SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Utvalda satser utifrån plangeometri

av

Wafaa Chamoun

2012 - No 32

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Utvalda satser utifrån plangeometri

Wafaa Chamoun

Självständigt arbete i matematik 30 högskolepoäng, Avancerad nivå

Handledare: Annemarie Luger

2012

Tack!

Jag vill tacka min handledare, Annemarie Luger för hennes stöd och hjälp i form av tips och idéer samt värdefulla diskussioner som vi har haft under arbetets gång.

Jag vill också tacka min familj, som har varit mycket stöttande under tiden jag har läst matematik.

Ett särskilt varmt tack går till min man, Hnein Haddo för hans tålamod och stöd, då arbetet med uppsatsen har tagit mycket av min lediga tid.

Sammanfattning

Detta examensarbete består av två delar.

Den första delen presenterar intressanta satser i elementär geometri. För detta ändamål utgår vi ifrån grundläggande definitioner av kongruenta trianglar, likformiga trianglar, parallella linjer och mm. Sedan bevisar vi många satser som vi tycker är relevanta. Mot slutet formulerar vi Eulers linje, niopunktscirkeln och Morleys teori. Därefter förklarar vi hur man kan bevisa de sist nämnda satserna elementärt.

Den andra delen behandlar ellipsen. Vi ska definiera en ellips, och vi ska undersöka hur ellipsens ekvation ser ut. Sedan presenterar vi tre sätt som beskriver hur man kan konstruera en ellips eller punkter på en ellips. I det sista kapitlet förklarar vi hur en ellips fås genom att skära en kon med ett plan under en viss vinkel.

Innehåll

I. Utvalda satser om trianglar

II. Ellips

I. Utvalda satser om trianglar

I.1 Introduktion

Euklides geometri är en logisk uppbyggnad där man med hjälp av enkla axiom och postulat bevisar att andra satser gäller generellt för alla företeelser med samma förutsättningar. Utgångspunkterna i ett bevis är postulat och axiom som Euklides har definierat i sin första bok. Axiom betraktas som något man utgår ifrån, något som är sant utan bevis.

I den första boken av Euklides Elementa sammanställs grunderna som behövdes för geometrin. Grundbegreppen såsom punkt, linje, plan, vinkel och figur anses så enkla att de inte kan beskrivas med enklare begrepp. Grundbegreppens definitioner är sådana att vi förstår dem intuitivt och att de inte behöver ifrågasättas. I nästa avsnitt definierar vi grundbegreppen av Euklides. Vi ska också ge Euklides postulat och Euklides axiom. Definitionerna, postulaten och gemensamma axiomen av Euklides är hämtade ur [3].

I.1.1 Definitioner av Euklides

1. En punkt är det som saknar delar
2. Och en linje är längd utan bredd
3. Och gränserna på en linje är punkter.
4. En rät linje är en linje som ligger likadant för var och en av sina punkter
5. Och en yta är det som bara har längd och bredd
6. Gränserna av en yta är linjer
7. En plan yta är en yta som ligger likadant för var och en av sina linjer
8. Och en plan vinkel är en böjning mot varandra hos två linjer i ett plan som möter varandra och inte ligger i en rät linje
9. Och om linjerna som innehåller vinkeln är räta, kallas vinkeln rätlinig
10. Och när en rät linje, ställd på en rät linje, gör de angränsande vinklarna lika, så är var och en av de lika vinklarna rät, och den räta linjen som står på den andra kallas en normal till den som den står på.
11. En trubbig vinkel är en vinkel som är större än en rät vinkel

12. Och en spetsig vinkel är en vinkel som är mindre än en rät vinkel.
13. En rand är det som är kant av något.
14. En figur är det som innehålls av en rand eller av ränder.
15. En cirkel är en plan figur som innehålls av en linje sådan att alla räta linjer som faller mot den från en punkt av dem, som ligger inom figuren, är lika
16. Och punkten kallas centrum för cirkeln
17. Och en diameter för cirkeln är varje rät linje som dras genom centrum och avslutas i båda riktningarna av cirkelns omkrets, och en sådan rät linje delar också cirkeln i två delar
18. Och en halvcirkel är den figur som innehålls av diametern och den omkrets som den skär av. Och centrum för halvcirkeln är samma som för cirkeln.
19. Rätliniga figurer är sådana som innehålls av räta linjer, tresidiga figurer sådana som innehålls av tre, fyrsidiga sådana som innehålls av fyra och mångsidiga sådana som innehålls av fler än fyra räta linjer
20. Och bland tresidiga figurer är en liksidig triangel den som har tre sidor lika, en likbent triangel den som har två av sina sidor lika och en oliksidig triangel den som har sina tre sidor olika
21. Och vidare, bland tresidiga figurer är en rätvinklig triangel den som har en rät vinkel, en trubbvinklig triangel den som har en trubbig vinkel och en spetsvinklig triangel den som har sina tre vinklar spetsiga
22. Och bland fyrsidiga figurer är en kvadrat den som är både liksidig och rätvinklig, en rektangel den som är rätvinklig men inte liksidig, en romb den som är liksidig men inte rätvinklig, en romboid den som har sina motsatta sidor och vinklar lika, men varken är liksidig eller rätvinklig. Och låt andra fyrsidingar kallas trapetser.
23. Parallella räta linjer är räta linjer som är i samma plan och, om de förlängs obegränsat i var riktning, inte möter varann i någondera riktningen.

Efter att Euklides har formulerat definitionerna fortsätter han i sin första bok med sina postulat.

I.1.2 Euklides postulat

Låt följande krävas

1. Att dra en linje från varje punkt till varje punkt.
2. Och att fortsätta en ändlig rät linje kontinuerligt i en rät linje.
3. Och att med varje centrum och avstånd kan en cirkel beskrivas.
4. Och att alla räta vinklar är lika.
5. Och att, om en rät linje faller över två räta linjer och gör de inre vinklarna på samma sida mindre än två räta vinklar, så möts de två räta linjerna, om de förlängs obegränsat, på den sida på vilken vinklarna är mindre än de två räta.

För att bygga upp geometrin använde sig Euklides dels av ovan definitioner och postulat och dels av gemensamma axiom av en mer generell karaktär.

I.1.3 Euklides gemensamma axiom

1. Ting som är lika samma ting är också lika varandra.
2. Och om lika läggs till lika blir helheterna lika.
3. Och om lika dras från lika blir återstoden lika.
4. Och ting som sammanfaller med varandra är lika.
5. Och det hela är större än delen.

Kravet att postulaten skulle nödvändigt vara sanna och primära, har lett till en lång och intensiv debatt kring det femte postulatet. De fyra första postulaten är rätt uppenbara medan det femte postulatet är mer speciellt. Det femte postulatet är oberoende av de andra fyra postulaten och det tog över tvåtusen år för matematiker att inse detta. Det finns många logiskt ekvivalenta formuleringar av parallellpostulatet. Att vara logiskt ekvivalent med parallellpostulatet betyder att det ena följer av det andra och omvänt.

Vi kommer i detta arbete att använda oss av det första och det femte postulatet många gånger i våra bevis, därför vill vi presentera en enklare version av det första postulatet och en logiskt ekvivalent formulering av det femte postulatet. Vi kallar dem i texten för axiom 1 respektive axiom 2.

Förutom dessa två axiom presenterar vi axiom 3 som inte nämnts i Euklides bok som ett axiom, men det används vid flera tillfällen i hans böcker, och vi kommer också att behöva använda den ganska många gånger i våra bevis.

Jag hänvisar i detta avsnitt till [7].

Axiom 1 Genom två olika punkter kan man dra en och endast en linje.

Axiom 2 Parallellaxiomet Genom en punkt utanför en linje kan man dra en och endast linje som är parallell med den första linjen.

Axiom 3 Flyttningsaxiomet En geometrisk figur kan flyttas, roteras och vändas utan att dess form eller storlek förändras.

