SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Arkimedes—Sandräknaren

av

Rebecka Wahlström

2012 - No 16

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Arkimedes—Sandräknaren

Rebecka Wahlström

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Christian Gottlieb

2012

Sammanfattning

Arkimedes nöjer sig inte med att räkna ut hur många sandkorn som får plats på jorden, om alla ihåligheter skulle vara fyllda till samma höjd som det högsta berget, utan ägnar sig åt att beräkna den mängd av sandkorn som får plats i hela universum. Det väsentliga med hans arbete är att visa att det går att uttrycka stora tal relativt kort, och ser det som ett försök till att utveckla det grekiska talsystemet.

I denna uppsats får vi följa med Arkimedes i hans beräkningar och se hur han utförde vissa experiment, samtidigt som vi kopplar det till den moderna symboliken. Det presenteras även idéer på hur Arkimedes kan ha tänkt inom de avsnitt i arbetet som vi anser vara ganska oklara.

Innehåll

1. Inledning

Arkimedes är nog mest känd för upptäckten av *Arkimedes Princip*, som beskriver den kraft som påverkar ett föremål som sänks ner i en vätska, men han författade också många andra verk. Det är många som betraktar Arkimedes som den största av antikens matematiker och dessutom som en av de största matematikerna genom tiderna.

Vi är inte helt säkra på när Arkimedes föddes, men cirka år 287 f. kr, på Sicilien. Där levde och verkade han i den grekiska kolonin Syrakusa. Historierna om Arkimedes är många, och speciellt angående hans död. Det sägs att romarna, under befäl av generalen Marcellus, invaderade Syrakusa år 212 f. kr. Marcellus hade gett order om att Arkimedes skulle tas med levande, men när de romerska soldaterna stormade in i hans hus satt Arkimedes och grubblade över en figur han ritat på en sandtäckt bricka. Han vägrade uppge sitt namn och skrek: ”Rubba inte mina cirklar!”. Då högg soldaterna ner honom.

På hans tid hade man en geocentrisk världsbild på universums uppbyggnad, det vill säga att jorden befann sig orörlig i centrum medan solen och planeterna rörde sig i banor runt om. Det är den här världsbilden som Arkimedes arbete grundar sig i, och som han kallar för kosmos. Kosmos är ett ordnat system som betyder samma sak som vårt solsystem, fast ser då annorlunda ut på grund av den geocentriska världsbilden. Däremot presenterar Aristarkos från Samos under ungefär samma tid en hypotes som anses vara en heliocentrisk världsbild. Han pratar om fixstjärnornas sfär och här befinner sig solen i centrum och är orörlig, liksom fixstjärnorna, medan alla planeter rör sig i banor runt om. En fixstjärna är en stjärna, där solen inte räknas in, som inte verkar röra sig i förhållande till andra stjärnor på natthimlen. Fixstjärnornas sfär blir då det som vi kallas för hela universum. Fast Aristarkos uttalade grundidén till den heliocentriska världsbilden så var det inte förrän i början av 1500-talet som Nikolaus Kopernikus kullkastade den geocentriska världsbilden och framställde i ett stort arbete de vetenskapliga stöden för det heliocentriska systemet, som några av föregångarna spekulerat om på goda men opassande grunder. Men eftersom Arkimedes arbete går ut på att visa att det går att uttrycka stora tal relativt kort, och skulle han räkna ut hur många sandkorn som fick plats i det han kallar för universum så kunde han lika gärna visa att det gick att uttrycka den sandmängd som får plats i fixstjärnornas sfär, då Aristarkos visade att den var mycket större än hans universum.

2. Begrepp

Nu går vi över till att använda Arkimedes begrepp och eftersom han inte använder samma begrepp som vi gör i modern tid ska vi förklara de olika uttrycken mer ingående. Vi har redan nämnt och diskuterar några begrepp, men då de är så pass viktiga för att förstå hans arbete tar vi dem igen.

2.1 Kosmos

I allmän mening är kosmos ett ordnat och harmoniskt system. Det kommer från den grekiska termen κόσμος (kosmos), som betyder "ordning" eller "ornament"[1], och är motsats till begreppet kaos. Det ordnade systemet som Arkimedes pratar om är med andra ord solsystemet, som inte ser likadan ut nu som på hans tid på grund av den geocentriska världsbilden.

2.2 Fixstjärnornas sfär

De fixerade stjärnorna är en gammal benämning på de himlakroppar som inte verkar röra sig i förhållande till andra stjärnor på natthimlen. Arkimedes hade en geocentrisk världsbild av solsystemet, där jorden ligger i centrum med alla planeterna rörande sig i banor runt om. En fixstjärna är med andra ord en stjärna, där solen inte räknas in. Fixstjärnornas sfär blir då det som vi kallas för hela universum.

2.3 Myriad

Myriad, förkortas med ett M, och har olika betydelser. Myriad betyder egentligen ett antal av 10 000, men kan också förstås som ett mycket stort och oräknelig mängd. I detta arbete kommer vi att fokusera på den första betydelsen, då myriad betyder talet 10 000.

2.4 Fingerbredd

Bredden över den smala sidan av ett finger, vanligtvis långfingret, och därmed varierar dess mått.

2.5 Stadion/Stadier

Stadion är ursprungligen ett antik grekisk längdmått, där måttet varierade.

[1] http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.04.0057%3Aentry%3Dko%2Fsmos (κόσμος, Henry George Liddell, Robert Scott, A Greek-English Lexicon, on Perseus)

1 gammalgrekisk stadion = 184.00 meter

1 grekisk-romersk stadion = 179.00 meter

1 olympisk stadion = 192.00 meter[2]

[2] http://dblex.com/konvertera/?storhet=L%E4ngd

3. Arkimedes syfte

Arkimedes utgår från litterära fakta om att det finns oändligt många sandkorn, och förvandlar det till matematik. Han utgår från vad tidigare astronomer, bland annat hans far Feidias och Aristarkos från Samos, har åstadkommit som en slags utgångspunkt till hans eget arbete.

3.1 Brevet till kung Gelon

”Det finns några, kung Gelon, som anser att sandkornens antal är oändligt stort. Då jag talar om sand menar jag inte bara den som finns i Syrakusas omgivningar och på Sicilien i övrigt, utan också den som förekommer i alla andra trakter på jorden, bebodda eller obebodda. Sedan finns det andra som visserligen inte anser att detta tal är oändligt, men ändå tror att det inte går att nämna ett tal som är så stort att det överstiger sandens mängd. Och klart är att de som hyser denna uppfattning, om de föreställde sig en sandmassa som vore lika stor som jordens massa och som i sig inneslöt alla jordens hav och håligheter fyllda till samma höjd som de högsta bergen, ännu mindre skulle gå med på att man kunde uttrycka något tal som översteg den så uppfattade mängden av sand. Men jag skall med hjälp av geometriska bevis, vilka du lätt kan följa, försöka visa dig att somliga av de tal jag nämnt och återgivit i det arbete jag sänder till Zeuxippos överstiger inte bara mängden av den sandmassa som är lika stor som jorden utfylld så som jag beskrivit, utan också mängden av en sandmassa som är lika stor som universum. Nu vet du ju att ’universum’ är det namn som de flesta astronomer givit den sfär vars medelpunkt är jordens medelpunkt och vars radie är lika med den räta linjen mellan solens medelpunkt och jordens medelpunkt. Detta är den vanligaste beskrivningen, som du lärt av astronomerna. Men Aristarkos från Samos gav ut en bok med några hypoteser, i vilka premisserna ledde till det resultat att universum är många gånger större än det som nu kallas så. Hans hypotes går ut på att fixstjärnorna och solen förblir orörliga, att jorden kretsar runt solen längs omkretsen av en cirkel med solen i banans mitt, och att fixstjärnornas sfär, belägen kring samma medelpunkt som solen, är så stor att den cirkeln, längs vilken han antager att jorden kretsar, står i samma proportion till fixstjärnornas avstånd som sfärens medelpunkt till dess yta. Nu är det lätt att inse att detta är omöjligt; ty, eftersom sfärens medelpunkt saknar storlek, kan vi inte föreställa oss att den står i något som helst förhållande till sfärens yta. Vi måste emellertid antaga att Aristarkos menar följande: Eftersom vi föreställer oss att jorden skulle vara universums medelpunkt, är det förhållande vari jorden står till det vi beskriver som ’universum’ detsamma som förhållande vari den sfär som innehåller cirkeln längs vilken han antager att jorden kretsar står till fixstjärnornas sfär. Ty han genomför bevisen av sina resultat med en hypotes av denna art, och i synnerhet tycks han antaga att storleken av den sfär, vari jorden enligt hans framställning rör sig, är lika med det vi kallas 'universum'.

