



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Alexanderpolynom

av

**Daniel Lännström**

2012 - No 31



# Alexanderpolynom

Daniel Lännström

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, Grundnivå

Handledare: Rikard Bøgvad

2012



# Alexanderpolynom

Daniel Lännström

13 december 2012

## Sammanfattning

Ett av de mest grundläggande problemen i knutteorin är att särskilja på knutar. Vi presenterar i denna framställning Alexanderpolynom som ett verktyg för att bevisa att två knutar är olika. Vi bevisar att Alexanderpolynomet kan användas för detta och undersöker sedan kort några av Alexanderpolynomets egenskaper.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grundläggande begrepp</b>	<b>4</b>
2.1	Knutdiagram och knutar . . . . .	4
2.2	3-färgning . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Alexanderpolynom</b>	<b>13</b>
3.1	Förberedelser . . . . .	13
3.2	Definition . . . . .	14
3.3	Väldefinition . . . . .	17
3.4	Isotropinvarians . . . . .	22
3.5	Fler exempel . . . . .	28
3.6	Egenskaper . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Referenser</b>	<b>37</b>
<b>A</b>	<b>Rolfsen knuttabel för knutar med upp till 8 korsningar</b>	<b>38</b>
<b>B</b>	<b>Några Alexanderpolynom</b>	<b>39</b>

# 1 Inledning

På 1860-talet utvecklade fysikern Sir William Thomas (senare Lord Kelvin) den så kallade virvelteorin för materia. Teorin kombinerade aspekter av de två konkurrerande och oförenliga teorierna då: atomteorin och vågteorin. I virvelteorin finns något som liknar atomer, men de är inte punktlika som i den klassiska atomteorin utan består istället av virvlar i etern. Dessa virvelatomer liknar knutar som är slutna, det vill säga, ändarna är sammankopplade. Ett grundämnes kemiska egenskaper förmodades bero på den underläggande knutens egenskaper. Molekyler i denna teori representerades av flera intrasslade slutna knutar, så kallade länkar. Virvelteorin verkade lovande och fick stort genomslag i den vetenskapliga världen.

För att komma vidare med virvelteorin behövdes en bättre förståelse för knutar. Lord Kelvins vän och kollega Peter Guthrie Tait började klassificera knutar genom att göra tabeller över alla möjliga knutar. Problemet att avgöra om två knutar är olika eller lika uppstod av att man inte ville ha dubletter i sin tabell. Även om problemet kan verka vara ett enkelt, visade sig det generella problemet vara väldigt svårt.

Intuitionen säger oss att två knutar borde ses som lika om deras egenskaper som knutar är lika. Det vill säga, vi kan dra i snöret och vända och vrida på snöret och fortfarande behålla knutens egenskaper. I bilden är a och b uppenbart lika eftersom vi kan lyfta upp snöret och vända över öglan. a är ingen knut utan bara en ögla. Hur är det med c och d? Det är inte alls uppenbart att det inte finns något sätt att överföra c till d.

Ett verktyg för att särskilja knutar är Alexanderpolynom som upptäcktes av James Waddell Alexander II under 1920-talet. Alexanderpolynomet är ett polynom som associeras till en knut. Sådana polynom kallas knutpolynom. Alexanderpolynomet låter oss särskilja knutar som dem i c och d, men också många fler. Som Alexander påpekar i sitt ursprungliga arbete [1] om Alexanderpolynom så är detta dock inte en lösning av det generella problemet att särskilja knutar, utan det är mer ett verktyg för att särskilja knutar. Detta beror på att det även finns många knutar som Alexanderpolynomet inte kan särskilja.

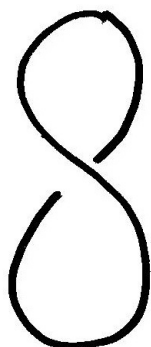
Det som gör att Alexanderpolynomet fungerar är att polynomet bevaras när vi manipulerar den associerade knuten på ett tillåtet sätt. Vi säger att Alexanderpolynomet är en invariant. Exakt vad som menas med invarians och tillåten manipulation kommer att förklaras i kapitel 2.



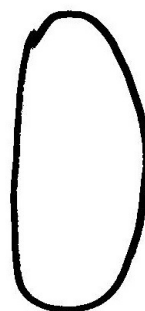
På 1980-talet upptäcktes nya knutpolynom som liknar Alexanderpolynom, men som i viss bemärkelse är bättre. Vi kommer dock inte att gå in på dessa i denna framställning.

För resten av knutteorins historia, se [4].

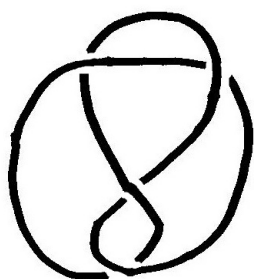
Vi kommer i denna framställning att först definiera knutdiagram och knutar. Sedan kommer vi att gå in på 3-färgning, som är en enkel invariants som låter oss särskilja ett fåtal knutar. Sedan introduceras Alexanderpolynom och vi bevisar att det är väldefinierad och att det är invariant. Till sist ska vi först presentera några egenskaper av Alexanderpolynom, sedan formulera en förmodan om Alexanderpolynomets nollställen och undersöka nollställena med hjälp av Mathematica.



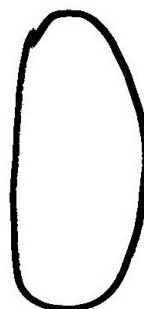
(a)



(b)



(c)



(d)

## 2 Grundläggande begrepp

### 2.1 Knutdiagram och knutar

Oftast när vi talar om knutar så menar vi en knut på ett snöre eller en knop som fäster ett rep vid något. Det matematiska begreppet skiljer sig dock från den vardaliga användningen av ordet. I knutteorin är det intuitiva begreppet av en knut ett snöre som trasslat in sig i sig själv och har ändarna sammanbundna. Vi kommer dock här bara att befatta oss med diagram i planet. Dessa kan ses som en projektion av den riktiga knuten i rummet. Ett sätt att formalisera begreppet av knut i rummet är som en enkel sluten polygonkurva. Se till exempel [3] för detaljerna. Detta ger en mer stringent definition men påverkar inte framställningen av Alexanderpolynom. Vår framställning utgår istället från knutdiagramet och följer [2].

**Definition 1.** Ett **knutdiagram** är en kurva i planet som ej får skära sig själv flera gånger än två i samma punkt. Detta krav är till för att undvika patologiska diagram där information går förlorad eftersom vi inte kan avgöra hur kurvan går i skärningspunkten.

En punkt där två punkter sammanfaller kallas en **korsning**. En av kurvorna sägs gå under den andra. Den andra sägs gå över. Den som går under ritas bruten för att visa det. (Se figur på sida 5)

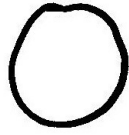
En **båge** är en del av en kurva från där den bryts till nästa ställe den bryts. Om kurvan inte bryts är hela kurvan en båge.

En **komponent** kallas den del av diagrammet som man passerar när man startar vid en viss punkt och följer kurvan tillbaka till samma punkt. Ett knutdiagram har en komponent.

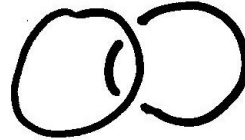
Ett **länkdiagram** definieras på samma sätt som knutdiagram men kan ha fler än en komponent. Observera att ett knutdiagram är ett länkdiagram.

Ett **orienterat** länkdiagram är ett länkdiagram med en riktning för varje komponent. Ett orienterat knutdiagram är ett knutdiagram där den enda komponenten har en riktning.

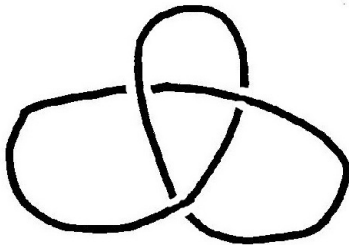
Några exempel gör definitionerna tydliga.



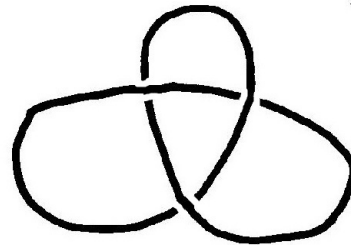
oknuten  
den triviala knuten  
en komponent  
inga korsningar  
en båge



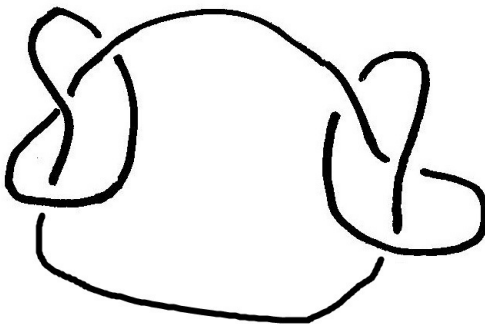
Hopf-länken  
två komponenter  
två korsningar



Vänsterhänt treklöverknut (trefoil)  
en komponent  
tre korsningar  
tre bågar



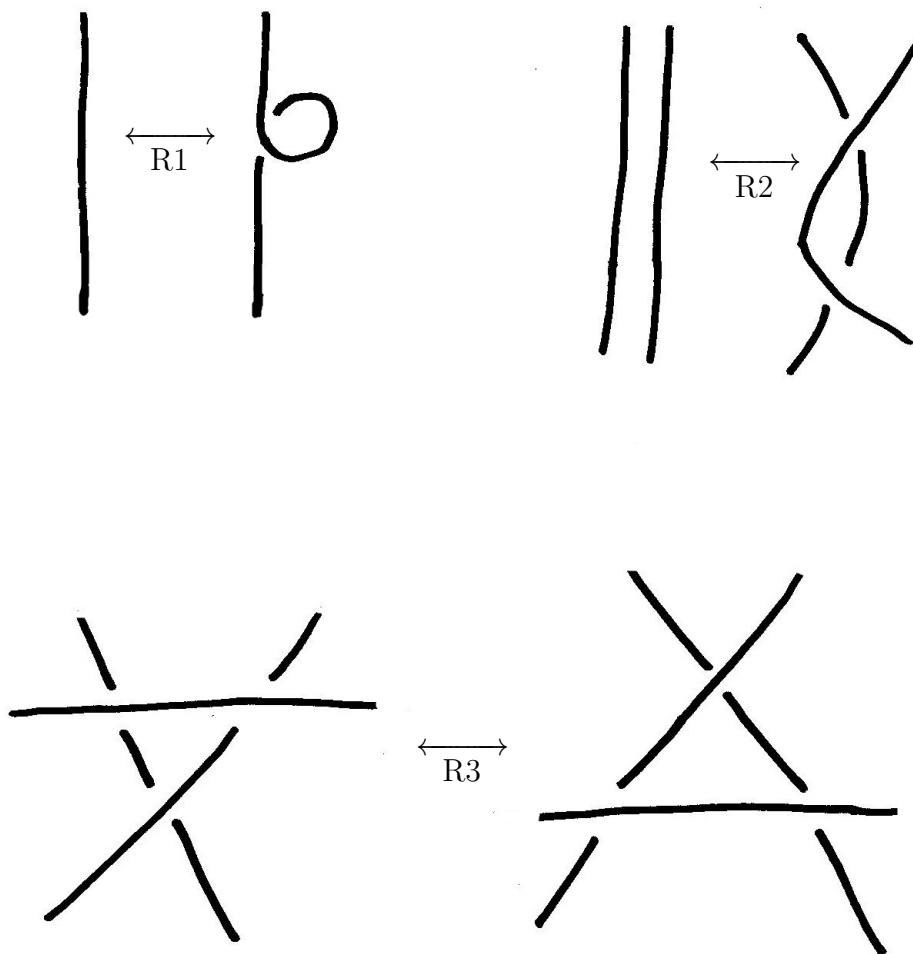
Högerhänt treklöverknut (trefoil)  
en komponent  
tre korsningar  
tre bågar



Råbandsknop med  
sammanbundna ändar  
en komponent  
sex korsningar  
sex bågar

Vi ska nu införa relationen isotropi mellan länkdiagram. Vi ska tillåta vissa operationer på länkdiagram, nämligen de så kallade Reidemeister-förflyttningarna. Reidemeister-förflyttningar R1-R3 är illustrerade nedanför. Bilden visar enbart den del av diagrammet som påverkas. Resten av diagrammet förändras inte av förflyttningen. Vi tillåter även kontinuerliga de-

formationer av kurvan om de inte inför eller påverkar några korsningar i diagrammet, vi kallar detta R0. Efter en stunds betraktande, ser man att R0-R3 överensstämmer väl med den intuitionen vi har för hur man får manipulera en knut utan att påverka dess egenskaper.