Elementa var en sammanfattning av tidigare grekiska matematikers resultat. Alltså Euklides använder sig inte av eget material utan samlade in material från andra matematiker och flera böcker ur Euklides Elementa tros ha skrivit av andra i sin helhet. Det viktiga som Euklides åstadkom var att samla in och systematiskt skapa en komplett bild över den tidens matematik.

I.1.4 Satser och logiskt bevis

I de följande kapitlen kommer vi att presentera många av Euklides definitioner och Euklides satser. I definitionerna använder vi oss av enkla ord, som förutsätts vara kända och inte behöver förklaras. Dessa ord kallas för grundbegrepp. Alltså med hjälp av grundbegreppen definierar vi andra begrepp, dessa begrepp kallas för definitioner. I definitionerna får man använda grundbegreppen och redan tidigare definierade begrepp.

De flesta satserna som vi kommer att presentera är av formen om något gäller, så gäller även något annat. I själva beviset till dessa satser hänvisar vi till ett axiom eller en tidigare bevisad sats. Då man bevisar en sats, är det mycket viktigt, att man i sina logiska resonemang endast använder sig av axiom och satser, som redan är bevisade. De satser som man använder i beviset måste vara bevisade innan de används i en ny sats.

Ett enkelt exempel som förklarar detta är att bevisa att vinkelsumman i en fyrhörning är 360°. Först måste vi bevisa att vinkelsumman i en triangel är 180°, och sen får vi använda detta faktum som hjälpsats. Alltså eftersom vi redan har bevisat att vinkelsumman i en triangel är 180°, så skulle vi kunna med hjälp av detta och med ett logiskt resonemang bevisa att vinkel summan i en fyrhörning måste vara 360°. Man kan säga att utgångspunkten i denna teori är att vinkelsumman i en triangel är 180°.

I.2 Fakta om trianglar

I detta kapitel presenterar vi kongruenta trianglar och likformiga trianglar. Vi kommer att presentera också de vinklar som uppstår när två linjer skär varandra och de vinklar som uppstår när två linjer skärs av en tredje. I sista avsnittet kommer vi att bevisa några grundläggande satser inom geometrin.

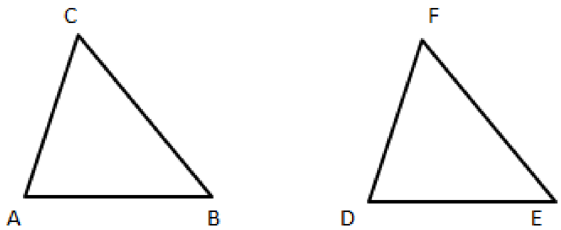
Jag hänvisar främst till [5], [6] och [7] i detta kapitel.

I.2.1 Kongruens

I detta avsnitt kommer vi att presentera kongruenta trianglar och tre kongruensfall. De tre kongruensfallen är viktiga hjälpmedel i geometri. Man använder de ofta då man vill bevisa att två vinklar eller sträckor är lika. Om vi t ex vill visa att två vinklar är lika, så kan man hitta de båda vinklarna i två trianglar som vi visar vara kongruenta med hjälp av något av kongruensfallen. Definitionen av kongruenta trianglar innehåller sex villkor, men det räcker med att vissa av dem är uppfyllda för att resten också ska vara det. Vi har tre olika kombinationer av dessa villkor som gör att trianglarna som uppfyller dem är kongruenta. Dessa kombinationer, som ska presenteras nedan, kallas de tre kongruensfallen.

Definition
Två trianglar ΔABC och ΔDEF är kongruenta om de tre sidorna och de tre vinklarna i den första triangeln är lika med motsvarande element i den andra triangeln. Vi använder oss av beteckningen $\Delta\mathrm{ABC}\equiv\Delta\mathrm{DEF}$ för kongruens.

Sats 1 (1:a kongruensfallet)
Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.



Bevis:

Låt ΔABC och ΔDEF vara två trianglar med
$AC = DF$, $AB = DE$ och $\wedge CAB = \wedge FDE$.

Vi skall bevisa att

$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

Flytta triangeln ΔDEF så att punkten D faller på punkten A och DF faller utefter AC. Flyttningsaxiomet ger,

F faller på C, ty $AC = DF$.

DE faller utefter AB, ty $\wedge FDE = \wedge CAB$.

E faller på B, ty $DE=AB$.

Axiom1 medför att

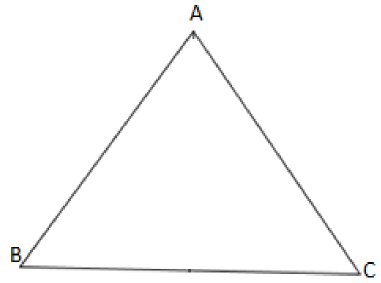
EF faller utefter BC.

Så trianglarna ΔABC och ΔDEF är kongruenta.

Vi skall använda oss av det första kongruensfallet för att bevisa att basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.

□

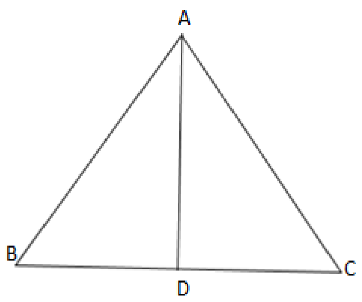
Sats 2
Om två sidor i en triangel är lika stora, så är de båda motstående vinklarna lika stora.
Bevis:



Låt ΔABC vara är en triangel med

$$AB=AC.$$

Vi skall bevisa att $\wedge ABC=\wedge BCA$.



Dra AD så att följande vinklar blir lika stora

$$\wedge BAD = \wedge DAC.$$

I trianglarna ΔABD och ΔACD har vi

$AB=AC$,
$AD=AD$,
$\wedge BAD=\wedge DAC$.

Sats 1 ger

$$\Delta BAD \equiv \Delta CAD.$$

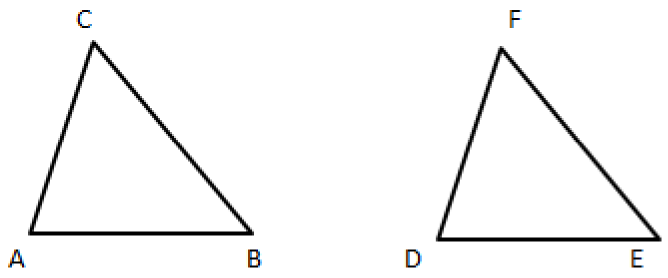
Kongruenta trianglar ger

$$\wedge ABC=\wedge BCA.$$

□

Sats 3 (2:a kongruensfallet)

Om de tre sidorna i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.



Bevis:

Låt ΔABC och ΔDEF vara två trianglar med

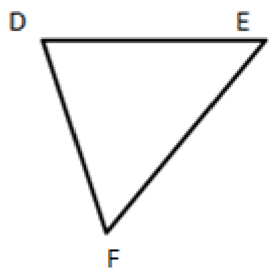
$$AB=DE,\ BC=EF \text{ och } AC=DF.$$

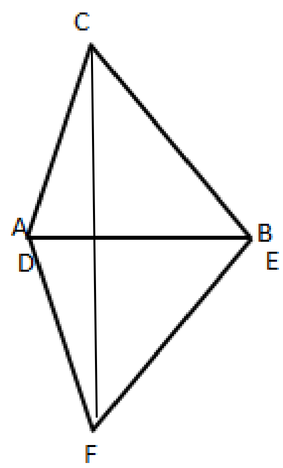
Vi skall bevisa att

$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

Det räcker att bevisa att $\wedge ACB = \wedge DFE$, för första satsen ger då att $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

Vi vänder triangeln ΔDEF lodrätt, som figuren nedan visar, eftersom flyttningsaxiomet tillåter oss att rotera och vända på triangeln utan att dess form eller storlek förändras.