Jag påstår då att, även om sanden fyllde en sfär lika stor som Aristarkos antager fixstjärnornas sfär vara, jag likväl skall bevisa att somliga av de tal som finns nämnda i mina *Principer* i storlek överträffar den sandmängd som är lika stor som den ovannämnda sfären, förutsatt att följande antaganden göres:

1. *Jordens omkrets är omkring 3 000 000 stadier, och icke större.*

Somliga har visserligen, såsom du naturligtvis vet, försökt bevisa att sagda omkrets är omkring 300 000 stadier. Men jag går ännu längre, och, i det jag sätter jordens storlek tio gånger större än mina föregångare föreställde sig den, antager jag att dess omkrets är omkring 3 000 000 stadier, och icke större.

2. *Jordens diameter är större än månens diameter, och solens diameter är större än jordens diameter.*

I detta antagande följer jag de flesta av de äldre astronomerna.

3. *Solens diameter är omkring 30 gånger månens diameter, och icke större.*

Bland de äldre astronomerna förklarade Eudoxos att den var omkring nio gånger så stor och Feidias, min fader, tolv gånger, medan Aristarkos försökte bevisa att solens diameter var mer än aderton men mindre än tjugo gånger så stor som månens diameter. Men jag går till och med längre än Aristarkos, på det att sanningen i mitt påstående må kunna fastslås utom varje tvivel, och jag antager att solen diameter är omkring trettio gånger så stor som månen, och icke större.

4. *Solens diameter är större än sidan av en kilogon inskriven i den största cirkeln i universum(s sfär).*

Jag grundar detta antagande på att Aristarkos upptäckte att solen tycktes vara omkring $^1/_{720}$ av djurkretsen, och på att jag själv, med en metod som jag nu skall beskriva, har försökt att på experimentell väg finna den vinkel över vilken solen sträcker sig och som har sin spets i ögat."

Vi ser att brevet som finns översatt till svenska i Sigma band 4, se [1] kapitel 1, använder sig av ordet universum som refererar till kosmos, och alltså inte till fixstjärnornas sfär. Hädanefter kommer vi att enbart använda oss av kosmos och fixstjärnornas sfär för att undvika förvirring. Brevet finns också översatt till engelska i E. J. Dijksterhuis bok, se [2] kapitel 13 avsnitt 3, och i Thomas L. Heaths bok, se [3] sid 221-223.

3.2 Arkimedes syfte

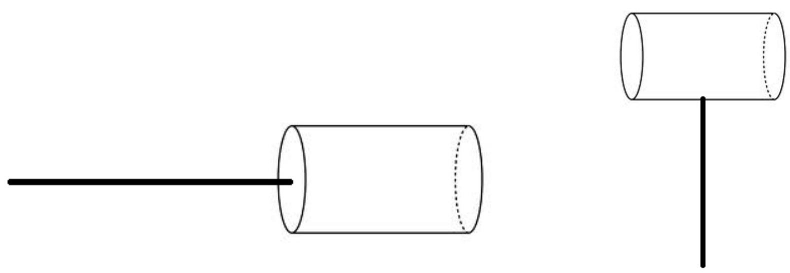
Varför Arkimedes valde att skriva till kung Gelon har troligtvis att göra med att Kung Gelon tillhörde Arkimedes kontaktkrets och dessutom tillhörde det kungliga huset av Arkimedes hemmastad Syrakusa. Gelon kan också ha varit bekant med populära skrifter om kosmologi, kanske mer astrologiska än astronomiska, och kanske Arkimedes då valde en utgångspunkt som var bekant för dem båda. Men arbetet består i både teoretiska diskussioner som praktiska observationer inom både matematik och astronomi, och på den tiden var matematik och astronomi knappt skilda som två olika genrer. Astronomerna på hans tid trodde på ett ändligt universum som begränsas av fixstjärnornas sfär, se mer utförligt i Rudolf von Erhardt och Erika von Erhardt-Siebolds tidskrift [4]. Fast sandräknaren var menat som ett bidrag till den grekiska aritmetiken, så är det inte mindre värdefullt som ett dokument inom det astronomiska området. Arbetet är av grundläggande betydelse för grekisk matematik, av läsning och skrivning av stora tal. Det är med andra ord viktigt inom det lingvistiska området så som i den matematiska symbolikens område. För det matematiska notationen var det inte så stora problem med tal upp till en myriad, det kunde skrivas med de små bokstäverna av alfabetet. Men att uttrycka större tal gav mycket komplicerade uttryck. Även språkligt medför det avsevärda problem redan för tal upptill en myriad myriader, MM. Arkimedes ville föreslå en så effektiv lösning till problemet, så att även stora tal ska kunna uttryckas relativt kort. Arbetet är alltså ett försök i att förbättra det grekiska talsystemet, men Reviel Netz diskuterar flera mål med Arkimedes arbete i hans artikel [5]. Därför väljer han ett exempel av astronomiska mått och den astronomiska uppgiften är som bäddad för den matematiska uppgiften; att bestämma hur många sandkorn som får plats i kosmos.

4. Utförande och bevis

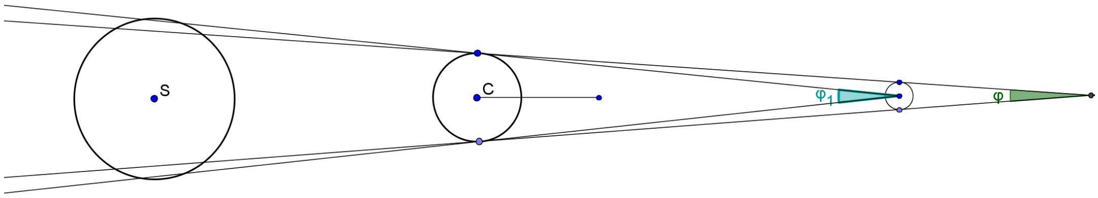
Vi kommer nu till det mest matematiska kapitlet där vi ska genomföra ett bevis för Arkimedes 4:e antagande, som egentligen är en sats. Hädanefter betraktar vi Arkimedes fyra antaganden som tre antaganden och en sats. Vi ska sedan beräkna kosmos diameter. Men för att kunna göra det måste vi först diskutera hur Arkimedes har och kan ha utfört vissa matematiska experiment.

4.1 Utförande samt pupillens betydelse

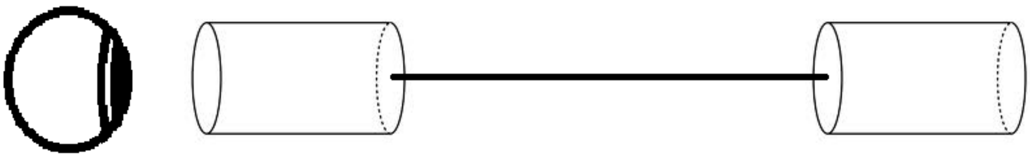
Innan vi kan påbörja beviset av satsen, så måste vi först förklara Arkimedes mätning av den skenbara diametern δ av solen. Med skenbar diameter menas den vinkel som bildas när man betraktar solens diameter från jorden. Så den skenbara diametern är föränderlig från en tidpunkt till en annan. Det är svårt att ge en exakt figur eftersom ögat, händerna och de instrument som används för att finna det exakta värdet inte kan betraktas som tillförlitliga. Det är däremot tillräckligt att ge en övre och undre gräns av diametern. Han tog en lång stav och fäste en liten cylinder på ena änden. Vi antar att staven sitter fast på cylindern på något av följande två sätt.



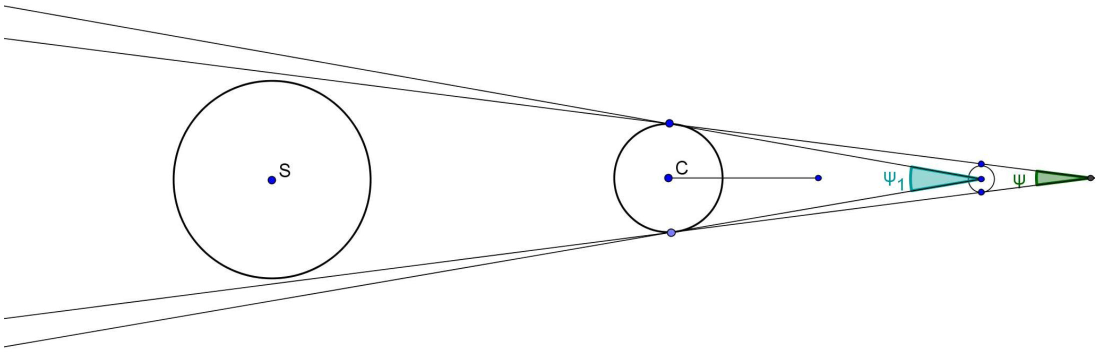
När solen var strax ovanför horisonten så riktande han staven mot solen, för att direkt kunna betrakta den. Eftersom han har cylindern på ena sidan av staven och han håller upp staven med handen, så kan han justera avståndet mellan cylindern och ögat genom att röra armen. För att få en undre och en övre gräns av solens diameter så höll han cylindern i ett sådant läge att han nätt och jämt såg respektive inte såg solen.