**Definition 2.** Länkdiagram D och E är **isotropa** om det finns en sekvens av Reidemeister-förflyttningar som tar D till E.

Reidemeister visade att diagrammen av två “rumsekvivalenta” knutar är isotropa. Detta ekvivalensbegrepp i rummet ligger nära vår intuition om att kontinuerligt deformera knuten. Vi kommer inte gå in på detta resultat, men det visar att vi är på rätt väg eftersom vi kan återkoppla våra slutsatser till knutar i rummet. Se [3] för detaljer.

Det följer enkelt av definitionen att isotropi är en ekvivalensrelation.

- (i) En tom sekvens visar att relationerna är reflexiva.
- (ii) Alla Reidemeister-förflyttningar har en invers. Genom att gå igenom sekvensen baklänges och ta inversen så får vi att  $E$  överförs till  $D$ . Alltså är relationen symmetrisk.
- (iii) Om  $X$  och  $Y$  är isotropa och  $Y$  och  $Z$  är isotropa, så följer att  $X$  och  $Z$  är isotropa genom att lägga ihop sekvenserna som tar  $X$  till  $Y$  och  $Y$  till  $Z$ . Alltså är relation transitiv.

Vi ska nu betrakta *länkdiagram modulo isotropi*. Det vill säga, istället för att betrakta enskilda länkdiagram ska vi betrakta deras ekvivalensklass. Vi göra följande definition:

**Definition 3.** En **länk** är en ekvivalensklass av länkdiagram modulo isotropi. En **knut** är en ekvivalensklass av knutdiagram modulo isotropi.

Vårt mål är att särskilja länkar respektive knutar. Vi gör det genom att studera isotropinvarianter. Först gör vi detta begrepp klart:

**Definition 4.** Om  $D$  och  $E$  är länkdiagram av samma länk  $K$  ( $D$  och  $E$  ligger i samma ekvivalensklass  $K$ ), så kallar vi funktionen  $\phi$  från länkdiagram till en mängd  $A$ , en **isotropinvariant** om

$$\phi(D) = \phi(E) = a \in A,$$

för alla  $D, E \in K$ . Vi skriver slarvigt att  $\phi(K) = a$ .

En omedelbart konsekvens av definitionen är om vi för två länkdiagram  $D$  och  $E$  har  $\phi(D) \neq \phi(E)$  så får vi att  $D$  och  $E$  ligger i distinkta ekvivalensklasser. Det vill säga, vi har att  $D$  och  $E$  representerar olika länkar. Dock kan vi inte dra slutsatsen att  $D$  och  $E$  representerar samma knut om  $\phi(D) = \phi(E)$ . Det kan vara fallet att  $\phi(K_1) = \phi(K_2)$  för två distinkta länkar  $K_1$  och  $K_2$ .

**Exempel 1.** Exempel på invarianter över isotropi

- (i)  $\phi(D) = 0$  för alla  $D$  är en trivial invariant. Detta exempel visar att vi *inte* kan dra slutsatsen att  $D$  och  $E$  representerar samma länk om  $\phi(D) = \phi(E)$ .
- (ii) Antalet komponenter i en länk förändras inte av Reidemeister-förflyttningarna. Det betyder att

$$\phi(D) = \text{antalet komponenter i } D$$

är en isotropinvariant. Vi har att Hopf-länken (se figur på sida 5) har två komponenter medan oknuten (även kallad den triviala knuten; se figur på sida 5) har en komponent. Alltså får vi att Hopf-länken är i en annan ekvivalensklass än oknuten. Detta exempel visar att det finns länkar som är skilda från oknuten.

Vi ska nu ge exempel på en numerisk invariant. Sedan ska vi fortsätta med Alexanderpolynom som är en polynomvärd invariant.

## 2.2 3-färgning

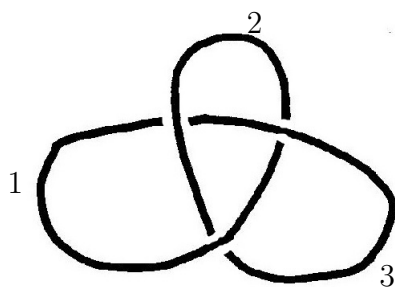
**Definition 5.** Ett knutdiagram sägs vara **3-färgbart** om varje båge kan tilldelas en av tre färger (1, 2, 3) så att,

- (i) alla tre färger blir tilldelade till någon båge, och
- (ii) vid en korsning så har antingen alla mötande bågar samma färg eller så har alla olika färg.

En sådan tilldelning  $f$  av färger till bågar kallas en **3-färgning**.

**Exempel 2.** Exempel på 3-färgbarhet

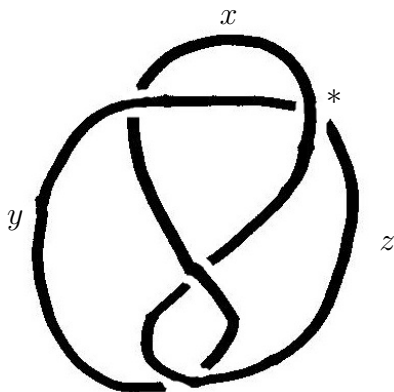
- (i) Oknuten är ej 3-färgbar eftersom den aldrig uppfyller krav i) då den bara består av en båge.
- (ii) Den vänsterhänta treklöverknuten är 3-färgbar på till exempel följande sätt



- (iii) Den högerhänta treklöverknuten är också 3-färgbar på samma sätt som den vänsterhänta.

- (iv) Listings knut (se figur nedan) är ej 3-färgbar. För att se detta antag att vi har färgat knuten som nedan där  $x$ ,  $y$ , och  $z$  är färger. Vi ser att  $x$ ,  $y$ , och  $z$  måste alla vara olika eller alla lika därför att de korsar varandra i den markerade korsningen. Om de är lika måste den återstående bågen färgas i samma färg. Men då har vi bara använt en färg, vilket ej är en 3-färgning. Alltså får vi att  $x$ ,  $y$ , och  $z$  måste vara olika färger. Men den återstående bågen kan varken färgas  $x$ ,  $y$ , eller  $z$ . Därför finns det ej en 3-färgning till Listings knut.

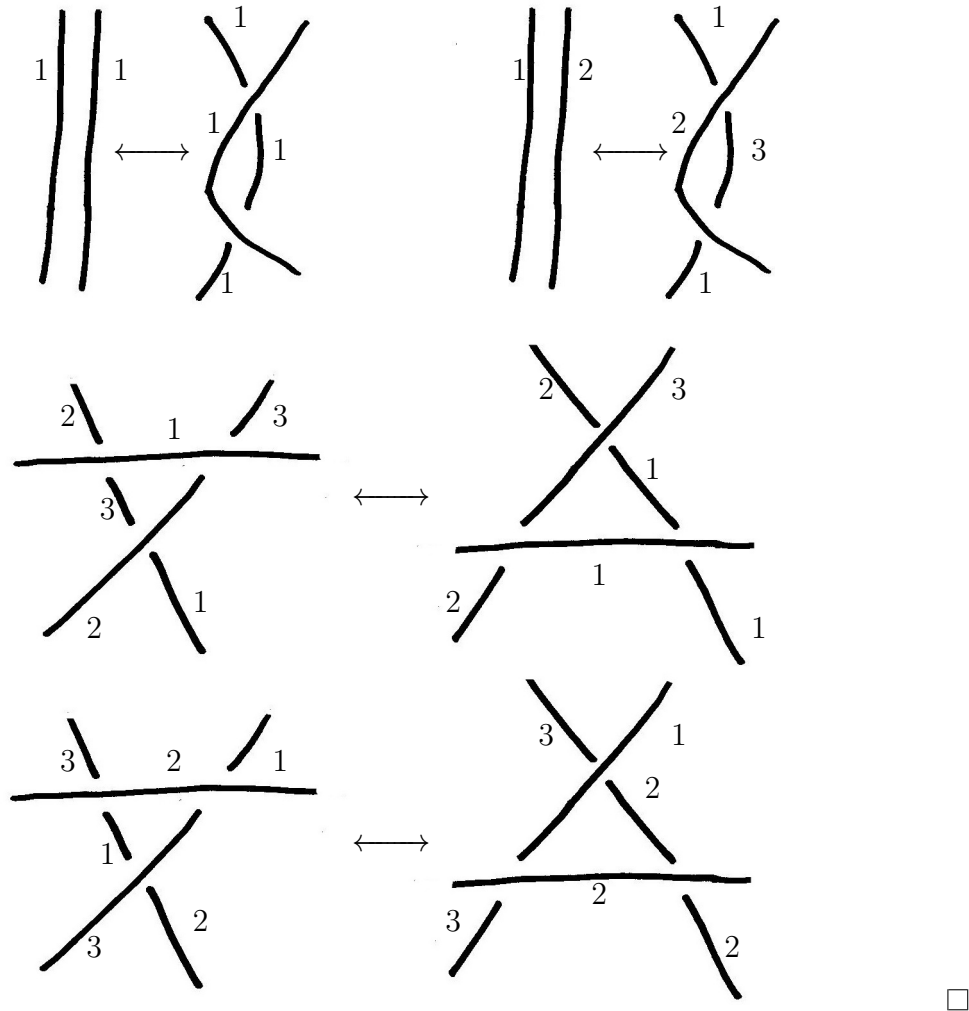
Eftersom både oknuten och Listings knut ej är 3-färgbara, så ser vi att 3-färgbarhet är inte kraftfullt nog att särskilja Listings knut från oknuten. Vi ska dock se i exempel 5 att Alexanderpolynomet kan särskilja på Listings knut och oknuten.



Följande sats visar att 3-färgbarhet är en invariant egenskap.

**Sats 1.** Om  $D$  och  $E$  är isotropa knutdiagram och  $D$  är 3-färgbar så är också  $E$  det.

*Bevis.* Vi behöver bara gå igenom alla Reidemeister-förflyttningar och se att de bevarar 3-färgbarhet. Vi ser att vi kan förändra 3-färgningen lokalt och välja samma 3-färgning för resten av knutdiagrammet. För  $R_0$  får vi att det per definition inte ändrar några korsningar så vi får att 3-färgningar bevaras. För  $R_1$  får vi att när vi lägger till en ögla kan ta samma färg på bägge nya bågar som uppstår. När vi tar bort en ögla, har vi att bågen som försvinner måste ha samma färg som den andra bågen, annars vore det inte en 3-färgning.  $R_2$  och  $R_3$  är något svårare eftersom det finns fler fall, men det visar sig att alla fall ger upphov till en *unik* ny 3-färgning. Några fall visas i bilden nedan.



En omedelbar konsekvens är att det finns icke-trivala knutar! Eftersom vi i Exempel 2 såg att treklöverknuten är 3-färgbar medan oknuten (den triviala knuten) ej är det, så betyder sats 1 att de tillhör olika ekvivalensklasser. Vi såg också att både den vänsterhänta och högerhänta treklöverknutaren var 3-färgbar, därför kan vi ej använda 3-färgbarhet för att särskilja dem.

Vi kan också visa att det finns ett oändligt antal knutar. Först behöver vi denna sats som följer enkelt från sats 1.

**Sats 2.** Låt  $D$  och  $E$  vara isotropa knutdiagram. Om  $D$  har  $n$  stycken olika 3-färgningar så har också  $E$   $n$  stycken olika 3-färgningar.

