SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Ett problem som bottnar i ytan - en uppsats om Eulers polyederformel

av

Jesper Nelsén

2012 - No 18

Ett problem som bottnar i ytan - en uppsats om Eulers polyederformel

Jesper Nelsén

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Christian Gottlieb

2012

Stockholms Universitet Jesper Nelsén
Matematiska institutionen
Matematik för lärare, självständigt arbete 15 hp

Sammanfattning

Polyedrar har antagligen studerats så länge människor har sysslat med någon sorts matematik. Antikens greker lade ner mycket möda på att undersöka olika polyedrar egenskaper och man mätte vinklar, längder och ytor. Polyedrars geometri var en i stort sett färdigutvecklad gren av matematiken, men på 1700-talet hände någonting revolutionerande. Leonhard Euler, en schweizisk matematiker, slutade mäta olika delar av en polyeder och började istället räkna dem. Han insåg att det fanns ett samband mellan en polyeders hörn, kanter och sidor om man räknade dess antal. Summan av hörnen och sidorna översteg antalet kanter med 2, oavsett vilken polyeder han undersökte. För en polyeder med H hörn, K kanter och S sidor gäller alltså H+S=K+2, eller som man skriver det idag: H-K+S=2.

Det här sambandet kallas Eulers polyederformel, och i den här uppsatsen undersöker vi hur formeln kom till, vad den innebär och hur man kan bevisa den. Vi kommer att se att den går att bevisa på flera olika sätt genom att använda vitt skilda metoder. Den här uppsatsen behandlar även hur formeln bidrog till matematikens utveckling och hur den låg till grund för en ny gren inom matematiken som vi idag kallar topologi.

Stockholms Universitet Jesper Nelsén
Matematiska institutionen
Matematik för lärare, självständigt arbete 15 hp

Innehållsförteckning

Stockholms Universitet Jesper Nelsén
Matematiska institutionen
Matematik för lärare, självständigt arbete 15 hp

Inledning

Read Euler, read Euler. He is the master of us all
- *Pierre Simon de Laplace*

Varje gång mitt arbete med den här uppsatsen har kommit på tal har det renderat en och samma fråga: Vad skriver man om i en uppsats om matematik? Jag ställde själv samma fråga innan arbetet påbörjades, och jag har förståelse för att frågan dyker upp. Inom matematik bedriver man inte forskning på samma sätt som inom andra vetenskaper. Man prövar inte hypoteser och utför inga experiment på samma sätt som inom exempelvis fysiken. Empiri har överhuvudtaget ingen plats i matematiken, som bygger helt och hållet på rationellt tänkande och logisk stringens. Man kan hävda att matematik är vår ”renaste” vetenskap, på vilken alla andra vetenskaper vilar[1]. Det här leder ofta, har jag märkt, till att folk tror att matematiken är ”klar” och att matematiker bara sitter och räknar på saker och ting dagarna i ända, alternativt att man måste vara ett geni av sällsynt skådat slag för att komma med något nytt. Jag kan glädjande nog säga att inget av det är sant.

Det här är en uppsats om matematik. Den är dock inte fylld av ekvationer sida upp och sida ner, inte heller förekommer speciellt många beräkningar eller ens siffror. Faktum är att det inte är någonting i den här uppsatsen jag kan ta åt mig äran för, förutom att jag har skrivit texten. All matematik som återfinns häri är dock helt och hållet andras förtjänst.

Det här är en uppsats om en gren inom matematiken som kallas topologi och som är något av en vit fläck på den svenska skolans matematikkarta. Uppsatsen kommer att behandla en formel som skrevs av Leonhard Euler (1707-1783), en schweizisk matematiker som är allmänt känd som en av de främsta någonsin. Han levde på 1700-talet och hans betydelse för nästan samtliga delar av matematiken går inte att överdriva, och spåren efter hans gärning har alla någon gång stött på. Alla som någon gång har läst matematik i skolan känner exempelvis igen symbolen π, vilket är tack vare Euler. Ungefär i mitten av hans liv skrev han två artiklar om polyedrar. En polyeder är en tredimensionell kropp (eller yta, om man vill), som till exempel en kub eller en pyramid. Euler kom på att om man räknar antalet hörn, kanter och sidor på en viss sorts polyeder och sedan adderar antalet hörn och antalet sidor, kommer dessa båda överstiga antalet kanter med två. Formeln, som vi skriver H-K+S=2 och där H är antalet hörn, K antalet kanter och S antalet sidor, kallas för Eulers polyederformel. En kub har till exempel sex sidor: en kvadrat på toppen, en kvadrat i botten och fyra kvadrater runtom. De här kvadraternas sidor utgör kubens kanter. Det finns fyra kanter som omger ”locket”, fyra kanter som omger ”botten” och fyra vertikala kanter på sidorna. Sammanlagt har en kub alltså 12 kanter. Varje kant går mellan två hörn, och kuben har fyra övre och fyra nedre hörn, alltså

[1] För en komisk illustration, se http://www.xkcd.com/435/

sammanlagt åtta stycken. Polyederformeln ger då mycket riktigt att 8-12+6=2. För att den här formeln ska gälla kan vi lite förenklat säga att om polyedern är gjord av gummi ska den gå att blåsa upp till en sfärisk ballong. Det här kan man göra med bland annat kuber och pyramider.

Att räkna hörn, kanter och sidor på en polyeder kan tyckas enkelt, och det är det också. Målet med denna uppsats är inte att grotta ner mig i någon avancerad matematik. Mitt mål är att istället kunna presentera en överskådlig, grundläggande och förhoppningsvis intressant redogörelse för hur Eulers relativt okända polyederformel kom till, hur den kan bevisas på olika sätt och vad den innebär. Jag har försökt skriva uppsatsen på ett sådant sätt att den lockar till läsning även om man inte har studerat speciellt mycket matematik. Några djupare matematiska kunskaper är heller inget krav, utan uppsatsen vänder sig till alla. Har man klarat av grundskolans matematik bör man förstå de uträkningar som förekommer. I vissa fall kan man behöva läsa om en mening, eller ett helt stycke, innan man förstår. Så var det i alla fall för mig när jag läste in mig på materialet.

Jag har valt att inte lägga någon vikt vid vad formeln kan användas till. Det här beror dels på att jag skulle ha haft svårt att sålla bland materialet och det hade lätt kunnat bli för rörigt och avancerat. Det beror också på att jag vill låta formeln själv stå i fokus. Jag har aldrig varit förtjust i frågan ”vad är det här bra för?” när det gäller matematik, utan tycker att matematik kan läsas för matematikens skull. Precis som en dikt eller ett musikstycke kan ha sitt existensberättigande i att det är vackert kan ett matematiskt bevis ha det.

Med det sagt önskar jag en trevlig läsning, och ber läsaren att då och då reflektera över den enkelheten och briljansen i H-K+S=2, ty det är dessa två egenskaper som gör Eulers polyederformel till något vackert.

Vem var Leonhard Euler?

Leonhard Euler föddes den 15 april 1707 i närheten av Basel, Schweiz. Han växte upp i ett religiöst hem, och tanken var att han skulle följa i sin fars fotspår och bli präst. När han vid 14 års ålder började studera vid universitetet i Basel var det därför teologi och hebreiska som blev hans ämnen. Under sin uppväxt hade han undervisats i matematik av sin far, som, även om han inte själv var matematiker, hade studerat matematik under Jacob Bernoulli (1654–1705), en på den tiden tämligen berömd matematiker. Leonhard visade tidigt prov på stor matematisk talang, och uppvisade även ett häpnadsväckande minne. Han memorerade dikter och fakta lika bra som matematik. Han kunde utföra avancerade aritmetiska beräkningar i huvudet, och kunde de sex första potenserna av alla tal upp till hundra (sjättepotensen av 57, för att ta ett exempel, är 34 269 447 249). Hans matematiska talang upptäcktes även av Johann Bernoulli (1667–1748), yngre bror till Jacob, tillika vän med Leonhards far och även professor vid universitetet. Johann var en av dåtidens ledande matematiker, och såg stor potential i Leonhard. Han började därför undervisa Leonhard på fritiden, och blev något av en mentor för honom. Han rekommenderade matematisk litteratur och varje lördag träffades de båda för att gå igenom de frågor och funderingar Leonhard hade.

Vid 17 års ålder tog Euler sin examen i filosofi och fortsatte sedan på sin teologiska bana. Längtan efter matematiken var dock alltid närvarande, och efter övertalning av Johann Bernoulli gick Eulers far med på att låta honom byta karriär.

Euler gjorde tidigt avtryck i den matematiska världen. Som nittonåring fick han ett erkännande vid en internationell tävling anordnad av den franska vetenskapsakademien. Eulers uppsats handlade om den optimala placeringen av master på ett fartyg, och renderade visserligen inte en vinst, men väl ett hedersomnämnande. Förutom hans unga ålder gör det faktum att Euler aldrig hade sett ett skepp till havs med egna ögon bedriften än mer imponerande. Euler skulle under årens lopp vinna första pris i tävlingen tolv gånger.

1726 erbjöds Euler en tjänst vid den nystartade akademien i St Petersburg. Akademien hade uppförts av Peter den store, som ett led i hans reformation och modernisering av landet. Då Rysslands tidigare utbildningssystem varit i stort sett obefintligt var beståndet av ryska akademiker minst sagt skralt, och man var därför tvungen att anställa utländska sådana. Två av dessa var Eulers vänner Nicolaus (1695–1726) och Daniel (1700-1782) Bernoulli, söner till Johann Bernoulli. De började direkt sin övertalningskampanj för att få Euler till akademien. Redan 1726, två år efter akademiens öppnande, blev Euler erbjuden en tjänst vid avdelningen för medicin och fysiologi.

Då Euler inte var utbildad inom medicin och fysiologi stannade han kvar i Schweiz och studerade dessa ämnen vid universitetet. Han väntade även på svar angående sin jobbansökan vid fakulteten för fysik. När det jobbet gick till någon annan begav han sig våren 1727 till St Petersburg, men hans ankomst sammanföll med kejsarinnan Katarina I död. Vid akademien uppstod då något av ett tumult, vilket resulterade i att Euler tillslut hamnade vid avdelningen för matematik och fysik, vilket givetvis passade honom bättre.

Livet i St Petersburg passade Euler väl. Han hade gott om tid att studera och forska på egen hand, när han inte var upptagen med att agera konsult och rådgivare åt ryska staten. Han skapade kartor, testade vapendesigner, undersökte fartygskonstruktioner och var på andra sätt behjälplig.

Vid 26 års ålder övertog han professuren i matematik efter Nicolaus Bernoulli, och gifte sig samma år med Katarina Gsell. Tillsammans fick de 13 barn, men åtta av dem dog i tidig ålder, och endast tre levde längre än sina föräldrar. Det här innebar dock inte att Eulers kreativitet minskade, utan han fortsatte skriva artiklar om all form av matematik, fysik och annat. När han förlorade synen på ena ögat 1738 konstaterade han blott att ”nu kommer jag ha färre distraktioner”. Inte ens förlusten av synen på andra ögat, vilket ledde till att han nästan var helt blind de sista sjutton åren av sitt liv satte stopp för hans skapande. Han hade helt enkelt matematiken i huvudet och dikterade för andra.

På grund av politisk turbulens och ett allt mer fientligt klimat i Ryssland lämnade Euler St Petersburg 1741 och flyttade till Berlin. Euler sa själv att han ”nyss kommit från ett land där alla som talar blir hängda” som svar på den preussiska drottningmoderns fråga om varför han var så tystlåten. Livet i Berlin skulle dock komma att kantas av osämja mellan Euler och den tyske kejsaren Frederick II. Besluten att bli en upplyst och kulturell härskare återupplivade han Berlins något anonyma akademi, vilket bland annat innebar att locka till sig Euler. Frederick var dock inte någon stor beundrare av matematik, utan föredrog kultur, filosofi och övrig humaniora. Han vurmade speciellt för allting franskt. Franska blev akademiens officiella språk och Frederick umgicks hellre med sofistikerade fransmän, såsom Voltaire, än med trista och torra tyskar. Efter några år blev det således spänningar mellan de båda. Euler var dock en väldigt viktig och produktiv del av akademien, och statsapparaten hade stor nytta av hans jobb inom diverse områden. Vad han än tyckte om Euler och matematik kunde inte Frederick förneka Eulers betydelse för akademien, varför han var motvillig till att låta honom lämna när St Petersburg försökte få honom att komma tillbaka. I Ryssland var Euler fortfarande högt aktad. Han hade fortsatt vara redaktör för St Petersburgakademiens tidskrift och bidrog regelbundet med artiklar. Kejsarinnan Katarina II var, till skillnad från Frederick, förtjust i matematik och naturvetenskap och erbjöd Euler allt han önskade för att återvända, vilket han också gjorde. 1766, 59 år gammal, återvände Euler till akademien han hade lämnat 25 år tidigare. I takt med hans stigande ålder ökade även hans produktivitet. Regeln att en matematikers kreativitet försvinner när man närmar sig fyrtio verkade inte gälla för Euler, som istället upplevde sina mest produktiva år väl tillbaka i St Petersburg. Detta trots att han blev blind på båda ögonen och fick diktera för sina söner.

