skriver i en artikel[10] från 1969 att denna Kolmogorovs ansats tycktes öppna för utvecklandet av en teori för slumpmässighet konsistent med von Mises intuitiva idéer. [8, s.15] Vi ska titta närmare på resultaten av denna ansats och kommer i samband med detta att konfronteras med begreppet Kolmogorovkomplexitet. Som förberedelse för detta närmande såväl som för Martin-Löfs definition av slumpföljd ges nu en översiktlig framställning av teorin om beräkning.

3.2 Beräkningsteorins framväxt

Medan de kvalitativa idéerna bakom Kolmogorovkomplexitet alltså hade funnits länge, fick de kvantitavtiv form och applicerbarhet först i och med beräkningsteorins utveckling under 30-talet. Alan Turing var en av föregångarna och tillika geniet som konstruerade en hypotetisk maskin samt troliggjorde att allt som kunde beräknas av en människa genom användning av en fix procedur också kunde beräknas av denna. Begreppet om *effektiv beräkningsbarhet* som länge hade svävat i vaghet fick på så vis en tillfredsställande definition som exakt de processer som kunde realiseras av en sådan maskin. Andra försök att formalisera begreppet, så som genom Church, Kleene och Rossers teori om rekursivt beräkningsbara funktioner, har visat sig leda till ekvivalenta definitioner. [6, s.24] Nedan följder en redogörelse för Turingmaskinen och relaterade resultat.

En *Turingmaskin* består av ett *program* i form av en ändlig tabell med regler, utefter vilka en linjär lista av celler, kallat *remsan*, manipuleras. Detta sker med hjälp av en läs- och skrivenhet kallad *huvudet*. Vi ska kalla de två riktningarna på remsan för *vänster* och *höger*. Programmet befinner sig i något tillstånd ur en ändlig mängd Q, och varje cell kan innehålla en 0, en 1 eller *vara blank* B. Tiden mäts diskret och tidsinstanserna är ordnade 0, 1, 2,..., med 0 som tiden då maskinen startar beräkningen. Vid varje tidpunkt är huvudet positionerat över någon viss cell, som den sägs *avläsa*. Vid tiden 0 är huvudet placerat över en viss cell kallad *startcellen* , och programmet befinner sig i ett visst tillstånd q_0. Vid tiden 0 innehåller alla celler B, utom en

[10] Närmare bestämt i [8].

sammanhängande ändlig serie av celler, som sträcker sig från startcellen åt höger, bestående av 0:or och 1:or. Denna binära sträng kallas programmets *input*. Maskinen kan utföra följande operationer [6, s.27-28]:

1. den kan skriva ett element från $A = \{0, 1, B\}$ i cellen den avläser och;
2. den kan flytta huvudet åt vänster eller höger.

Reglerna har formatet (p, s, a, q) där p är det nuvarande tillståndet, s är symbolen som avläses, a är nästa operation av typ (1) eller (2) som ska verkställas och q är tillståndet maskinen övergår i efter att operationen utförts. Givet en Turingmaskin och något input, utför Turingmaskinen en unikt bestämd följd av operationer, som kan determinera i ett ändligt antal steg alternativt inte göra det. Vi kan uttrycka det som att varje Turingmaskin definierar en *partiellt rekursiv*, eller *algoritmiskt beräkningsbar*, funktion. [6, s.28] Detta kan formuleras som en tes av mycket central betydelse för teorin [3]:

Sats 2. *Turing-tesen. Klassen algoritmiskt beräkningsbara funktioner (i varje rimlig intuitiv mening) sammanfaller med klassen funktioner beräkningsbara av en Turingmaskin.*

Tesen går inte att formellt bevisa men tack vare att alla de alternativa definitionerna av beräkningsbarhet som föreslagits har visat sig vara ekvivalenta med denna är den numera i det närmaste universellt accepterad.

En *universell Turingmaskin* U är en Turingmaskin som kan imitera beteendet hos vilken som helst annan Turingmaskin. Det är ett fundamentalt resultat att sådana existerar och kan konstrueras effektivt. Vi kan tänka oss följande procedur: För att U ska kunna imitera en godtycklig Turingmaskin T krävs endast att en lämplig beskrivning av T:s ändliga program och input initialt placeras på U:s remsa. U använder på så vis T:s beskrivning för att simulera T:s beteende genom en representation av innehållet hos remsan som T skulle ha producerat. Det finns oändligt många sådana U och den moderne läsaren kan med fördel betrakta dessa som det vi idag känner som programmerbara datamaskiner. [6, s.30] Som en konsekvens av ovanstående erhåller vi följande viktiga resultat [3, s.9]:

Sats 3. *Uppräkningssatsen. Det finns ett algoritmiskt sätt att räkna upp alla partiellt rekursiva funktioner. Med andra ord, det går att skapa en lista $\phi_0, \phi_1, ...$ med alla sådana funktioner, sådan att det finns en algoritmisk procedur som tar oss från ett index i till en Turingmaskin som beräknar ϕ_i, och vise versa. Genom en sådan lista, kan vi definiera en partiellt rekursiv funktion $f(x, y)$ av två variabler sådan att $f(x, y) = \phi_x(y)$ för alla x,y. En sådan funktion, och varje Turingmaskin som beräknar den, kallas universell.*

När vi nu fått något utav ordning på begreppen kring beräkningsbarhet, samt har en universell Turingmaskin att luta oss mot, är vi redo att definiera begreppet Kolmogorovkomplexitet.