Vi flyttar triangeln ΔDEF efter omvändningen så att

D faller på A,

DE faller utefter AB.

Flyttningsaxiomet ger

E faller på B, för att $AB = DE$.

Vi drar CF. Antagande och flyttningsaxiomet ger

$$AC = DF = AF.$$

Sats 2 ger

$$\wedge ACF = \wedge AFC.$$

Antagande och flyttningsaxiomet ger

$$CB = EF = BF.$$

Sats 2 ger

$$\wedge BCF = \wedge BFC.$$

Euklides axiom 2 ger

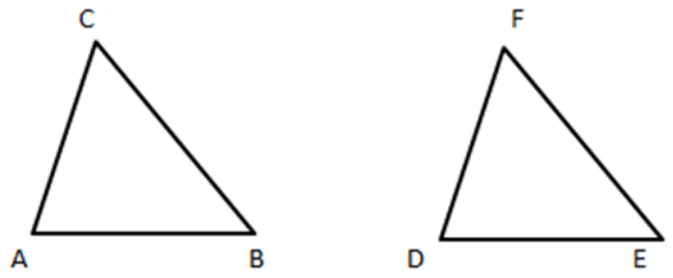
$$\wedge ACB = \wedge AFB = \wedge DFE.$$

Sats 1 om kongruenta trianglar medför att

$$\Delta ABC \equiv \Delta ABF \equiv \Delta DEF.$$

□

Sats 4 (3:a kongruensfallet)
Om två vinklar och mellanliggande sida i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel, så är de trianglarna kongruenta.



Bevis:

Låt ΔABC och ΔDEF vara två trianglar med

$$\wedge CAB=\wedge FDE,\ \wedge ABC=\wedge DEF \text{ och } AB=DE.$$

Vi skall bevisa att

$$\Delta ABC\equiv\Delta DEF.$$

Flytta triangeln ΔDEF så att D faller på A och DE utefter AB.

Flyttningsaxiomet ger

E faller på B, ty $AB = DE$.

EF faller utefter BC, ty $\wedge DEF = \wedge ABC$.

DF faller utefter AC, ty $\wedge CAB = \wedge FDE$.

Eftersom man kan dra en och endast en linje genom två olika punkter, så medför detta att

$$F \text{ faller på } C.$$

Då är $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$.

□

I.2.2 Likformighet

Två trianglar som har samma form men inte nödvändigt samma storlek kallas likformiga. Det finns tre likformighetsfall. Nedan ger vi en presentation till dessa tre fall.

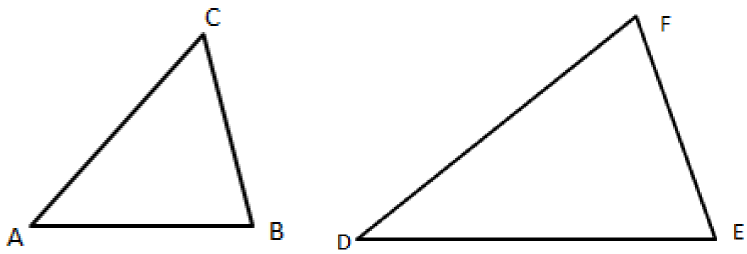
Definition

Två trianglar ΔABC och ΔDEF är likformiga om

$$AB/DE = AC/DF = BC/EF \qquad *$$

och

$$\wedge CAB = \wedge FDE,\ \wedge ABC = \wedge DEF,\ \wedge ACB = \wedge DFE.$$



Likformighet betecknas med

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Förhållandet * mellan sidorna kallas likformighetsskalan.

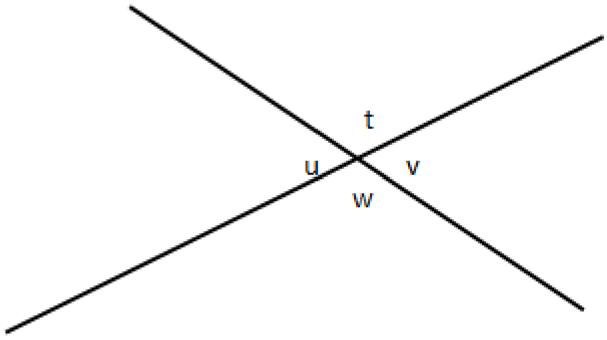
Första likformighetsfallet: om två sidor i en triangel är proportionella mot två sidor i en annan triangel och mellanliggande vinklar är lika stora, så är trianglarna likformiga.

Andra likformighetsfallet: om sidorna i en triangel är proportionella mot sidorna i en annan triangel, så är trianglarna likformiga.

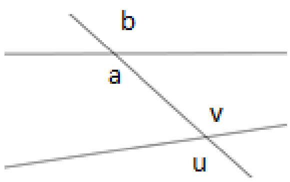
Tredje likformighetsfallet: om vinklarna i en triangel är lika med vinklarna i en annan triangel, så är trianglarna likformiga.

I.2.3 Parallella linjer och vinklar

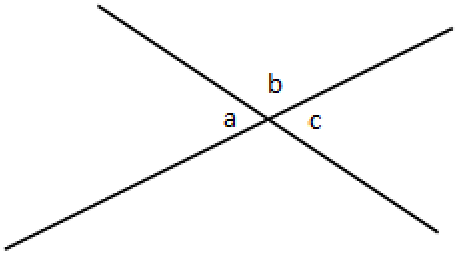
När två linjer skär varandra som i figuren nedan, så uppstår fyra vinklar som u, v, w och t. Vinklarna u och v respektive t och w kallas vertikalvinklar.



Om två linjer skärs av en tredje linje som i figuren nedan, så får vi likbelägna och alternatvinklar. Vinklarna u och a respektive v och b är likbelägna vinklar medan u och b respektive v och a är alternatvinklar.



Sats 5 Vertikalvinklar är lika stora.



Bevis:

$a + b = 180°$. Och

$b + c = 180°$.

Euklidiska axiom ger

$a + b = b + c$.

Detta medför att

$a = c$.

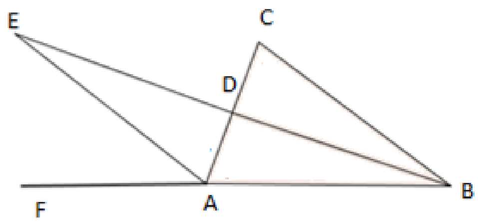
□

Sats 6

I en triangel är 2 vinklar tillsammans alltid mindre än 2 räta.

Bevis:

Låt ΔABC vara en triangel. Vi ska bevisa att



$\wedge BAC + \wedge ACB < 180°$.

Vi drar BD så att

$AD = DC$.

Vi väljer E så att följande sidor blir lika långa.

$ED = DB$.

Dra EA. Sats 5 ”vertikalvinklarna är lika stora ” ger

$\wedge CDB = \wedge EDA$.

Konstruktionen ger

$AD = DC$.

$$ED = DB.$$

Sats 1 om kongruenta trianglar ger

$$\Delta EDA \equiv \Delta BDC.$$

Definitionen på kongruenta trianglar ger

$$\wedge ACB = \wedge CAE.$$

Vi förlänger *BA* över *A*. Låt *F* vara en punkt på förlängningen av *BA*. Då gäller att

$$\wedge FAB = 180°.$$

$\wedge BAC + \wedge CAE$ utgör tillsammans en vinkel som är mindre än $\wedge FAB$, då gäller att

$$\wedge BAC + \wedge CAE < 180°.$$

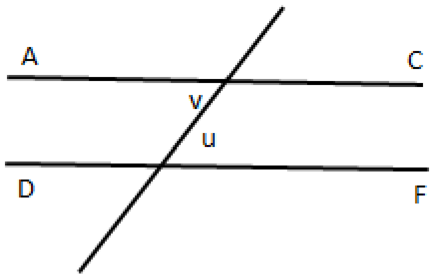
Eftersom $\wedge ACB = \wedge CAE$, så är

$$\wedge BAC + \wedge ACB < 180°.$$

□

Sats 7

Om två linjer skärs av en tredje och ett par alternatvinklar är lika stora, så är de två första linjerna parallella.