Euler producerade matematik fram till sitt livs sista dag, och avled i sitt hem den sjunde september 1783, 76 år gammal. Han hade då hunnit med att ge ut 866 arbeten inom nära nog alla matematiska fält. Han skrev om bland annat geometri, matematisk analys, aritmetik, talteori, algebra och trigonometri såväl som olika arbeten om astronomi, mekanik och optik. Inom samtliga områden gjorde han dessutom betydande forskning och banbrytande upptäckter. Listan över matematiska formler, satser och beteckningar som bär Eulers namn eller som härstammar från Euler kan göras lång (ett humoröst talesätt jag stött på är att allt inom matematiken är namngett efter personen som kom på det efter Euler). Att ge en redogörelse för Eulers bidrag till matematiken eller ens försöka lista hans viktigaste bidrag är en uppgift lika svår som den är omfattande, och det ligger utanför den här uppsatsens ramar såväl som författarens matematiska kunnande.

Några av de mest berömda och kända saker som Euler ska ha äran för är dock Eulers identitet $e^{i\pi}+1=0$, användandet av symbolerna π, e, i och $f(x)$ med flera och diverse populära läroböcker, såsom *Introductio in analysin infinitorum* (”Introduktion till analys av det oändliga”). Den här uppsatsen ska behandla Eulers polyederformel, ett område Euler inte behandlade särskilt omfångsrikt, men däremot väldigt revolutionerande.

Vad är en polyeder?

Ordet polyeder härstammar från grekiskans "poly", vilket betyder många, och ”hedra”, som betyder säte. En polyeder var alltså från början något som hade många säten den kunde ställas på. Sedan Arkimedes dagar har hedra dock avsett en sida på polyedern, varför ”många sidor” är en passande översättning. Alla sidor på en polyeder utgörs av polygoner. Exempel på polyedrar är pyramider och kuber.

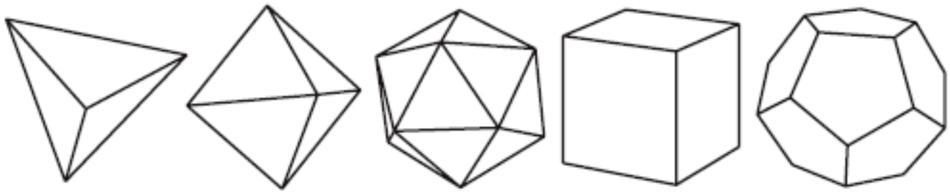
Studierna av polyedrar var under en lång tid inriktade på de mätbara aspekterna. Det var faktiskt inte förrän på 1600-talet som Descartes såg på polyedrar med kombinatoriska ögon och började räkna antalet sidor, vinklar och hörn samt förhållandet mellan dessa antal. Hans texter om detta var dock försvunna under ett par hundra år, så när Euler upptäckte samma saker hundra år senare trodde han och alla andra att han var först (huruvida Descartes eller Euler bör få äran för upptäckten av sambandet H-K+S=2 diskuteras senare). Euler var dock först med att införa begreppet ”kant”, något som skulle visa sig direkt avgörande för uppkomsten av hans berömda polyederformel.

I början var det som sagt mätbara aspekter som undersöktes: längder, areor och vinklar mättes och sattes i förhållande till varandra. Som med mycket annat var det i antikens Grekland som mycket av den här kunskapen grundlades. Deras förkärlek till geometri gjorde polyedrar till utmärkta objekt att studera, och man upptäckte snart att vissa polyedrar var mer speciella än andra, nämligen de regelbundna polyedrarna. En regelbunden polyeder är en polyeder som uppfyller följande krav:

1. Polyedern är konvex
2. Varje sida är en regelbunden polygon
3. Alla sidor är kongruenta
4. Varje hörn omges av samma antal sidor.

För sakens skull kan det vara värt att nämna att en regelbunden polygon är en polygon där alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora. Det är också av vikt att konstatera att en konvex polyeder är en polyeder som utgörs av en konvex mängd punkter. Varje rät linjestycke som sammanbinder två punkter i en polyeder eller på dess yta innesluts alltså av polyedern. Om man ser på en polyeder som ihålig, det vill säga endast bestående av dess yta, innebär konvexiteten att två punkter på dess yta sammanbinds av ett linjestycke som aldrig går utanför polyedern. Man kan också uttrycka det som att en konvex polyeder aldrig buktar inåt.

Grekerna kunde bevisa att det endast finns fem regelbundna polyedrar (figur 1): tetraedern (fyra trianglar), oktaedern (åtta trianglar), ikosaedern (20 trianglar), kuben (sex kvadrater) och dodekaedern (12 pentagoner). Grekernas bevis lämnas därhän, men man kan även visa att det endast finns dessa fem regelbundna polyedrar med hjälp av Eulers formel, vilket vi gör senare.



Figur 1 – De fem regelbundna polyedrarna: tetraedern, oktaedern, ikosaedern, kuben och dodekaedern

De fem regelbundna polyedrarna är kända som de platonska kropparna, efter den grekiska filosofen Platon. Han trodde att allting var uppbyggt av de regelbundna polyedrarna, på samma sätt som andra har ansett att allting består av de fyra elementen eller av atomer. Senare skulle även Johannes Kepler (1571-1630), en framstående matematiker och astronom på 1500-talet, komma att använda de fem platonska kropparna för att bygga upp en modell av universum. Han var djupt troende och ansåg att Gud måste ha använt matematiken och dess skönhet när han skapade världen. Han var övertygad om att skönheten hos de fem platonska kropparna utgjorde grunden för universums uppbyggnad, och han utarbetade olika modeller under hela sitt liv (av uppenbara skäl blev ingen av dem särskilt lyckad). Kepler gjorde emellertid även värdefulla upptäckter inom fältet för polyederstudier. Han återupptäckte de arkimediska kropparna, vilka var okända för honom. De arkimediska kropparna upptäcktes av Arkimedes, och han kallade dem semiregelbundna kroppar. Likt regelbundna polyedrar är en semiregelbunden polyeder konvex med regelbundna polygoner som sidor, men vi tillåter att sidorna utgörs av olika polygoner. Dock måste alla sidor med samma antal sidor vara kongruenta och alla hörn måste vara identiska. Med ”identiska hörn” menas att i varje hörn möts samma kombination av polygoner, till exempel att det i varje hörn möts två hexagoner och en pentagon. Arkimedes fann 13 sådana polyedrar och Kepler visade att det inte fanns fler. Han upptäckte ett par stjärnpolyedrar, polyedrar som inte är konvexa med som ändå har en punkt i sitt innanmäte som ”ser” alla punkter på polyederns yta. Kepler noterade även att de fem platonska kropparna hade en parvis antisymmetrisk koppling. Kuben är antisymmetrisk med oktaedern, dodekaedern är antisymmetrisk med ikosaedern och tetraedern är självsymmetrisk. Att kuben och oktaedern är antisymmetriska betyder att kuben har åtta hörn och sex sidor, medan oktaedern har sex hörn och åtta sidor. Båda har 12 kanter, och man kan således skriva in den ena i den andra genom att para ihop varje hörn med motsvarande sida, så att varje hörn hamnar i mitten på en sida. På samma sätt har ikosaedern och dodekaedern 12 respektive 20 hörn, 20 respektive 12 sidor och 30 kanter. Tetraedern har fyra hörn, fyra sidor och sex kanter, och är således självsymmetrisk och kan skrivas in i sig själv på motsvarande sätt. Man kallar den inskrivna polyedern för dual till den omgivande polyedern, och det är begrepp som senare har vidareutvecklats och återfinns inom många olika matematiska områden. Märk väl att dualiteten går åt båda håll: oktaedern kan skrivas in i kuben på ovan nämnda sätt, och är således kubens dual, men på samma sätt kan kuben skrivas in i oktaedern, varför kuben är oktaederns dual.

Någon allmängiltig definition av polyedrar är svår att hitta, och alltsedan antiken har olika definitioner funnits, beroende på vem det är som har undersökt dem, och i vilket syfte. Från början ansågs polyedrar vara solida, men på senare tid har man även sett polyedrar som ihåliga, med endast ett skal av polygoner. Synen på polyedrar som solida kroppar var länge så allmänrådande att det antogs implicit att så var fallet. Faktum är att polyedrar länge kallades för just solider och Eulers första verk om polyedrar hette just *Elementa doctrinae solidorum*.

En annan aspekt angående polyedrars beskaffenhet som också väldigt länge sågs som självklar var att de var konvexa. Att en polyeder är konvex betyder att den inte har några inåtbuktningar, det vill säga att om man väljer två godtyckliga punkter på en polyeders yta kommer ingen del av sträckan mellan punkterna ligga utanför polyedern. Att konvexitet ansågs vara självklart i början är inte heller så konstigt om man tänker sig att en polyeders alla sidor kan fungera som säten. En sådan polyeder måste vara konvex.

För att kunna bevisa något måste man först ha en ordentlig definition att utgå ifrån. Eulers bevis av polyederformeln är till exempel inte vattentätt, delvis för att han inte är tillräckligt noggrann med sina definitioner. Ett försök till definition skulle kunna vara att en polyeder är en tredimensionell figur där varje sida är en polygon, varje kant delas av precis två sidor, och i varje hörn möts minst tre kanter. En sådan definition tillåter dock att två pyramider som delar ett hörn är en polyeder, någon som kan förefalla märkligt. Lägger man till kravet om konvexitet slipper man sådana problem, men då diskvalificerar man istället alla icke-konvexa kroppar, vilket givetvis inte är rimligt.

Innan vi ger oss i kast med innebörden av Eulers polyederformel behöver vi klargöra vissa begrepp. Först och främst kan vi se att en polyeder är uppbyggd av noll-, en- och tvådimensionella komponenter. De nolldimensionella komponenterna är de punkter vi kallar för polyederns hörn, de endimensionella komponenterna är de linjestycken vi kallar för polyederns kanter och de tvådimensionella komponenterna är de plana ytstycken vi kallar för polyederns sidor. I varje hörn möts alltså minst tre kanter och tre sidor, i varje kant möts precis två sidor och varje sida avgränsas av minst tre kanter. Vidare kan vi konstatera att varje kant går mellan två hörn.

Det står klart att dessa tre komponenter är de enda vi behöver för att konstruera en polyeder, oavsett hur den ser ut. Huruvida den är konvex, solid eller regelbunden spelar ingen roll, varje polyeder kan sägas bestå av ett visst antal hörn, kanter och sidor. Hur dessa antal förhåller sig till varandra är inte helt självklart. Man kan skaffa sig en ledtråd genom att undersöka olika polyedrar och försöka hitta ett samband. Vi ska göra detta, och se om vi kommer fram till något. Vi börjar med de fem regelbundna polyedrarna:

	Hörn	Kanter	Sidor
Tetraeder	4	6	4
Kub	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Ikosaeder	12	30	20
Dodekaeder	20	30	12

Om vi låter fantasin flöda för ett litet tag kan vi tänka oss att det var såhär Leonhard Euler gick tillväga, där han satt vid sitt arbetsbord och funderade. Det tog säkerligen inte lång tid innan han upptäckte att antalet hörn och sidor översteg antalet kanter med två, och såg att det gällde för varje polyeder han undersökte. Euler själv skrev det här sambandet som H+S=K+2, men vi ska använda oss av formen H-K+S=2. Den här formeln är känd som Eulers polyederformel.

Vad är Eulers polyederformel?

Eulers polyederformel säger att för varje konvex polyeder med H hörn, K kanter och S sidor, gäller sambandet H-K+S=2. Det kan vid en första anblick tyckas vara trivialt och blott en enkel räknelek, men sambandet innehåller mycket mer än så. Formeln skapar inte bara ett samband mellan antalet hörn, kanter och sidor i en viss polyeder, den skapar ett samband som är giltigt för alla konvexa polyedrar och den skapar också ett samband mellan alla konvexa polyedrar. Den berättar att även om två konvexa polyedrar ser väldigt olika ut och skiljer sig mycket åt gällande antal hörn, kanter och sidor finns det ändå något som förenar dem. Faktum är att Eulers forskning om polyedrar, den han själv kallade stereometri, som mynnande ut i polyederformeln kom att bli ett av fundamenten för en helt ny gren inom matematiken: topologin.