3.3 Kolmogorovkomplexitet

Antag att vi vill beskriva ett givet objekt med en ändlig binär sträng. Ett objekt kan ha flera beskrivningar, men vi vill att varje beskrivning ska beskriva endast ett objekt. Det är naturligt att kalla föremål som har åtminstone en kort beskrivning för ”enkla”, och att kalla de som inte har någon kort beskrivning för ”komplexa”. Längden på den kortaste sträng som beskriver ett föremål ska vi benämna föremålets *Kolmogorov-komplexitet*. Ett exempel illustrerar idén:

Exempel 3. *Betrakta följande två 44 bit långa strängar av bokstäver ur det svenska alfabetet:*

abababababababababababababababababababab

kjhasuevaöaatsruwqwodjndbfwuasåvyåfrbzofkatc

Den första har en kort beskrivning i det svenska språket, nämligen ”ab 22 gånger”, vilket inklusive blanksteg består av 12 tecken. Den andra strängen har ingen uppenbar kort beskrivning. Det ser ut som att enklaste sättet att beskriva den är genom att räkna upp dess element ett efter ett och alltså använda 44 tecken.

I detta avsnitt undersöks idén om ett samband mellan komplexitet och grad av slumpmässighet hos följder. En förutsättning för begreppets meningsfullhet är att mängden information som beskriver ett objekt är en egenskap hos objektet endast, oberoende av beskrivningsmetoden. Vi behöver alltså komma överens om såväl en universell beskrivningsmetod som en mekanism att skapa objekt utifrån givna beskrivningar. Det är på intet sätt a priori uppenbart att detta går. Det är just resultaten i förra avsnittet som visar på den möjligheten. [6, s.93-94] I följande definition av Kolmogorovkomplexitet kan begreppen ”algoritm” och ”program” antagas ha preciserats som ovan.

Definition 11. *Betrakta mängden strängar över något ändligt alfabet. Längden n av en sådan sträng $x = \xi_1\xi_2...\xi_n$ ska betecknas $l(x)$. Låt A vara en algoritm som transformerar ändliga binära strängar p(sedda som program) till strängar $A(p)$ över något ändligt alfabet. Kolmogorovkomplexiteten hos ett element x med avseende på algoritmen A definieras som längden på det*

kortaste program som beräknar det,

$$K_A(x) = \min_{A(p)=x} l(p).$$

Om inget sådant program existerar, det vill säga att $A(p) \neq x$ för alla binära strängar p, sätter vi $K_A(x) = +\infty$.

Detta komplexitetmått ser ut att essentiellt bero av algoritmen A. Kolmogorov och Solomonoff bevisade emellertid 1964 följande [7, s.603]:

Sats 4. *Invarianssatsen. Det existerar en algoritm A sådan att det för varje algoritm B gäller att*

$$K_A(x) \leq K_B(x) + c$$

där c är en konstant som beror av A och B men inte av x.

Algoritmen A kallade Kolmogorov *asymptotiskt optimal.* [7, s.603] Vi kan betrakta A som en motsvarighet till den universella Turingmaskinen vars existens garanteras av sats 3. Algoritmen B svarar mot en funktion ϕ_k som genom något "program" D kan beräknas av A. Under inmatning av D och strängen "p" i A så kommer A beräkna det som B beräknar på input p. Det gäller alltså att:

$$K_A(x) = \min_{A(q)=x} l(q) \leq l(D, p) = c + l(p)$$

där $q = (D, p)$ och c är längden av D. Vi kan välja p sådant att $l(p) = K_B(x)$. Detta kan vi alltid göra genom att ta p som den kortaste r sådant att $B(r) = x$. Olikheten i invarianssatsen följer.

Poängen är alltså inte att den optimala algoritmen nödvändigtvis ger den kortaste beskrivningen i varje enskilt fall, men däremot att ingen algoritm given av en annan beskrivningsmetod kommer att överträffa den mer än ändligt ofta. [6, s.98] Det är komplexiteten av x med avseende på en sådan fix algoritm som vi helt enkelt ska kalla komplexiteten av x och beteckna $K(x)$.

Kommande tillämpning kräver en generalisering av invarianssatsen till en "betingad" version. Vi vill alltså beskriva komplexiteten hos ett föremål givet ett annat och definierar på följande vis begreppet *betingad komplexitet* [7, s.603]:

Definition 12. *Låt $p, x \to A(p, x) = y$ vara en algoritm över två variabler, varav p är en binär följd som kallas programmet, och x är en sträng över något alfabet, och y en sträng, möjligen över ett annat alfabet. Kvantiteten*

$$K_A(y \mid x) = \min_{A(p,x)=y} l(p)$$

kallas den betingade komplexiteten hos y givet x med avseende på A.

Det visar sig vidare, på liknande sätt som ovan att:

Sats 5. *Det existerar en algoritm A sådan att, för en godtycklig algoritm B, gäller att*

$$K_A(y \mid x) \leq K_B(y \mid x) + c,$$

där c är en konstant som beror av A och B men inte av x och y.

Återigen ska vi fixera en asymptotiskt optimal algoritm, vars existens garanteras av satsen, kalla den betingade komplexiteten av y givet x med avseende på denna för "komplexiteten hos y givet x" samt beteckna denna $K(y \mid x)$.