*Bevis.* Satsen följer direkt från beviset av sats 1. Eftersom vi i alla fall i beviset ser att när vi lägger till färger eller tar bort, har vi enbart ett val. Vi

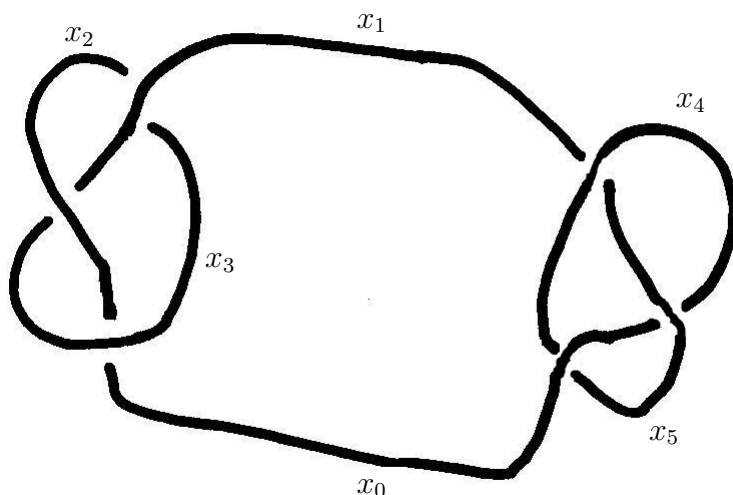


bevisar satsen för fallet där D och E skiljer sig med enbart en Reidemeister-förflyttning, satsen följer då omedelbart. Låt G och H vara knutdiagram och låt H vara resultatet av en Reidemeister-förflyttningar på G. Säg att G har  $n$  stycken 3-färgningar och H har  $m$  stycken 3-färgningar. Tag en 3-färgning  $f$  av G. Genom att studera fallen i föregående bevis får vi att det finns en 3-färgning  $f'$  av H direkt korresponderande mot  $f$ . Det vill säga,  $n \leq m$ . Men vi vet också att G är resultatet av en Reidemeister-förflyttning på H. På samma sätt får vi att,  $m \leq n$ . Alltså  $m = n$ .  $\square$

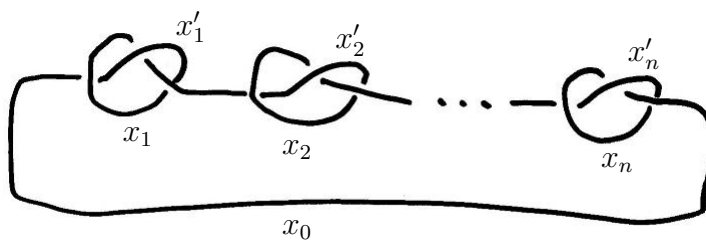
Vi är nu redo för nästa sats som ges som en övning i [3].

**Sats 3.** *Det finns ett oändligt antal knutar.*

*Bevis.* Först observerar vi att treklöverknuten har sex stycken 3-färgningar. Alla permutationer av  $(1, 2, 3)$  korresponderar mot en 3-färgning.



Nu betraktar vi istället två sammanbundna treklöverknutar. Denna knut är en kärringknut där man har bundit ihop ändarna. Om vi tilldelar  $x_0$  och  $x_1$  olika färger så ser vi enkelt att ingen tilldelning kan uppfylla kravet att alla bågar i en korsning ska ha olika färg. Säg att  $x_0$  och  $x_1$  båda har färg 1. Vi ser att om vi till exempel tilldelar  $x_2$  färg 2 så måste  $x_3$  ha färg 3. På samma sätt om vi tilldelar  $x_2$  färg 1 så måste även  $x_3$  ha färg 1. Alltså bestäms  $x_3$  och  $x_5$  av  $x_2$  och  $x_4$  respektive. Vi ser att dessa val korresponderar mot de ordnade paren  $(x, y)$  där  $x$  är färgen vi valt för  $x_2$  och  $y$  är färgen vi valt för  $x_3$ . Men vi ser också att  $(1, 1)$  korresponderar mot att sätta alla  $x_i$  till färg 1, vilket inte är en giltig 3-färgning eftersom vi inte har använt alla färger. Vi har alltså  $3^2 - 1$  giltiga 3-färgningar när  $x_0$  och  $x_1$  har tilldelats färg 1. Alltså får vi att det totalt finns  $3(3^2 - 1)$  färgningar.



Betrakta nu  $n$  stycken sammanbundna treklöverknutar. På samma sätt som ovan får vi att  $x_0$  och alla bågar som sammanbinder treklöverknutar på ovansidan måste ha samma färg. Vi får också att i varje treklöverknut så bestäms  $x'_i$  av  $x_i$ . Vi får att varje 3-färgning korresponderar mot ett val av färg på  $x_0$  och en  $n$ -tupel  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  där  $c_i$  är färgen tilldelats till  $x_i$ , men för varje val av färg på  $x_0$  får vi en tupel som ej svarar mot en 3-färgning. Alltså får vi att det finns  $3(3^n - 1)$  stycken 3-färgningar av knuten.

Satsen följer nu av att vi kan ta  $n$  godtyckligt stort och av sats 1.  $\square$

Eftersom 3-färgbarhet delar in knutarna i enbart två kategorier (3-färgbar och ej 3-färgbar) så behövs det mer kraftfulla invarianter för att särskilja knutar. Alexanderpolynomet, som vi ska introducera i nästa avsnitt, visar sig vara en mycket kraftfullare invariant än 3-färgning. Bland annat kan Alexanderpolynomet särskilja Listings knut från oknuten, som vi såg i exempel 2 att 3-färgning inte kan göra. Alexanderpolynomet är dock mer komplicerat och därför kommer resten av uppsatsen att ägnas åt Alexanderpolynomet och dess egenskaper.

## 3 Alexanderpolynom

Vi kommer att följa Alexanders ursprungliga framställning given i [1]. Förfarandet börjar med att observera att ett knutdiagram kan ses som en indelning av planet i regioner. Intuitionen säger oss att knutens egenskaper bestäms av hur dessa regioner ligger relativt till varandra samt hur korsningarna är placerade. Utifrån ett orienterat knutdiagram uttrycker vi informationen i diagrammet som ett system av linjära ekvationer. Varje korsning i diagrammet ger upphov till en ekvation. Vi reducerar matrisen som svarar mot systemet till en kvadratisk matris. Determinanten av denna matris blir ett polynom som visar sig vara isotropinvariant.

### 3.1 Förberedelser

Vi påminner först läsaren om dessa satser från grafteorin.

**Sats 4** (Eulers polyederformel). *Låt  $G=(V,E)$  vara en sammanhängande plan graf och antag att  $G$  delar in planet i  $r$  stycken regioner, då har vi*

$$|V| - |E| + r = 2.$$

*Bevis.* Se till exempel [5]. □

**Sats 5** (Handslagslemmat). *Låt  $G=(V, E)$  vara en graf, då är*

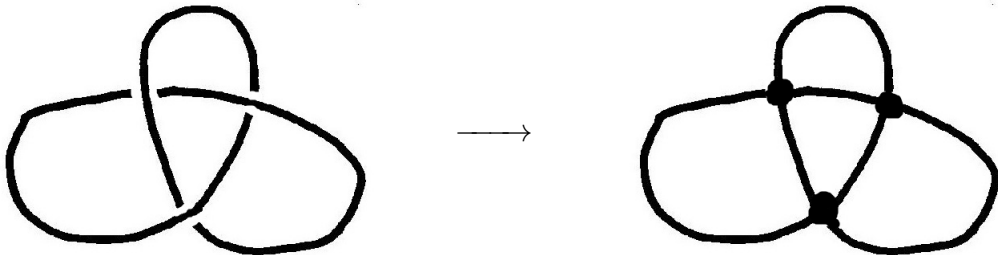
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

*Bevis.* Vi räknar antalet par av typen  $(v, e)$  där  $e$  är en kant och  $v$  är en av kantens ändpunkter. Kalla antalet sådana par  $S$ . Å ena sidan så har vi för varje hörn  $v$  att det finns  $\deg(v)$  par  $(v, e)$ . Alltså  $S = \sum \deg(v)$ . Men å andra sidan så har vi att för varje kant  $e=(u, v)$  så finns det två par:  $(u, e)$ ,  $(v, e)$ . Det vill säga  $S = 2|E|$ . □

Med dessa kända resultat får vi följande sats som talar om hur ett knutdiagram delar planet.

**Sats 6.** *Om  $D$  är ett knutdiagram med  $c$  stycken korsningar, så delar  $D$  planet i  $c+2$  regioner.*

*Bevis.* Om vi ersätter alla korsningar i  $D$  med hörn får vi en sammanhängande plan graf  $G=(V, E)$  med  $c$  hörn. Varje hörn har gradtal 4 och därmed enligt handskakningslemma får vi att  $2|E| = 4c$ , det vill säga  $|E| = 2c$ . Nu enligt Eulers polyederformel,  $c - 2c + r = 2$ . Det vill säga,  $r = c + 2$ .



□

### 3.2 Definition

Låt  $D$  vara ett orienterat knutdiagram av knuten  $K$  med  $n$  stycken korsningar. Då har  $D$   $n+2$  stycken regioner. Vi namnger korsningarna

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

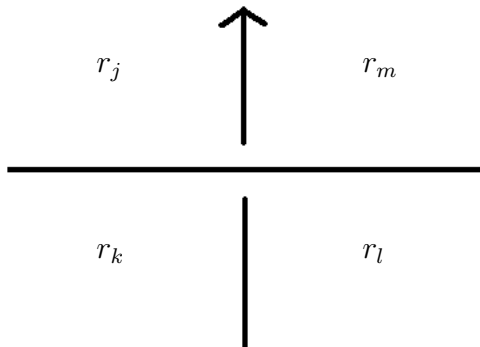
och regionerna

$$r_0, r_1, \dots, r_{n+1}.$$

Vi kommer nu att betrakta regionerna som variabler i ett ekvationssystem. Till varje korsning  $c_i$  sätter vi

$$c_i(t) = tr_j - tr_k + r_l - r_m$$

där regionerna kommer i moturs ordning  $r_j, r_k, r_l, r$  som i figuren.



Observera att riktningen på den bågen som går över korsningen är unikt bestämd av riktningen på den som går under eftersom  $D$  är ett knutdiagram, det vill säga,  $D$  har endast en komponent. Riktningen på den övre bågen ska inte tas med i beräkningen. Därför är figuren ritad som om den övre bågen inte har någon riktning.

Observera också att  $c_i(t)$  innehåller information om korsningen  $c_i$ . Vi kan från  $c_i(t)$  återskapa vart regionerna  $r_j, r_k, r_l, r_m$  ligger i relation till korsningen. Så vi kan se förloppet som att vi uttrycker korsningarnas egenskaper som ett system av ekvationer.

Vi ser  $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$  som ett linjärt system av  $n$  stycken ekvationer i variablerna  $r_0, r_1, \dots, r_{n+1}$ . Koefficienterna i  $c_i(t)$  ger en  $n \times (n + 2)$  matris  $M$  där varje rad innehåller  $t, -t, 1, -1$  och resten nollor. Vi kallar kolonnerna i  $M$  för  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  där kolonnen  $v_j$  i matrisen  $M$  svarar mot regionen  $r_j$ .