Vi placerar cylindern på ett avstånd där ögat bara ser lite grann av solen. Om pupillen i ögat är en punkt så skulle man kunna dra tangenter från denna punkt till basen av cylindern. Då skulle vinkeln φ_1 bildas. Men eftersom pupillen inte är en punkt, utan en yta, så ses egentligen vinkeln φ_1 som felaktig. Storleken av pupillen stör med andra ord detta argument. Man kan istället dra två tangenter från basen av pupillens yta till basen av cylindern, och då hamnar tangenternas skärningspunkt bakom själva ögats placering. Detta skulle då bilda vinkeln φ, och betraktas som den rätta vinkeln. Eftersom Arkimedes vill ha en så liten undre gräns som möjligt måste han ta hänsyn till pupillens storlek, då vi ser att vinkeln blir mindre när han ser ögat som en yta. Men då måste han ta reda på pupillens storlek, och utförde då ytterligare ett experiment. Han tar två små cylindrar med samma tjocklek och längd, och binder dessa på varsin ände av en stång. Den ena cylindern är vit medan den andra cylindern är färgad. Han håller sedan den färgade cylindern mot hornhinnan i ögat.



Om diametern på den färgade cylindern är mindre än pupillen så kommer ögat fortfarande se den vita cylindern. Detta upprepas sedan med cylindrar av ökande diametrar tills ögat för första gången inte ser något av den vita cylindern, och då är diametern på cylindern en övre gräns för pupillens diameter. På så sätt har han funnit en övre gräns för pupillens storlek som han kan använda sig av i sina beräkningar av solens skenbara diameter.



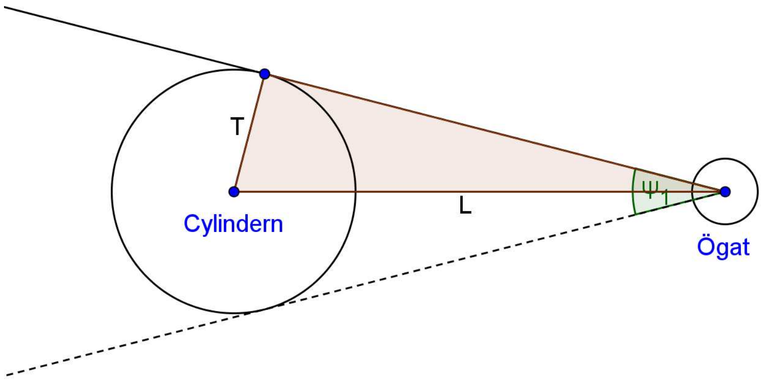
På liknande sätt som för den undre gränsen ska vi nu finna den övre gränsen för δ. Vi placerar cylindern på ett avstånd där vi nu inte ser något solljus, se bild ovan. Betraktar Arkimedes ögats pupill som en punkt så får han återigen en felaktig vinkel, nämligen ψ_1. Betraktar han ögats pupill som en yta, får han på samma sätt som för den undre gränsen, den rätta vinkeln ψ som hamnar bakom ögats placering. Här ser vi att han får en större vinkel när han inte tar hänsyn till pupillens yta, och bestämmer sig därför att använda den felaktiga vinkeln ψ_1 istället för ψ. Vi har då att $\varphi < \delta < \psi < \psi_1$. Varför Arkimedes inte använder sig av den felaktiga vinkeln φ_1 är att den i själva verket kanske är större än δ. Men alla Arkimedes gränser till solens skenbara diameter är egentligen felaktiga eftersom han inte befinner sig i jordens medelpunkt, men det tar han inte hänsyn till förrän senare, och vi återkommer till det. Då R representerar den räta vinkeln fick Arkimedes gränserna;

$$\varphi = \frac{R}{200} < \delta < \frac{R}{164} = \psi_1$$

Hur han får fram gränserna till vinkeln är oklart eftersom han över huvudtaget inte redovisar några måttuppgifter, som avståndet till cylinder eller cylinderns diameter etc., endast slutresultatet om vinkeln. Han redovisar inte heller hur avståndet till cylindern översätts till en vinkel eller hur han bär sig åt när han använder sig av pupillens storlek.

4.1.1 Beräkna vinkeln med hjälp av sinus och arcsinus

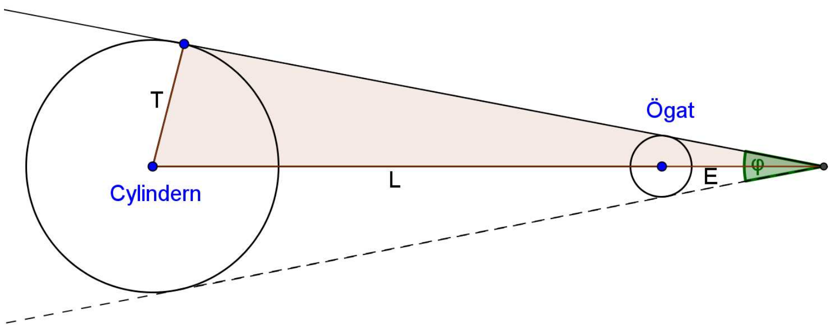
Arkimedes berättelser och beräkningar är ganska kortfattade och utelämnar egenskaper som vi idag skulle förvänta oss, såsom instrumentens dimensioner och de råa observationsdata. Den mest betydelsefulla delen är resultatet som istället för ett unikt värde ges med ett experimentellt fel i form av en undre och övre gräns, vilket han också var medveten om. Den skenbara diametern för solen δ skulle bestämmas av cylinderns radie T och dess avstånd L från ögat. Vi kan idag med hjälp av den trigonometriska funktionen sinus få fram halva vinkeln till solens diameter;



Bilden visar hur man kan få ut den övre gränsen, då ögats pupill anses vara en punkt och är placerat på ett sådant sätt så att ögat inte ser något solljus. Den övre gränsen har en vinkel ψ_1, och vi börjar med att räkna ut halva denna vinkel genom att använda oss av cylinderns radie T, som är vinkelrät mot tangenten, och avståndet L från ögat till cylinderns medelpunkt;

$$\sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right) = \frac{T}{L} \Rightarrow \psi_1 = 2\arcsin\left(\frac{T}{L}\right)$$

På samma sätt kan man räkna ut vinkeln φ för den under gränsen, då man betraktar ögats pupill som en yta och är placerad på ett sådant sätt att ögat bara ser lite grann av solljuset.



Den undre gränsen ska nu bestämmas av cylinderns radie T, avståndet L från cylindern till ögat samt avståndet E från ögat till tangenternas skärningspunkt. Vi börjar med att räkna ut halva denna vinkel genom att använda oss av den trigonometriska funktionen sinus;

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{T}{L+E} \Rightarrow \varphi = 2\arcsin\left(\frac{T}{L+E}\right)$$

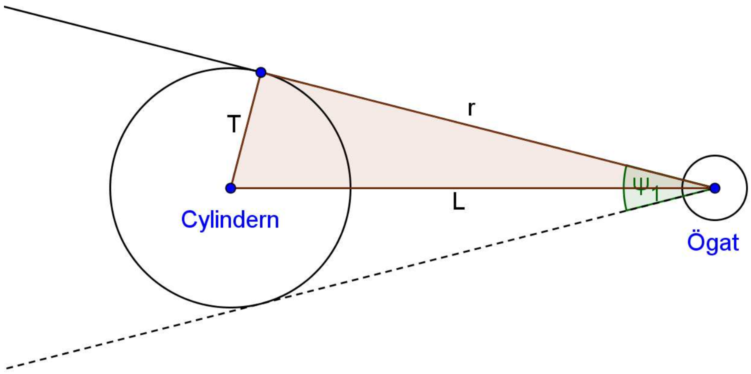
Som vi förstår har Arkimedes inte räknat på detta sätt eftersom han inte kände till funktionen sinus, och det har därmed förutsatts att Arkimedes var tvungen att bestämma dessa vinklar med grafiska medel. Han kan alltså ha dragit tangenterna till de både cylindrarna och mätt vinkeln med en kvadrant, ett mätinstrument som används för att mäta vinklar, eller något motsvarande instrument. Det här är ett allvarligt problem som medför stora fel vid bestämningen av den skenbara diametern. Men Alan E. Shapiro har i *Archimedes's measurement of the sun's apparent diameter*, se [6], presenterat ett sätt som man kan tänka sig att Arkimedes gjorde. Där undviker man grafiska konstruktioner och dessutom kräver det inte några trigonometriska eller geometriska teorem som var okända för Arkimedes. Denna beräkning bygger främst på tillvägagångssättet och innehållet i *Mätning av en cirkel*, se [2] kapitel 6 sats 3, och utgår från vår motsvarighet till den trigonometriska olikheten;

$$\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

4.1.2 Hur Arkimedes kan ha gjort

Vi börjar med att räkna ut den övre gränsen för δ, då ögats pupill ses som en punkt och är placerad på ett sådant avstånd då ögat inte kan se något solljus. Men innan vi börjar beräkningar så förklarar vi för korthetens skull dess olika beteckningar;

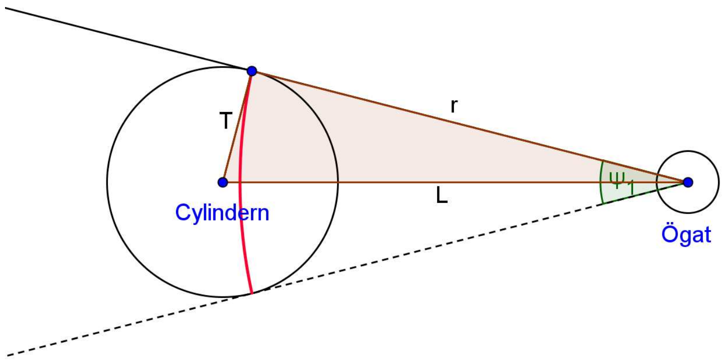
T = Cylinderns radie
L = Avståndet från cylindern till ögat
r = Tangentens längd till cylindern från dess skärningspunkt



Radien T är vinkelrät mot tangenten och med hjälp av Pythagoras sats får vi längden av tangenten;

$$r = \sqrt{L^2 - T^2}$$

Vi betraktar nu cirkelbågen med radien r, den röda bågen i bilden nedan.