Det är en omedelbar konsekvens av satsen att det existerar en konstant c sådan att:

$$K(\xi_1\xi_2...\xi_n \mid n) \leq n + c$$

för varje binär sträng $\xi_1\xi_2...\xi_n$. Vi har helt enkelt betraktat komplexiteten av en sträng givet sin egen längd och valt konstanten c så att den betingade komplexitet inte överstiger summan av strängens längd n och c *för något* n. För samma c ser vi samtidigt att antalet följder av längden n för vilka

$$K(\xi_1\xi_2...\xi_n \mid n) \geq n - c$$

är större än $2^n(1 - \frac{1}{2^c})$. För varje n finns nämligen 2^n binära strängar av längden n, men bara $\sum_{i=0}^{n-c-1} 2^i = 2^{n-c} - 1$ stycken kortare beskrivningar av längd högst $n-c$. Dessa kan alltså högst beskriva $2^{n-c}-1$ strängar av längden n, och alltså är antalet strängar med längre beskrivning större än $2^n-(2^{n-c}-1) = 2^n(1 - \frac{1}{2^c})$. För stora n kommer därför en överväldigande majoritet av strängar $\xi_1\xi_2...\xi_n$ ha en betingad komplexitet approximativt lika med det maximala värdet n. Vi kommer att kalla dessa strängar inkompressibla eller mer exakt [6, s.109]:

Definition 13. *För varje konstant c säger vi att en sträng x av längden n är c-inkompressibel om* $K(x|n) \geq n - c$. [11]

Strängar som är inkompressibla (låt säga c-inkompressibla för små c) saknar mönster. Ett mönster hade nämligen kunnat användas för att reducera längden på beskrivningen. Vi har gjort den intressanta iakttagelsen att de flesta strängar besitter denna egenskap. [6, s.109] Kolmogorov föreslog just inkompressibilitet hos element som en passande formell definition av det intuitiva begreppet om dess slumpmässighet. [7, s.602-603]

Vi har nu haft chansen att dyka något djupare ner i konflikten mellan olika

[11] Betingningen använder vi alltså just för att uttrycka att det handlar om strängar av viss längd n.

sannolikhetsteoretiska paradigm, tagits med på tidsresa bland teoretiska maskiner och idéer som hjälpt till att forma världshistorien samt äntligen fått bekräftat den sedan länge kända misstanken om att det mesta är mycket komplicerat. Efter vad som närmast kan liknas vid en heldag i en matematisk upplevelsepark gäller det att inte tappa geisten inför den sista och kanske mest krävande etappen på resan. I nästa avsnitt tar Martin-Löf vid och introducerar med utgångspunkt från Kolmogorovs idéer, sitt förslag på definition av slumpmässig följd.

4 Martin-Löf och slumpmässighet genom statistiskt test

Under året 1964-1965 studerade Per Martin-Löf i Moskva under ledning av Andrej Kolmogorov och kom under denna tid att undersöka följder med hög Kolmogorovkomplexitet. Detta blev ingången till de undersökningar som skulle resultera i den sedermera överlägset mest erkända definitionen av slumpföljd. [11]

Martin-Löf utgår ifrån tanken på ett rättfärdigande av Kolmogorovs förslag på definition av slumpmässighet, och menar att detta måste bestå i ett bevis för att inkompressibla strängar besitter alla de stokastiska egenskaperna vi känner från sannolikhetsteorin. Det innebär inga svårigheter att visa att enskilda slumpegenskaper uppbärs av dylika strängar. Martin-Löf frågar sig emellertid om det finns något sätt att en gång för alla bevisa att inkompressibilitet implicerar *alla* upptänkliga (effektivt) testbara egenskaper associerade med slumpmässighet - såväl de kända som de ännu okända. Martin-Löf lånar idéer från statistiken då han inleder sina undersökningar. [7, s.604]

Värt att påpeka är att vi i fallet ändliga följder inte kan vänta oss att *skarpt* kunna skilja slumpmässiga följder från icke-slumpmässiga. Om vi betraktar mängden av binära strängar av en viss längd vore det exempelvis onaturligt att fixera ett m och säga att de följder som innehåller m nollor är slumpmässiga men hävda att de som innehåller $m+1$ nollor inte är det. [6, s.127]

4.1 Slumpmässighet hos ändliga strängar

Givet ett utfallsrum S, låt säga av alla binära strängar, en associerad fördelning P samt ett element x ur S, vill vi testa hypotesen "x är ett typiskt utfall ur S". Väljer vi ett objekt slumpmässigt tycker vi oss nämligen ha skäl att tro att det ska vara genomsnittligt och vi kan likställa denna egenskap med egenskapen att tillhöra någon rimlig majoritet, eller allra helst, befinna sig i snittet av *alla* sådana. För att kunna avgöra ett visst elements tillhörighet i någon rimlig majoritet introduceras begreppet *test* som generellt ges av följande:

Definition 14. *Ett test är en föreskrift som, givet någon hypotes, för varje signifikansnivå ϵ, talar om för oss för vilka observationer i ett försök hypotesen ska förkastas.*

Vi vill testa för vilka observationer x från S hypotesen "x tillhör majoriteten M i S" ska avfärdas. Vi har att $\epsilon = 1 - P(M)$ och sätter lämpligen

$\epsilon = 2^{-m}, m = 1, 2, ...$ vilket alltså är värdet på risken att vi förkastar hypotesen om x:s slumpmässighet fastän den är sann. [6, s.127] Testets *kritiska område* är mängden observationer för vilka hypotesen ska förkastas. Vi kan kalla det kritiska området för V_m och menar då att antalet följder av längden n som ingår i V_m är $\leq \frac{2^n}{2^m} = 2^{n-m}$. Testet bestämmer en följd V av nästade kritiska områden sådana att [7, s.605]:

$$V_m \supseteq V_{m+1}, m = 1, 2, ...$$

Följden svarar mot idén att om vi höjer noggrannheten eller kräver bättre signifikans bör vi kräva allt extremare beteende, tillfredsställt i allt mindre kretsar, för att förkasta hypotesen.