Ordet topologi härstammar från grekiskan och betyder ungefär ”platsstudier”. Inom topologin studerar man egenskaper som inte förändras hos objekt när objekten själva utsätts för en kontinuerlig deformation, såsom töjning. Man tittar på punkters förhållande till varandra istället för deras metriska proportioner. Inom topologin är exempelvis en cirkel och en kvadrat lika, eftersom man kan göra om en cirkel till en kvadrat utan att ändra den inbördes ordningen bland punkterna som utgör cirkeln. Det enda som krävs är att man drar lite i cirkeln för att få till fyra hörn. På samma sätt kan man göra om en sfär till en kub genom att platta till den och omforma den lite. Kuben och sfären är alltså topologiskt lika. Vi kommer återkomma till vad som menas med topologisk likhet i slutet av uppsatsen.

Det som skiljer topologin från geometrin är som sagt att topologin inte tar hänsyn till metriska proportioner, utan istället egenskaper som behålls hos ett objekt när det utsätts för exempelvis töjning eller vridning. En cirkel och en kvadrat är inte geometriskt lika, men de är alltså topologiskt lika.

Ett annat exempel på ett topologiskt objekt är kartan över Stockholms tunnelbanesystem, ytterligare ett exempel är kopplingsschemat för ett datornätverk. För tunnelbanekartan spelar det ingen roll hur långt det är mellan stationerna eller hur linjerna mellan stationerna är dragna; så länge stationerna ligger i rätt ordning är två tunnelbanekartor med olika utseende vara topologiskt lika. På samma sätt spelar det ingen roll om datorerna i kopplingsschemat är placerade i rad eller i en cirkel, eller hur långa sladdar man ritar. Om alla objekts inbördes ordning är densamma är två kopplinsscheman topologiskt lika.

Topologin har sitt ursprung i en matematisk gren som uppkom på 1700-talet och som bar namnet geometria situs, vilket kan översättas till ”platsgeometri”. Termen myntades av Gottfried Leibniz (1646-1716), som eftersökte en matematik som behandlade positioner. Senare ändrades namnet till analysis situs (”platsanalys”) och slutligen till topologi. Bland de första matematiska problemen inom geometria situs var *Königsbergs sju broar*, som handlade om huruvida det gick att passera de sju broar som fanns i Königsberg (nuvarande Kaliningrad) på den tiden utan att gå över någon bro två gånger. Euler insåg att den springande punkten i problemet var broarnas inbördes positioner och skrev 1736 artikeln *Solutio problematis ad geometria situs pertinentis* där han löste problemet och även gav en generell lösning på liknande problem. I den artikeln lade Euler grunden till grafteorin, även om han själv inte ritade några grafer.

Om Leonhard Euler och polyederformelns framväxt

Det var under 1750 och 1751 som Leonhard Euler skrev sina båda verk om vad han kallade stereometri, den tredimensionella motsvarigheten till plangeometri. På den tiden kunde det dock dröja lång tid innan artiklar publicerades. Dessa båda verk publicerades inte förrän 1758, i *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* vid akademien i Sankt Petersburg. Många matematiker var istället flitiga brevväxlare med varandra, där de kunde få en snabbare respons på nya upptäckter. Så var även fallet med Euler och hans stereometri, och i ett brev till sin kollega Christian Goldbach (1690-1764), daterat 14 november 1750, skriver han om sitt nya forskningsområde. Han vill dock inte undersöka polyedrar på ett sådant sätt man tidigare gjort, såsom att beräkna volymer eller mäta sidor och vinklar, utan hoppades istället kunna finna ett sätt att klassificera polyedrar. På samma sätt som polygoner klassificeras utifrån antalet vinklar eller sidor de har, borde polyedrar kunna klassificeras på ett liknande sätt. Att bara räkna antalet sidor är dock inte tillräckligt, eftersom en polyeder med samma antal sidor kan se ut på helt olika sätt och ha vitt skilda egenskaper i övrigt. Euler delade istället in en polyeder i noll-, en- och tvådimensionella enheter, och använde dessa kvantiteter som underlag. Han skriver i sitt brev: ”Alltså skall tre egenskaper tas i beaktande för varje solid kropp, nämligen 1) punkter, 2) linjer, och 3) plan, eller, med namn speciellt för det här syftet: 1) hörn, 2) kanter, och 3) sidor. Dessa tre olika egenskaper definierar kroppen fullständigt.”

Det finns många noterbara saker i de här benämningarna. För det första är Euler den första matematikern som benämner kanten på en polyeder. Han skriver ”förbindelserna där två sidor möts längs med dess sidor, vilken, i brist på en accepterad term, jag kallar ’kanter’”. För det andra använder Euler angulus solidus för att benämna punkten längst ut på hörnet. Tidigare har anguli solidi (hörn) använts för att beskriva hela spetsen där tre eller fler kanter möts. Ett hörn på en kub var alltså tidigare olikt ett hörn på en pyramid, men Euler beskriver det som att hörnet bara är själva punkten längst ut.

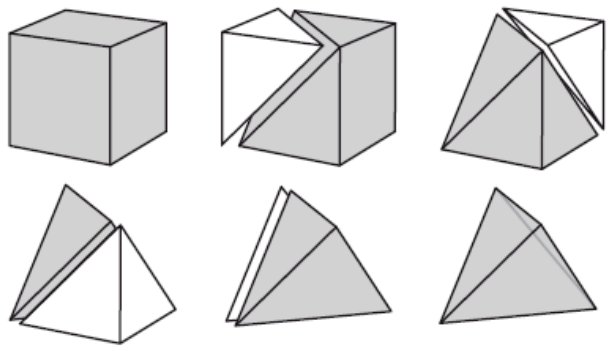
Det är också i sitt brev till Goldbach han först berättar om de samband han har funnit, och han skriver att ”i varje kropp innesluten av plana ytor är summan av antalet sidor och antalet hörn två mer än antalet kanter, eller S+H=K+2”. Euler är förvånad över att ingen tidigare har upptäckt detta samband, och även att sambandet är så svårt att bevisa att han inte har hittat något bevis han är tillfreds med.

I *Elementa doctrinae solidorum* påbörjar han sina studier med en generell diskussion angående kroppars egenskaper, innan han börjar diskutera förhållandet mellan hörn, kanter och sidor hos olika kroppar. Den diskussionen leder så småningom fram till diverse satser angående förhållandet mellan antal hörn, kanter och sidor för olika polyedrar som han bevisar. Han verifierar även sin formel H-K+S=2 för ett flertal olika fall, dock utan att kunna ge något bevis för satsen. Utöver satsen om polyederformeln pekar han även ut en annan sats, ekvivalent med satsen om polyederformeln, som viktigast, nämligen att summan av alla kantvinklar är $(\pi/2)(4H-8)=2\pi(H-2)$ med modern notation.

Det är istället i hans andra artikel, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, som ett bevis presenteras. Han bevisar även satsen om kantvinkelsumman, men den har jag valt att lämna därhän.

Innan vi ger oss i kast med Eulers bevis behövs några korta kommentarer som underlättar läsandet. Euler lägger upp sitt bevis på det sättet att han först presenterar två problem som behöver lösas, för att sedan använda dessa lösningar för att bevisa en sats. Både problemen och satsen kallar han ”propositioner”. Ordet ”proposition” bör här tolkas som en slags premiss eller ett konstaterande. Korollarierna fungerar som vanliga följdsatser, medan skolierna är kommentarer, diskussioner och slutsatser.

Bevisets struktur ser ut som sådan att han inleder med att visa hur man kan skära bort ett hörn från en polyeder så att antalet hörn minskar med ett. Han tar bort ett hörn i taget och håller samtidigt koll på antalet hörn, kanter och sidor som finns hos den resulterande polyedern, för att slutligen ha kvar en tetraeder, som uppfyller Eulers polyederformel. Genom att visa att förhållandet mellan hörn, kanter och sidor inte förändras under procedurens gång konstaterar han att formeln även måste gälla för den ursprungliga polyedern. För en kub ser tillvägagångssättet ut som i figur 2.



Figur 2 - En kub blir till en tetraeder genom att skära bort ett hörn i taget

I översättningen nedan har jag valt att utelämna de stycken som inte är relevanta för beviset av polyedersatsen (artikeln finns tillgänglig i sin helhet både på latin och på engelska, se referenslista).

Eulers bevis[2]

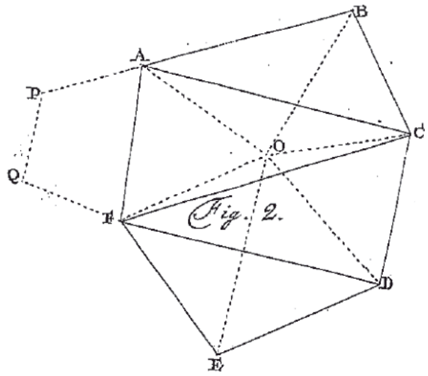
Proposition 1: Problem

Givet en kropp begränsad överallt av plana ytor, skär bort ett hörn så att antalet hörn i den resulterande kroppen är en färre till antalet.

Låt *O* (se figur) vara det hörn där kanterna AO, BO, CO, DO, EO och FO möts på ett sådant sätt att O utgörs av kantvinklarna AOB, BOC, COD, DOE, EOF och FOA, och låt punkterna A, B, C, D, E och F vara de intilliggande hörn som är anslutna till O via sträckorna AO, BO, CO, DO, EO och FO. En bit av kroppen måste nu skäras bort så att hörnet O försvinner, men

[2] Min översättning av en engelsk översättning av Eulers artikel Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, från www.eulerarchive.org

utan att ta bort någonting annat eller skapa ett nytt hörn.
Det första snittet skall göras genom ett intilliggande hörn, B, längs med planet ABC, tills man når hörnen A och C. Gör sedan ett snitt från O längs med AOC. På detta vis kommer den triangulära pyramiden OABC skäras bort från kroppen. Gör sedan ett snitt från AC till F längs med planet AFC och ett annat snitt från O längs med FOC, så att den triangulära pyramiden OACF skärs bort. Skär därefter längs med planet CDF och gör ett annat snitt från O till DF så att den triangulära pyramiden OCDF skärs bort. Slutligen, skär längs DEF för att skära bort den triangulära pyramiden ODEF. Således har hörnet O skurits bort fullständigt. Eftersom övriga hörn återstår och inget nytt hörn har tillkommit av skärandet, har antalet hörn i den resulterande kroppen minskat med ett. Q[uod] E[rat] F[aciendum].



Korollarium 1

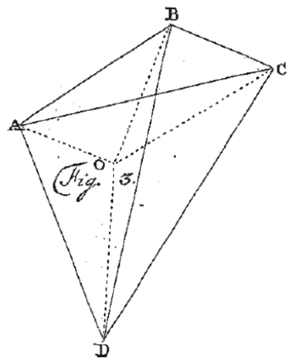
Om kroppen själv är en triangulär pyramid kommer den försvinna genom sådana här bortskärningar. Men eftersom vi skär bort delar för att reducera kroppen till en triangulär pyramid, behövs det såklart inte göras några snitt om kroppen redan är av en sådan typ.

Korollarium 2

Om det hörn O som skall skäras bort utgörs av endast tre kantvinklar, det vill säga om bara tre kanter möts i hörnet, kan det skäras bort med ett enda snitt och då kommer en triangulär pyramid tas bort.

Korollarium 3

Om hörnet O utgörs av fyra kantvinklar och samma antal kanter möts i det, behöver man skära bort två triangulära pyramider för att avlägsna det. Det här kan göras på två sätt (se figur): två pyramider behöver skäras bort, antingen OABC och OACD eller OABD och OBCD. Om punkterna A, B, C och D inte är i samma plan kommer den resulterande kroppen ha olika utseende beroende på hur man väljer att skära.



Korollarium 4

Om hörnet utgörs av fem kantvinklar, och de fem kanter som utgår från det sträcker sig till fem andra hörn, kommer hörnet O tas bort genom att skära bort tre triangulära pyramider. Det här kan göras på fem olika sätt som kommer att ge fem olika resultat, om inte de fem intilliggande hörnen ligger i samma plan.