Vi väljer sedan två grannregioner  $r_t$  och  $r_s$  och bildar  $M_{t,s}$  genom att ta bort deras motsvarande kolonner  $v_t$  och  $v_s$  från  $M$ .  $M_{t,s}$  kallas en Alexander-matris. Vi ser att determinanten av  $M_{t,s}$  blir ett polynom

$$\Delta_{s,t}(t) = \det(M_{s,t}).$$

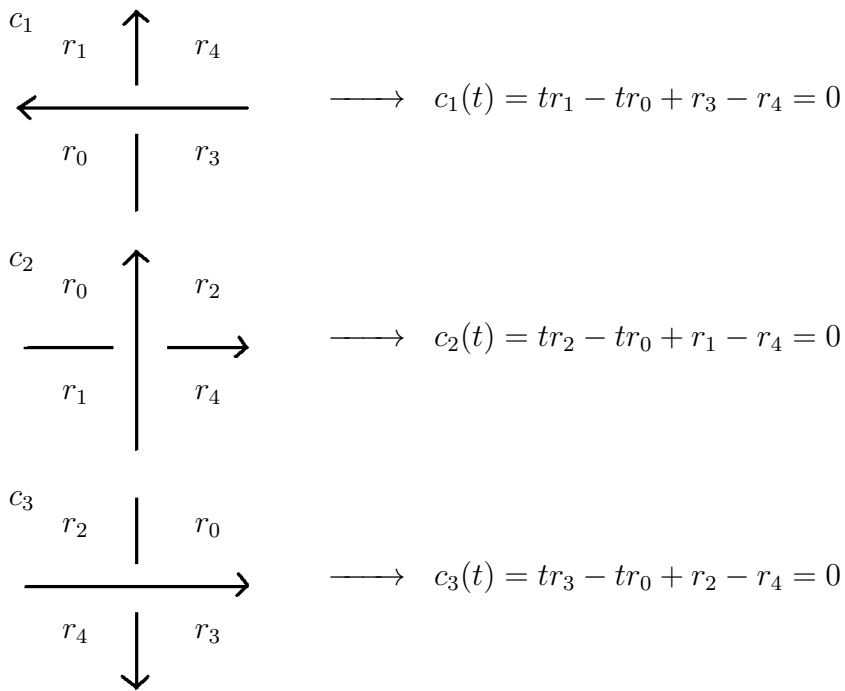
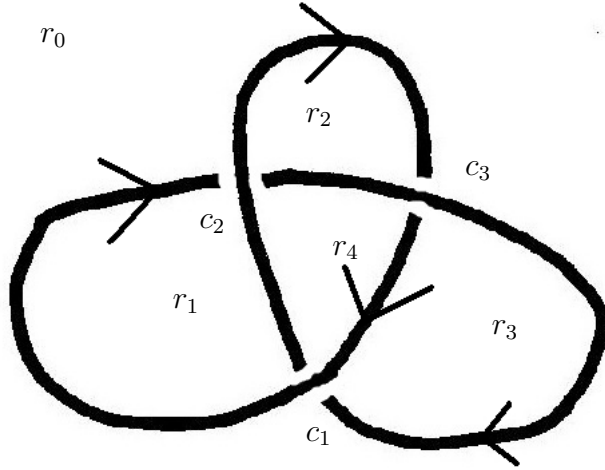
Vi kommer senare att visa att  $\Delta_{s,t}(t)$  är oberoende av  $v_t$  och  $v_s$  upp till en faktor av  $\pm t^n$ . Vi får därför att polynomet för ett givet knutdiagram  $D$  är unikt upp till en faktor av  $\pm t^n$ . Genom att dividera med  $\pm t^n$  så får vi ett polynom med en *positiv konstant term*. Detta unika polynom är **Alexanderpolynomet** och betecknas  $\Delta_D(t)$ .

Alexanderpolynomet är också en isotropinvariant så vi kommer att skriva  $\Delta_K(t)$  i enighet med definition 4.

Vi ger ett exempel som klargör definitionen innan vi bevisar detta.

**Exempel 3.** Alexanderpolynomet för den vänsterhänta treklöverknuten.

Namnge regionerna och korsningarna som i figuren. Vi skriver ner ekvationen för varje korsning.



$$M = \begin{pmatrix} -t & t & 0 & 1 & -1 \\ -t & 1 & t & 0 & -1 \\ -t & 0 & 1 & t & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Vi väljer att ta bort  $v_4$  och  $v_3$  som korresponderar mot grannregionerna  $r_4$  och  $r_3$ .

$$M_{3,4} = \begin{pmatrix} -t & t & 0 \\ -t & 1 & t \\ -t & -0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{3,4}(t) = \det(M_{3,4}) = \begin{vmatrix} -t & t & 0 \\ -t & 1 & t \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = -t - t^3 + t^2 = -t(1 + t^2 - t)$$

Vi får,

$$\Delta_K(t) = 1 - t + t^2.$$

### 3.3 Väldefinition

Vi har gjort ett antal godtyckliga val i definitionen och vi behöver därför visa att vi får samma polynom oberoende av valen i definitionen.

*Observation 1.* Först observerar vi att två olika namngivning av regionerna och korsningarna kommer ge matriser  $M$  och  $M'$  där raderna och kolonner kan ha bytt plats. Om vi tar bort samma kolonner  $v_i, v_j$  från  $M$  och  $M'$  får vi att  $\det(M_{i,j}) = \pm \det(M'_{i,j})$  eftersom determinanten byter tecken när vi byter plats på kolonner respektive rader.

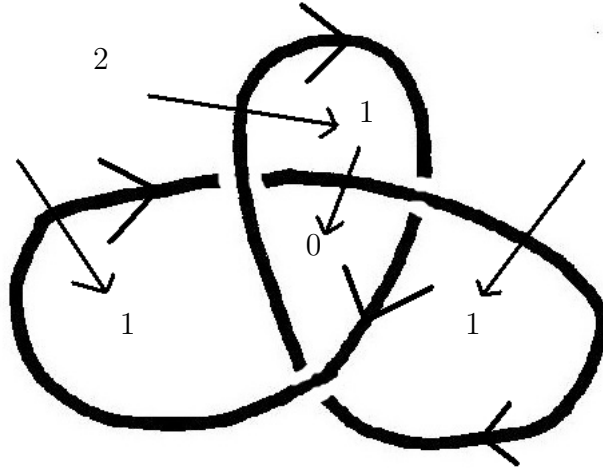
Nu visar vi att olika val av grannregionerna  $v_t$  och  $v_s$  i definitionen ger samma polynom om vi bortser från en faktor av  $\pm t^n$ .

Först behöver vi följande koncept.

**Definition 6.** Till varje region i ett knutdiagram  $D$  tilldelar vi ett heltal som vi kallar **index** och betecknar  $ind(r_i)$  för regionen  $r_i$ . Vi gör tilldelningen genom att först ta en godtycklig region  $r_k$  och sätta  $ind(r_k) = p$  för ett godtyckligt heltal  $p$ . Sedan använder vi följande regel: Om  $ind(r_k) = q$  och  $r_l$  är granne till  $r_k$  (vilket betyder att de har en båge som gräns) så sätter vi  $ind(r_l) = q - 1$  om när vi går från  $r_k$  till  $r_l$  över bågen rör oss från vänster till höger (med respekt till bågens riktning). Om vi rör oss från höger till vänster sätter vi  $ind(r_l) = q + 1$ .

Observera att grannregioner får index som skiljer sig med 1.

**Exempel 4.** Vi tilldelar index till den vänsterhänta treklöverknuten. Först ger vi regionen  $r_0$  index 2. Sedan använder vi regeln för att ge de andra regionerna index längs med pilarna.



Ger denna regel en väldefinierad tilldelning av index till regionerna? Man skulle kunna tänka sig en situation där  $r_k$  tilldelas index  $q$  om vi går från region  $r_i$  med, säg, index  $q - 1$ , samtidigt som vi kan gå över en annan båge från region  $r_j$  med  $ind(r_j) \neq q - 1 \neq q + 1$  till  $r_k$ . Det vill säga, det skulle kunna vara fallet att indexregeln gav upphov till motsägelser. Detta kan dock aldrig inträffa som vi ska visa, utan varje tillämpning av indexregeln (oberoende i vilken ordning vi tilldelar index till regionerna) ger en giltig indextilldelning.

*Observation 2.* Antag att  $r_k$  har tilldelats index  $q$ . Det betyder att vi har startat genom att tilldela, säg,  $r_0$  med ett godtyckligt index och sedan tillämpat indexregeln tills vi kommer till  $r_k$ . Med andra ord, det finns en stig  $v = r_0 r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{k-1}} r_k$  över bågar där det gäller att

$$ind(r_{m_{i+1}}) = ind(r_{m_i}) \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (3.2)$$

Omvänt, om det finns en sådan stig så har vi att  $ind(r_k) = ind(r_{m_{k-1}}) \pm 1$ .

*Observation 3.* Antag nu igen att vi för grannregionerna  $r_k$ ,  $r_i$  och  $r_j$  har att  $ind(r_k) = q$ ,  $ind(r_i) = q - 1$ , respektive  $ind(r_j) \neq q - 1 \neq q + 1$ . Det vill säga, vi har en motsägelse. Vi får då att det existerar stigar  $v_1$  från  $r_0$  till  $r_k$  och  $v_2$  från  $r_0$  till  $r_j$  som båda uppfyller 3.2. Bilda stigen  $v'_2 = v_2 r_k$ , som uppfyller 3.2 för  $i = 1, 2, \dots, k - 2$ . Vi kan se det som om vi följer  $v_1$  när vi gör indextilldelningen så får  $r_k$  index  $q$ , och om istället följer  $v'_2$  så får vi ett annat index. Det inses då att vi har även den omvända implikationen. Det vill säga existensen av  $v_1$  och  $v'_2$  implicerar att indexregeln har gett upphov till en motsägelse mellan de tilldelade indexen.



Vi är nu redo för att visa att indextilldelningen är väldefinierad.

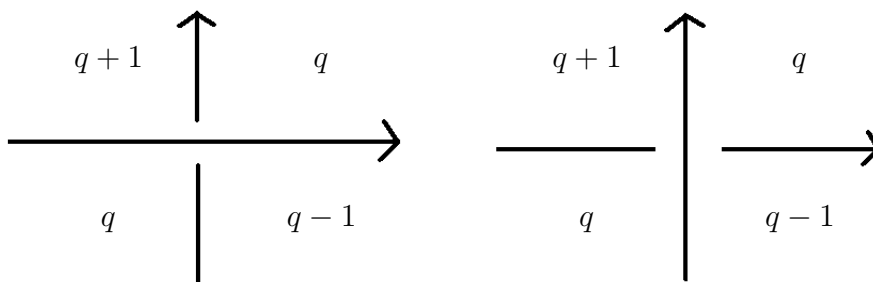
**Sats 7.** *Definitionen av index ger en tilldelning utan motsägelser.*

*Bevis.* Antag motsatsen av påståendet. Det vill säga att det finns en tilldelning där vi får motsägelser. Antag att vi får en tilldelning med motsägelser genom att starta tilldelningen i  $r_0$  och fortsätta tilldelningen genom att gå stigen  $v_1 = r_0 r_1 r_2 \dots r_{k-1} r_k$  och tillämpa indexregeln. Antag att  $r_k$  är den första regionen där det existerar en motsägelse. Det vill säga att  $r_0, r_1, \dots, r_{k-1}$  kan ges index utan motsägelse. Att  $r_k$  har en motsägelse betyder att det existerar en stig  $v_2 = r_0 \dots r_k$  så att  $r_k$  får ett annat index om man följer den stigen när man gör tilldelningen. Eftersom  $r_k$  och  $r_{k-1}$  är grannar kan vi lägga till  $r_{k-1}$  till  $v_2$ . Vi får då en stig som ger ett annat index till  $r_{k-1}$ , för om det hade gett samma index till  $r_{k-1}$  skulle den gett samma index även till  $r_k$ . Det betyder att  $r_{k-1}$  har en motsägelse. Men  $r_k$  definierades som den första regionen i  $v_1$  som har den egenskapen. Detta är absurt. Alltså kan det ej existera någon indextilldelning med motsägelser.  $\square$

Om vi fick två olika tilldelningar genom att gå stigarna  $u$  respektive  $v$  när vi gör tilldelningen, så skulle det betyda att vi hade en motsägelse. Det följer därför att det spelar ingen roll i vilken ordning vi gör tilldelningen.

*Observation 4.* Vi ser även att indexen är unikt bestämda när vi har valt ett värde på den första regionen. Det betyder att tilldelningen av index är unik upptill en additiv konstant. Det vill säga, om vi har två index-funktioner  $ind_a$  och  $ind_b$  för ett knutdiagram  $D$ , så har vi att  $ind_a = ind_b + k$  för något heltal  $k$ .

Nu betrakta istället en godtycklig korsning. En korsningen har 4 angränsande regioner. Vi får dessa figurer som visar hur index tilldelas runt en godtycklig korsning.