Exempel 4. *Ett test för slumpmässighet hos ändliga binära strängar bör ge negativt utslag om exempelvis den relativa frekvensen av ettor skiljer sig alltför mycket från* $\frac{1}{2}$. *Ett slumpmässighetstest för* $x = x_1x_2...x_n$ *på signifikansnivå* $\epsilon = 2^{-m}$ *kan konstrueras på följande vis:*

Låt oss sätta $f_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. *Vi bör förkasta hypotesen om x:s slumpmässighet om kvantiteten* $|2f_n - n|$ *skiljer sig alltför mycket från 0. Som bekant finns det* 2^n *olika binära strängar av längden n. Bland dessa är det en som innehåller noll ettor, n stycken som innehåller bara en etta,* $\binom{n}{2}$ *stycken som innehåller två ettor och så vidare. Det är rimligt att förkasta hypotesen om slumpmässighet hos x på signifikansnivå* $\epsilon = 2^{-m}$ *om* $|2f_n - n| > g(n, m)$ *där* $g(n, m)$ *är det minsta tal bestämt genom att olikheten ska hålla för högst* 2^{n-m} *av de möjliga strängarna. För tydlighetens skull: Betrakta fallet* $n = 6$ *och* $m = 2$. *Då är* $2^{6-2} = 2^4 = 16$. *Vi har att* $|2f_n - 6| > 0$ *då* $f_n \neq 3$ *vilket några kombinatoriska beräkningar visar är sant för 44 stycken följder. Vi prövar istället* $|2f_n - 6| > 2$ *vilket är sant för* $f_n \neq 3$, $f_n \neq 2$ *och* $f_n \neq 4$, *det vill säga för 14 stycken följder.* $14 \leq 16$ *varför vi enligt detta test kan förkasta hypotesen om slumpmässighet hos x på signifikansnivå* 25% *om den innehåller 0, 1, 5 eller 6 stycken ettor. Vi har också för övrigt att* $g(6, 2) = 2$.

Beskaffenheten hos den relativa frekvensen är emellertid bara en av många egenskaper vi vill pröva i bedömningen av en strängs slumpmässighet. Genom att använda den explicita beskrivningen av ett test som familjen av kritiska områden som uppfyller ovanstående krav kan Martin-Löf visa att mängden av alla tester är rekursivt uppräknelig. Därur följer existensen av ett universellt test, det vill säga ett test sådant att om en binär sträng är slumpmässig med avseende på detta test, så är den slumpmässig med avseende på varje möjligt test. [7, s.605] Med andra ord:

Sats 6. *Det existerar ett test U sådant att det för varje test V gäller att*

$$V_{m+c} \subseteq U_m, m = 1, 2, ...,$$

där c är en konstant som bara beror av U och V.

Vi kan definiera den *kritiska nivån* som den *minsta signifikansnivå* för vilken hypotesen förkastas. Vi sätter

$$m_V(x) = \max_{x \in V_m} m$$

Vi kan vidare fixera ett universellt test och kalla den kritiska nivån med avseende på detta för $m(x)$. Sambandet med Kolmogorovkomplexitet ges av följande [7, s.607]:

Sats 7. *Det existerar en konstant c sådan att*

$$\mid l(x) - K(x \mid l(x)) - m(x) \mid \leq c$$

för alla binära strängar x.

Sambandet troliggörs [12] genom följande: Om strängen är "slumplik" kommer $K(x \mid l(x))$ och $l(x)$ ligga nära varandra i värde. Då kommer minsta signifikansnivå för vilken hypotesen kan förkastas vara hög och $m(x)$ följaktligen litet. Om $K(x \mid l(x))$ däremot är låg kommer strängen kunna avslöjas som icke-typisk även för låga signifikansnivåer, det vill säga stora m, som i själva verket kommer att närma sig $l(x)$. (Vi har ju alltid att $m(x) \leq l(x)$ och att $m(x)$ ligger nära $l(x)$ betyder att hypotesen kan förkastas med väldigt hög precision.) Det verkar på så vis rimligt att dessa tre storheter "väger upp" varandra och att differensen mellan dem därmed är begränsad för alla x. Med detaljerna[13] utelämnade kan vi närmare bestämt leverera följande resultat [7, s.607]+[6, s.133]:

Sats 8. *Fixera en konstant c. Om en sträng är c-inkompressibel gäller att $m(x) \leq c'$, där c' är en konstant som beror av c men inte av x. På liknande vis, om $m(x) \leq c$, då är x c'-inkompressibel, där c' är en konstant som beror av c men inte av x.*

Det går alltså att finna stöd för Kolmogorovs antagande om att de icke-komprimerbara strängarna är precis de strängar som besitter egenskaperna vi förknippar med slump. Slumpmässighet i denna Martin-Löfs mening måste emellertid tolkas som slumpmässighet i den mån den effektivt kan bekräftas. Det är med andra ord en negativ definition vi just betraktat. Genom ett slags det effektiva testets filter kan vi observera vissa egenskaper förknippade med icke-slumpmässighet och per definition kalla allt som saknar dessa för slumpmässigt. Det är ett pragmatiskt sätt att nalkas problemet, som gör sig föga intimt med frågor om vilka egenskaper - fysiska eller matematiska - äkta slump har. Martin-Löfs effektiva tester talar bara om att ett objekt är slumpmässigt i varje mån vi kan, och rent principiellt alltid kommer vara begränsade till att kunna, bedöma. [6, s.13 4]

[12] För detaljerna se sidan 607-608 i [7].
[13] Som f.ö. finns på sid 133 i [6].