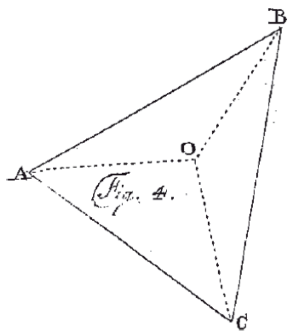
Korollarium 5

Varje hörn på en tänkt kropp kan tas bort, och om det inte bara är tre kantvinklar som utgör hörnet kan detta göras på flera sätt. Därför, om det inte redan är en triangulär pyramid, kan varje kropp bli av med ett hörn på många sätt.

Korollarium 6

Således, oavsett hur många hörn den tänkta kroppen ursprungligen har, kommer man genom att ta bort ett hörn i taget på detta sätt slutligen, när endast fyra hörn återstår, ha en kropp som är en triangulär pyramid. Eftersom varje del man har tagit bort har formen av en triangulär pyramid, kommer hela kroppen att ha blivit indelad i triangulära pyramider på detta sätt.

Skolie



Om antalet hörn i den tänkta kroppen är S, kommer antalet hörn i den resulterande kroppen vara S-1 efter att man har skurit bort ett hörn. Om kroppen är en triangulär pyramid (se figur) kommer bortskärandet av ett hörn resultera i att kroppen försvinner. För när snittet läggs längs med planet ABC, som är basen till pyramiden OABC, kommer hela pyramiden skäras bort. Men i det här fallet kan man se det som att basen ABC finns kvar. Även om det är en platt figur utan tjocklek, kan man se det som en kropp med endast tre hörn, med två sidor och tre kanter. Vi kommer alltså ha att H-K+S=2. Samma sak kommer hända med alla pyramider. Om det översta hörnet O skärs bort och hela pyramiden då försvinner, skall man se det som att basen finns kvar. Om basen är en polygon med n sidor, kommer man kunna betrakta den som en kropp där antalet hörn är H=n, antalet kanter är K=n och antalet sidor är S=2, så att vi återigen har H-K+S=2.

Emellertid, även om de här fallen inte motsäger propositionen kan vi bortse från dem. Det har ju föreslagits att alla kroppar skall reduceras till triangulära pyramiden. Om kroppen redan är sådan är det ingen mening med att skära bort några hörn. Om kroppen skulle vara en pyramid med en bas med många sidor, skulle det vara passande att skära bort ett hörn som tillhör basen och som utgörs av endast tre kantvinklar, istället för att skära bort det översta hörnet. Rent generellt är det alltid, oavsett vilken kropp man börjar med, passande att börja med att skära bort det hörn som utgörs av minst antal kantvinklar, tills man har en triangulär pyramid. Samtidigt bygger inte följande bevis på detta krav, så det finns med i slutet av diskussionen för att en uppenbar svårighet inte skall ignoreras.

Proposition 2. Problem

Om något hörn skärs bort från den tänkta kroppen på det sätt som beskrivs ovan, och antalet hörn på så sätt minskar med ett, bestäm både antalet sidor och antalet kanter hos den resulterande kroppen.

Lösning
För den tänkta kroppen, låt antalet hörn vara H, antalet sidor vara S och antalet kanter vara K. Skär bort hörnet O (se figur) på ett sådant sätt att antalet hörn efteråt är H-1. Om alla sidor som möts i O är triangulära kommer dessa sidor försvinna när vi skär bort O. Om det finns n sådana sidor kommer antalet sidor S minska med n. Men, istället kommer vi få nya triangulära sidor när vi skär bort O, nämligen ABC, ACF, CFD och DFE, och dessa är n-2 till antalet. Antalet sidor, som innan var S, kommer nu vara S-n+(n-2)=S-2.

Men om det skulle vara så att två eller fler av dessa nya trianglar ligger i samma plan, om till exempel ABC och ACF låg i samma plan, skulle de inte utgöra två, utan en enda fyrkantig sida. Antalet sidor skulle då vara S-3. Om det händer att två trianglar av den här typen ligger i samma plan u gånger, kommer antalet sidor vara S-2-u. Men, om inte alla sidor som möts i O är triangulära, utan en, till exempel AOFQP, består av fler sidor, står det klart att sidan inte försvinner helt när man skär bort triangel AOF, utan återstoden AFQP skall fortfarande räknas till antalet sidor. Således kommer antalet sidor vara S-2-u+1. Om det bland de sidor som möts i O finns v icke-triangulära sidor, kommer antalet kvarvarande sidor vara S-2-u+v.

När det gäller antalet kanter som kommer vara kvar efter bortskärandet av hörnet O, antar vi som tidigare att sidorna som möts i O är triangulära. Kanterna OA, OB, OC, OD, etc., vars antal är n, kommer först dras från antalet kanter. Istället kommer dock nya kanter AC, CF, FD, vars antal är n-3, att adderas. Det nya antalet kanter kommer alltså vara K-n+(n-3)=K-3, om det är så att de nya sidorna, ABC, ACF, etc., lutar i förhållande till varandra. Men om två av dem, ABC och ACF, befinner sig i samma plan så att de utgör samma sida kommer kanten AC försvinna och antalet kanter kommer vara K-3-1. Om två sådana triangulära sidor ligger i samma plan u gånger, som beskrivet tidigare, kommer antalet kanter vara K-3-u. Dessutom, om det är så att någon av sidorna som möts i O är icke-triangulär, till exempel sida AOFQP, kommer en ny kant AF bildas när man skär bort triangel AOF. I det här fallet kommer antalet kanter öka med ett. Men om det bland de sidor som möts i O är t stycken som är icke-triangulära, kommer antalet kanter hos den resulterande kroppen efter borttagandet av O vara K-3-u+v. Q[uod] E[rat]I[nvestigandum]

Korollarium 2

Eftersom antalet sidor, som innan var S stycken, är S-2-u+v efter att vi skurit bort O, är det tydligen möjligt att antalet sidor skulle kunna öka. Det kommer vara fallet om v>2+u, där v och u är de värden som angavs i lösningen.

Korollarium 3

Det står klart att samma sak kan hända med antalet kanter, som innan borttagandet av hörn O var K till antalet, men som efteråt är K-3-u+v. Det värdet är större än det förra om v>3+u. I sådana fall kommer antalet sidor öka ännu mer.

Korollarium 4

Eftersom u och v motsvarar samma värden i S-2-u+v som i K-3-u+v, står det klart att minskningen av antalet kanter K är ett större än minskningen av antalet sidor Y. Alltså, om antalet sidor efter borttagandet av ett hörn är Y-u, kommer antalet kanter vara K-u-1.

Korollarium 5

Det följer att skillnaden mellan antalet sidor och antalet kanter, som i början var K-S, nu efter borttagandet av ett hörn är lika med K-S-1. Oavsett hur den resulterande kroppen ser ut kommer skillnaden alltid minska med ett genom beräkningen av variablerna u och v.

Skolie

Utifrån ovanstående kommer det nu vara möjligt att väldigt enkelt bevisa ovan nämnda satser. De här bevisen är på intet sätt underlägsna de som används inom geometrin, förutom att vi här, på grund av kroppars natur, måste använda mer fantasi eftersom kropparna är avbildade på en plan yta. Men om fysiska kroppar av den här typen skulle tillverkas, skulle allting vara lika tydligt. Men de saker jag har antagit i lösningen till problemet är giltiga i sig själva, för om du tar en polygon ABCDEF som innesluts av n sidor står det snart klart för den som ägnar saken en tanke, att om du delar in figuren i trianglar med diagonala linjer, kommer antalet trianglar vara n-2 och antalet dragna diagonaler vara lika med n-3. En fyrhörning delas in i två trianglar av en diagonal, en femhörning delas in i tre trianglar av två diagonaler, en sexhörning delas in i fyra trianglar av tre diagonaler, osv.

Proposition 4. Sats

För varje kropp som innesluts av plana ytor är antalet sidor tillsammans med antalet hörn två mer än antalet kanter.

Bevis

Låt följande gälla för varje given kropp:

Antalet hörn = H

Antalet sidor = S

Antalet kanter = K

Som vi såg tidigare, att om H minskas med 1 genom att skära bort ett hörn, så att antalet nu är H-1, kommer skillnaden mellan antalet kanter och antalet sidor vara K-S-1. Därför, om man fortsätter med bortskärandet, och

antalet hörn är	kommer antalet kanter överstiga antalet sidor med
H	K-S
H-1	K-S-1
H-2	K-S-2
H-3	K-S-3
…	…
H-n	K-S-n

Därför, på det här sättet kommer vi slutligen få en triangulär pyramid där antalet horn är 4, antalet sidor är 4 och antalet kanter är 6, så att antalet kanter är två större än antalet sidor. Det är givet att om H-n=4 är K-S-n=2. Det följer att n=H-4, och n=K-S-2. Således gäller att H-4=K-S-2, eller S+H=K+2

Härav följer att för varje kropp innesluten av plana ytor överstiger antalet sidor tillsammans med antalet hörn antalet kanter med två. V.S.B.

Diskussion om Eulers bevis

Att Euler ser på polyedrar som solida kroppar framgår tydligt, då han både refererar till dem som ”solider” och även bygger sitt bevis på att man kan skära bort hörn. När man endast har en triangulär pyramid kvar har hela den ursprungliga polyedern blivit uppdelat i triangulära polyedrar, vilket inte hade varit möjligt om polyedern hade varit ihålig.

Han är dock inte lika tydlig med huruvida polyedern behöver vara konvex eller inte. Visserligen talar han om en kropp begränsad av plan vilket implicerar konvexitet (tänk er en lerklump man formar till en polyeder genom att trycka den mot marken ett antal gånger; lerklumpen kommer få plana ytor, men inget hörn kommer bukta inåt), men uttalar inget krav på att polyedern behöver vara konvex. Han nämner inte heller behovet av att polyedern fortsätter vara konvex under hela procedurens gång. Vi kommer strax se att denna otydlighet orsakar vissa problem. Polyedrar hade emellertid alltid setts som konvexa och solida, och man kan anta att Euler helt enkelt såg dessa egenskaper som underförstådda.

Eulers bevis kan sammanfattas med att han först bevisar två hjälpsatser, som han sedan använder för att bevisa sin huvudsats. Dessa två hjälpsatser, som Euler formulerar som problem, kan uttryckas såhär:

Hjälpsats 1: För varje konvex polyeder går det att ta bort ett hörn på så sätt att antalet hörn i den resulterande polyedern är ett mindre än innan.

Hjälpsats 2: Om en konvex polyeder har S sidor och K kanter, kommer polyedern, efter att ett hörn O har blivit borttaget, att ha S-2-u+v sidor och K-3-u+v kanter (där u är antalet diagonaler som ligger mellan två angränsande trianglar i samma plan, och v är antalet icke-triangulära sidor med ett hörn i O).

Alternativt Hjälpsats 2: Om en konvex polyeder har S sidor och K kanter, kommer skillnaden mellan dessa vara K-S-n när n hörn har tagits bort.

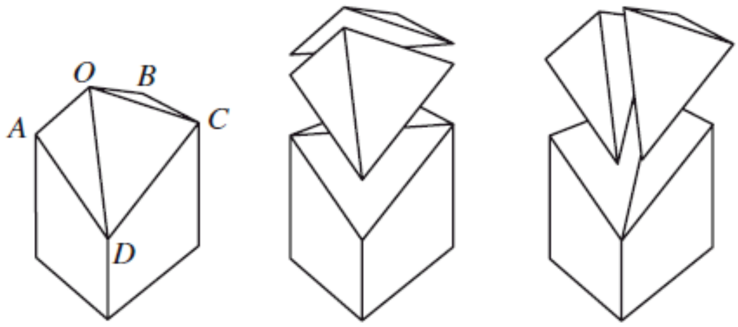
Huvudsatsen, vilken Euler benämner proposition 4, lyder sedan:

För varje kropp som innesluts av plana ytor är antalet sidor tillsammans med antalet hörn två mer än antalet kanter, det vill säga S+H=K+2.

Genom att använda sina hjälpsatser visar han att när n hörn har blivit borttagna från den ursprungliga polyedern kommer antalet kanter överstiga antalet sidor med K-S-n. En triangulär pyramid har 4 hörn, 6 kanter och 4 sidor. Antalet kanter överstiger alltså antalet sidor med 2, alltså K-S-n=2, vilket ger n=K-S-2. Vidare hade polyedern H hörn från början, och när man har tagit bort n hörn återstår 4, alltså H-n=4, vilket ger n=H-4.