Vi betraktar halva vinkeln ψ_1 och har då att cirkelbågens längd, båglängden $\overline{T}$, är proportionell mot radien r och vinkeln $\frac{\psi_1}{2}$. Delar vi med den räta vinkeln R får vi;

$$\frac{\frac{\psi_1}{2}}{R} = \frac{\overline{T}}{\frac{\pi}{2} \cdot r} = \frac{\overline{2T}}{\pi\sqrt{L^2 - T^2}} < \frac{2T}{\pi\sqrt{L^2 - T^2}}$$

Genom att sedan använda den lägre gränsen av π, se [2] kapitel 6 sats 3, som är $3\frac{10}{71}$ får vi nämnaren att bli så liten som möjligt och därför blir vinkeln så stor som möjligt. Det är nu man fått fram gränsen $\psi_1 = \frac{R}{164}$.

Kommentar

Vi konstaterar att $\tan\left(\frac{\psi_1}{2}\right) = \frac{T}{\sqrt{L^2 - T^2}}$. Olikheten ovan ger i radianspråk att;

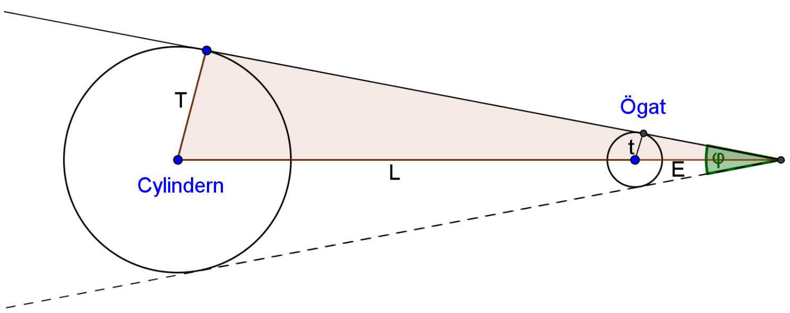
$$\frac{\frac{\psi_1}{2}}{\frac{\pi}{2}} < \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\psi_1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\psi_1}{2} < \tan\left(\frac{\psi_1}{2}\right)$$

Den olikhet man nu visat blir med andra ord $\alpha < \tan \alpha$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Vi fortsätter nu med att visa hur Arkimedes skulle ha kunnat räkna ut den undre gränsen av δ. Pupillen ses i detta fall som en yta och tangenternas skärningspunkt kommer därmed hamna bakom ögats placering. Ögat är också placerat på ett sådant sätt så att ögat nätt och jämt ser solen. Vi använder samma beteckningar som vid bestämningen av den övre gränsen, men lägger dessutom till beteckningarna;

t = Pupillens radie

E = Längden som läggs till hos L för att komma till tangenternas skärningspunkt



Radierna T och t är vinkelräta mot tangenterna, och problemet ligger i att E inte kan mätas. Vi får från likformiga trianglar att;

$$\frac{T}{t} = \frac{L+E}{E}$$

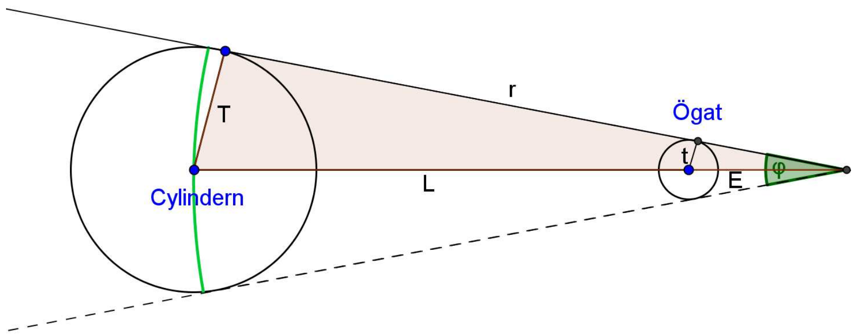
Nu subtraherar vi täljaren med dess nämnare;

$$\frac{T-t}{t} = \frac{L}{E}$$

Det ger slutligen;

$$\frac{T-t}{L} = \frac{T}{L+E}$$

Betrakta cirkelbågen med radien $L+E$, den gröna bågen i bilden nedan.



På samma sätt som i bestämningen av den övre gränsen använder vi oss halva vinkeln φ och har då att cirkelbågens längd, båglängden $\overline{T}$, som är proportionell mot radien $L+E$ och vinkeln $\frac{\varphi}{2}$. Delar vi sedan med den räta vinkeln R får vi;

$$\frac{\frac{\varphi}{2}}{R} = \frac{\overline{T}}{\frac{\pi}{2}(L+E)} = \frac{\overline{2T}}{\pi(L+E)} > \frac{2T}{\pi(L+E)}$$

Av tidigare noteringar får vi slutligen att;

$$\frac{\frac{\varphi}{2}}{R} > \frac{2(T-t)}{\pi L}$$

Använder vi oss av det största talet av π, $3\frac{1}{7}$, får vi en större nämnare och därmed en mindre vinkel. Det är nu man fått fram gränsen $\varphi = \frac{R}{200}$.

<u>Kommentar</u>

Vi konstaterar att $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{T}{L+E}$. Olikheten ovan ger i radianspråk att;

$$\frac{\frac{\varphi}{2}}{\frac{\pi}{2}} > \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\varphi}{2} > \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

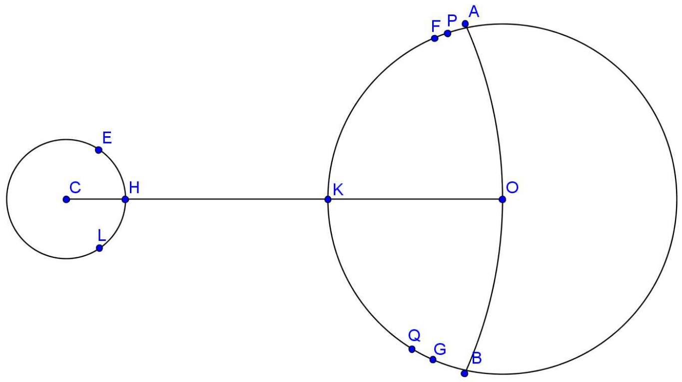
Den olikhet man nu visat blir med andra ord $\sin \alpha < \alpha$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

4.2 Bevis för satsen

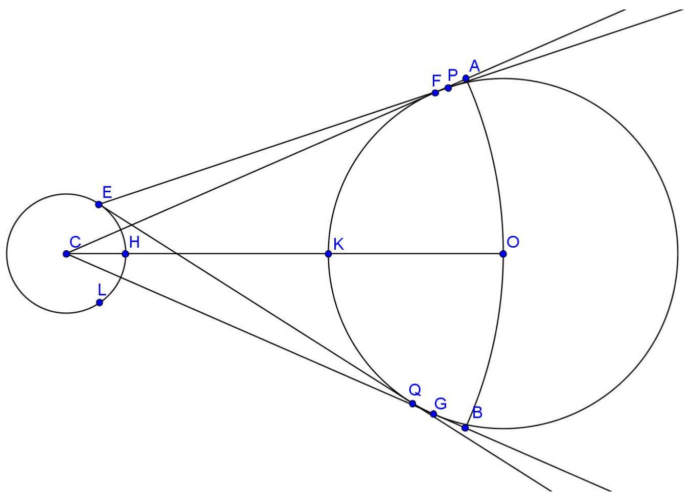
Vi ska nu bevisa att solens diameter är större än sidan av en kilogon, en 1000-hörning, som är inskriven i den största cirkeln i kosmos sfär.