Så långt har endast ändliga följder behandlats, när det i första hand var oändliga vi ville undersöka. Frågan inställer sig naturligt: kan samma principer användas då vi vill definiera slumpmässighet hos oändliga följder? Det gör det i viss mån ska vi strax se då vi så sakteliga bestiger vad som brukar kallas för teorins (åtminstone) lokala extrempunkt: Per Martin-Löfs definition av oändlig slumpföljd.

4.2 Slumpmässighet hos oändliga följder

Förförisk är idén att kalla en oändlig följd θ slumpmässig om det existerar en konstant c sådan att $K(\theta_1\theta_2...\theta_n) \geq n - c$ för varje n. Stor är besvikelsen då det visar sig att sådana följder inte existerar. För följder med hög komplexitet observeras nämligen *komplexitetsoscillationer* som gör att initialsegments komplexitet saknar begränsningar. Det visar sig att initialsegment till oändliga följder oändligt ofta faller obegränsat långt under värdet av den egna längden. [6, s.136] Om vi trots detta fortsätter att hämta inspiration från det ändliga fallet och försöker hitta ett universellt test för slumpmässighet kommer vi upptäcka att ett naivt tillvägagångssätt inom ramarna för den klassiska matematiken inte heller leder någon vart.

Beakta nämligen följande: Låt åter utfallsrummet 2^ω bestå av alla oändliga binära följder. Låt vidare:

Definition 15. *$2^{<\omega}$ beteckna mängden av alla ändliga strängar av 0 och 1.*

Definition 16. *För $\sigma \in 2^{<\omega}$, beteckna mängden av alla oändliga binära följder som inleds med den ändliga följden σ med $\| \sigma \|$, det vill säga $\| \sigma \| = \{\sigma X : X \in 2^\omega\}$.*

Om likformig fördelning föreligger har vi att sannolikheten för en oändlig följd med initialsegmentet σ är $2^{-l(\sigma)}$. Inom måtteoretisk sannolikhetstradition kallas varje egenskap, så som Stora talens lag eller Lagen om den itererade logaritmen, som visat sig gälla med sannolikhet 1, för en *sannolikhetslag*. Enligt detta synsätt gäller generellt i vårt utfallsrum 2^ω med måttet μ att varje mängd $B \subseteq 2^\omega$, sådan att $\mu(B) = 1$, kan betraktas som en sannolikhetslag. Element i 2^ω som inte satisfierar lagen ”att vara ett element i B” utgör en mängd av mått noll. Det är naturligt att kalla ett element från ett utfallsrum *slumpmässigt* om det satisfierar alla sannolikhetslagar. För varje elemet $\theta \in 2^\omega$, utgör mängden $B_\theta = 2^\omega - \{\theta\}$ en sannolikhetslag. Men snittet av alla mängder B_θ med sannolikhet 1 är tom; vi har uteslutit varje enskild följd och därmed hela utfallsrummet. Således är *ingen* oändlig följd slumpmässig om vi kräver av en sådan att den ska satisfiera alla sannolikhetslagar som ”finns”. [6, s.140]

Det visar sig att det är ett konstruktivt förhållningssätt som tar oss förbi nyss ifallna fällor. I praktiken är nämligen alla lagar som är bevisade inom sannolikhetsteorin effektiva ur beräkningssynpunkt. Vi kan kräva av en sannolikhetslag att den är partiellt rekursiv, vilket innebär att det effektivt går att testa huruvida den håller. Mängden oändliga slumpföljder kan då definieras, inte som snittet av *alla* mängder med mått 1, utan som snittet av alla s.k. *effektiva* mängder med mått 1 som är givna så att säga *"rekursivt uppräkneligt"*(Se definitionen nedan.) (Mängden $B_\theta = 2^\omega - \{\theta\}$, för varje följd θ, är överuppräknelig [9, Thm 2.14], ochh det är lätt att se att den inte är effektiv.) På så vis erhåller vi en enda effektiv beskrivning av slumpmässighet i form av "egenskapen att satisfiera alla effektiva sannolikhetslagar". Det gör den oändliga följden med sannolikhet 1. [6, s.140]

Martin-Löfs grundläggande idé var just att formulera en abstrakt definition av ett statistiskt test för slumpmässighet, och kräva av en slumpföljd att den passerade *alla* sådana tester. Detta kunde åstadkommas genom en effektivisering av begreppet *nollmängd*. [3, s.231]

Låt oss stiga in i Cantorrummet 2^ω och låt oss definiera:

Definition 17. *För $\sigma \in 2^{<\omega}$ säger vi att $\| \sigma \|$ är en basal öppen delmängd till 2^ω och definierar ett mått genom $\mu(\| \sigma \|) = 2^{-l(\sigma)}$.*

Varje öppen delmängd till Cantormängden är unionen av en uppräknelig följd av basala disjunkta öppna mängder. Måttet av en öppen mängd är summan av måtten av mängderna i någon sådan följd. En *effektiv* öppen mängd är en öppen mängd som utgörs av unionen av en följd av basala öppna mängder, bestämda genom en rekursivt uppräknelig följd av binära strängar. En *konstruktiv nollövertäckning* eller *effektiv mått-noll-mängd* är en rekursivt uppräknelig följd U_i av effektiva öppna mängder sådana att $U_{i+1} \subseteq U_i$ och $\mu(U_i) \leq 2^{-i}$ för varje naturligt tal i. Varje nollövertäckning bestämmer en mängd C med mått 0, nämligen skärningen av mängderna U_i. [1, 11] C är en nollmängd som innehåller följder med någon ovanlig egenskap som gör att de inte bör betraktas som slumpmässiga. En följd definieras därför som Martin-Löf-slumpmässig om den inte ingår i någon sådan mängd C, bestämd av en konstruktiv noll-övertäckning. [3, s.231] Vi kan kalla nollövertäckningen för *test* och göra följande lite mer formella omtag [3, s.74]:

Definition 18. *För $W \subseteq 2^{<\omega}$, låt $\| W \| = \bigcup_{\sigma \in W} \| \sigma \|$.*

Definition 19. *En öppen mängd $A \subseteq 2^\omega$ är en effektiv öppen mängd om det finns en rekursivt uppräknelig mängd $W \subseteq 2^{<\omega}$ sådan att $A = \| W \|$.*

Definition 20. *(i) Ett Martin-Löf-test är en följd $\{U_n\}_{n \in \omega}$ av effektiva, öppna mängder sådana att $\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ för alla n.*

(ii) En mängd $C \subset 2^\omega$ är Martin-Löf-noll om det finns ett Martin-Löf-test $\{U_n\}_{n\in\omega}$ sådant att $C \subseteq \bigcap_n U_n$.

(iii) En följd $A \in 2^\omega$ är Martin-Löf-slumpmässig om $\{A\}$ inte är Martin-Löf-noll.

Det följer från i) att vi kan anta $U_0 \supseteq U_1 \supseteq ...$. Givet ett Martin-Löf-test $\{U_n\}_{n\in\omega}$, låt $V_n = \bigcup_{m>n} U_m$. Då är nämligen $\{V_n\}_{n\in\omega}$ ett Martin-Löf-test, $V_0 \supseteq V_1 \supseteq ...$, och $\bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n$.

Följder som är Martin-Löf-slumpmässiga uppfyller alltså alla sannolikhetsteorins (effektiva) lagar. Speciellt kan vi se att mängden av alla följder som inte satisfierar stora talens lag är Martin-Löf-noll. På liknande sätt gäller, för varje beräkningsbar urvalsfunktion f , att klassen av mängder vars utvalda delmängder inte satisfierar stora talens lag är Martin-Löf-noll. Alla följder som är Martin-Löf-slumpmässiga är alltså slumpmässiga i von Mises-Churchs mening. Det omvända är dock inte sant. Vi kan exempelvis konstruera ett Martin-Löf-nollmängd som innehåller följderna uppmärksammade av Ville. [3, s.232]

Definition 21. *Ett Martin-Löf-test $\{U_n\}_{n\in\omega}$ är universellt om $\bigcap_n U_n$ innehåller varje Martin-Löf-nollmängd, med andra ord, för varje Martin-Löf-test $\{V_n\}_{n\in\omega}$, gäller att $\bigcap_n V_n \subseteq \bigcap_n U_n$.*

Glädjande nog gäller även att [3, s.233]:

Sats 9. *Det existerar ett universellt Martin-Löf-test.*

Bevis. Låt $\{R_n^0\}_{n\in\omega}$, $\{R_n^1\}_{n\in\omega}$,... vara en effektiv uppräkning (finns enligt sats 2.12 i [9]) av alla (likformigt) rekursivt uppräkneliga delmängder till $2^{<\omega}$. Låt S_n^i vara resultatet av att räkna upp R_n^i och sluta uppräkningen då måttet av $\| R_n^i \|$ hotar att överstiga 2^{-n}. (Det vill säga utelämna R_n^i i uppräkningen om $\| R_n^i \| > 2^{-n}$ och skippa R_m^i för $m > n$.) Då är $\{\| S_n^0 \|\}_{n\in\omega}$, $\{\| S_n^1 \|\}_{n\in\omega}$,... en effektiv uppräkning av alla Martin-Löf-test. Låt $U_n = \bigcup_i \| S_{n+i+1}^i \|$. Då är U_n en effektiv öppen mängd och

$$\mu(U_n) = \sum_i \mu(\| S_{n+i+1}^i \|) \leq \sum_i 2^{-(n+i+1)} = 2^{-n},$$

så att $\{U_n\}_{n\in\omega}$ är ett Martin-Löf-test. För varje Martin-Löf-test $\{V_n\}_{n\in\omega}$, finns ett i sådant att $V_n = \| S_n^i \|$ för alla n. Då gäller att $V_{n+i+1} \subset U_n$ för alla n, så att $\bigcap_n V_n \subset \bigcap_n U_n$. □

Det *finns* alltså enligt Martin-Löf, mot Villes förmodan, *ett enskilt* statistiskt test som indikerar slumpmässighet hos individuella objekt. Testet som konstrueras i beviset är just ett sådant. [3, s.233]

4.3 Ekvivalenta karaktäriseringar

Martin-Löfs definition beskrivs ofta som det första lyckade försöket att matematiskt fånga intuitionen bakom slumpmässig följd och är ännu idag - ett halvt sekel efter sin tillkomst - den mest välkända, erkända och använda. Populariteten har, i vart fall delar av sin förklaring i den rika och lätthanterliga matematiska teori definitionen låter oss utveckla. [3, s.226] Det har bland annat visat sig att den går att härleda ur flera till ytan tämligen olika intuitiva förhållningssätt till problemet. Detta brukar betraktas som evidens för att Martin-Löf verkligen formulerat en fundamental egenskap hos matematiken snarare än en tillfällighet i hans ursprungliga modell. [11] Tre huvudsakliga intuitiva karaktäriseringar av slumpföljd brukar urskiljas och vi har redan stiftat bekantskap med dem alla. Jag kommer nu att räkna upp dem samt antyda hur ekvivalensresultaten erhållits och hoppas att på så vis skänka läsaren viss känsla av vetenskaplig harmoni.