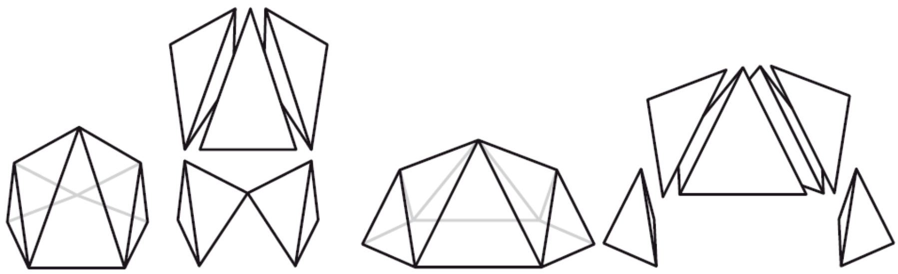
Vi har alltså H-4=K-S-2, eller S+H=K+2.

Eulers bevis är dock inte vattentätt, och det är i beviset för hjälpsats 1 vi stöter på problem. Även om polyedern från början är konvex, är det viktigt att den fortsätter att vara det genom hela proceduren. Euler påpekar, helt korrekt, att det finns flera olika sätta att skära bort ett hörn på om fyra eller fler kanter möts i det, men han nämner aldrig att vissa sätt skulle leda till problem. När han i ett fall ska skära bort hörnet O skriver han att ”… det här kan göras på två sätt … två pyramider behöver skäras bort, antingen OABC och OACD eller OABD och OBCD. Om punkterna A, B, C och D inte är i samma plan kommer den resulterande kroppen ha olika utseende beroende på hur man väljer att skära.” Figur 3 visar de två olika valen.



Figur 3 – Hörnet *O* kan tas bort på två sätt. Antingen blir den resulterande polyedern konvex (t v) eller icke konvex (t h)

Vissa sätt att skära bort ett hörn leder obönhörligen till att polyedern blir icke-konvex, och i värsta fall får vi en polyeder som sitter ihop längs en kant, i ett hörn eller som inte sitter ihop alls. I flera av dessa fall är det omöjligt att fortsätta plocka bort hörn, och vissa polyedrarna uppfyller dessutom inte Eulers formel (figur 4).



Figur 4 – Exempel på hur borttagandet av ett hörn kan resultera i felaktiga polyedrar

Huruvida Euler kände till att vissa val måste undvikas framgår inte, men då han såg på polyedrar som konvexa kroppar är det inte omöjligt att han ansåg att de val som resulterade i icke-konvexa polyedrar diskvalificerade sig själva. Han ger dock intrycket av att det inte spelar någon roll hur man skär bort ett hörn, vilket givetvis är en allvarlig lucka i hans bevis.

Euler är inte heller tillräckligt övertygande om att det alltid finns minst ett sätt att skära bort ett hörn som garanterar att polyedern fortsätter vara konvex. I sitt bevis använder han sig av ett flertal exempel där den resulterande polyedern kan vara konvex, men han visar inte att det alltid går att få en resulterande polyeder som är konvex med sin metod. För att beviset ska vara giltigt måste man kunna bevisa att det för varje konvex polyeder finns minst ett sätt att skära bort ett hörn så att den resulterande polyedern också är konvex. Om det alltid är möjligt att välja ett sådant sätt skulle Eulers bevis vara giltigt, men det lyckas inte Euler visa.

Hur man räddar Eulers bevis

En given fråga efter att ha läst Eulers bevis är: går Eulers bevis att reparera? Då det är hjälpsats 1 som ger upphov till problem blir en mer specifik frågeställning: går det att visa att Eulers metod för att ta bort ett hörn alltid kan ge en polyeder med ett hörn färre än innan, men som fortfarande är konvex? Samelson[3] visar att svaret på frågan är ja, och han gör det medelst konvexa höljen.

Det konvexa höljet av en mängd X är den minsta konvexa mängden som innehåller X. Man kan även definiera det konvexa höljet av X som snittet av alla konvexa mängder som innehåller X, då snittet av två konvexa mängder alltid är konvext. I planet är det konvexa höljet av en mängd punkter som inte ligger på samma linje en konvex polygon, och i rummet är det konvexa höljet av en ändlig mängd punkter som inte ligger i samma plan en konvex solid polyeder. Speciellt är en polyeder konvex om och endast om den är det konvexa höljet av dess hörn.

Om man ser på en polyeder som det konvexa höljet av dess hörn, motsvaras Eulers bortskärande av ett hörn att man utesluter det hörnet ur mängden hörn. Låt P vara en polyeder med hörnmängden H, och låt p tillhöra H. För att ta bort p från H tar vi det konvexa höljet av H\{p}, som vi benämner P'. Om H har fler än fyra hörn är det alltid möjligt att välja p i H så att de kvarvarande elementen i H inte ligger i samma plan, vilket försäkrar att P' är en konvex polyeder.

Med hjälp av detta synsätt på polyedrar kan man visa att Eulers metod att ta bort ett hörn där n kanter möts genom att skära bort n-2 triangulära pyramider alltid fungerar, för alla polyedrar med fler än fyra hörn. Antag att p är ett hörn där n kanter möts och att mängden S utgörs av de hörn i H som ligger intill p. Då är P''=closure(P\P') den borttagna delen av P. Genom att utgå från konvexiteten hos P och P' kan man visa att hörnmängden av P'' är {p}U S, det vill säga p och de intilliggande hörnen. Den vanligtvis icke-plana basen till P'' har då hörnmängden S, och genom att triangulera den till n-2 trianglar och sammanbinda dessa med p, kan man dela upp P'' i n-2 triangulära pyramider, medan P' fortfarande är konvex (se Samelson för ytterligare detaljer).

Om Legendre och hans bevis av Eulers polyederformel

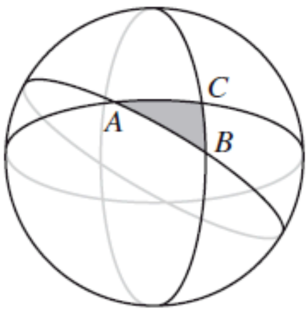
Adrien-Marie Legendre (1752-1833) var en fransk matematiker, verksam vid både Académie des Sciences i Paris och the Royal Society i London. Han arbetade inom många områden av matematiken, men hans främsta bidrag till Eulers polyederformel kom i form av en lärobok.

[3] Samelson, H (1996). In defense of Euler, http://dx.doi.org/10.5169/seals-87883

Hans *Éléments des géométrie* blev något av en ersättare till Euklides *Elementa* och den ledande läroboken i geometri de kommande hundra åren. I *Éléments* tog han upp Eulers polyederformel och spred den på så sätt till allmänheten. Legendres bevis av formeln är dock inte detsamma som Eulers, och det är inte heller någon variant eller reparerad version av det. Istället presenterar han ett helt nytt bevis som bygger på sfärisk geometri. Vid en första anblick kan det te sig märkligt att använda geometriska entiteter för att bevisa en formel som är av en mer kombinatorisk art, men vi ska se att Legendres bevis både är fiffigt och i högsta grad giltigt.

Innan vi kan ge oss i kast med Legendres bevis behöver vi först lite mer förkunskaper, samt gå igenom två andra satser.

På en sfär utgörs inte polygoners sidor av raka linjer, utan av storcirkelbågar. En storcirkel är en cirkel med samma radie som sfären själv, det vill säga alla cirklar på en sfär som har maximal radie. Om jorden hade varit en perfekt sfär hade ekvatorn och de longitudinella linjerna, det vill säga meridianerna, varit storcirklar, medan de latitudinella linjerna, parallellcirklarna, inte hade varit det. Man kan också konstatera att för varje punkt på en storcirkel finns en diametralt motsatt punkt på samma storcirkel. Storcirklar är det närmaste raka linjer man kommer på en sfär, och är längdminimerande. Det kortaste avståndet mellan två punkter på en sfär är alltså den storcirkelbåge som går mellan punkterna (det är därför flyget mellan Stockholm och New York tar vägen över Island och ankommer norrifrån).



Figur 5 – En geodetisk triangel bildad av tre storcirkelbågar

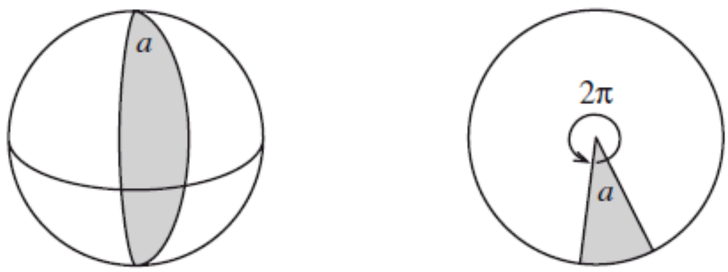
En triangel på en sfär kallas en geodetisk triangel, och dess sidor utgörs av storcirkelbågar (figur 5). Det finns både likheter och skillnader mellan geodetiska trianglar och trianglar i planet. Vi är dock mest intresserade av att vinkelsumman för en geodetisk triangel inte är lika med π radianer, utan istället alltid överstiger π radianer. Hur mycket vinkelsumman överstiger π radianer beror på triangelns storlek. Ju större triangeln är, desto mer påverkas dess vinklar av sfärens krökning. En geodetisk triangels area står alltså i proportion till dess vinkelsumma, något som följande sats visar:

Harriot-Girards sats

Arean av en geodetisk triangel på enhetssfären med vinklarna a, b och c är a+b+c-π, det vill säga arean=vinkelsumman-π.

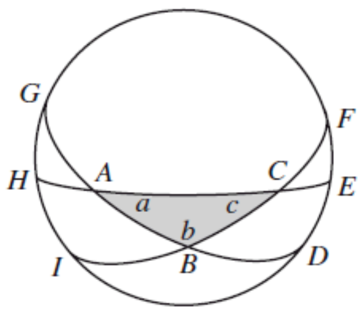
Bevis

Två geodetiska cirklar korsar varandra endast i två diametralt motsatta punkter på en sfär. Området som innesluts av två halvcirklar kallas *månskära* (figur 6). Vinkeln mellan de båda cirklarna är lika stor i båda ändarna, antag att denna vinkel är a radianer. Arean av hela sfären är 4π. Hela sfären kan sägas vara en månskära där vinkeln i båda ändarna är 2π. Arean av sfären förhåller sig då till arean av månskäran som 2π förhåller sig till a, det vill säga 4π/(arean av månskäran) är lika med 2π/a vilket ger att arean av månskäran är lika med 2a, förutsatt att det är en enhetssfär.



Figur 6 – En månskära sedd från sidan (t v) och ovanifrån (t h)

Betrakta den geodetiska triangeln ABC (figur 7) på enhetssfären med vinklarna a, b och c, som är belägen i någon hemisfär. Förläng sidorna hos ABC så att de når hemisfärens kant, i punkterna D, E, F, G, H och I.



Figur 7 – En geodetisk triangel i en hemisfär

Sfärens symmetri ger att ytorna ADE och AGH tillsammans har en area som är lika med en månskära med vinkel a. Vi har alltså att

area(ADE) + area(AGH) = arean av månskäran = 2a.

Analogt kommer trianglarna BFG och BDI ha samma area som en månskära med vinkel b och trianglarna CHI och CEF ha samma area som en månskära med vinkel c. Alltså har vi

area(BFG) + area(BDI) = 2b

och

area(CHI) + area(CEF) = 2c.

Summerar vi dessa tre ekvationer får vi

[area(ADE) + area(AGH)]+[area(BFG) + area(BDI)]+[area(CHI) + area(CEF)] = 2a+2b+2c.

I vänsterledet i ekvationen ovan adderar vi varje region av hemisfären en gång, förutom ABC som vi adderar tre gånger. Vänsterledet innefattar alltså 2*area(ABC) utöver hemisfärens area. Alltså har vi

area(Hemisfär) + 2*area(ABC) = 2a+2b+2c.

Arean av hemisfären är 2π, varför

2π+2*area(ABC)=2a+2b+2c.

Om vi arrangerar om termerna och dividerar med 2 får vi

area(ABC)=a+b+c-π.

V.S.B.

Harriot-Girards sats för geodetiska polygoner

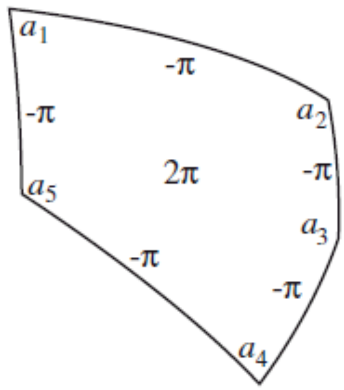
Arean av en n-sidig polygon på enhetssfären med vinklarna a_1, a_2, …, a_n är $a_1+a_2+\ldots+a_n-n\pi+2\pi$, det vill säga arean=vinkelsumman-$n\pi+2\pi$.