Figur 3.1: Indexen runt en korsning

**Definition 7.** Vi kallar den vänstra korsningen en **vänsterhänt korsning** eftersom när vi går längs med den undre kurvan kommer den övre kurvan in från vänster. På samma sätt så kallar vi den högra korsningen en **högerhänt korsning** eftersom den övre kurvan kommer från höger.

Eftersom  $r_j$  korresponderar mot kolonnen  $v_j$  i matrisen  $M$  kan vi göra följande definition som förenklar notationen något.

**Definition 8.** Vi ger ett index till varje kolonn  $v_j$  i matrisen  $M$  genom att sätta  $ind(v_j) = ind(r_j)$ .

Beviset till följande sats är från [8] och är något modifierat från Alexanders ursprungliga i [1].

**Sats 8.** Låt  $v_a, v_b, v_c,$  och  $v_d$  vara kolonner i  $M$  så att  $r_a$  och  $r_b$  samt  $r_c$  och  $r_d$  är grannregioner. Då har vi att,  $\Delta_{a,b}(t) = \pm t^n \Delta_{c,d}(t)$  för något  $n$ .

Observera att det följer av satsen att Alexanderpolynomet  $\Delta_D(t)$  är väl-definierat för ett knutdiagram  $D$ .

*Bevis.* Låt

$$R_p = \sum_{ind(v_j)=p} v_j.$$

Vi vet att varje kolonn i matrisen  $M$  har ett index så de måste vara med i summan i någon  $R_p$ . Eftersom varje rad i matrisen innehåller enbart termerna  $t, -t, 1, -1$  skilda från noll, får vi att

$$\sum_p R_p = 0, \tag{3.3}$$

där 0 är nollkolonnen.

Betrakta nu summan  $\sum_p t^{-p} R_p$ . För en rad i summan, säg rad  $k$ , finns fyra element skilda från noll: en från var och en av regionerna i figur 3.1. Säg att raden  $k$  representerar en vänsterhänt korsning (figur 3.1a). Vi får då att termen  $t$  kommer att finnas i  $R_{q+1}$ , så bidraget i summan blir  $tt^{-(q+1)} = t^{-q}$ . På samma sätt får vi att resterande termer blir:  $-tt^{-q} = -t^{-(q-1)}, t^{-(q-1)}$  och  $-t^{-q}$ . Det vill säga, summan för rad  $k$  blir 0. Situationen blir densamma om rad  $k$  representerar en högerhänt korsningen. Vi får att,

$$\sum_p t^{-p} R_p = 0. \tag{3.4}$$

Tillsammans ger nu (3.3) och (3.4) att

$$\sum_p (t^{-p} - 1) R_p = 0, \tag{3.5}$$

där koefficienten framför  $R_0$  blir noll.

Låt nu  $v_a$  vara en kolonn med  $\text{ind}(v_a) = p$  för något  $p$ . Eftersom  $R_q$  är en summa av kolonner med index  $q$ , får vi med (3.5) att  $(t^{-p} - 1)v_j$  kan skrivas som en linjärkombination av de andra kolonnerna  $v_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n + 1$  med  $\text{ind}(v_i) \neq 0$ . Från (3.5) följer det att elementen i linjärkombinationen kommer att ha formen  $-(t^{-q} - 1)v_k$  där  $\text{ind}(v_k) = q$ .

Tag nu  $M_{0,a}$  och  $M_{0,c}$  där  $\text{ind}(v_0) = 0$ ,  $\text{ind}(v_a) = p$  och  $\text{ind}(v_c) = q$ . Det följer att,

$$(t^{-q} - 1)\Delta_{0,a}(t) = \pm(t^{-p} - 1)\Delta_{0,c}(t), \quad (3.6)$$

eftersom vi har, enligt räknereglererna för determinanten, att

$$\begin{aligned} (t^{-p} - 1)\Delta_{0,c}(t) &= (t^{-p} - 1) \det(v_1, v_2, \dots, v_{c-1}, v_{c+1}, \dots, v_{n+1}) \\ &= \det(v_1, v_2, \dots, v_{c-1}, v_{c+1}, \dots, (t^{-p} - 1)v_a, \dots, v_{n+1}) \\ &= \det(v_1, v_2, \dots, v_{c-1}, v_{c+1}, \dots, -(t^{-q} - 1)v_c, \dots, v_{n+1}) \\ &= -(t^{-q} - 1) \det(v_1, v_2, \dots, v_{c-1}, v_{c+1}, \dots, v_{a-1}, v_c, v_{a+1}, \dots, v_{n+1}). \end{aligned}$$

om vi antar att  $c < a$ . Fallet  $c > a$  blir lika. Detta följer eftersom alla termer utom  $-(t^{-q} - 1)v_c$  i linjärkombinationen kan strykas i determinanten eftersom de är multipler av andra kolonner. Att byta plats på två kolonner i en determinant ändrar tecknet på determinanten. Plusminustecknet i (3.6) kommer av att vi eventuellt behöver byta plats på  $v_c$  för att det ska hamna i samma position som i  $M_{0,a}$ .

Nu observerar vi att eftersom index är givna upp till en additiv konstant, kan vi för en kolonn  $v_b$  med  $\text{ind}(v_b) = r$  bilda en ny indexering  $\text{ind}' = \text{ind} - r$  så att  $\text{ind}'(v_b) = 0$ . Vi får att  $\text{ind}(v_a) = p - r$  och  $\text{ind}(v_c) = q - r$ . Det följer nu från (3.6) tillämpat på  $\text{ind}'$  att

$$(t^{r-q} - 1)\Delta_{b,a}(t) = \pm(t^{r-p} - 1)\Delta_{b,c}(t). \quad (3.7)$$

Tag nu  $v_d$  med  $\text{ind}(v_d) = s$  och bilda  $\text{ind}' = \text{ind} - q$  så att  $\text{ind}'(v_c) = 0$ . Då fås,

$$(t^{q-s} - 1)\Delta_{c,a}(t) = \pm(t^{q-r} - 1)\Delta_{c,d}(t). \quad (3.8)$$

Nu ger (3.7) och (3.8) att,

$$\begin{aligned} \Delta_{b,a}(t) &= \pm \frac{(t^{r-p} - 1)(t^{q-r} - 1)}{(t^{r-q} - 1)(t^{q-s} - 1)} \Delta_{c,d}(t) = \pm \frac{t^{q-p} - t^{r-p} + t^{q-r} + 1}{(t^{r-q} - 1)(t^{q-s} - 1)} \Delta_{c,d}(t) \\ &= \pm \frac{t^{q-r}(t^{r-p} - t^{2r-p-q} + 1 + t^{r-q})}{(t^{r-q} - 1)(t^{q-s} - 1)} \Delta_{c,d}(t) \\ &= \pm \frac{t^{q-r}(t^{r-p} - 1)(t^{r-q} - 1)}{(t^{r-q} - 1)(t^{q-s} - 1)} \Delta_{c,d}(t) = \pm \frac{t^{q-r}(t^{r-p} - 1)}{t^{q-s} - 1} \Delta_{c,d}(t) \quad (3.9) \end{aligned}$$

Som ett specialfall av (3.9) om vi tar  $v_a, v_b$  och  $v_c, v_d$  som grannregioner, säg  $p = r + 1$  och  $s = q + 1$  (annars byt namn på  $v_a$  och  $v_b$  respektive  $v_c$  och  $v_d$ ), får vi att

$$\Delta_{b,a} = \pm \frac{t^{s-p}(t^{-1} - 1)}{t^{-1} - 1} \Delta_{k,b}(t) = \pm t^{s-p} \Delta_{c,d}(t).$$

Det vill säga vi har  $\Delta_{a,b}(t) = \pm t^n \Delta_{c,d}(t)$  för något  $n$ .

□

### 3.4 Isotropinvarians

Vi har visat att Alexanderpolynomet är väldefinierat. Därmed är det meningsfullt att tala om Alexanderpolynomet  $\Delta_D(t)$  för ett knutdiagram  $D$ . Nu återstår det att visa Alexanderpolynomet isotropinvarians, vilket gör att vi kan tala om Alexanderpolynomet  $\Delta_K(t)$  för en knut  $K$ .

Observera att vi använder beteckningarna från definitionen i 3.2. Följande begrepp utgör kärnan i beviset.

**Definition 9.** Två matriser  $A$  och  $B$  sägs vara  $\epsilon$ -ekvivalenta om det finns en sekvens av operationerna  $\alpha - \epsilon$  så att  $A$  kan överföras på  $B$ . Operationerna är

- ( $\alpha$ ) Multiplicera en rad (kolonn) med -1
- ( $\beta$ ) Växla plats på två rader (kolonner)
- ( $\gamma$ ) Addera en rad (kolonn) till en annan rad (kolonn)
- ( $\delta$ ) Ta bort och lägga till en ram runt matrisen med en etta i övre vänstra hörnet och resten nollor. Det vill säga, vi har att  $A$  och

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

är  $\epsilon$ -ekvivalenta.

- ( $\epsilon$ ) Multiplicera och dividera en rad (kolonn) med  $t$ .

Det följer direkt att detta är en ekvivalensrelation. Vi skriver  $A \sim B$  om  $A$  och  $B$  är  $\epsilon$ -ekvivalenta.

Vi vet från determinantlagarna att  $(\alpha - \delta)$  bevarar determinanten med ett eventuellt teckenbyte. För  $(\epsilon)$  är det klart att  $\det(v_0, v_1, \dots, tv_k, \dots, v_{n+1}) = t \det(v_0, v_1, \dots, v_k, \dots, v_{n+1})$ . Detta ger följande satser.

**Sats 9.** Om  $M$  och  $M'$   $\epsilon$ -ekvivalenta Alexandermatriser så är  $\det(M) = \pm t^n \det(M')$  för något  $n$ .

**Sats 10.** Låt  $D$  och  $E$  vara två knutdiagram med Alexandermatriserna  $M_D$  respektive  $M_E$ . Om  $M_D$  och  $M_E$  är  $\epsilon$ -ekvivalenta så är  $\Delta_D(t) = \Delta_E(t)$ .

*Bevis.* Satsen följer av sats 9 och av att vi i definitionen av Alexanderpolynomet normaliserar (det vill säga multiplicerar med en faktor av  $\pm t^n$  så att polynomet för en konstant positiv term).  $\square$

För att visa invarians räcker det nu med att visa att två isotropa knutdiagram ger upphov till  $\epsilon$ -ekvivalenta Alexandermatriser. Vi behöver dock först följande sats.

**Sats 11.** Låt  $N$  vara matrisen som vi får om vi gör alla element i  $M$  positiva genom att eventuellt byta tecken. Då är  $N$  och  $M$   $\epsilon$ -ekvivalenta.

*Bevis.* Multiplicera först varje kolonn med udda index med  $-1$ . Tag en rad  $r$ . Säg att  $r$  representerar en vänsterhänt korsning (figur 3.1a), då har vi för  $q$  i figur 3.1a att antingen

- (i)  $q$  är udda. Då är  $q-1$  och  $q+1$  jämna, vilket betyder att dessa kolonner ej har multiplicerats med  $-1$ . Alltså består raden av två  $t$  och två  $1$  och resten nollor. Eller så är
- (ii)  $q$  jämn. Då är  $q-1$  och  $q+1$  udda, vilket betyder att dessa kolonner har multiplicerats med  $-1$ . Alltså består raden av två  $-t$  och två  $-1$  och resten nollor.