4.2.1 Hur vi förstår figuren

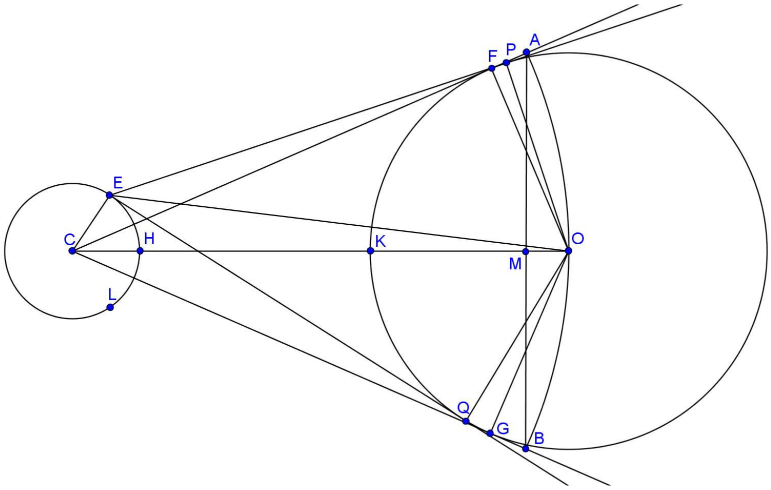
Vi antar att papprets plan är det plan som passerar genom solens centrum, jordens centrum och ögat vid tidpunkten då solen befinner sig strax ovanför horisonten. Planet skär då jorden i cirkeln EHL och solen i cirkeln FKG. Vi kallar jordens medelpunkt för C, solens medelpunkt för O och platsen där ögat är placerat för E. Vi låter linjen genom O och C träffa jordens och solens sektioner i respektive H och K, så att sträckan HK bildar den kortaste sträckan mellan jorden och solen.



Från E drar vi två tangenter till solen och bildar då vinkeln PEQ. På samma sätt drar vi två tangenter från C till solen och bildar vinkeln FCG. Planet skär också kosmos sfär i storcirkeln, det vill säga den sfär där jordens medelpunkt C är centrum och den räta linjen CO mellan solens medelpunkt och jordens medelpunkt är dess radie. Vi låter CF träffa storcirkeln i punkten A och på samma sätt låter vi CG träffa storcirkeln i punkten B.

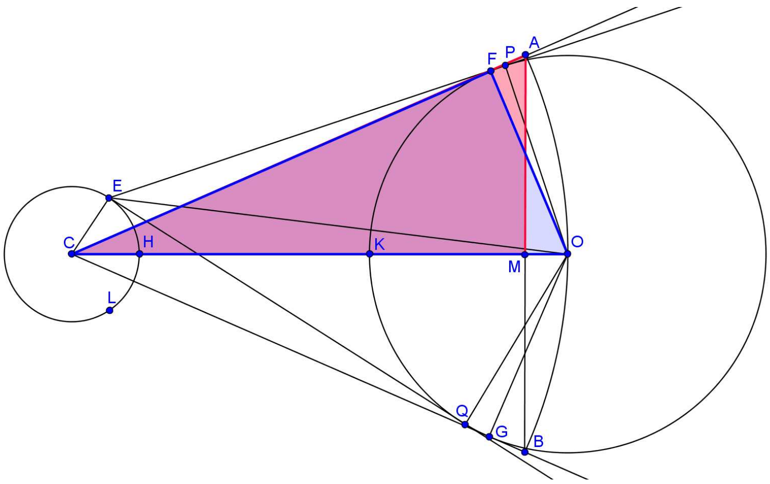


Nu sammanbinder vi CE, EO, OF, OG, OP, OQ och AB. Vi låter dessutom AB träffa CO i punkten M.



4.2.2 Beräkningar av solens skenbara diameter

Vi börjar med att betrakta de rätvinkliga trianglarna CMA och CFO, se bilden nedan.



Vi ser att $\angle$FCO och $\angle$ACM är en gemensam vinkel samt att trianglarna har en rät vinkel, och därför vet vi dessutom att sista vinkeln är gemensam. Vi vet också att CA = CO eftersom A, O och B ligger på storcirkeln med centrum i C. Med andra ord har de två trianglarna exakt lika stora vinklar samt att trianglarnas hypotenusor är lika långa. Eftersom AM är vinkelrät mot CO och OF är vinkelrät mot CA så ger det att AM = OF. Vi vet att OF är solens radie och att AM är halva sträckan AB. Vi får att;

$$2AM = AB = \text{Solens diameter}$$

För att kunna uppskatta kosmos diameter uppåt måste vi uppskatta solens diameter uppåt. För att kunna göra detta börjar vi med att ta reda på hur mycket mindre kordan AB är i jämförelse med storcirkelns omkrets. Efter bestämningen av en över och undre gräns av solens skenbara diameter vet vi att;

$$\varphi = \frac{R}{200} < \angle PEQ < \frac{R}{164} = \psi_1$$

Och eftersom $\angle FCG$ är mindre än $\angle PEQ$ så vet vi att $\angle FCG < \frac{R}{164}$. Därmed blir kordan AB, som spänner över en båge av storcirkeln, mindre än $\frac{R}{164} = \frac{1}{164} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{656}$ av denna cirkelns omkrets. Vi har följande;

AB $<$ sidan av en 656-sidig polygon som är inskriven i storcirkeln.

Vi vet nu från Arkimedes tidigare arbete, se [2] kapitel 6, att omkretsen av varje polygon som är inskriven i en storcirkel är mindre än $\frac{44}{7}CO$. Från detta har vi att;

$$\frac{AB}{CO} < \frac{1}{656} \cdot \frac{44}{7} = \frac{11}{1148} < \frac{1}{100}$$

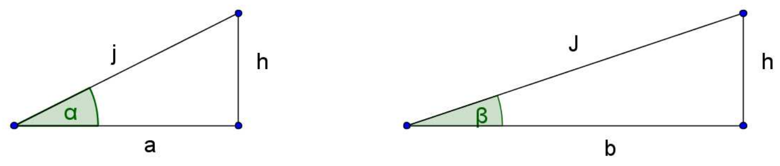
Varav

$$\text{Solens diameter } = AB < \frac{1}{100}CO \qquad \blacksquare$$

För att kunna uppskatta kosmos diameter uppåt måste vi uppskatta $\angle$ FCG = $\angle$ ACB nedåt. Och för att finna en sådan uppskattning använder vi oss av följande lemma som ofta används i grekisk matematik.

Lemma

Betrakta två rätvinkliga trianglar med gemensam katet av längd h. Låt de mot denna katet motstående vinklarna vara α respektive β, då α > β. Låt den andra kateten vara a respektive b, då är givetvis b > a. Låt hypotenusan vara j respektive J, då är givetvis J > j.



Då gäller;
$$\frac{J}{j} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{b}{a}$$

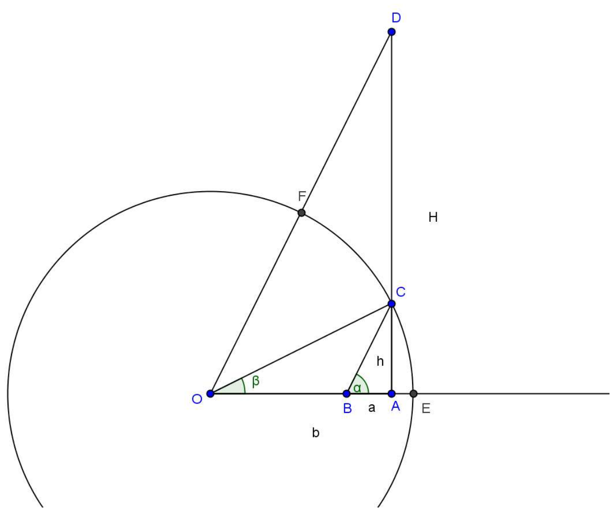
Kommentar

Detta är naturligtvis ekvivalent med den trigonometriska formeln som säger, att om α och β är två vinklar mätta i bågmått. Vardera mindre än en rät vinkel, och om α är större än β, så gäller;

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}.$$

Bevis

Vi kommer enbart att använda oss av den högra olikheten, och vi skär då ner och fokuserar på att bevisa endast den. I figuren nedan är det de två trianglarna BAC och OAC som vi har. Från O dras en linje parallell med BC. Sidan AC förlängs tills skärningspunkten D uppkommer. Vi observerar att b syftar på hela OA och H på hela AD. Cirkeln i figuren har medelpunkt i O och går genom C.