Bevis

En geodetisk n-sidig polygon kan delas in i n-2 geodetiska trianglar. Ytan och vinkelsumman hos dessa trianglar kommer svara mot ytan respektive vinkelsumman hos polygonen. Genom att applicera Harriot-Girads sats för arean av en geodetisk triangel på alla n-2 trianglar och summera får vi att

$$\text{area(polygon)} = a_1+a_2+\ldots+a_n-(n-2)\pi = a_1+a_2+\ldots+a_n-n\pi+2\pi. \text{ V.S.B.}$$

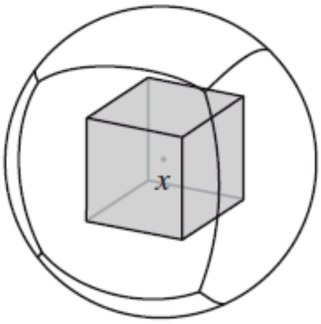
Som vi ser ovan får vi arean av en geodetisk polygon genom att addera ett antal termer. För att enkelt kunna komma ihåg formeln kan vi tänka oss en n-sidig geodetisk polygon där vi tilldelar varje sida värdet $-\pi$, mittpunkten får värdet 2π och varje vinkel tilldelas vinkelmåtten a_1, a_2, …, a_n (figur 8). Om man adderar alla dessa värden kommer sidorna bidra med $-n\pi$ till summan, vinklarna kommer bidra med $a_1+a_2+\ldots+a_n$ och polygonens mittpunkt kommer bidra med 2π. Den sammanlagda summan av dessa tilldelade värden kommer alltså motsvara polygonens area. Den här minnesregeln för arean av en geodetisk polygon kommer till hjälp när vi studerar Legendres bevis.



Figur 8 – Addera värdena i polygonen för att få dess area

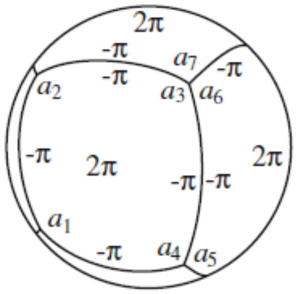
Legendres bevis

Antag att du har en konvex polyeder med H hörn, K kanter och S sidor. Låt x vara någon punkt inne i polyedern. Konstruera en sfär med radien 1 (för enkelhets skull, det har ingen betydelse för bevisets giltighet) som har sin mittpunkt i x och som innesluter polyedern helt. Vi tänker oss att x är en ljuskälla som projicerar polyederns kanter på sfären (figur 9). Polyederns sidor kommer då bilda S geodetiska polygoner på sfärens yta, då polygonernas kanter kommer vara bågar på olika storcirklar. Storcirklar är skärningen mellan sfären och ett plan genom sfärens mittpunkt.



Figur 9 – En polyeder projicerad på en sfär

Det är nu Harriot-Girards sats för geodetiska polygoner kommer in i bilden. På sfärens yta kommer det finnas S polygoner. Arean av sfärens yta är lika med summan av areorna för alla polygoner. Vi använder vår minnesregel för arean av en geodetisk polygon och tilldelar varje sida, vinkel och mittpunkt sina respektive värden (figur 10). En given n-sidig polygon på sfärens yta kommer då bidra med $-n\pi$ för sina n sidor, 2π för sin mittpunkt och $a_1+a_2+\ldots+a_n$ för sina n vinklar till arean av sfärens yta. Om vi adderar dessa värden för de S polygoner som utgör sfärens yta kommer de utgöra den sammanlagda arean av sfärens yta.



Figur 10 – Projektionen av en kub på en sfär med sina respektive värden

Varje hörn på polyedern kommer att projiceras på sfären så att vinkelsumman av de vinklar som möts i ett hörn är 2π. Då polyedern har H hörn kommer hörnen bidra med $2\pi H$ till den sammanlagda arean.

Varje kant på polyedern kommer bidra med -2π till arean, ty en och samma kant kommer utgöra en sida i två intilliggande polygoner, och få $-\pi$ från den ena sidan och $-\pi$ från den andra. Då polyedern har K kanter kommer kanterna bidra med $-2\pi K$ till den sammanlagda arean.

Varje polygons mittpunkt bidrar med 2π, och då det finns S sidor på polyedern kommer dessa bidra med $2\pi S$ till den sammanlagda arean.

Vi vet att arean av en sfär med 1 i radie är 4π. Vi har alltså att

$$4\pi=2\pi H-2\pi K+2\pi S.$$

Dividerar vi med 2π erhåller vi H-K+S=2. V.S.B.

Noterbart är att Legendre antog att polyedrar var konvexa, men Louis Poinsot (1777–1859) visade att beviset är giltigt även för stjärnkonvexa polyedrar. En polyeder är stjärnkonvex om det finns någon punkt inne i polyedern som så att säga har ”fri sikt” till alla punkter på polyederns yta. En projicering av polyedern på en sfär från denna punkt skulle innebära att inga sidor överlappade varandra, inte heller skulle skuggan av någon kant korsa skuggan av någon annan kant. Då Legendres bevis bygger på att man kan projicera polyedern på en sfär står det klart att beviset är giltigt för alla polyedrar där en sådan projicering är möjlig, konvex eller ej.

Diskussion om Legendres bevis

Legendres bevis är både genialt och häpnadsväckande. Eulers polyederformel är kombinatorisk till sin natur, och vid en första anblick känns det som att den inte har någonting att göra med areor och vinkelsummor. Ändå är det med dessa geometriska begrepp det första rigorösa beviset för formeln byggdes. Icke desto mindre känns Eulers bevisidé mer belysande. Att plocka bort ett hörn i taget och se vad som händer verkar ge en bättre bild av varför sambandet är sant än Legendres geometriska beräkningar. Legendres bevis ger ett alldeles korrekt argument för att polyederformeln gäller, men det ger ingen riktigt intuitiv känsla av varför.

Det geniala i Legendres resonemang, och det som är själva kärnan i beviset, är hans projicering av polyedern på en sfär. Till skillnad från Euler får vi anta att han ser på polyedrar som skal, eller kanske till och med som ett skelett bestående av dess kanter, eftersom den ska gå att belysa inifrån (om han nu inte tänker sig en solid polyeder gjord av ett genomskinligt material). Efter att projiceringen har skett har man inte längre en polyeder med hörn, kanter och sidor, utan en sfär som är indelad i polygoner. Det här gör att problemet inte längre är kombinatoriskt, utan sfärgeometriskt. Sfärgeometri var något man hade studerat sedan antiken och hade relativt god koll på, varför man kan anta att Legendre inte hade några större problem med att färdigställa beviset när han väl hade projicerat polyedern på sfären. Det enda som behövde göras efter projiceringen var att likställa uttrycken för arean av en sfär och den samlade arean av alla polygoner, vilket får anses vara trivialt.

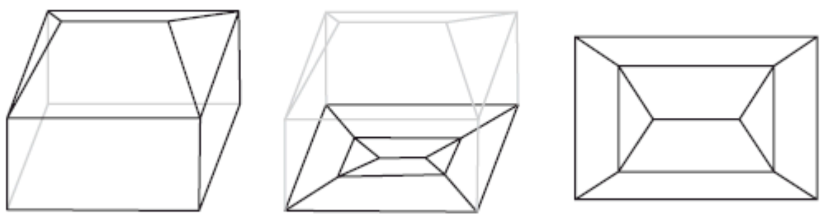
Den här projiceringen, som man kan göra med alla stjärnkonvexa polyedrar, säger något om släktskapet mellan olika polyedrar. Att ta bort eller lägga till punkter på sfären motsvarar att ta bort eller lägga till hörn på motsvarande polyeder. Man kan på det här sättet omvandla vilken given polyeder som helst till en annan, förutsatt att man endast tar stjärnkonvexa polyedrar i beaktande. Steget är inte långt till att påstå att alla stjärnkonvexa polyedrar i grunden är likadana, och att de bara är olika varianter av varandra. Vi vet att de skillnader som faktiskt finns i antal hörn, kanter och sidor inte påverkar sambandet H-K+S=2. Frågan är då om dessa skillnader spelar någon roll, eller om man med gott samvete kan säga att en kub är en tetraeder?

Om Cauchy och hans bevis av Eulers polyederformel

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) var en fransk matematiker som var verksam och stod för betydande insatser i flera olika matematiska områden, såsom analys och algebra. Han var även en av de mest produktiva matematikerna, och publicerade över 800 artiklar. Han inledde sin karriär som ingenjör inom militären och hade en god matematisk utbildning. Det var under sin tid som ingenjör, innan han bytte bana och blev matematiker, som han publicerade sina första artiklar 1811. Det var i dessa tidiga artiklar som han för första och enda gången behandlade polyedrar och bland annat presenterade sitt bevis för Eulers polyederformel.

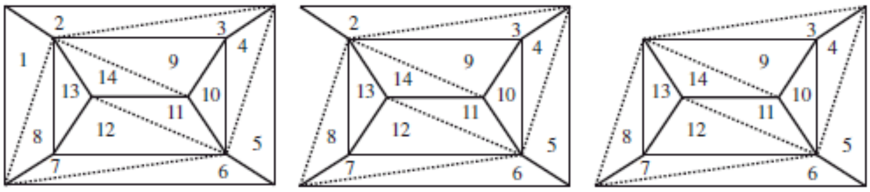
Cauchys bevis

Cauchys bevis bygger på att man omvandlar en polyeder till en graf i planet, så att inga sidor överlappar varandra. Det här går att göra för alla konvexa polyedrar (och även för vissa andra, visar det sig, mer om det senare). Cauchy tänker sig att man tar bort en sida från polyedern och sedan placerar alla hörn och kanter på den sidan, som nu fungerar som ett plan (figur 11). Man kommer då få en figur bestående av flera sammansatta polygoner på den borttagna sidan. Man kan tänka sig att man ställer en ihålig konvex polyeder på ett papper, tar bort den översta sidan och lyser på polyedern ovanifrån. Skuggorna från hörnen och kanterna kommer då bilda vår önskade graf.



Figur 11 – En projicering av en polyeder på dess bottenyta

Om någon polygon är icke-triangulär drar man diagonaler på ett lämpligt sätt så att polygonen delas in i ett antal trianglar (figur 12). Detta kallas att triangulera grafen. H-K+S kommer inte förändras av en sådan triangulering, ty varje gång man lägger till en diagonal kommer en ny kant och en ny sida uppstå, varför förhållandet är oförändrat.



Figur 12 – En triangulerad graf med en föreslagen ordningsföljd för att ta bort trianglarna

När grafen väl är triangulerad plockar man bort trianglar utifrån, en efter en, tills endast en triangel återstår. En triangel som befinner sig ytterst i grafen har antingen en eller två yttre kanter. Om man plockar bort en triangel med endast en yttre kant kommer en kant och en sida försvinna, så att H-K+S fortfarande är oförändrat. Plockar man bort en triangel med två yttre kanter kommer två kanter, en sida och ett hörn försvinna, så att H-K+S är oförändrat.

När man har plockat bort alla trianglar utom en återstår tre hörn, tre kanter och en sida, alltså H-K+S=1. Men ytan utanför triangeln tillhör också polyedern, vilket ger oss H-K+S=2. Samma förhållande gäller då även för vår ursprungliga polyeder, eftersom förhållandet har varit oförändrat genom hela processen.

Diskussion om Cauchys bevis

Cauchys bevis är ett tjusigt sätt att bevisa Eulers polyederform medelst grafteori. Man kan se det som en blandning av Legendres och Eulers bevis i det avseendet att Cauchy likt Legendre projicerar polyedern för att förenkla problemet. Cauchy projicerar dock polyedern på ett plan istället för på en sfär, men idén är densamma: att skapa en förenklad bild av polyedern. Noterbart är att beviset kräver att man ser på polyedrar som ihåliga och inte solida, vilket Euler gjorde. Beroende på hur man väljer att omvandla polyedern till en graf i planet kan man se på polyedern som ett gummihölje eller som ett skelett bestående av dess kanter. Man märker också att det här beviset fungerar för fler polyedrar än bara de konvexa. Om man tänker sig att polyedern är gjord av ett gummihölje som kan töjas ut skapas grafen genom att man plockar bort en sida och sedan drar ut resterande polyedern till ett platt skynke. Även om polyedern har ett eller fler hörn som buktar inåt kan dessa dras ut och passa in i grafen som bildas, varför beviset även är giltigt för vissa icke konvexa polyedrar. Vi ser också att i likhet med Legendres projicering av en polyeder på en sfär är Cauchys graf möjlig att manipulera utan att det ändrar förhållandet H-K+S=2. Det vi gör när vi triangulerar grafen är att vi adderar fler kanter och sidor till den ursprungliga polyedern, vilket återigen får oss att fundera på hur olika diverse polyedrar egentligen är. Att lägga till eller ta bort noder eller kanter i grafen motsvarar att lägga till eller ta bort hörn eller kanter hos polyedern, och om vi tillåter oss att göra detta på en given enkel graf i planet kan vi omvandla denna graf till vilken annan enkel graf som helst. För en polyeder motsvarar det här att varje given polyeder kan bli vilken annan polyeder som helst, förutsatt att båda polyedrar är möjliga att omvandla till grafer i planet, såsom beskrivet ovan. Det är också enkelt att inse att sidornas storlek eller kanternas längd inte påverkar antalet hörn, kanter eller sidor. Vi kan alltså tillåta oss att dra ut vissa kanter, förstora vissa sidor och till och med böja vissa kanter och fortfarande vara säkra på att Eulers polyederformel gäller. Det verkar återigen som att vi har fog för att fråga oss om två olika polyedrar, exempelvis en kub och en tetraeder, är så olika som de ser ut att vara, eller om de egentligen bara är två varianter av samma sak.