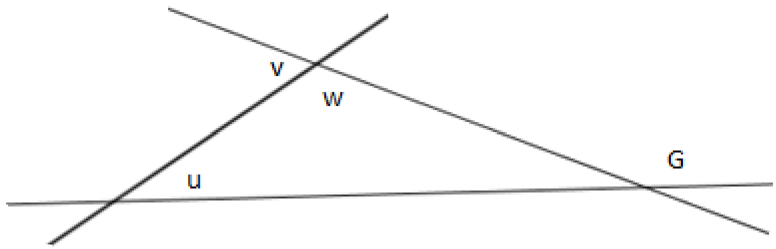


Bevis: Givet

$$u = v.$$

Vi skall bevisa att *AC* och *DF* är parallella.

Om linjerna inte är parallella skulle de skära varandra i t ex *G*, som i figuren nedan.



Då gäller att

$$v + w = 180°.$$

Antagandet ger

$$u = v.$$

Euklidiska axiom ger

$$u + w = 180°.$$

sats 6 ger

$$u + w < 180°.$$

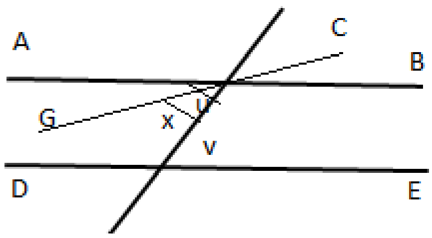
Detta är en motsägelse, så antagandet att linjerna skär varandra i G är felaktigt. Alltså är linjerna parallella.

Omvändningen till satsen gäller också. Vi ska bevisa detta i satsen nedan.

□

Sats 8

Om två parallella linjer skärs av en tredje, så är varje par alternatvinklar lika stora.



Bevis: Givet

AB och DE är parallella.

Vi skall bevisa att $u = v$.

Dra GC så att $x = v$.

Sats 7 ger att GC och DE är parallella.

Men AB och DE är parallella, enligt antagandet ovan.

Parallellaxiomet ger

GC faller utefter AB.

Detta i sin tur medför att

$x = u.$

Konstruktionen ger

$x = v.$

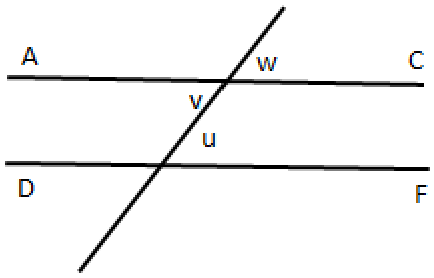
Euklides axiom ger

$u = v.$

□

Sats 9

Om två linjer skärs av en tredje och ett par likbelägna vinklar är lika stora, så är de båda linjerna parallella.



Bevis: Givet

$u = w.$

Vi skall bevisa att AC och DF är parallella.

Sats 5 om vertikalvinklar ger

$v = w.$

Antagandet och Euklides axiom ger

$v = u.$

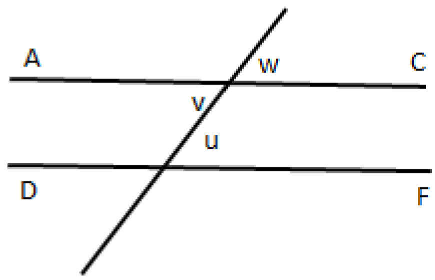
Sats 7 ger

AC och DF är parallella.

□

Sats 10

Om två parallella linjer skärs av en tredje, så är likbelägna vinklar lika stora.



Bevis: Givet

$$AC \text{ och } DF \text{ är parallella.}$$

Vi skall bevisa att $w = u$.

Sats 8 ger

$$v = u.$$

Sats 5 ger

$$v = w.$$

Euklides axiom ger

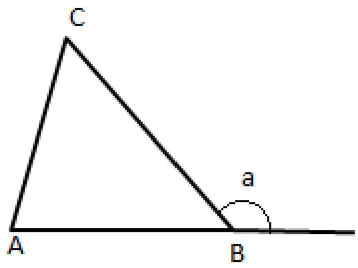
$$u = w.$$

□

I.2.4 Trianglar och vinklar

Definition

Vinkeln *a* kallas yttervinkel till triangeln ΔABC.



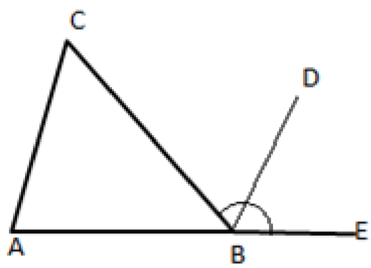
Sats 11 (yttervinkelsatsen)

En yttervinkel till en triangel är lika med summan av de båda inre motstående vinklarna i triangeln.

Bevis: Låt ΔABC vara en triangel där $\wedge EBC$ är yttervinkel.

Vi skall bevisa att $\wedge EBC = \wedge BAC + \wedge ACB$.

Dra BD parallell med AC.



Sats 10 ger

$$\wedge BAC = \wedge EBD. \qquad (1)$$

Sats 8 ger

$$\wedge ACB = \wedge DBC. \qquad (2)$$

Addition av likheten (1) och (2) ger

$$\wedge BAC + \wedge ACB = \wedge EBD + \wedge DBC.$$

Men

$$\wedge EBD + \wedge DBC = \wedge EBC.$$

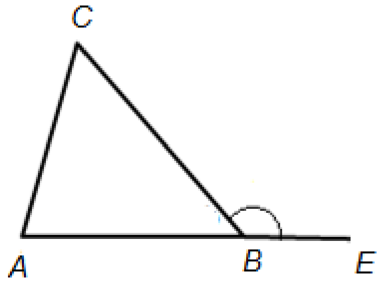
Detta medför att

$$\wedge EBC = \wedge BAC + \wedge ACB.$$

□

Sats 12

Vinkelsumman i en triangel är 180° (2 räta).



Bevis: Låt ΔABC vara en triangel. Vi skall bevisa att

$$\wedge CAB + \wedge ABC + \wedge BCA = 180°.$$

Vi har

$$\wedge ABC + \wedge CBE = 180°. \qquad (1)$$

Sats 11 ger

$$\wedge CAB + \wedge ACB = \wedge CBE. \qquad (2)$$

Addition av likheten (1) och (2) ger

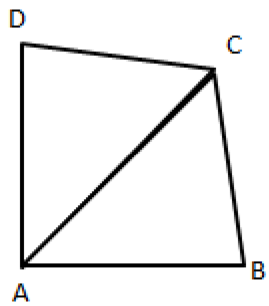
$$\wedge CAB + \wedge ABC + \wedge BCA = 180°.$$

□

Sats 13

Vinkelsumman i en fyrhörning är *360°* (4 räta).

Bevis:



Sats 12 ger

$$\wedge BAC+\wedge ACB+\wedge CBA= 180°.$$

$$\wedge CAD+\wedge ADC+\wedge DCA= 180°.$$

Addition av likheterna ovan ger

$$\wedge BAC+\wedge ACB+\wedge CBA+ \wedge CAD+\wedge ADC+\wedge DCA= 360°. \qquad (1)$$

Men

$$\wedge BAC+\wedge CAD =\wedge BAD. \qquad (2)$$

Och

$$\wedge BCA+\wedge ACD =\wedge BCD. \qquad (3)$$

Substitution av likheterna (2) och (3) i (1) ger

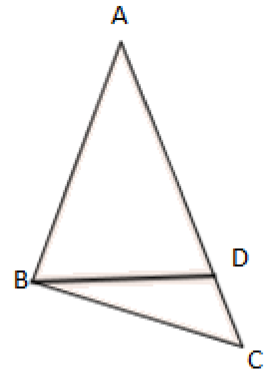
$$\wedge BAD+\wedge ADC+\wedge DCB+\wedge CBA= 360° \text{ (4 räta)}.$$

□

Sats 14

Om en sida i en triangel är större än en annan sida i samma triangel, så är den vinkel, som står mot den större sidan, större än den som står mot den mindre.