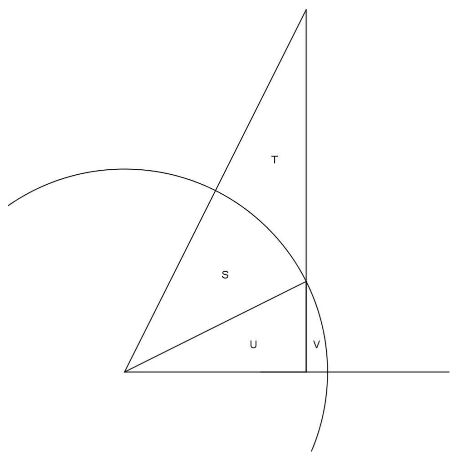
På grund av likformighet är

$$\frac{b}{a} = \frac{H}{h}$$

Men $\frac{H}{h} = \frac{\Delta ODA}{\Delta OCA}$, som betyder trianglarnas area. Vi noterar att $\angle$ FOE = α, eftersom BC och OF är parallella. Vidare har vi att;

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Delta FOE}{\Delta COE}$$, som syftar till cirkelbågarnas area.

Nu för vi in en ny figur och tittar på ytornas storlek, se bild nedan.



Bokstäverna S, T, U och V syftar nu på storleken av de fyra områdena i figuren. Vi vet nu att;

$$\frac{b}{a} = \frac{S+T+U}{U}$$

Och

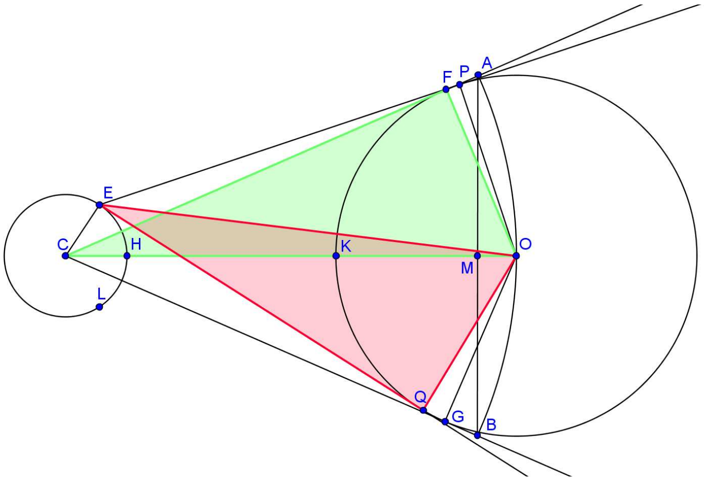
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{S+U+V}{U+V}$$

Vi ska nu visa att $\frac{S+T+U}{U} > \frac{S+U+V}{U+V}$. Men detta är ekvivalent med, minskar båda sidorna med dess nämnare, att

$$\frac{S+T}{U} > \frac{S}{U+V}$$

Och det är klart eftersom $S+T>S$ och $U+V>U$. Beviset är klart.

Vi kan nu gå tillbaka och betrakta två nya rätvinkliga trianglar, nämligen CFO och EQO.



OF = OQ, som är trianglarnas gemensamma katet. Eftersom vinkeln CEO är trubbig vet vi att CO > EO, som är hypotenusorna, och då kan vi sluta oss till att CF > EQ. Det gäller dessutom att $\angle$OEQ > $\angle$FCO, och därmed gäller det för dubbla vinkeln att $\angle$PEQ > $\angle$FCG. Lemmat ger oss nu att;

$$\frac{\angle PEQ}{\angle FCG}=\frac{\angle OEQ}{\angle OCF}<\frac{CF}{EQ}$$

Alltså

$$\angle ACB=\angle FCG>\frac{EQ}{CF}\cdot\angle PEQ>\frac{EQ}{CF}\cdot\frac{R}{200}$$

Vår uppgift ligger nu i att uppskatta $\frac{EQ}{CF}$ nedåt, eller $\frac{CF}{EQ}$ uppåt. Vi konstaterar att jordens diameter är mindre än $\frac{1}{100}CO$, enligt ■ och Arkimedes antagande 2. Om man då tar halva solen diameter, OK, och halva jordens diameter, CH, så vet vi också att dessa två tillsammans är mindre än $\frac{1}{100}CO$. Det vill säga att $CH+OK<\frac{1}{100}CO$, och då betyder det samtidigt att den resterande sträckan, HK, som är kvar på CO när vi har tagit bort CH och OK är större än $\frac{99}{100}CO$. Detta vet vi eftersom $CH+OK+HK=CO$. Det medför att;

$$HK > \frac{99}{100} CO \Rightarrow \frac{100}{99} > \frac{CO}{HK}$$

Vi vet från tidigare iakttagelser att CO > CF. Vi vet dessutom att HK < EQ, eftersom HK är den kortaste sträckan från jorden till solen. Om vi gör nämnaren större och täljaren mindre, så blir kvoten mindre. Därför gäller denna olikhet;

$$\frac{CF}{EQ} < \frac{CO}{HK} < \frac{100}{99}$$

Det ger att $\frac{EQ}{CF} > \frac{99}{100}$. Resultatet av lemmat ger nu att $\frac{\angle PEQ}{\angle FCG} = \frac{\angle OEQ}{\angle OCF} < \frac{CF}{EQ} < \frac{100}{99}$, och att;

$$\angle ACB = \angle FCG > \frac{EQ}{CF} \cdot \angle PEQ > \frac{99}{100} \cdot \frac{R}{200} = \frac{99R}{20000} > \frac{R}{203}$$

Den lägsta gränsen mätt från E är $\frac{R}{200}$, och vi får nu $\frac{R}{203}$ som är den lägsta gränsen från C. Eftersom CF sträcker ut sig till A i storcirkeln och CG till B så ger det att;

$$\angle ACB > \frac{R}{203} = \frac{1}{203} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{812} \text{ av ett varv.}$$

Alltså;

AB > sidan av en 812-sidig polygon som är inskriven i storcirkeln

Eftersom solens diameter är större än en sida av en 812-sidig polygon som är inskriven i storcirkeln så är den klart större än en sida av en kilogon som är inskriven i storcirkeln. Beviset är klart.

4.3 Beräkning av kosmos diameter

Det vi nu ska bevisa är att kosmos diameter är mindre än 1 000 gånger jordens diameter, och räknar vi med stadier som Arkimedes gjorde så ska vi alltså bevisa att kosmos diameter är mindre än 100MM stadier.

Vi antar för enkelhetens skull att;

$$D_k = \text{kosmos diameter}$$

$$D_s = \text{solens diameter}$$

$$D_j = \text{jordens diameter}$$

$$D_m = \text{månens diameter}$$

Enligt Arkimedes antagande 3 har vi att $D_s \leq 30D_m$ och från antagande 2 får vi att $D_j > D_m$ och därför har vi att;

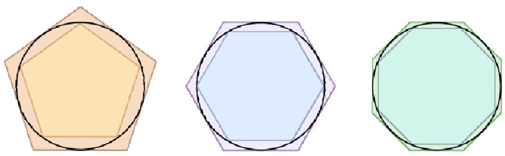
$$D_s \leq 30D_m < 30D_j$$

Från föregående bevisade sats har vi att;

$$D_s > (\text{ sidan av en kilogon inskriven i storcirkeln }),$$

$$(\text{ kilogonens omkrets }) < 1\,000\,D_s < 1\,000 \cdot 30\,D_j = 3\text{M}\,D_j$$

Men i Arkimedes tidigare arbete, se [2] kapitel 6 sats 3, fann han ett förhållande mellan cirkelns omkrets och diameter. Det gjorde han genom att stänga in en cirkel mellan två regelbundna polygoner fås en undre och en övre gräns för omkretsen och därmed även för π.



Bilden visar att ju större regelbundna månghörningar vi studerar desto bättre uppskattning på π får vi, då cirkeln och månghörningens avstånd till varandra minskar. Arkimedes utförde först detta på en sexhörning, sedan en 12-hörning, 24-hörning, 48-hörning innan han stannade på en 96-hörning. Utifrån detta vet vi att omkretsen av en regelbunden polygon med fler än 6 sidor, som är inskriven i en cirkel, är 3 gånger större än cirkelns diameter. Därför får vi nu;

$$(\text{kilogonens omkrets}) > 3D_k$$

Och det ger;

$$D_k < \frac{1000}{3} D_s < \frac{3M}{3} D_j = MD_j$$

Antagande 1 säger att jordens omkrets är omkring 300M stadier, och inte större. Vilket ger;

$$\text{Jordens omkrets} \leq 300\text{M stadier}$$

och eftersom

$$\text{Jordens omkrets} > 3D_j$$

får vi att

$$D_j < \frac{300M}{3} \text{ stadier} = 100M \text{ stadier}$$

Och här följer det att

$$D_k < MD_j = M \cdot 100M \text{ stadier} = 100MM \text{ stadier}$$

5. Arkimedes numeriska system

I det här kapitlet kommer vi att gå igenom de olika delarna i Arkimedes numeriska system. Systemet innehåller de naturliga talen men har sin utgångspunkt i talet 1, och inte i talet 0 som vi är vana vid. Talen används för att beteckna resultatet av uträkningarna.

5.1 Grekernas talsystem

Grekerna använde de 24 bokstäverna som fanns i det grekiska alfabetet, samt tre äldre bokstäver för att beteckna tal. De första nio symbolerna fick då beteckna talen 1-9, nästa nio betecknade tiotalen 10-90 och de sista nio hundratalen 100-900. Talet 10 000 kallades för en myriad och betecknades med bokstaven M.