En annan viktig aspekt av Cauchys bevis är den ordningsföljd man använder när man avlägsnar hörn. Här kan man finna vissa likheter med Eulers bevis. Här, liksom där, går beviset ut på att man avlägsnar hörn eller noder och i båda fallen kan man hamna i en olustig situation om man inte är försiktig. Exempelvis kan man få en osammanhängande graf om man börjar med att ta bort trianglarna i mitten av grafen. Det man måste göra är att bara ta bort trianglar som så att säga ligger i utkanten av grafen, så att grafen är sammanhängande även efter triangelns avlägsnande. Detta är dock alltid möjligt att göra.

Olika men lika – när gäller egentligen Eulers polyederformel?

Vi har tidigare konstaterat att Eulers polyederformel gäller för alla konvexa polyedrar. Det finns dock fler polyedrar än de konvexa som uppfyller sambandet H-K+S=2, vilket man enkelt inser efter att ha bevisat formelns giltighet för konvexa polyedrar. Om man exempelvis låter ett hörn bukta inåt istället för utåt kommer inte detta ändra antalet hörn, kanter eller sidor, varför formeln även gäller för diverse icke konvexa polyedrar. Vi har också kunnat visa att det verkligen förhåller sig på det sättet i och med Legendres och Cauchys bevis, som är applicerbara även på vissa icke konvexa polyedrar. Vi har även stött på polyedrar där Eulers polyederformel inte är giltig, exempelvis en polyeder som består av två kuber som delar en kant. Denna polyeder kommer ha 14 hörn, 23 kanter och 12 sidor, vilket ger 14-23+12=3. Att undersöka varje enskild polyeder för att se vilka som uppfyller Eulers polyederformel är ju dock en omöjlighet. Vi skulle ha stor nytta av att finna ett enklare sätt att avgöra huruvida en polyeder uppfyller Eulers polyederformel eller inte.

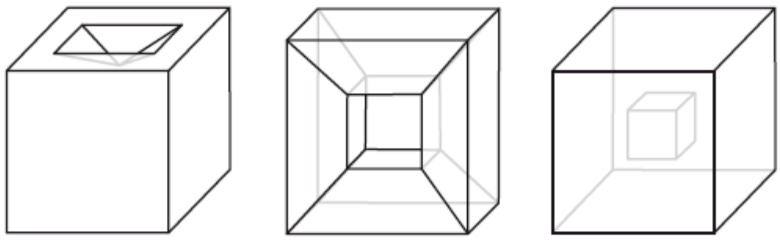
Vi börjar med att benämna alla polyedrar där sambandet H-K+S=2 gäller som eulerska polyedrar. Alla konvexa polyedrar är alltså eulerska. Vidare vet vi också att alla polyedrar som går att projicera på en sfär med hjälp av Legendres metod är eulerska, likaså alla polyedrar man kan göra om till grafer i planet på något av det sätt vi använde oss av i Cauchys bevis. När vi har diskuterat dessa bevis har vi båda gångerna snuddat vid tanken att de polyedrar som är eulerska bara är olika varianter av samma polyeder. Hur skulle en sådan ”grundpolyeder” kunna se ut? Innan vi går till botten med det problemet ska vi dock först gå igenom hur olika matematiker arbetade med att försöka komma på vilka polyedrar som är eulerska och vilka som inte är det.

En av de första matematikerna att undersöka vilka polyedrar som uppfyller polyederformeln och vilka som inte gör det var Simon Antoine Jean L'Huilier (1750-1840), född i Schweiz 1750, det vill säga samma år som Euler publicerade sin första artikel om polyederformeln (ytterligare kuriosa är att ordet huilier betyder ”oljekanna”, så L'Huilier skulle alltså kunna kallas för ”Oljaren” eller, på engelska, ”The Oiler”). L'Huilier presenterade tre sorters polyedrar som inte uppfyllde polyederformeln, vilka han kallade ”undantag” (figur 13).

Det första undantaget var de polyedrar som hade en eller flera ringformade sidor. En sådan polyeder skulle till exempel vara en kub med en liten pyramid på ena sidan. Ytan runt den lilla pyramiden bildar då en ringformad sida. En sådan polyeder har tio sidor (fem sidor formade som kvadrater, en ringformad sida och fyra triangulära sidor), 20 kanter och 13 hörn. Det här gör att polyedern inte uppfyller polyederformeln, eftersom 13-20+10=3. Den lilla pyramiden vi har satt dit skulle inte vara sammanlänkad via kanter med hörnen på den sida den är placerad på. Om vi skulle projicera denna polyeder på en sfär skulle den lilla kuben bilda fem sammanlänkade polygoner som utgjorde en fristående ö mitt i en annan polygon. Om man istället gör om polyedern till en graf i planet skulle man få en osammanhängande graf, eftersom den lilla pyramiden inte delar några kanter med den stora kuben. L'Huilier kallade själv dessa ”extra” polyedrar för inre polygoner.

Det andra undantaget är polyedrar med en eller flera tunnlar genom sig. Ett exempel på en sådan polyeder är en kub där man skär ut ett rätblock som sträcker sig från en sida till den motsatta sidan. För att det inte ska bli en polyeder med två ringformade sidor runt hålen, utan en ny typ av undantag, låter vi sidorna där tunneln har sina mynningar bukta inåt, så att det går kanter från sidornas yttre hörn till tunnelns hörn. Vi får då en polyeder med 16 hörn, 32 kanter och 16 sidor, och alltså 16-32+16=0. Polyedern är alltså inte eulersk.

Det tredje undantaget L'Huilier presenterade är en polyeder med en polyederformad hålighet inom sig, som alltså kommer ha hörn, kanter och sidor både på insidan och på utsidan. Om man till exempel har en kub med en kubformat hålrum inom sig har en sådan polyeder 16 hörn, 24 kanter och 12 sidor, och alltså 16-24+12=4. Det här undantaget gäller endast om man ser på polyedrar som solida kroppar, eftersom en polyeder som är ett skal inte kan ha någon hålighet.



Figur 13 – L'Huiliers tre undantag: en polyeder med en ringformad sida, en polyeder med en tunnel och en polyeder med en hålighet

L'Huilier trodde att han hade funnit de undantag där Eulers polyederformel inte gällde, och att övriga polyedrar var eulerska. Han modifierade Eulers polyederformel så att den skulle vara giltig även för dessa undantag, så att för en polyeder med P inre polygoner, T tunnlar och I håligheter gällde H-K+S=2+P-2T+2I. Den här formeln är i många fall korrekt, bland annat i de exempel som gavs ovan, men det träffar inte riktigt rätt. En kub där ena sidan har två inre polygoner i form av två tetraedrar med ett gemensamt hörn uppfyller inte formeln, inte heller en polyeder där håligheten är en torus. En polyeder med en tunnel som har tre mynningar uppfyller inte heller den modifierade formeln, det är inte ens klarlagt om en sådan tunnel räknas som en eller två tunnlar. L'Huilier var dock på rätt väg med sin formel, och de tre undantag han visade var en viktig del i den fortsatta forskningen på polyedrar.

Fler undantag till Eulers polyederformel kom under 1800-talet. Johann Hessel (1796–1872) presenterade, omedveten om L'Huiliers insats, fem undantag, varav tre sammanföll med L'Huiliers. De två andra var en polyeder bestående av två polyedrar sammanfogade via en gemensam kant och en polyeder bestående av två polyedrar sammanfogade via ett gemensamt hörn.

Louis Poinsot lade även han fram två undantag till polyederformeln (dessa undantag presenterades för övrigt samma artikel som hans påpekande om att Legendres bevis för polyederformeln är giltigt även för stjärnkonvexa polyedrar), nämligen två av de fyra regelbundna, icke konvexa polyedrar som kallas Kepler-Poinsot polyedrar.

Andra matematiker kom under de följande åren med andra undantag, såväl som andra bevis. Många av bevisen gällde för konvexa polyedrar, men ett av dem, skapat av Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867), urskilde sig. Von Staudts bevis gällde nämligen inte bara för konvexa polyedrar utan även för flertalet icke konvexa sådana, och han satte även upp några enkla kriterier för vilka polyedrar beviset var giltigt för. För det första antog han att polyedrar var ihåliga skal. För det andra antog han att det är möjligt att gå från ett godtyckligt hörn till vilket annat genom att följa en väg av kanter. För det tredje antog han att om man från ett hörn följde en väg av kanter tillbaks till samma hörn, utan att passera något hörn två gånger, delas polyedern upp i två delar. Von Staudt bevisade att för alla polyedrar som uppfyller de tre kraven gäller att H-K+S=2. Beviset tas inte upp här, men det bygger på enkel grafteori och är väl värt att ägna tid åt.

Det är nu äntligen dags att ta tag i vårt problem på riktigt, och en gång för alla konstatera vilka polyedrar som är eulerska och alltså uppfyller sambandet H-K+S=2. Om vi återgår till Legendre så kunde vi se att Legendres bevis gäller för alla polyedrar som kan projiceras på en sfär. Ett annat sätt att göra om polyedrar till sfärer är att anta att de är gjorda av gummi och sedan blåsa upp dem. Alla polyedrar som blir till sfärer när man blåser upp dem är alltså eulerska, förutsatt att de inte innefattas av något av de undantag vi såg ovan.

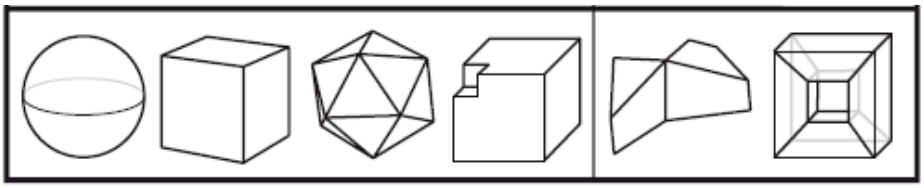
I Cauchys bevis märkte vi att det inte spelade någon roll hur polyedern såg ut så länge det var möjligt att göra om den till en graf i planet. Ett sätt som vi kunde göra det på var att anta att polyedern var gjord av gummi och att sedan plocka bort en sida och dra ut polyedern till ett platt gummiskynke, vars kanter då skulle utgöras av den borttagna sidans kanter. Om vi lyfter upp gummiskynket från planet, sätter på den borttagna sidan och gör en polyeder av den igen skulle den få en sfär-liknande form. Möjligtvis skulle den vara lite säckig, men om vi skulle blåsa upp den skulle den bli sfärisk. Återigen kan vi alltså konstatera att alla polyedrar som blir sfärer när man blåser upp dem är eulerska, och vi har funnit den gemensamma nämnare vi letat efter.

Innan vi ropar ”Heureka” är det bäst att vi även säkerställer att von Staudts tre kriterier går hand i hand med vår sfär-teori. En sådan sfär vi tänkte oss var gjord av ett gummiskynke, vilket även von Staudt tänkte sig att polyedrar var. Vi kan också gå från ett hörn till alla andra hörn genom att följa en väg av kanter, eftersom polyedern bildar en sammanhängande graf. Slutligen är det också så att om man skapar en väg av kanter som börjar och slutar i samma hörn, utan att något hörn passeras mer än en gång, kommer detta dela in polyedern i två delar, och skär man med en kniv längs denna väg kommer polyedern falla isär. Även von Staudts bevis gäller alltså för polyedrar som kan blåsas upp till sfärer.