Vi får samma fall för en högerhänt korsning. Om vi multiplicerar alla rader som uppfyller (ii) får vi  $N$ . Det vill säga genom att använda operationen  $\alpha$  kan  $M$  överföras på  $N$ . Det betyder att  $M$  och  $N$  är  $\epsilon$ -ekvivalenta.  $\square$

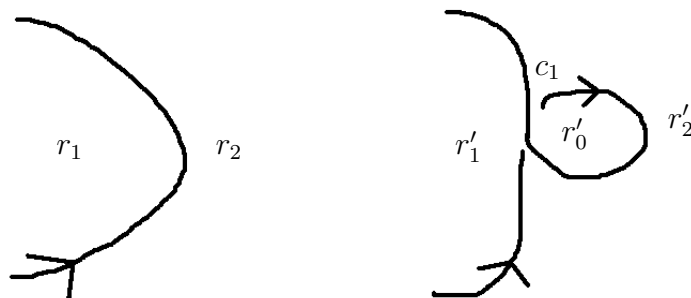
**Sats 12.** Låt  $D$  och  $E$  vara två knutdiagram. Om  $D$  och  $E$  är isotropa så finns två Alexandermatriser  $M_D$  för  $D$  och  $M_E$  för  $E$  så att  $M_D$  och  $M_E$   $\epsilon$ -ekvivalenta.

*Bevis.* Det räcker med att bevisa påståendet när  $D$  och  $E$  skiljer sig med en Reidemeister-förflyttning. Vi behandlar de olika förflyttningarna R0-R3 för sig.

(R0) Eftersom R0 inte påverkar några korsningar så har vi att matrisen  $M$  i definitionen kommer vara lika för D och E. Om vi tar  $M_D$  genom att ta bort kolonner  $v_i$  och  $v_j$ , så kan vi ta  $M_E$  identisk till  $M_D$  genom att ta bort samma kolonner  $v_i$  och  $v_j$ . Eftersom  $M_D$  och  $M_E$  är lika är de trivialt  $\epsilon$ -ekvivalenta.

(R1) Vi kan anta att regionerna och korsningarna är namngivna som i bilden eftersom ett namnbyte korresponderar mot  $\beta$ .

Låt  $M_D$  vara matrisen som fås genom att ta bort  $v_1$  och  $v_2$ . Matrisen  $M_E$  kommer att ha en extra rad och kolonner eftersom R1 lägger till en korsningen och en region. Vi ser att ekvationen för  $c_1$  blir  $c_1(t) = tr'_2 - tr'_1 + r'_2 - r'_0$ . Om vi tar  $M_E$  som matrisen där vi tar bort  $v'_1$  och  $v'_2$  får vi eftersom inga andra korsningar än  $c_1$  påverkas att



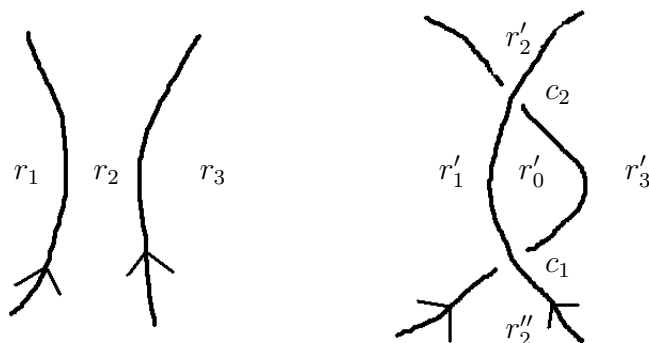
$$M_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_D & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Om vi först multiplicerar första raden med  $-1$  ( $\beta$ ) och sedan tar bort ramen ( $\delta$ ) så ser vi att  $M_E$  och  $M_D$  är  $\epsilon$ -ekvivalenta.

Om figuren är orienterad på ett annat sätt kommer  $-1$  i övre vänstra hörnet att ersättas med  $\pm t$  eller  $1$ .

(R2) Vi ser att R2 skapar två nya korsningar  $c_1$  och  $c_2$  och splittrar regionen  $r_2$  i  $r'_2$  och  $r''_2$ . Vi ser att ekvationerna för  $c_1$  och  $c_2$  blir  $c_1(t) = tr'_0 - tr'_1 + r'_2 - r'_3$  respektive  $c_2(t) = tr'_1 - tr'_0 + r'_3 - r'_2$ . Vi låter  $M_D$  vara matrisen där vi har tagit bort  $v_1$  och  $v_2$  och vi tar bort  $v'_1$  och  $v'_2$  för

att bilda  $M_E$ . Eftersom E innehåller samma korsningar som D plus två nya, får vi att  $M_D$  är en delmatris av  $M_E$ . Vi får att



$$M_E = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -t & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & \phi & & M_D & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix},$$

där  $\phi$  är en kolonnen som representerar  $r_2$  i D.

Dela första kolonnen med  $t$  för att få (i en mer kompakt notation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \phi & M_D \end{pmatrix}.$$

Lägg sen till rad 1 till rad 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \phi & M_D \end{pmatrix}$$

Genom att byta plats på rad 1 och rad 2 fås

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \phi & M_D \end{pmatrix},$$

Eftersom första raden har nollor överallt utom i andra kolonnen, kan vi multiplicera raden med en faktor av  $\pm t$  eller  $\pm 1$  och lägga till den till de andra raderna för att stryka hela andra kolonnen. Det vill säga,

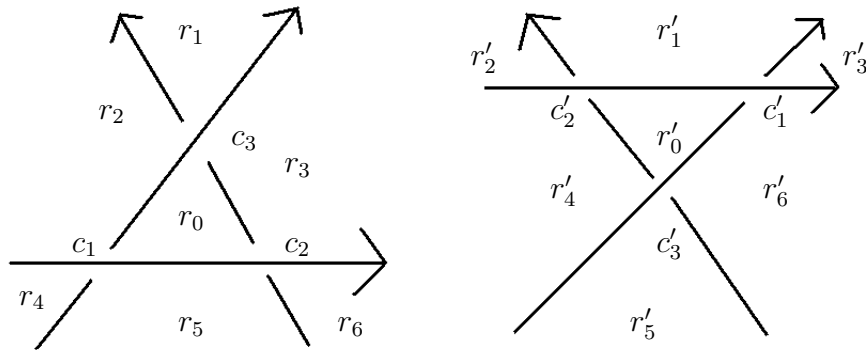
$$M_E \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & M_D & \end{array} \right).$$

Genom att byta plats på rad 1 och 2 samt ta bort ramen får vi att,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & M_D & \end{array} \right) \sim M_D.$$

Räkningarna blir något annorlunda om figuren är orienterad på ett annat sätt.

- (R3) Låt D och E vara som i bilden. Vi får då för de aktuella korsningarna att



$$c_1(t) = tr_2 - tr_4 + r_5 - r_0$$

$$c_2(t) = tr_0 - tr_5 + r_6 - r_3$$

$$c_3(t) = tr_2 - tr_0 + r_3 - r_1$$

och

$$c'_1(t) = tr'_1 - tr'_0 + r'_6 - r'_3$$

$$c'_2(t) = tr'_2 - tr'_4 + r'_0 - r'_1$$

$$c'_3(t) = tr'_4 - tr'_5 + r'_6 - r'_0.$$



Istället för att skriva ut matriserna  $M_D$  och  $M_E$  direkt, så använder vi sats 11. Låt  $M_D$  vara Alexandermatrisen vi får om vi i definitionen tar bort kolonnerna  $v_2$  och  $v_6$  och låt  $M_E$  vara Alexandermatrisen där vi tar bort kolonnerna  $v'_2$  och  $v'_6$ . Vidare låt  $N_D$  och  $N_E$  vara matriserna som man får om man byter tecken på alla negativa element i  $M_D$  respektive  $M_E$ . Enligt sats 11 har vi då att

$$M_D \sim N_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & K & & & \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix},$$

$$M_E \sim N_E = \begin{pmatrix} t & t & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & K & & & \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$

där  $K$  är resten av matrisen som korresponderar mot resten av knuten som inte påverkas av förflyttningen.

Observera att vi kan lägga till raderna 1-3 till varandra eftersom raderna enbart har nollor utanför de första kolonnerna. Vi ser också att eftersom regionerna  $r_0$  och  $r'_0$  bara angränsar till korsningarna  $c_1, c_2, c_3$  respektive  $c'_1, c'_2, c'_3$  att den första kolonnen i matriserna har nollor utanför raderna 1-3. Det betyder att vi kan lägga till multipler av kolonnerna  $v_0$  och  $v'_0$  till de andra kolonnerna utan att påverka  $K$ .

För att förenkla notationen så utelämnar vi allt utom de första kolonnerna av de tre första raderna. Håll dock resten av matrisen i åtanke.

Vi får genom att lägga till  $-1$  av rad 2 till rad 3 att

$$N_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & 1 & 0 & t \\ t & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Lägg till  $-1$  av kolonn 1 till kolonn 5 för att få

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Multipluera rad 3 med  $-1$  ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Lägg till rad 1 till rad 3 så får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & t & t \end{pmatrix}$$

och genom att lägga till kolonn 1 till kolonn 2 fås

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & t & 0 \\ t & t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t & t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & t \end{pmatrix} = N_E \sim M_E.$$

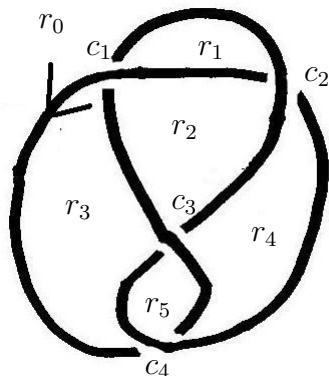
Det vill säga vi har visat att  $M_E \sim M_D$ .

Om figuren är orienterad på ett annat sätt får vi lite annorlunda räkningar men metoden är densamma.

□

## 3.5 Fler exempel

**Exempel 5.** Vi räknar ut Alexanderpolynomet för Listings knut. Vi namnger regionerna och korsningarna som i bilden och får dessa ekvationer:



$$c_1(t) = tr_0 - tr_3 + r_2 - r_1$$

$$c_2(t) = tr_2 - tr_4 + r_0 - r_1$$

$$c_3(t) = tr_3 - tr_2 + r_4 - r_5$$

$$c_4(t) = tr_5 - tr_3 + r_0 - r_4$$

$$M = \begin{pmatrix} t & -1 & 1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & -1 & t & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t & t & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -t & 1 & t \end{pmatrix}$$

Vi får efter några standarduträkningar att,

$$\Delta_{3,4}(t) = \det(M_{3,4}) = -t^3 + 3t^2 - t = -t(t^2 - 3t + 1).$$

Så  $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$ . Vi kan därför drar slutsatsen att treklöverknuten och Listings knut är olika knutar. Det betyder att Alexanderpolynomet i det här fallet kan särskilja knutarna medan vi i exempel 2 såg att 3-färgbarhet inte var tillräckligt.

**Exempel 6.** Det finns tyvärr också många knutar Alexanderpolynomet inte kan särskilja. Ett exempel är den vänsterhänta treklöverknuten och den högerhänta treklöverknuten. För om vi använder samma namn på regionerna och korsningarna som i exempel 3 på den högerhänta treklöverknuten, får vi istället dessa ekvationer

$$c_1(t) = tr_0 - tr_3 + r_4 - r_1 = 0$$

$$c_2(t) = tr_0 - tr_1 + r_4 - r_2 = 0$$

$$c_3(t) = tr_0 - tr_2 + r_4 - r_3 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & -t & 1 \\ t & -t & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -t & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{3,4} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ t & -t & -1 \\ t & -0 & -t \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{3,4}(t) = \det(M_{3,4}) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ t & -t & -1 \\ t & 0 & -t \end{vmatrix} = t^3 + t - t^2 = t(1 - t + t^2)$$

Så vi får,

$$\Delta_K(t) = 1 - t + t^2.$$

Det vill säga samma polynom som för den vänsterhänta treklöverknuten. Det betyder att vi inte kan använda Alexanderpolynomet för att särskilja dem.