1	Α α	Alfa	10	Ι ι	Jota	100	Ρ ρ	Rho
2	Β β	Beta	20	Κ κ	Kappa	200	Σ σ	Sigma
3	Γ γ	Gamma	30	Λ λ	Lamba	300	Τ τ	Tau
4	Δ δ	Delta	40	Μ μ	My	400	Υ υ	Ypsilon
5	Ε ε	Epsilon	50	Ν ν	Ny	500	Φ φ	Fi
6	□ □	Digamma	60	Ξ ξ	Xi	600	Χ χ	Chi
7	Ζ ζ	Zeta	70	Ο ο	Omikron	700	Ψ ψ	Psi
8	Η η	Eta	80	Π π	Pi	800	Ω ω	Omega
9	Θ θ	Theta	90	□ □	Koppa	900	□ □	Sampi

Ingen symbol för talet noll fanns, och det är därför utgångspunkten i systemet är talet 1. Talen bildades sedan additivt utifrån dessa symboler. Tal mellan 1 000 och 10 000 skrivs med de någon av de tio första siffrorna, och en låg apostrof till vänster. Vi kan till exempel skriva 7 984 som □ζ□πδ eller 12 345 som M□βτμε. Grekerna har alltså traditionella beteckningar på tal 1 upp till en 10 000, och för att vi på enklaste sätt ska förstå detta kapitel kommer vi att använda grekernas beteckning M för talet 10 000 och våra moderna beteckningar för övriga tal. Det förekommer dessutom potenser i följande avsnitt och även dessa är enbart översättningar till vårt moderna språk.

5.2 Ordningar

Grekerna kan uttrycka tal upp till en myriad, 10^4. Vi kan därför enkelt uttrycka tal upp till en myriad myriader, MM = 10^8. Vi låter alla dessa tal beteckna *den första ordningens tal*;

$$1(=e_1),\ 2,\ldots,\ 10,\ldots,\ 9999, M,\ 2M,\ldots,\ 10M,\ldots,\ MM$$

Talet 1, som är det första talet i den första ordningen, kallas för *enheten* för första ordningens tal. Vi markerar detta tal med e_1, som återigen är en beteckning i modernt språk. Vi ser också att denna ordning sträcker sig upp till en myriad myriader, och detta tal kommer att vara enheten i den andra ordningens tal. Detta tal markerar vi med e_2. På liknande sätt som den första ordningens tal bygger vi upp den andra ordningens tal;

$$\mathrm{MM}(=e_2),\ 2e_2,\ldots,\ 10e_2,\ldots,\ 9999e_2,\ \mathrm{M}e_2,\ 2\mathrm{M}e_2,\ldots,\ 10\mathrm{M}e_2,\ldots,\ \mathrm{MM}e_2$$

Denna ordning sträcker sig upp till talet $\mathrm{MM}e_2$, $10^4 \cdot 10^4 \cdot e_2 = 10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$, och är då enheten för den tredje ordningens tal;

$$\mathrm{MM}e_2\,(=e_3),\ 2e_3,\ldots,\ 10e_3,\ldots,\ 9999e_3,\ \mathrm{M}e_3,\ 2\mathrm{M}e_3,\ldots,\ 10\mathrm{M}e_3,\ldots,\ \mathrm{MM}e_3$$

På liknande sätt gör man till en myriad myriader ordningens tal. Om vi börjar med att titta på det första talet i varje ordning, dvs. på enheterna, så finner vi ett mönster; 1, $10^8, 10^{16}, 10^{24}$, osv. Tittar vi sedan på alla tal som ordningarna sträcker sig upp till, sista talet, så finner vi ett mönster även där; $10^8, 10^{16}, 10^{24}$, osv. Det är inte förvånande att vi har samma tal i slutet av en ordning som i början av nästa ordning. Detta ger oss nu två formler där i ges av ordningstalet;

Första talet i en ordning ges av: $10^{8(i-1)}$
Sista talet i en ordning ges av: 10^{8i}

Om vi exempelvis vill räkna ut tusen myriader enheter av den femte ordningens tal så gör vi på följande sätt;

$$1000M \cdot 10^{8(5-1)} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{32} = 10^{39}$$

5.3 Perioder

Räknar vi ut det sista talet i en myriad myriader ordningens tal så får vi $10^{8\cdot 10^8}$, och vi kallar detta tal för P^1 som är en modern beteckning. Alla tal från 1 och upp till P^1 ligger i *den första periodens tal.* Redan här är Arkimedes uppe i riktigt stora tal, men han nöjer sig inte än. Han går vidare med *andra periodens tal* som då också har en första ordningens tal. Enheten för första ordningens tal i denna period är då P^1 och vi betecknar den med $e_{2,1}$ där tvåan står för period och ettan för ordningen. Vi får;

$$P^1 \,(=e_{2,1}),\, 2\,e_{2,1},\ldots,\, 10\,e_{2,1},\ldots,\, 9999\,e_{2,1}, \mathrm{M}\,e_{2,1}, 2\mathrm{M}\,e_{2,1},\ldots,\, 10\mathrm{M}\,e_{2,1},\ldots,\, \mathrm{MM}\,e_{2,1}$$

Den andra ordningen i den andra perioden blir på liknande sätt;

$$\mathrm{MM}\,e_{2,1} = e_{2,2},\, 2\,e_{2,2},\ldots,\, 10\,e_{2,2},\ldots,\, 9999\,e_{2,2},\ldots,\, \mathrm{M}\,e_{2,2},\, 2\mathrm{M}\,e_{2,2},\ldots,\, 10\mathrm{M}\,e_{2,2},\ldots,\, \mathrm{MM}\,e_{2,2}$$

Denna period kan då också ta sig upp till en myriad myriader ordningens tal, innan den tredje perioden påbörjas. Han fortsätter att bygga upp systemet till en myriad myriader perioder. Med hjälp av dessa perioder kan vi nu vidareutveckla formlerna i föregående avsnitt. Om i fortfarande ges av ordningstalet och j betyder antal perioder så får vi följande;

Första talet i en ordning ges av: $(10^{8(i-1)})^j$

Sista talet i en ordning ges av: $(10^{8i})^j$

Det absolut sista talet som Arkimedes numeriska system sträcker sig upp till är alltså en myriad myriader enheter i en myriad myriader ordningens tal i en myriad myriader periodens tal. Med räkningar får vi;

$$(10^{(8\cdot MM)})^{MM} = (10^{8\cdot 10^8})^{10^8} = 10^{8\cdot 10^{16}} .$$

5.4 Oktader

Vi förenklar de uttryck av tal som senare kommer att förekomma i våra beräkningar av sandkorn. Därför betraktar vi den geometriska serien vars första term är 1, andra term 10, tredje term 100 osv. Vi ser att alla termer är tiopotenser, vilket inte var känt för Arkimedes. Han delar in dessa termer i grupper om åtta, där grupp ett kallas för den första oktaden. Vi visar lättast med modern symbolik att;

Oktad 1: $1, 10^1, 10^2, \ldots, 10^7$

Oktad 2: $10^8,\, 10^9, \ldots,\, 10^{15}$

Oktad 3: 10^{16}, 10^{17},…, 10^{23}

Som vi ser så innehåller den första oktaden bara tal från den första ordningen, den andra oktaden från den andra ordningen osv.. Talen 1, 10^{8}, 10^{16}, 10^{24}, osv. kallas för enheterna i de olika oktaderna, precis som de gör i de olika ordningarna. Vi kan alltså placera in vilket antal oktader som helst med följande formel;

$$i\text{:s oktad: } 10^{8i-8}, 10^{8i-7}, 10^{8i-6}, \ldots, 10^{8i-1}$$

5.5 Teorem

Arkimedes ger en regel som gäller när man vill multiplicera tal på en geometrisk serie där första termen är 1, se Sigma band 4.

”*Om vi har ett godtyckligt antal termer i en geometrisk serie, t.ex.* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, \ldots, A_n, \ldots, A_{m+n-1}, \ldots$, *av vilka* $A_1 = 1$ *och* $A_2 = 10$, *och om man väljer två godtyckliga termer, t.ex.* A_m *och* A_n *och multiplicerar dem, kommer produkten* $A_m A_n$ *att bli en term i samma serie på lika många termers avstånd från* A_n *som* A_m*:s avstånd från* A_1*; vidare blir dess avstånd från* A_1 *i antal termer räknat ett mindre än summan av de antal termer som anger resp.* A_m*:s och* A_n*:s avstånd från* A_1*.*[3]”

Vi har exempelvis den geometriska serien;

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, där A = 1.