Bevis: I triangeln ΔABC har vi



$$AC > AB.$$

Vi skall bevisa att

$$\wedge ABC > \wedge ACB.$$

Vi väljer D på AC så att

$$AD = AB.$$

Vi drar BD. Axiom 4 ger

$$\wedge ABC > \wedge ABD. \qquad (1)$$

Sats 2 om likbenta trianglar ger

$$\wedge ABD = \wedge ADB. \qquad (2)$$

Sats 11 ”yttervinkelsats” ger

$$\wedge ADB = \wedge ACB + \wedge CBD.$$

Detta medför enligt axiom 4 att

$$\wedge ADB > \wedge ACB. \qquad (3)$$

(1), (2) och (3) ger

$\wedge ABC > \wedge ABD = \wedge ADB > \wedge ACB.$

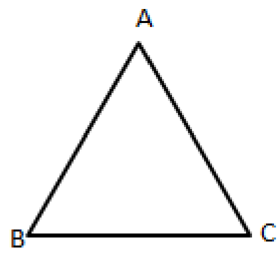
Alltså är $\wedge ABC > \wedge ACB$.

□

Sats 15

Om två vinklar i en triangel är lika stora, så är motstående sidor lika stora (basvinkelsatsen).

Bevis: I triangeln ΔABC har vi



$$\wedge ABC = \wedge ACB.$$

Vi skall bevisa att

$$AB = AC.$$

Vi antar att $AB \neq AC$, då skulle antigen AB vara större eller mindre än AC.

Sats 14 ger

$$\text{om } AB>AC\text{, så skulle } \wedge ACB>\wedge ABC.$$

Och

$$\text{om } AB<AC\text{, så skulle } \wedge ABC>\wedge ACB.$$

Men detta motsäger vår förutsättning.

Alltså är $AB=AC$.

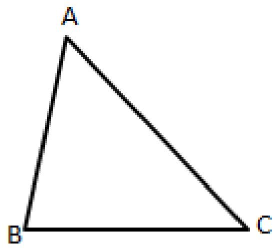
□

Sats 16

Om en vinkel i en triangel är större än en annan så är den sida, som står mot den större vinkeln, större än den sida som står mot den mindre.

Bevis: I triangeln ΔABC har vi

$$\wedge B > \wedge C.$$



Vi skall bevisa att

$$AC > AB.$$

Vi antar att AC inte är större än AB då skulle antigen AC vara lika med AB eller mindre än AB.

Sats 2 ger

$$\text{Om } AC = AB\text{, så skulle } \wedge B = \wedge C.$$

Sats 14 ger

$$\text{Om } AC < AB\text{, så skulle } \wedge B < \wedge C.$$

Men båda fallen motsäger vår förutsättning.

Alltså är $AC > AB$.

□

I.3 Cirkel

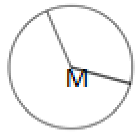
Under denna rubrik presenteras cirkeln, tangent, korda, randvinkel osv. Jag kommer att bevisa randvinkelsatsen och dess omvändning. Satsen om sambandet mellan cirkelns tangent och cirkelns radie presenteras och bevisas också i detta avsnitt. Dessa satser kommer till användning i kommande satser i t ex när vi ska bevisa att en linje är en tangent, eller om en punkt ligger på cirkel eller inte.

Jag hänvisar främst till [5] och [7] i detta kapitel.

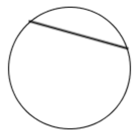
I.3.1 Satser om cirkel

Definitioner

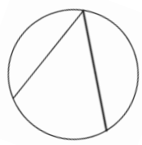
En cirkel är en kurva på vilken alla punkter ligger på samma avstånd från en viss punkt, som kallas cirkelns medelpunkt (M).



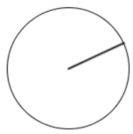
En korda är en sträcka mellan två punkter på en cirkel.



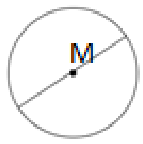
En randvinkel är vinkeln mellan två kordor, som träffar varandra i en punkt på cirkeln (periferivinkel).



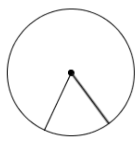
En radie är en sträcka mellan cirkelns medelpunkt och en punkt på cirkeln.



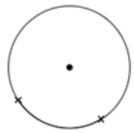
En diameter är en korda genom medelpunkten.



En medelpunktsvinkel är vinkeln mellan två radier.

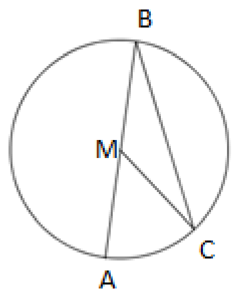


En cirkelbåge eller båge är en sammanhängande del av cirkeln.



Sats 17 (randvinkelsatsen eller periferivinkelsatsen)
En randvinkel är hälften så stor som en medelpunktsvinkel på samma båge.
Bevis:
Vi ritar en cirkel med medelpunkten *M* och vi ritar två vinklar på bågen *AC*. Den ena är medelpunktsvinkeln $\wedge AMC$ och den andra är periferivinkeln eller randvinkeln $\wedge ABC$.
Vi skall bevisa att

$$\wedge ABC = ½ \wedge AMC.$$



Vinklarna kan ligga på tre olika sätt.
Fall 1: Randvinkelns ena vinkelben går genom medelpunkten.

Triangeln Δ *BMC* är likbent eftersom både *MB* och *MC* är radier i samma cirkel. Alltså

$$MB = MC.$$

Sats 2 ger

$$\wedge MBC = \wedge MCB. \qquad (1)$$

Sats 11 ”yttervinkelsatsen” ger,

$$\wedge AMC = \wedge MBC + \wedge MCB. \qquad (2)$$

Substitution av likheten (1) i (2) ger,

$$\wedge AMC = \wedge MBC + \wedge MBC = 2\wedge MBC = 2\wedge ABC.$$

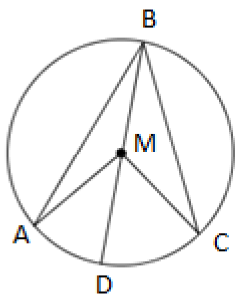
Vi delar sista likheten med 2, så vi får

$$\wedge ABC = ½ \wedge AMC.$$

□

Fall 2: Medelpunkten ligger mellan randvinkelns vinkelben.
Vi drar *BD* genom *M.*
Fall 1 ger,

$$\wedge ABD = ½ \wedge AMD$$
$$\wedge DBC = ½ \wedge DMC.$$



Om vi adderar likheterna ovan, så får vi

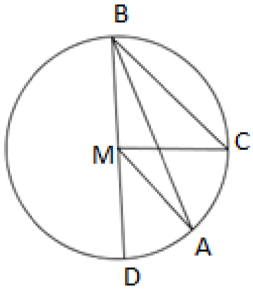
$$\wedge ABD + \wedge DBC = ½ \wedge AMD + ½ \wedge DMC.$$

Euklides axiom ger

$$\wedge ABC = ½ \wedge AMC.$$

□

Fall 3: Medelpunkten ligger utanför randvinkeln.
Vi drar *BD* genom *M.*
Fall 1 ger



$$\wedge DBC = ½ \wedge DMC.$$

Och

$$\wedge DBA = ½ \wedge DMA.$$

Om vi subtraherar likheterna ovan, så får vi

$$\wedge DBC - \wedge DBA = ½ \wedge DMC - ½ \wedge DMA.$$

Detta medför att

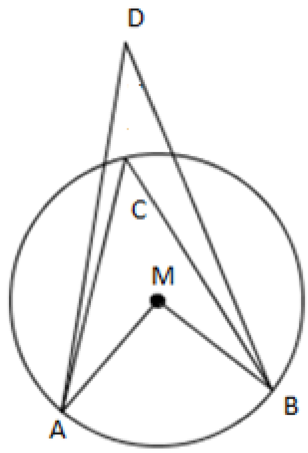
$$\wedge ABC = ½ \wedge AMC.$$

□

Sats 18 (Omvändning till periferivinkelsatsen)

Vi antar att vinkeln $\wedge ADB$ är hälften så stor som $\wedge AMB$. Då måste D ligga på cirkelperiferin.