Icke-komprimerbarhet
Slumpmässig är den följd vars initialsegment alla är svåra att beskriva, eller ekvivalent, att komprimera. Detta är intuitionen bakom Kolmogorovkomplexitet som slumpmässighetsmått. Vi har redan studerat sambandet för ändliga följder samt upptäckt att ett sådant inte är lika lätt att upprätta för oändliga. Relativt nyligen har detta dock åstadkommits medels såväl enkel komplexitet - det vi har använt - som så kallad *prefixfri*.[14] På så vis har det på senare år gått att upprätta en koppling mellan inkompressibilitet och Martin-Löf-slumpmässighet även hos oändliga följder. [3, s.227]

Måtteoretisk typiskhet
Slumpmässiga följder ska inte ha några ”effektivt ovanliga” egenskaper. Detta var ledordet bakom Martin-Löfs ursprungliga definition som vi just studerat och sammanfaller med den stokastiska paradigmen: en slumpföljd ska passera alla statistiska tester för slumpmässighet. [3, s.226]

Oförutsägbarhet
Detta är kanske den karaktärisering av slumpmässighet som känns allra mest intuitivt naturlig för de flesta. Det som är slumpmässigt ska vara omöjligt att förutse. På så vis ska det exempelvis, även om man vet alla tidigare utfall i en serie slantsinglingar, vara omöjligt att förutse nästa. Det ska, med andra ord, vara omöjligt att vinna mot en slumpföljd i ett hederligt vadslagningsspel med en (algoritmiskt) genomförbar spelstrategi. Detta var den intuition som von Mises utgick ifrån och som utvecklades av bland andra Ville till att forma teorin om Martingaler. De senare kan betraktas just som spelstrategier och det går att visa att de följder som är Martin-Löf-slumpmässiga är precis de som ingen martingal biter på, med andra ord, de följder för vil-

[14] Se exempelvis [3] sidan 227 och framåt för mer om detta.

ka en spelare kan göra obegränsade intäkter under användningen av någon martingal är Martin-Löf-noll. [8, s.33]

Och med detta sagt är det gjorda gjort och det har blivit tid för att sammanfatta, fylla i utvärderingar, se bakåt utan ånger och framåt utan fruktan. Vänd nu med fördel blad.

5 Resumé

Vi har just betraktat två av de enskilt största händelserna på området slumpföljdens definition: von Mises imponerande tidiga initiativ och Martin-Löfs revolutionerande nydaning. Som vi väl märkt är det svårt att göra en matematiskt rigorös jämförelse de två definitionerna emellan då de är av så pass skilda slag gällande såväl utgångspunkt som formell struktur. Jag gör på intet sätt anspråk på att ha genomfört en dylik jämförelse. I stället har jag låtit respektive teori blomma i sin egen rabatt medan jag ägnat mig åt vissa blygsamma utgrävningar kring respektive definitions filosofiska rötter. Min förhoppning är att detta har visat på de grundvalsmässiga ställningstaganden som ligger till grund för möjliga lösningar av problemet samt på två olika sätt att göra dessa val och med dessa höjda som vapen nalkas tämjandet av slumpens långsträckta best. Nedan sammanfattas vad som framkommit.

Von Mises ambition var att med utgångspunkt från kollektiven erbjuda en axiomatisering av frekvenstolkningen av sannolikhet tydligt blottläggande alla antaganden som ligger till grund för varje tillämpning av en sådan teori, speciellt gäller detta nödvändigheten av att de massfenomen på vilka teorin är applicerbar kan representeras av kollektiv. Man kan mena, vilket van Lambalgen gör [5, s.58-59], att han i det väsentliga lyckades med detta om det för ett rättfärdigande av detta anspråk räcker att acceptera en kontextuell version av teorin, exempelvis i Walds tappning. Att låta kollektiv explicit definiera begreppet slumpföljd har en intuitiv lockelse i all sin (låt så vara inbillade) överblickbarhet. Vi har dock sett att det är oklart hur tillåtet platsurval ska tolkas matematiskt och att så ännu ej gjorts på tillfredsställande vis. [5] Därtill har de flesta menat att Villes konstruktion en gång för alla visat att, oavsett hur urvalsmetoden preciseras kommer mängden av följder definierade genom dessa aldrig i sin helhet uppfylla alla sannolikhetsteorins gränsvärdeslagar. Om detta är ett krav som vi med nödvändighet ställer på slumpföljder förefaller von Mises förslag, så som definition av dessa, falla mot marken. Faktum kvarsår dock, vilket van Lambalgen tydligt poängterar och vi även sett exempel på, att delar av den kritik som riktats mot von Mises var orättfärdig då den förhåller sig okänslig gentemot hans intentioner och baseras på grundvalsmässiga hållningar som inte var hans. [5, s.14]

Martin-Löfs ger under tillämpning av rekursionsteori en definition av effektivt statistiskt test för slumpmässighet. [5, s.92] Kravet om följdens uppfyllande av detta test utgör en matematiskt rigorös definition av slumpmässighet och vi har just sett att denna definition, i all sin pragmatiska enkelhet, kan härledas ur flera olika filosofiska karaktäriseringar av problemet. Oaktat detta kan det vara intressant att reflektera över att den måtteore-

tiska sannolikhetslära i vilken Martin-Löf fann sin utgångspunkt, och som en överväldigande majoritet av matematiker ända sedan slutet av 30-talet och ännu idag mer eller mindre medvetet anammat [5, s.20], inte alltid har stått ensam på scenen.