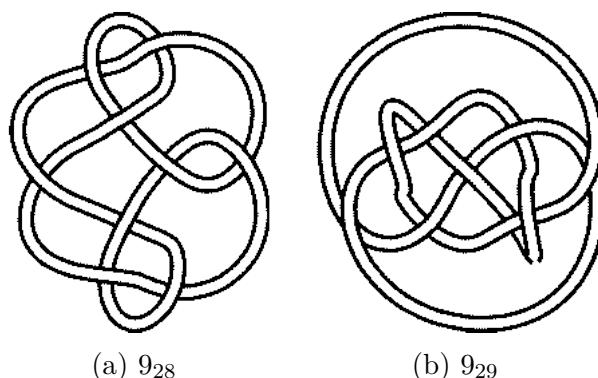
**Exempel 7.** I appendix A återfinns Rolfsen knuttavell för knutar med upp till 8 korsningar. Varje knut har ett namn  $k_m$  där  $k$  är antalet korsningar och  $m$  är knutens ordning. Knutens ordning  $m$  anger i vilken ordning den kommer bland knutar med samma antal korsningar, vilket är helt godtyckligt i den bemärkelse att Rolfsen valde en viss ordning när han gjorde knuttavellen. I appendix B finns deras respektive Alexanderpolynom. Det visar sig att Alexanderpolynomet kan skilja på knutarna i tabellen med upp till 8 korsningar men att det redan för knutar med 9 korsningar finns knutar som kan särskiljas på annat sätt, men som har samma Alexanderpolynom. De distinkta knutarna  $9_{28}$  och  $9_{29}$  i figur 3.2 har båda Alexanderpolynomet  $t^6 - 5t^5 + 12t^4 - 15t^3 + 12t^2 - 5t + 1$ . [10]

**Exempel 8.** Det finns förvånansvärt nog även icke-triviala knutar som har Alexanderpolynomet 1. Till exempel knuten  $K11n34$  i figur 3.3 har Alexanderpolynomet 1. [9]

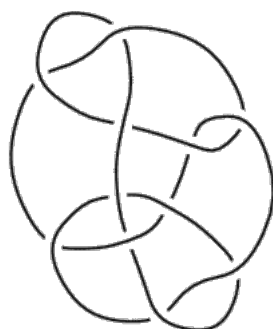
## 3.6 Egenskaper

*Observation 5.* Alla polynom i Appendix B har symmetriska koefficienter.

Vi ska se att detta är en konsekvens av följande sats.



Figur 3.2: Knutar med samma Alexanderpolynom <sup>1</sup>



Figur 3.3: K11n34 <sup>1</sup>

**Sats 13.** För varje knut  $K$  så har vi att  $\Delta_K(t) = t^i \Delta_K(t^{-1})$  för någon faktor  $t^i$ .

*Bevis.* Beviset ligger utanför ramen för denna framställning, men den intresserade finner det i [3]. Alexander lyckades inte visa detta utan ett komplett bevis gavs först av Seifert.  $\square$

Låt nu  $\Delta_K(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  där vi kan anta att  $a_0 \neq 0$  (enligt definitionen av Alexanderpolynom) och  $a_n \neq 0$  (annars kan vi ta ett mindre  $n$ ). Sats 13 ger att,  $\Delta_K(t) = t^i \Delta_K(t^{-1})$ . Det vill säga,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n &= t^i (a_0 + a_1 t^{-1} + \dots + a_n t^{-n}) \\ &= a_0 t^i + a_1 t^{i-1} + \dots + a_n t^{i-n}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Om  $i < n$  får vi att för att inga termer med negativa exponenter ska finnas med i högra sidan i (3.10) att i alla fall  $a_n = 0$ . Men vi antog att

<sup>1</sup>Diagram från The Knot Atlas (<http://katlas.math.toronto.edu>)

$a_n \neq 0$ , så detta leder till en motsägelse. Å andra sidan, om  $i > n$  får vi att  $a_0 = 0$  därför att vänsterledet i (3.10) inte innehåller några termer med exponent större än  $n$ . Men vi antog att  $a_0 \neq 0$ , så vi får att  $i = n$ . Det betyder att (3.10) ger,

$$a_k = a_{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Det vill säga att koefficienterna är symmetriska.

*Observation 6.* Alexanderpolynomen är i regel inte moniska. De Alexanderpolynom vi hittills har sett är dock det, men vi ser i Appendix B att detta generellt inte är fallet.

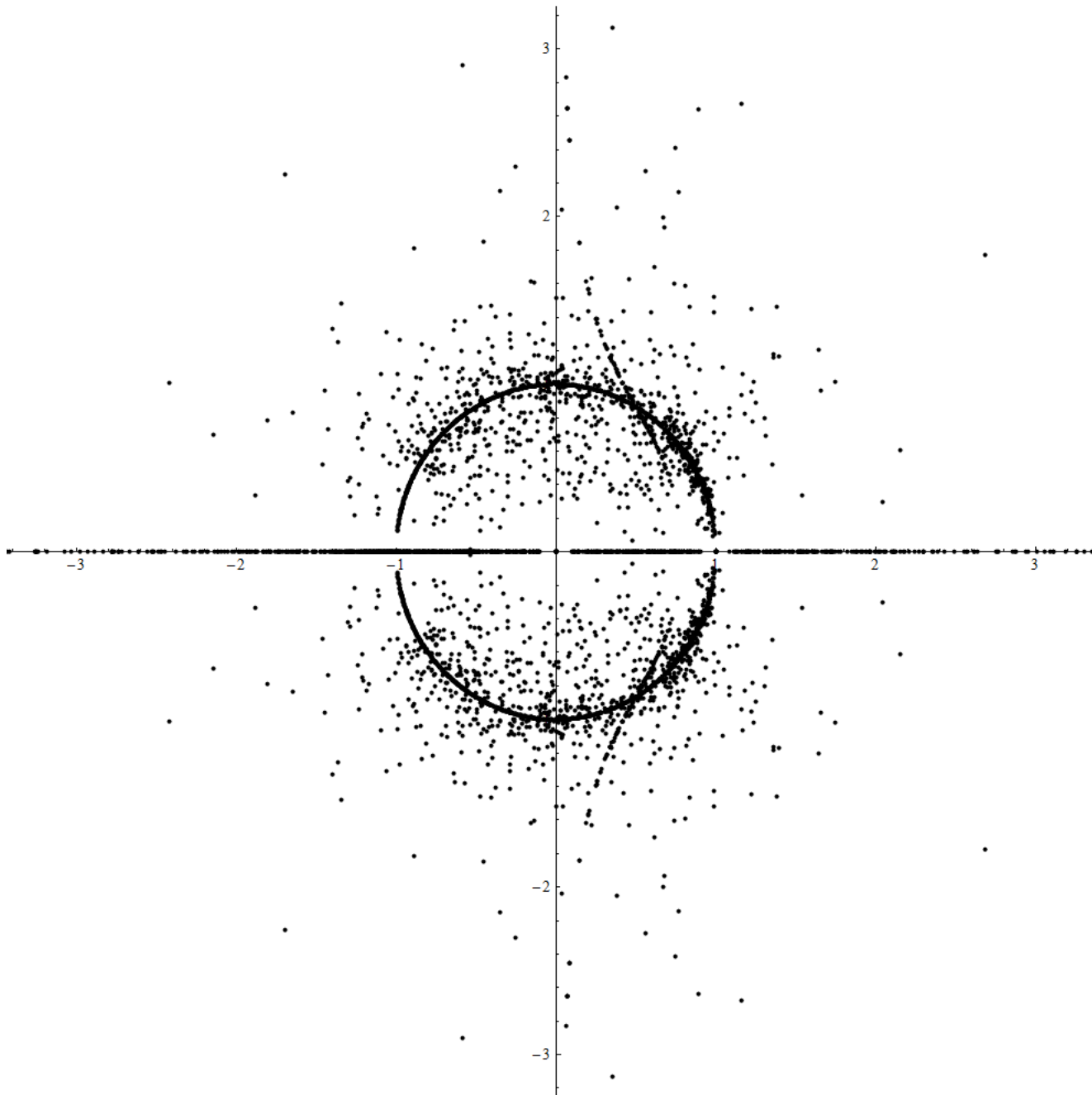
The Knot Atlas (<http://katlas.math.toronto.edu>) tillhandahåller ett Mathematica-paket med funktionalitet för att bland annat räkna ut Alexanderpolynom. Paketet innehåller också en databas med ett stort antal knutar. Vi kommer att begränsa oss till de 802 knutarna med upp till 11 korsningar. I figur 3.5 har de komplexa nollställena till dessa knutars Alexanderpolynom ritats ut. För att få något att jämföra med har jag i figur 3.4 plotat ut nollställena till ett antal slumpmässigt valda polynom med symmetriska heltalskoefficienter. Om Alexanderpolynomen är "vilka som helst" så förväntar vi oss att 3.4 och 3.5 ser lika ut. Dock ser vi att medan de slumpade polynomens nollställena i figur 3.4 fördelar sig ganska jämnt mellan de högra och vänstra planhalvorna, så har Alexanderpolynomen i figur 3.5 de flesta av sina nollställena till höger om x-axeln. Fördelning av Alexanderpolynomens nollställena tyder på någon än så länge okänd bakomliggande struktur, det vill säga att Alexanderpolynomen har fler egenskaper än de ovan nämnda.

*Observation 7.* Symmetrin över x-axeln beror på det välkända faktum att om  $g(z)$  är ett polynom med rella koefficienter så är  $g(\bar{z}_0) = 0$  om och endast om  $g(z_0) = 0$ .

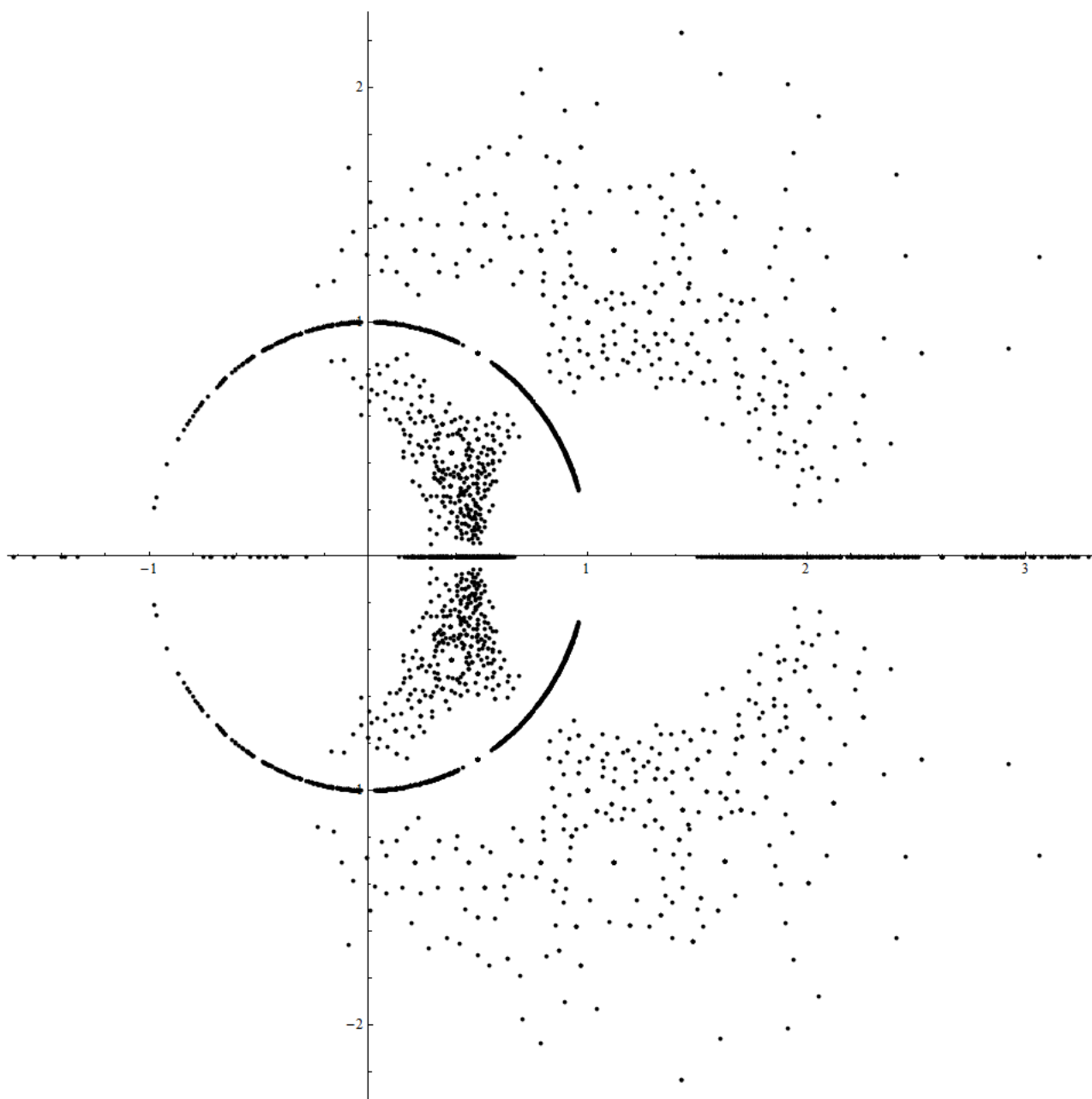
Vi observerar speciellt att de flesta punkterna ligger på högra sidan om  $x = -1$  i figur 3.5. Cirkeln  $|z| = 1$  står också ut i båda figurerna. I figur 3.5 ser tomrummet som uppstår i cirkeln med centrum ungefär i  $(1, 2; 0)$  också intressant ut.