Polyedrar som är sfär-lika på det här sättet kallar vi för topologiska sfärer. Innan vi går in på en noggrannare förklaring av vad en topologisk sfär är kan vi, efter många om och men, säga att vi har troliggjort att Eulers polyederformel H-K+S=2 är giltig för alla polyedrar som är topologiska sfärer.

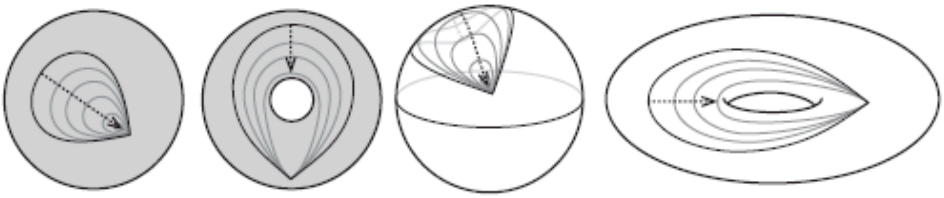
Vad är en topologisk sfär?

Utan att gå in på formella definitioner kan vi säga att en topologisk sfär är en yta som kan omvandlas till en sfär genom töjning, böjning, vridning eller liknande, men utan att man river, klipper eller gör några hål i ytan. Man får inte heller sammanföra två punkter så att det bildas hål. Åt andra hållet kan man tänka sig en sfär gjord av ett gummihölje som man kan töja och vrida hur man vill utan att det går sönder. Alla former en sådan sfär kan göras om till är en topologisk sfär (figur 14). En vanlig sfär är alltså en topologisk sfär, likaså en kub och en tetraeder, då båda dessa kan göras om till sfärer genom att man blåser upp dem. Man säger att formerna är topologiskt lika, ett begrepp vi ska återkomma till strax.



Figur 14 – De fyra polyedrarna till vänster är alla exempel på topologiska sfärer, medan de två till höger inte är det

En badring är dock inte en topologisk sfär, eftersom den har ett hål, eller en tunnel om man så vill, i sig. Som vi såg ovan så gäller inte Eulers polyederformel för polyedrar med tunnlar, och förklaringen är alltså att sådana polyedrar inte är topologiska sfärer. Ett krav på topologiska sfärer är också att alla loopar, det vill säga kurvor som börjar och slutar i samma punkt på sfären, går att göra om till punkter genom en kontinuerlig kontraktion. Vi ser att för en badring, eller torus som formen kallas, går inte detta att göra för alla loopar (figur 15).



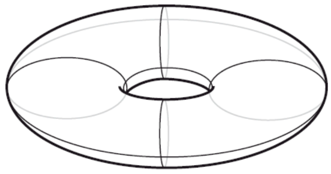
Figur 15 – Alla loopar på cirkelskivan och sfären (nummer 1 och 3 fr v) går att kontrahera till punkter, vilket inte går för ringen eller torusen (nummer 2 och 4 fr v)

Även polyederns sidor ska vara möjliga att kontrahera till punkter, vilket man kan tänka sig sker genom att man ser på dessa kanter som en loop som börjar och slutar i någon av dess hörn. Att kontrahera en sådan loop skulle innebära att en kant i taget försvinner och att de två hörn som kanten har sammanfogas till ett och samma hörn. Om man kontraherar en sida som utgörs av en n-sidig polygon (som såklart har n hörn) på en polyeder med H hörn, K kanter och S sidor innebär detta att den nya polyedern har H-n+1 hörn (eftersom ett hörn återstår), K-n kanter och S-1 sidor. Att kontrahera en sida till en punkt på det sättet förändrar inte sambandet mellan hörn, kanter och sidor, ty

$$(H-n+1)-(K-n)+(S-1)=H-K+S.$$

Om en polyeder har en ringformad sida går inte detta att göra för den sidan, vilket förklarar varför alla sådana polyedrar är undantag till Eulers polyederformel.

Alla polyedrar som är topologiska sfärer kommer uppfylla H-K+S=2. Men hur är det med alla polyedrar som inte är topologiska sfärer? Vår badring, eller torus som vi kallar den, är ju inte en topologisk sfär. Vi kan dock fortfarande dela in torusens yta i flera olika ytor som i figur 16, och räknar vi skärningspunkterna som hörn och bågarna mellan skärningspunkterna som kanter får vi att H-K+S=8-16+8=0. Vi kommer få samma resultat för alla polyedrar som är topologiskt lika en torus. Värdet man får när man beräknar H-K+S för en viss yta kallas eulertal eller eulerkaraktäristik. En sfär har alltså eulerkaraktäristiken 2 medan en torus har eulerkaraktäristiken 0. Eulerkaraktäristiken är en av egenskaperna som avgör ifall två ytor är lika. Om eulerkaraktäristiken skiljer sig åt är ytorna inte lika.



Figur 16 – en torus indelad i flera ytor

Den matematiska termen för ”lika” är homeomorf. Två ytor är homeomorfa, alltså lika, om det finns en homeomorfi mellan dem. En homeomorfi är i sin tur en inverterbar avbildning f från den ena ytan till den andra så att både f och inversen till f är kontinuerliga. Vi behöver dock inte gräva ner oss i några formella definitioner, utan kan något förenklat säga att en homeomorfi förvandlar en yta till en annan genom en kontinuerlig deformation, utan att riva, skära eller göra några hål i ytan. Den nya ytan går sedan att förvandla tillbaks till den ursprungliga på samma sätt. Som vi sa innan så är en kub och en sfär homeomorfa, likaså en kvadrat och en cirkel, medan en torus och en sfär inte är homeomorfa. En torus är dock homeomorf med en kaffekopp, därav det berömda skämtet att en topolog inte ser skillnad på en munk och en kaffekopp.

Det som göms i snö…

Fram till dags dato har topologin utvecklats till en betydande och användbar del inom matematiken. Framför allt har ett problem inom topologin varit i det matematiska rampljuset under de senaste hundra åren, nämligen Poincarés förmodan. Poincarés förmodan formulerades 1904 av Henri Poincaré, en av förgrundsgestalterna inom topologin, och lyder som följande: varje sluten, enkelt sammanhängande 3-dimensionell mångfald är homeomorf med 3-sfären. Exakt vad det innebär ska vi inte gå in på, men problemet ansågs så viktigt att det blev ett av sju Millenniumproblem. Millenniumproblemen instiftades år 2000 av Clay Mathematical Institute och består av sju av matematikens största olösta problem. En lösning belönas med en miljon dollar, förutom evig ära och berömmelse i den matematiska världen. 2006 bevisade en rysk matematiker vid namn Grigori Perelman Poincarés förmodan och blev därmed först med att lösa ett Millenniumproblem. För detta tilldelades han 2010 priset på en miljon dollar, samt även en Fieldsmedalj år 2006 (Fieldsmedaljen anses vara ett av de finaste pris en matematiker kan få). Han tackade nej till båda, då han ansåg att han endast fortsatt på tidigare matematikers arbete.

Berättelsen om Eulers polyederformel sträcker sig alltså från insikten om att polyedrar har kanter till en av nutidens största matematiska bedrifter. Historien kunde dock ha varit en annan, om det inte vore för vissa tragiska händelser under mitten av 1600-talet.

René Descartes (1596-1650) var en fransk matematiker och filosof och en av de mest betydelsefulla tänkarna i världshistorien. Hans filosofiska verk *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* (allmänt förkortad till *Discours de la méthode,* eller ”Diskurs om metoden”) anses vara grunden för modern filosofi. Inom matematiken är han upphovsman till bland annat den analytiska geometrin, där geometriska objekt beskrivs med algebraiska uttryck, och det medföljande koordinatsystemet (även om han aldrig ritade några grafer eller något koordinatsystem, utan bara införde konceptet).

1649 flyttade Descartes till Sverige för att undervisa drottning Kristina. Redan efter några månader ådrog han sig lunginflammation, möjligen på grund av det kalla klimatet, och avled strax därpå. Hans tillhörigheter, däribland flera artiklar han skrivit, skeppades tillbaka till Paris. Båten råkade dock ut för ett missöde precis innan den anlände, och hans tillhörigheter hamnade i vattnet. Man kunde dock rädda det mesta, och hans artiklar började publiceras postumt. Under ett besök i Paris studerade Leibniz några av Descartes artiklar och lät göra kopior av vissa opublicerade dokument. Några av dem behandlade polyedrar och kom att bli *De solidorum elementis* (”Om kroppars element”) som Descartes antagligen skrev omkring år 1630. Dessa dokument publicerades aldrig och Descartes original är än idag inte återfunna. Den enda kopia som fanns var den Leibniz gjort, men även den var försvunnen under en lång tid. Det var först 1860 som den påträffades igen i biblioteket i Hannover, i en låda med några av Leibniz gamla osorterade papper.

Innan 1860 visste ingen, varken Euler eller någon annan (förutom möjligen Leibniz, förutsatt att han läste kopian) att Descartes hade studerat polyedrar och kommit fram till vissa väldigt intressanta slutsatser. Han studerade dels polyedrar som geometriska objekt och beräknar diverse vinklar och areor, men han ser även på polyedrar med kombinatoriska ögon och räknar antalet hörn, sidor och kantvinklar (vinklarna i de polygoner som utgör polyederns sidor). Han visar olika samband som gäller för dessa tre entiteter, och i slutet av dokumentet slår han fast att för konvexa polyedrar med H hörn, S sidor och V kantvinklar gäller sambandet $V=2S+2H-4$. Descartes diskuterar inte sin formel och vi vet därför inte så mycket om huruvida Descartes kände till hur hans polyederformel förhåller sig till Eulers polyederformel.

Vi kan konstatera att en polyeder har dubbelt så många kantvinklar som kanter (det krävs två kanter för att bilda en kantvinkel), så en polyeder med K kanter har alltså V=2K kantvinklar. Byter vi ut V mot 2K i Descartes polyederformel får 2K=2S+2H-4. Arrangerar vi om termerna och dividerar med 2 erhåller vi H-K+S=2, som vi känner igen som Eulers polyederformel. Descartes visade alltså en formel som är ekvivalent med Eulers polyederformel, vilket givetvis väcker frågan om det egentligen är Descartes som ska anses som formels fader.

Att härleda den ena formeln ur den andra är trivialt, men det är inte däri problemet ligger. Problemet är att veta huruvida Descartes var medveten om kanten som enhet att räkna med. Ingen matematiker hade innan Euler benämnt kanten på en polyeder, och vi har sett att det är just den detaljen som ligger till grund för Eulers polyederformel. Insikten om att en polyeder består av noll-, en- och tvådimensionella objekt i form av hörn, kanter och sidor var det avgörande steget som Euler tog. Hade Descartes tänkt på polyedrar på samma sätt borde han rimligtvis ha nämnt det i manuskriptet. Det är möjligt att det helt enkelt var en detalj som gick honom förbi, såsom de mest självklara saker har en tendens att göra.

Till syvende och sist kan vi ändå konstatera att det varken då eller nu egentligen spelar någon roll vem som först upptäckte formeln. Oavsett upphovsman är och förblir H-K+S=2 matematik i sin vackraste form.

Litteraturförteckning

Bradley, Robert E. & Sandifer, Charles Edward (red.) (2007). *Leonhard Euler: life, work, and legacy*. 1st ed. Amsterdam: Elsevier

Cromwell, Peter R. (1997). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge Univ. Press

Dunham, William (1999). *Euler: the master of us all*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America

Dunham, William (red.) (2007). *The genius of Euler: reflections on his life and work*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America

Euler, L. (1758). *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*. http://http://www.eulerarchive.org/

Euler, L. (1758). *Proof of some notable properties with which solids enclosed by plane faces are endowed*. Översatt av Chris Francese och David Richeson. http://http://www.eulerarchive.org/

Federico, Pasquale Joseph (1982). *Descartes on polyhedra: a study of the De solidorum elementis*. New York: Springer

Francese, C. & Richeson, D. (2007). *The Flaw in Euler's Proof of His Polyhedral Formula.*

The American Mathematical Monthly, Vol. 114, No. 4 (Apr., 2007), s. 286-296

Lakatos, Imre (1990). *Bevis och motbevis: matematiska upptäckters logik*. Stockholm: Thales

Richeson, David S. (2008). *Euler's gem: the polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton, N.J.: Princeton University Press

Samelson, H. (1996). *In Defense of Euler.* L'Enseignement Mathématique, Vol 42 (1996), s. 377-382

Sandifer, E. (2004). *V, E and F, Part 1*. http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html

Sandifer, E. (2004). *V, E and F, Part 2*. http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html

Figurerna är tagna från *Euler's gem*, förutom figurerna som hör till Eulers bevis som är tagna från *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita.*