Bevis



Fall 1: *D* ligger utanför cirkeln.

Vi antar att D ligger utanför cirkeln sådant att

$$\wedge ADB= 1/2\wedge AMB. \qquad (1)$$

och låt *C* vara en punkt på periferin och inuti $\wedge ADB$.

Periferivinkel satsen ger

$$\wedge ACB = 1/2\wedge AMB. \quad (2)$$

(1) Och (2) ger

$$\wedge ACB=\wedge ADB.$$

Den stora vinkeln vid C är lika med

$$360° -\wedge ACB = 360° -\wedge ADB.$$

Sats 13 ger att vinkelsumman i fyrhörningen *DACB* är 360°.

I fyrhörningen *ADBC* har vi summan av två vinklar lika med 360°, ty

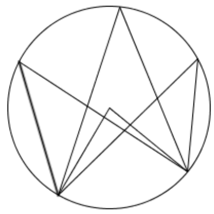
$$\wedge ACB + \wedge ADB = 360° - \wedge ADB + \wedge ADB = 360°.$$

Detta medför att båda vinklarna $\wedge DAC$ och $\wedge CBD$ är 0. Detta i sin tur medför att D och C är samma punkt. Eftersom C är godtycklig punkt som ligger på periferin, så måste D falla på C. Alltså ligger D på cirkelperiferin.

Fall 2: D ligger inuti cirkeln. Detta kan behandlas på samma sätt.

□

Anmärkning 1

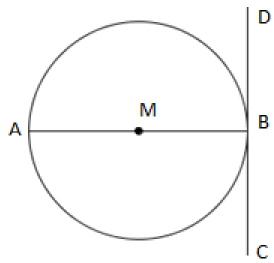


En konsekvens av randvinkelsatsen är att alla randvinklar på samma båge är lika stora.

I.3.2 Tangenter och kordor i cirklar

Definition

En tangent till en cirkel är en rät linje som har exakt en punkt gemensam med cirkeln som kallas tangeringspunkt.

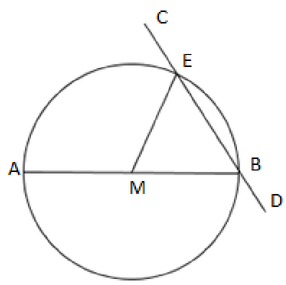


Sats 19

En linje genom diameters ena ändpunkt, som är vinkelrät mot diametern, är en tangent till cirkeln.

Bevis: Givet

AB är en diameter. Linjen DC är vinkelrät mot AB.



Vi skall bevisa att linjen DC är en tangent.

För att bevisa detta, antar vi att DC inte är tangent.

Då skulle den skära cirkeln i ytterligare någon punkt E.

Dra radien ME.

Linjen DC är vinkelrätt mot AB. Detta medför att

$$\wedge MBE = 90°.$$

Eftersom två radier i samma cirkel är lika stora, så är

$MB = ME.$

Om två sidor i en triangel är lika stora, så är triangeln likbent. Alltså är ΔBME likbent triangel.

Sats 2 om likbenta trianglar ger

$$\wedge MEB = \wedge MBE = 90°.$$

Sats 6 ger

$$\wedge MEB + \wedge MBE < 180°.$$

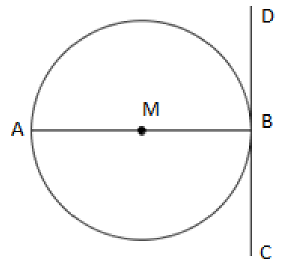
Detta är en motsägelse, så *DC* kan inte skära cirkeln i någon punkt utöver *B*.

Alltså är *DC* en tangent.

□

Sats 20

En tangent till en cirkel är vinkelrät mot radien genom tangeringspunkten.



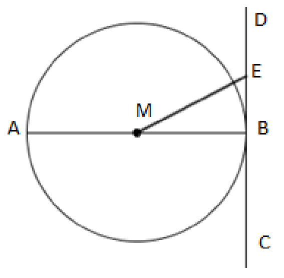
Bevis:

Linjen *CD* är en tangent till cirkeln.

Vi skall bevisa att $\wedge ABD = 90°$.

Vi antar att tangenten *CD* inte är vinkelrät mot *MB*. Vi drar en linje *ME* som är vinkelrät mot *CD*. Då får vi en rätvinklig triangel ΔMEB.

Då skulle gälla enligt sats 6 att



$$\wedge MBE + \wedge MEB < 180°.$$

Men konstruktionen ger

$$\wedge MEB = 90°.$$

Detta medför enligt sats 6 att

$$\wedge MBE < 90°.$$

Sats 16 ger

$$ME < MB.$$

Då skulle *ME* vara mindre än cirkelns radie dvs *E* skulle ligga inuti cirkeln och linjen *CD* skär cirkeln i ytterligare en punkt.

Men enligt definitionen av en tangent skulle detta motsäga att *CD* är en tangent till cirkeln. Detta medför att *CD* måste vara vinkelrät mot *MB.*

□

I.4 Speciella punkter i en triangel

I en triangel skär bisektriserna varandra i en punkt, liksom mittpunktsnormalerna, medianerna och höjderna. Nedan kommer dessa punkter att definieras och påståendet ovan att bevisas.

Jag hänvisar främst till [5] i detta kapitel.

1.4.1 Bisektrisernas, mittpunktsnormalernas, medianernas och höjdernas skärningspunkt

Definitioner

En bisektris till en vinkel är en linje som delar en vinkel i två lika stora delar.

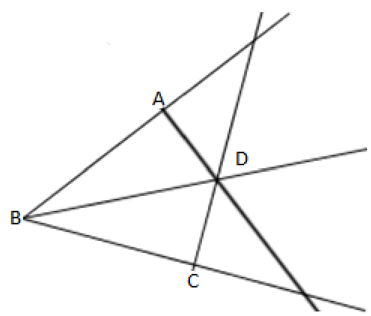
En normal till en linje är en linje som är vinkelrät mot den givna linjen.

Mittpunktsnormalen till en sträcka BC är den normal som går genom mittpunkten på sträckan BC.

En median i en triangel är en sträcka som går från ett hörn till motstående sidas mittpunkt.

En höjd i en triangel är en normal från ett hörn till motstående sida eller dess förlängning.

Sats 21



Bisektrisen till en vinkel består av de punkter som har samma vinkelräta avstånd till båda vinkelbenen.

Bevis:

Låt *D* vara en punkt på bisektrisen till vinkeln $\wedge B$. Vi väljer *A* respektive *C* på vinkelbenen sådana att

$\wedge BAD = 90°$, och $\wedge BCD = 90°$.
Definitionen till bisektrisen ger
$\wedge ABD = \wedge DBC$.

I trianglarna ΔABD och ΔCBD har vi följande likheter med avseende på vinklarna.

$\wedge BAD = \wedge BCD = 90°$, Och $\wedge ABD = \wedge DBC$.

Detta medför att

$\wedge BDA = \wedge BDC$.

Vi har också

BD är en gemensam sida i ΔABD och ΔCBD

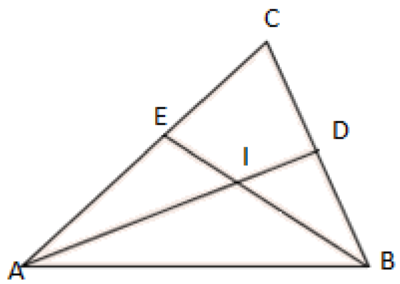
Sats 4 om kongruenta trianglar ger

$\Delta ABD \equiv \Delta CBD$.