Vi ska nu formulera en förmodan om hur Alexanderpolynomens nollställena fördelar sig. Först behöver vi dock följande begrepp.

**Definition 10.** Ett **alternerande** knutdiagram  $D$  är ett en knutdiagram där om vi följer kurvan runt diagrammet, så går vi under kurvan och över kurvan växelvis. Det vill säga, om vi går runt kurvan så möter vi korsningarna så att vi alternerande går under och över. En knut  $K$  är alternerande om det finns ett alternerande knutdiagram  $D$  som representerar  $K$ .



Figur 3.4: Nollställena till slumpade polynom med symmetriska heltalskoefficienter



Figur 3.5: 802 knutars Alexanderpolynoms nollställen

**Exempel 9.** Diagrammet av Listings knut i (exempel 5) är alternerande. Diagrammet i figur 3.3 och diagrammet av  $8_{19}$  i Appendix B är icke-alternerande.

Genom att gå igenom Appendix B så ser vi att  $8_{19}$  är den första icke-



alternerande knuten. För knutar med fåtal korsningar så verkar procenten av alternerande knutar vara mycket högt. I tabell 3.1 har jag använt The Knot Atlas-databasen för att visa fördelningen av alternerande och icke-alternerande knutar med ett visst antal korsningar. Det verkar som om procenten av alternerande knutar går snabbt mot noll. Detta har också förmodas av Jim Hoste med flera i [7].

Korsningar	Icke-alternerande	Alternerande	Totalt	% alternerande
7	0	7	7	100%
8	3	18	21	85.7143%
9	8	41	49	83.6735%
10	42	123	165	74.5455%
11	185	367	552	66.4855%
12	888	1288	2176	59.1912%
13	5110	4878	9988	48.8386%
14	27436	19536	46972	41.5907%
15	168030	85263	253293	33.6618%
16	1008906	379799	1388705	27.3491%

Tabell 3.1: Fördelning av alternerande och icke-alternerande knutar

Vi ger nu följande förmodan som återges i [6] men gavs ursprungligen av Jim Hoste.

**Förmodan 1** (Jim Hoste, 2002). *Låt  $K$  vara en alternerande knut och låt  $z$  vara en lösning till  $\Delta_K(t) = 0$ . Då har vi att  $Re(z) > -1$ .*

*Observation 8.* Om vi antar att förmodan stämmer, så förklarar den delvis skillnaden mellan figur 3.5 och 3.4. Om förmodan stämmer så kan bara icke-alternerande knutar ha Alexanderpolynom med nollställen där  $Re(z) < -1$ . Men eftersom det finns mycket fler alternerande knutar än icke-alternerande med upp till 11 korsningar (se tabell 3.1), så får vi att majoriteten av nollställena borde ligga till höger om  $x = -1$ . Detta är också vad vi ser i figur 3.5.

Genom en kontroll med Mathematica fås att alla 564 alternerande knutar med upp till 11 korsningar uppfyller förmodan 1.

*Observation 9.* Ett annat intressant mönster i figur 3.5 och 3.4 är att så många nollställen faller på enhetscirkeln. Polynomen med alla sina nollställen på enhetscirkeln verkar utgöra en intressant klass. En naturligt fråga är: Vilka knutar har alla nollställen till det associerade Alexanderpolynomet på enhetscirkeln? Det vill säga, för alla nollställen  $z$  till Alexanderpolynomet vill vi att  $|z| = 1$ . Med Mathematica får jag att knutarna

$3_1, 5_1, 5_2, 7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5, 8_{10}, 8_{15}$  är de enda knutarna i databsen med denna egenskapen för knutar med upp till 11 korsningar. Att karakterisera dessa knutar är dock svårare. Det vill säga, det är inte alls uppenbart vad dessa knutar har gemensamt. Det kommer dock inte att utredas mer här.

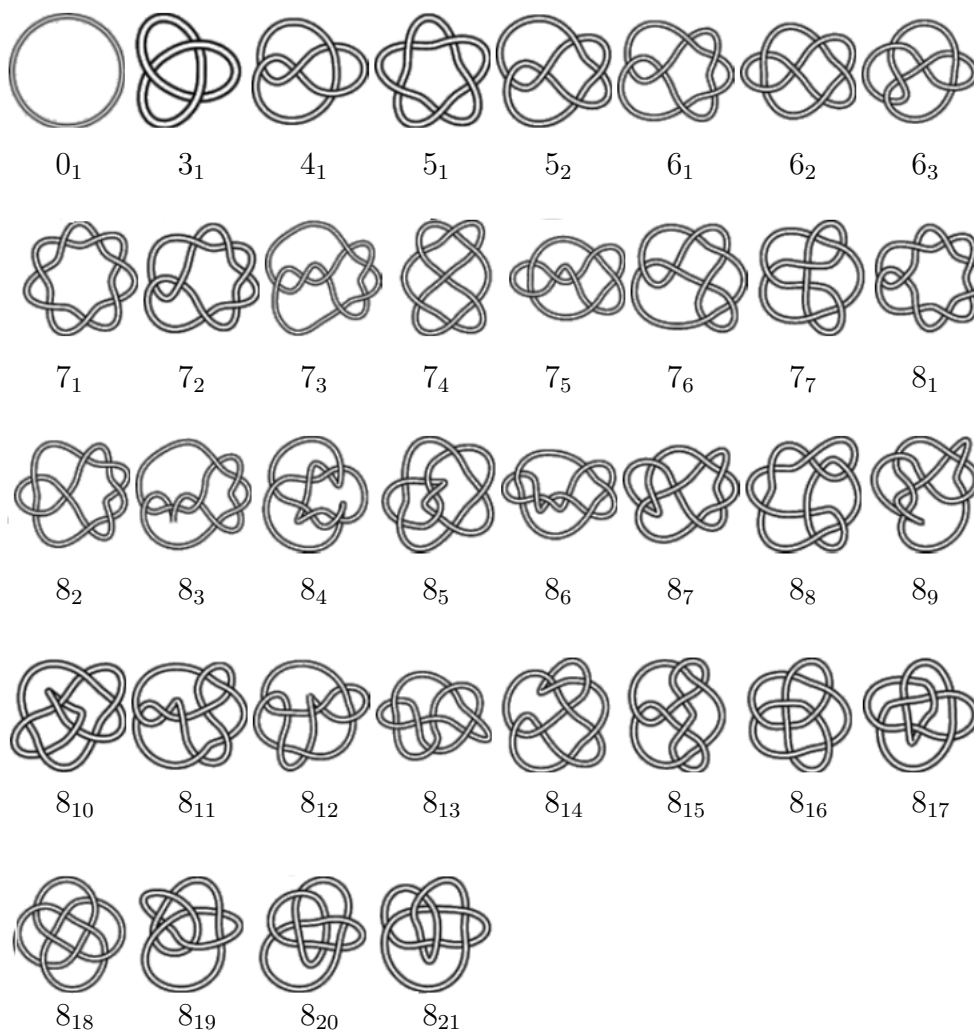
Att upptäcka samband i nollställena för Alexanderpolynomet är ett aktivt forskningsområde. Det är troligt att genom att studera nollställena och Alexanderpolynomets egenskaper kan man få reda på mycket om de bakomliggande knutarna. Även fast beviset av Alexanderpolynomets väldefinition och invarians var elementärt, så har vi ändå situationen att ett enkelt påstående om nollställena i förmodan 1 fortfarande inte bevisad eller motbevisad.

## 4 Referenser

- [1] Alexander, J. W. Topological Invariants of Knots and Links. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 30, No. 2 (Apr., 1928), pp. 275-306.
- [2] Gilbert, N.D.; Porter, T. Knots and Surfaces. Oxford science publications. Oxford University Press, USA, 1996.
- [3] Livingston, C. Knot Theory. The Carus Mathematical Monographs, Volume Twenty Four. The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1993.
- [4] Sosinskiĭ, Alekseĭ Bronislavovich. Knots: Mathematics With a Twist. Harvard University Press, 2002.
- [5] Grimaldi, R.P. Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction. Addison-Wesley, 2004.
- [6] Lyubich, L; Murasugi, K. On zeros of the Alexander polynomial of an alternating knot. 2011. [arXiv:0706.1234](https://arxiv.org/abs/0706.1234) [math.FA]
- [7] Hoste, J., Thistlethwaite, M.; Weeks, J. The First 1701936 Knots. Math. Intell. 20, 33-48, 1998.
- [8] Long, Edward. Topological invariants of knots: three routes to the Alexander Polynomial. <http://www.ucl.ac.uk/~ucbpeal/alexandermac.pdf>
- [9] The Knot Atlas Wiki. K11n31. <http://katlas.math.toronto.edu/wiki/K11n31>
- [10] The Knot Atlas Wiki. 9\_28. [http://katlas.math.toronto.edu/wiki/9\\_28](http://katlas.math.toronto.edu/wiki/9_28).

# A Rolfsen knuttabell för knutar med upp till 8 korsningar

Rolfsens knuttabell från The Knot Atlas (<http://katlas.math.toronto.edu>).



## B Några Alexanderpolynom

{0, 1}	1
{3, 1}	$t^2 - t + 1$
{4, 1}	$t^2 - 3t + 1$
{5, 1}	$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
{5, 2}	$2t^2 - 3t + 2$
{6, 1}	$2t^2 - 5t + 2$
{6, 2}	$t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1$
{6, 3}	$t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
{7, 1}	$t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
{7, 2}	$3t^2 - 5t + 3$
{7, 3}	$2t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 2$
{7, 4}	$4t^2 - 7t + 4$
{7, 5}	$2t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 2$
{7, 6}	$t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 5t + 1$
{7, 7}	$t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 5t + 1$
{8, 1}	$3t^2 - 7t + 3$
{8, 2}	$t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1$
{8, 3}	$4t^2 - 9t + 4$
{8, 4}	$2t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 5t + 2$
{8, 5}	$t^6 - 3t^5 + 4t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 3t + 1$
{8, 6}	$2t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 6t + 2$
{8, 7}	$t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
{8, 8}	$2t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 6t + 2$
{8, 9}	$t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 7t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
{8, 10}	$t^6 - 3t^5 + 6t^4 - 7t^3 + 6t^2 - 3t + 1$
{8, 11}	$2t^4 - 7t^3 + 9t^2 - 7t + 2$
{8, 12}	$t^4 - 7t^3 + 13t^2 - 7t + 1$
{8, 13}	$2t^4 - 7t^3 + 11t^2 - 7t + 2$
{8, 14}	$2t^4 - 8t^3 + 11t^2 - 8t + 2$
{8, 15}	$3t^4 - 8t^3 + 11t^2 - 8t + 3$
{8, 16}	$t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 9t^3 + 8t^2 - 4t + 1$
{8, 17}	$t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 11t^3 + 8t^2 - 4t + 1$
{8, 18}	$t^6 - 5t^5 + 10t^4 - 13t^3 + 10t^2 - 5t + 1$
{8, 19}	$t^6 - t^5 + t^3 - t + 1$
{8, 20}	$t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$
{8, 21}	$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1$