Van Lambalgen föreslår för övrigt att måtteoretisk sannolikhetsteori och von Mises frekventism står i ett liknande förhållande till varandra som klassisk matematik till konstruktiv; det är inget fel i att bedriva klassisk matematik men en översättning av erhållna resultaten i konstruktiva termer kan ge ökad förståelse för vad dessa verkligen betyder. På samma sätt, menar van Lambalgen, skulle varje slutledning av måtteoretiskt slag idealiskt, i den mån det är möjligt, följas av en i termer av frekvenser. [5, s.58]

Slumpföljder presenteras av von Mises i första hand i syfte att skapa en stabil och säker grund åt sannolikhetsteorin. Martin-Löf utgick från idéerna kring Kolmogorovkomplexitet och kom att definierade slumpföljder i statistiskt snarare än probabilistiskt. [5, s.64] Martin-Löfs definition av slumpföljd har ofta i litteraturen beskrivits som en ren förbättring av von Mises. Genom att i någon mån tydliggöra skillnaderna i motivation och respektive definitions bakomliggande teori om sannolikhet har vi försökt att försätta denna uppfattning i ett något mer nyanserat tillstånd.

Det är hög tid att återknyta till de aprioriska argumenten mot den blotta möjligheten att över huvud taget ge en definition av slumpföljd. Dessa gavs i inledningen och lydde:

- Så fort slumpmässighet kan definieras, upphör det att vara äkta slumpmässigt.
- Slumpmässighet är en egenskap hos en process, inte hos följder producerade genom sådan process.
- Det är karaktäristiskt för slumpprocesser att de kan generera vilken följd som helst.

Intuitionen bakom det matematiska begreppet om slumpmässighet grundar sig på föreställningen om strukturer som saknar mönster men väl innehåller regelbundenheter i form av exempelvis gränsvärden för relativa frekvenser, eller mer generellt, uppfyllandet av statistiska lagar. Det finns ingen anledning att tro att denna intuition inte lämpar sig för en matematisk beskrivning. Emellertid skulle vi kunna tänka oss oförutsägbarhet som slumpmässighetens enda utmärkande egenskap och utifrån denna föreställning definiera slumpföljder just som de följder i vilka vi inte finner några som helst regelbundenheter. Detta sätt att betrakta slumpmässighet, så som total avsaknad av lagbudenhet, utgör ytterligare ett sätt att negativt definiera

fenomenet och tycks vara det som de aprioriska argumenten härstammar ur.

Resan närmar sig sitt slut. Trötta och med lagom svidande hud packar vi för hemfärd. Nu ska all intellektets hemlängtan stillas och intryck smältas. Kanske upplevs mitt i allt besvikelse - resan tog ju slut när den just börjat. Som vanligt sköt vi upp souvernirhandlandet till sista dagen då det, som alltid, visade sig att affärerna var stängda. Lättade inser vi att det vi bär med oss från denna resa i första hand är av immateriellt, och därtill oförstörbart slag och ändå inte hade kunnat köpas för pengar. Under den skakiga bussresan mot flygplatsen tar vår guide, tagen av stundens allvar, till orda:

Vi står nu vid vägs ände - eller kanske snarare på en i transversalplanet ständigt expanderande ruta ett. I likhet med många matematiska projekt har detta drivits av önskan om att i entydiga termer beskriva våra intuitioner kring ett begrepp. Först då tror vi att vi förstår det fullt ut och endast då kan vi jämföra det med andra begrepp. Tillika rörande som storslagen är denna människans strävan och hopp om att detta arbete ska resultera i en sammanhängande och allra helst sann världsbild. Varje dag är slumpen närvarande och skänker såväl ovisshetens förhoppningar som hot åt de liv vi tror att vi själva väljer. Slumpföljden ringlar genom mångfalden av möjligheter. Dess definition följer efter hack i häl.

6 Referenser

[1] Billingsley, P. The convergence of probability measures, Wiley 1968.

[2] Chandalia, G. A gentle introduction to Measure Theory, Department of Computer Science and Engineering, University of Buffalo, NY 2007. `http://webbuild.knu.ac.kr/~trj/Analysis/Chandalia.pdf`

[3] Downey, R.G., Hirschfeldt, D.R. Algorithmic Randomness and Complexity, Springer 2010.

[4] Hacking, I. The Emergence of Probability, Cambridge UP 1975.

[5] van Lambalgen, M. Random sequence, Ter verkrijging van de graad van doctor, De Universitet van Amsterdam, Amsterdam 1987.

[6] Li, M., Vitányi, P. An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications, Springer 1997.

[7] Martin-Löf, P. The Definition of Random Sequences, Avdelningen för matematisk statistik, Stockholms Universitet 1966.

[8] Martin-Löf, P. The Literature on von Mises': Kollektivs Revisited, Theoria Volym 35 sidan 12-37, Wiley-Blackwell 1968.

[9] Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed. Wiley 1964.

[10] Ville, J. A Counterexample to Richard von Mises's Theory of Collectives, En översättning av Glenn Shafer av Étude critique de la notion de collectif sidan 55-63 1939, 2005.

[11] Wikipedia "Randomness" Ja nu är det så, ni har liksom inte rest med Globetrotter!