Detta medför att $AD = CD$.

□

Sats 22
Bisektriserna i triangel skär varandra i en punkt.



Bevis:

Vi ritar två bisektriser AD och BE.

De skär varandra i en punkt I.

Sats 21 ger

I har samma vinkelräta avstånd till BA som BC.

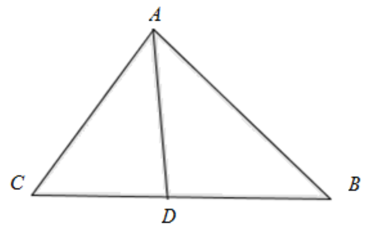
I har även samma vinkelräta avstånd till AB som AC.

Alltså har I samma avstånd till alla tre sidor i triangeln.

Detta medför att I ligger på bisektrisen från C.

□

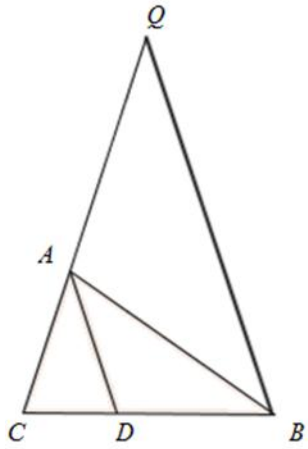
Sats 23 (Bisektrissatsen)



En bisektris delar den tredje sidan i en triangel i samma förhållande som de två första sidorna

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$$

Bevis: Vi drar BQ så att BQ är parallell med bisektrisen AD.



$\wedge DAB = \wedge ABQ$*”* alternatvinklar”

$\wedge BQA = \wedge CAD$ ”likbelägna vinklar”

$\wedge CAD = \wedge DAB$ eftersom AD är bisektris.

Detta medför att $\wedge ABQ = \wedge BQA$.

Då är ΔABQ likbent triangel med $AB = AQ$.

Trianglarna ΔCAD och ΔCQB är likformiga, eftersom vinklarna i den ena triangel är lika med motsvarande vinklar i den andra triangeln.

Vi får följande likformighetsskala

$$\frac{CA}{CA+AQ} = \frac{CD}{CD+DB}\text{. eller } \frac{CA}{AQ} = \frac{CD}{DB}\text{.}$$

Eftersom $AB = AQ$, då är även

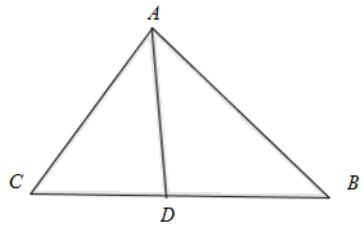
$$\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB}\text{.}$$

□

Anmärkning 2 Omvändning till denna sats gäller också d v s om i någon triangel gäller att

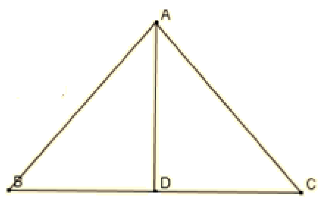
$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$$

så är AD en bisektris.



Sats 24
För alla punkter A på mittpunktsnormalen till en sträcka BC gäller att $AB = AC$.

Bevis: Låt D vara mittpunkten på BC, och AD vara mittpunktsnormalen till BC.



Sats 1 ger att ΔADC och ΔADB är kongruenta. Ty

AD är gemensam sida,

$BD=CD$ enligt definitionen ovan,

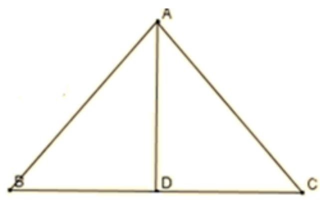
$\wedge ADB$ och $\wedge ADC$ är räta.

Då är $AB=AC$.

□

Sats 25
En punkt som har samma avstånd till två givna punkter ligger på mittpunktsnormalen till sträckan mellan de givna punkterna.

Bevis: Låt *A* vara en punkt som har samma avstånd till två givna punkter *B* och *C*. Vi skall bevisa att *A* ligger på mittpunktsnormalen till sträckan *BC*.
Vi sammanbinder punkterna *A* och *B* likaså *A* och *C*, så vi får triangeln ΔABC.
Från *A* drar vi en normal till *BC*, så får vi två trianglar ΔABD och ΔACD.
Eftersom $AB= AC$, så är $\wedge ABC = \wedge ACB$.
Vi har också $\wedge ADB = \wedge ADC = 90°$. Detta medför att den tredje vinkeln i den ena triangel är lika med den tredje vinkeln i den andra triangeln dvs $\wedge BAD = \wedge CAD$.
Alltså i dessa trianglar har vi



$AB= AC$,
AD är en gemensam sida,
$\wedge BAD = \wedge CAD$.

Enligt sats 1 är trianglarna ΔABD och ΔACD kongruenta.
Kongruenta trianglar ger

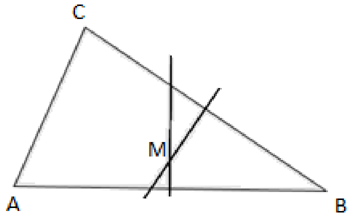
$$BD = CD$$

Alltså är *AD* mittpunktsnormalen till *BC* dvs *A* ligger på mittpunktsnormalen till *BC*.

□

Sats 26
De tre mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en punkt.

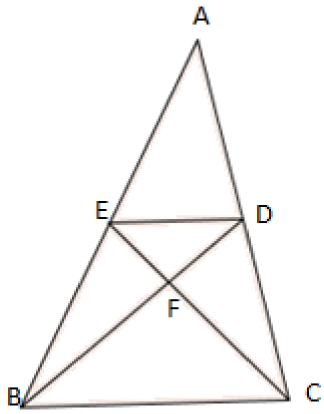
Bevis: I triangeln ΔABC drar vi mittpunktsnormalerna till sidorna *AB* och *BC*. Låt *M* vara deras skärningspunkt. Att *M* ligger på *AB*:s mittpunktsnormal innebär att $MA = MB$. Eftersom *M* ligger på *BC*:s mittpunktsnormal gäller även att $MB = MC$. Då är $MA = MC$ och därmed ligger *M* på *AC*:s mittpunktsnormal, enligt sats 25. Detta innebär att de tre mittpunktsnormalerna skär varandra i en punkt som är *M*.



□

Sats 27
Medianerna till en triangel skär varandra i en punkt, som kallas triangelns tyngdpunkt. Skärningspunkten delar medianerna i förhållandet 1:2.

Bevis:
I figuren är BD och CE två medianer och F är deras skärningspunkt. Vi drar sträckan ED.
Eftersom punkterna D och E är mittpunkterna på AC respektive AB, kan vi ställa upp följande samband



$$AD / AC = AE / AB = 1/2.$$

Första likformighetsfallet ger

$$\Delta AED \sim \Delta ABC.$$

Detta medför att

$$\wedge AED = \wedge ABC.$$

Sats 9 om vinklar och parallella linjer ger

ED och BC är parallella.

Sats 8 ger

$$\wedge DEC = \wedge BCE$$

$$\wedge BDE = \wedge CBD.$$

Tredje likformighetsfallet ger

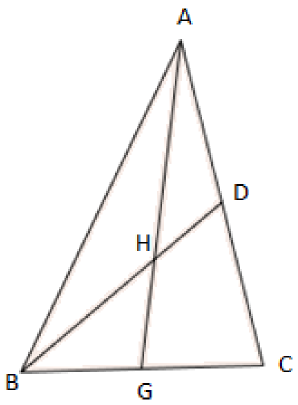
$$\Delta BCF \sim \Delta DEF.$$

Eftersom likformighetsskalan mellan ΔAED och ΔABC är ½, så kan vi ställa upp följande samband.

$$EF / CF = DF / BF = ED / BC = 1/2.$$

Detta betyder att punkten F delar medianerna BD och CE i förhållandet 1:2.