Vi vill ta reda på produkten mellan termen C och G. Enligt Arkimedes regel så ska vi från enheten räkna antal steg till den lägsta av de två termerna, i detta fall C, och både första och sista termen räknas med. Vi får då 3 steg. Från den största termen ska vi nu gå tre steg åt höger för att finna vår produkt, vilket blir I. Regeln säger att det vi nyss gjorde är precis samma sak som att ta summan av de både termerna och sedan subtrahera med 1. I vårt fall har C placering 3 och G placering 7. Summan av dessa blir 10 och subtraherar vi med 1 så får vi 9, vilket är I:s placering.

[3] Sigma, Band 4, sid. 1300-1301.

Kommentar

Detta är ekvivalent med

$$A_m A_n = A_{m+n-1}$$

Bevis

Termer på lika avstånd från andra termer i en geometrisk serie är proportionella sinsemellan;

$$\frac{A_m}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_n}$$

Men eftersom $A_1 = 1$ så ger detta att;

$$A_m A_n = A_{m+n-1} A_1 = A_{m+n-1}$$

Om vi exempelvis vill multiplicera seriens 10:e term med seriens 4:e term kan vi använda följande formel;

$$(faktor + faktor) - 1$$

I vårt fall skulle det betyda $(10 + 4) - 1 = 13$, vilket resulterade i seriens 13:e term.

Kommentar

Det är enkelt för oss att kontrollera att det verkligen stämmer, och detta gör vi med tiopotenser. Seriens 10:e term är 10^9 och seriens 4:e term är 10^3. Produkten blir då $10^9 \cdot 10^3 = 10^{12}$, som är seriens 13:e term.

Vi vill nu ta reda på i vilken ordning denna term befinner sig i, samt hur många enheter termen består av, kan vi använda följande formel;

$$(\text{term - närmsta minsta ordningens första term}) + 1$$

Vi vet att andra ordningen börjar med seriens 9:e term och tredje ordningen med seriens 17:e term, och eftersom seriens 13:e term befinner sig någonstans mellan dessa så är det seriens 9:e term vi ska använda oss av. Detta ger då att $(13 - 9) + 1 = 5$. Det betyder att seriens 13:e term är samma sak som seriens 5:e term av andra ordningen, alltså en myriad enheter av andra ordningen.

Kommentar

I tiopotenser är seriens 13:e term 10^{12} och seriens 9:e term är 10^{8}. Vi får att $\frac{10^{12}}{10^{8}} = 10^{4}$, som är samma sak som en myriad. Eftersom nämnaren visar inom vilken ordning vi befinner oss så får vi till slut att 10^{12} är en myriad enheter av andra ordningen, som ovan.

6. Antagande 5

Innan vi börjar räkna antal sandkorn i kosmos antar Arkimedes att en sandmängd som ryms i ett vallmofrö är högst en myriad korn. Vallmofröets diameter i förhållande till en fingerbredd baseras sedan på en mätning; 25 stycken vallmofrön placeras sida vid sida, och dessa fyller mer än en fingerbredd. Därför är ett vallmofrös diameter större än $\frac{1}{25}$ av en fingerbredd. För att stärka bevisen för möjligheten att uttrycka stora tal måste vi överdriva denna gräns. Arkimedes sätter alltså gränsen $\frac{1}{40}$ av en fingerbredd, det vill säga att 40 stycken vallmofrön placerat sida vid sida fyller mer än en fingerbredd. Eftersom han uppskattar antalet sandkorn per vallmofrö samt antalet vallmofrö per fingerbredd uppåt så kommer vi därmed uppskatta antal sandkorn i kosmos uppåt.

6.1 Antal sandkorn i kosmos respektive fixstjärnornas sfär

Från antagande 5 får vi att vallmofröets diameter $\geq \frac{1}{40}$ av en fingerbredd. Vi vet att sfärer förhåller sig till varandra som tredje potens av deras diametrar, och därmed följer det att;

En sfär med diametern 1 fingerbredd $\leq 40^3$ vallmofrön $=$ 64 000 vallmofrön
$\leq$ 64 000 · M sandkorn $=$ 64 000M sandkorn

Vi ser att 64 000M är samma sak som 6MM + 4 000M, som vi för enkelhetens skull översätter till $6 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^7$. Använder vi oss av Arkimedes numeriska system så är den första termen 6 enheter av andra ordningen och den andra termen är 4 000M enheter av första ordningen. Arkimedes säger då att det här talet är mindre än 10 enheter av andra ordningen, det vill säga i modern språk $10 \cdot 10^8 = 10^9$. Vi ökar nu stegvis sfärens diameter genom att varje gång multiplicera med 100, tills vi når kosmos diameter som är mindre än 100MM stadier. Det betyder att sfärens volym multipliceras med 100M varje gång.

En sfär med diametern 100 fingerbredder rymmer mindre än 100M · 10 enheter sandkorn av andra ordningen

Arkimedes använder sig nu om seriens olika termer, som vi tog i föregående kapitel, för att gå vidare med sina beräkningar. En sfär med diametern;

100 fingerbredder $<$ 100M $\cdot$ 10 enheter av andra ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 10:e term) $=$ seriens 16:e term $=$ 1 000M enheter av andra ordning

1 stadion ($<$ en myriad fingerbredder) $<$ 100M $\cdot$ 1 000M enheter av andra ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 16:e term) $=$ seriens 22:a term $=$ 10M enheter av tredje ordningen.

100 stadier $<$ 100M $\cdot$ 10M enheter av tredje ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 22:a term) $=$ seriens 28:e term $=$ 1 000 enheter av fjärde ordningen.

En myriad stadier $<$ 100M $\cdot$ 1 000 enheter av fjärde ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 28:e term) $=$ seriens 34:e term $=$ 10 enheter av femte ordningen.

100M stadier $<$ 100M $\cdot$ 10 enheter av femte ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 34:e term) $=$ seriens 40:e term $=$ 1 000M enheter av femte ordningen.

MM stadier $<$ 100M $\cdot$ 1 000M enheter av femte ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 40:e term) $=$ seriens 46:e term $=$ 10M enheter av sjätte ordningen

Nästa steg i uträkningen är det vi är intresserade av eftersom vi redan konstaterat att kosmos diameter är mindre än 100MM stadier, och det får vi om vi nu multiplicerar med 100.

100MM stadier $<$ 100M $\cdot$ 10M enheter av sjätte ordningen $=$ (seriens 7:e term) $\cdot$ (seriens 46:e term) $=$ seriens 52:a term $=$ 1 000 enheter av sjunde ordningen.

Arkimedes menar alltså att det max får plats 1 000 enheter sandkorn av sjunde ordningen i kosmos, vilket vi skulle beteckna som 1 000 · $10^{48} = 10^3 \cdot 10^{48} = 10^{51}$ sandkorn i solsystemet. Men han fortsätter sedan att beräkna hur många sandkorn som får plats i fixstjärnornas sfär. Enligt Aristarkos så är diametern av fixstjärnornas sfär < en myriad av kosmos diameter. Volymen av fixstjärnornas sfär är alltså en myriad av andra ordningen gånger kosmos. Antal sandkorn som får plats i fixstjärnornas sfär är alltså;

> Fixstjärnornas sfär $<$ M enheter av andra ordningen · 1 000 enheter av sjunde ordningen $=$ (seriens 13:e term) $\cdot$ (seriens 52:a term) $=$ seriens 64:e term $=$ 1 000M enheter av åttonde ordningen.

Det får alltså plats 1 000M enheter av åttonde ordningen i fixstjärnornas sfär. I modernt språk betyder detta 1 000M · $10^{56} = 10^7 \cdot 10^{56} = 10^{63}$ sandkorn får plats i fixstjärnornas sfär.

7. Sammanfattning

Det går att visa hur många sandkorn det får plats i kosmos samt i fixstjärnornas sfär, vilket Arkimedes gjorde, och samtidigt uttrycka det relativt kort. Han är egentligen inte ett dugg intresserad av resultatet utan det han vill är att visa att det faktiskt fungerar och att det finns så stora tal som går att uttrycka. Största talet i Arkimedes system är MM perioder i MM ordningen av MM enheten, och det är omöjligt att uttrycka större tal inom detta system. För att kunna gå högre upp måste man uppfinna en ny serie som inte ens är nämnd än. Systemet har alltså ingen direkt slutpunkt. Hans system visar att tal är om inte oändligt förlängningsbara så åtminstone väldigt förlängningsbara.

Referenser

[1] James R. Newman (1977), Sigma, En matematikens kulturhistoria sammanställd och kommenterad, Bonniers Grafiska Industrier AB, Stockholm, band 4

[2] E.J. Dijksterhuis (1938), Archimedes, Princeton University Press

[3] Thomas L. Heath (2012), The works of Archimedes, Cambridge University Press

[4] Rudolf von Erhardt & Erika con Erhardt-Siebold (1942), Archimedes´ Sand-Reckoner: Aristarchos and Copernicus, The University of Chicago Press

[5] Reviel Netz (2003), The Goal of Archimedes´ Sand-Reckoner, Academic Printing & Publishing

[6] Alan E. Shaprio (1975), Archimedes's measurement of the sun's apparent diameter, University of Minnesota