Vi ritar den tredje medianen *AG*. Låt *AG* och *BD* skära varandra i en punkt *H*.



Om vi upprepar hela resonemanget med *AG* och *BD* istället, då kommer punkten *H* också att dela *BD* i förhållandet 1:2. Detta betyder att *H* och *F* måste vara samma punkt.
Alltså skär medianerna i en triangel varandra i en punkt som delar dem i förhållandet 1:2.

Sats 28
De tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

Bevis:
Låt ΔABC vara en triangel. Vi drar *DE* parallell med *AB* genom *C*, *DF* parallell med *AC* genom *B* och *EF* parallell med *CB* genom *A*. Då är ΔABC och ΔDCB kongruenta enligt sats 4. Ty Sats 8 ger att följande alternatvinklar är lika stora,

$$\wedge ABC = \wedge BCD \text{ och } \wedge ACB = \wedge CBD$$

Vi har också en gemensamsida som är *BC*.

På samma sätt bevisas att

$$\Delta CEA \equiv \Delta ABC \equiv \Delta BAF.$$

Detta medför att

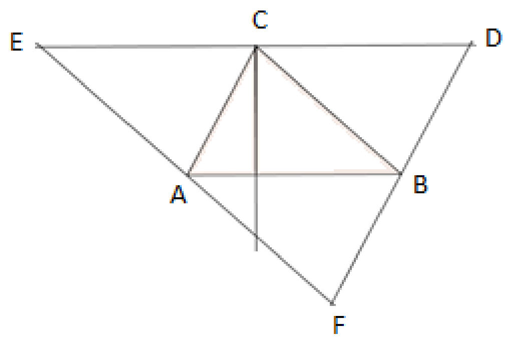
$$EC = CD = AB.$$

Dra nu höjden från *C*. Den är vinkelrät mot *DE*, ty *DE* är parallell med *AB*.

Eftersom $EC = CD = AB$, så är höjden genom *C* mittpunktsnormal till *DE*.

På samma sätt bevisas att höjden från A mot BC och höjden från B mot AC är mittpunktsnormalerna till BC respektive AC.

Höjderna i ΔABC är mittpunktsnormalerna i ΔDEF, så de skär varandra i en punkt.



□

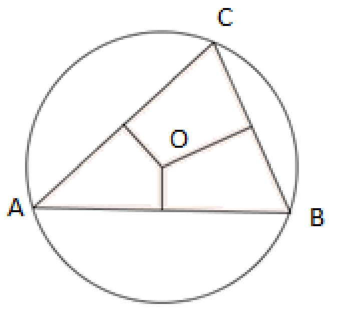
I.4.2 Inskriven, omskriven och vidskriven cirkels medelpunkt

Varje triangel har en inskriven cirkel, en omskriven cirkel och tre vidskrivna cirklar. Vi kommer att utnyttja definitionerna och de bevisade satserna ovan i bevisen av intressanta satser om trianglar som presenteras nedan.

Definition
En cirkel som går genom alla tre hörn i en triangel ΔABC kallas en omskriven cirkel till triangeln.

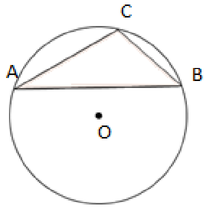
Sats 29
Varje triangel har en omskriven cirkel. Medelpunkten O är skärningspunkten för mittpunktsnormalerna till triangelns sidor.

Bevis:
Vi ritar mittpunktsnormalerna till sträckorna AB och AC, låt O vara deras skärningspunkt.
Att O ligger på AB:s mittpunktsnormal innebär att $OA = OB$.
Eftersom O ligger också på AC:s mittpunktsnormal, så gäller även att $OA = OC$. Men då är $OC = OB$, och därmed ligger O på BC:s mittpunktsnormal.
Cirkeln med medelpunkten O och radie OA går genom alla tre hörn och är en omskriven cirkel till triangeln ΔABC.



□

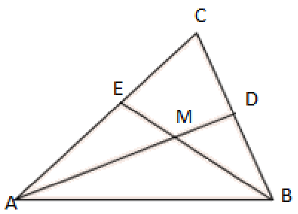
Anmärkning 3 Enligt randvinkelsatsen så är $\wedge AOB$ dubbelt så stor som $\wedge ACB$. Om triangeln ΔABC är trubbvinklig vid C, så blir $\wedge AOB$ större än180°, vilket betyder att medelpunkten O ligger utanför triangeln.



Definition

En cirkel som tangerar alla tre sidorna i en triangel kallas en inskriven cirkel.

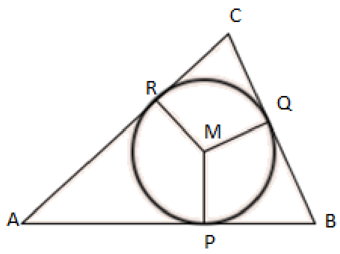
Sats 30
Alla trianglar har en inskriven cirkel. Medelpunkten *M* är bisektrisernas skärningspunkt.



Bevis:
En punkt som har samma vinkelräta avstånd till alla triangelns sidor är bisektrisernas skärningspunkt, enligt sats 21.

För att få den inskrivna cirkeln, drar vi normalerna från bisektrisernas skärningspunkt *M* mot sidorna och betecknar vi fotpunkterna med *P, Q* och *R.* Enligt sats 21 får vi

$$MP = MR = MQ. \qquad (1)$$



Vi ritar cirkeln med medelpunkten *M* och radie *MP*. Den går även genom *Q* och *R* med avseende på samband (1). Enligt sats 19, gäller följande.

MP är vinkelrät mot *AB*, så cirkeln tangerar *AB* i *P*.

MQ är vinkelrät mot *CB*, så cirkeln tangerar *CB* i *Q*.

MR är vinkelrät mot *AC*, så cirkeln tangerar *AC* i *R*.

Alltså är cirkeln med medelpunkten *M* och radie *MP* en inskriven cirkel.

□

Definition

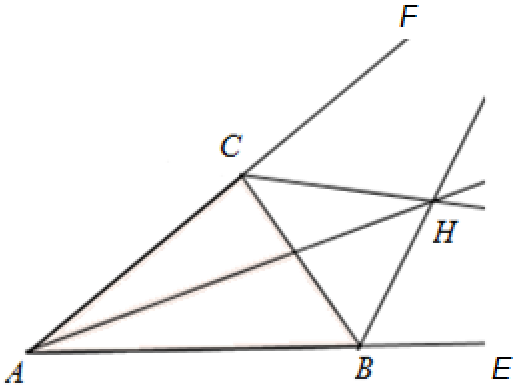
En cirkel som tangerar en av sidorna och de två andras förlängning kallas en vidskriven cirkel.

Sats 31

Varje triangel har tre vidskrivna cirklar.

Bevis:

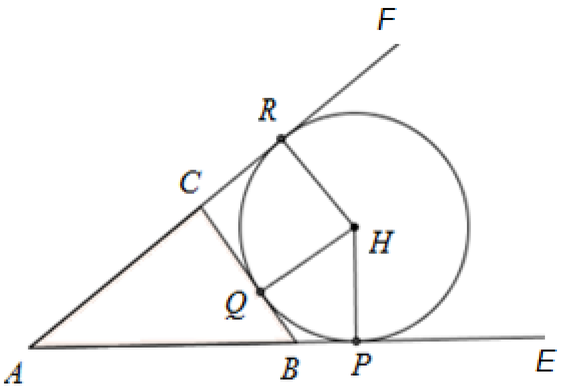
Vi drar de yttre bisektriserna till vinklarna $\wedge B$ och $\wedge C$. Vi betecknar deras skärningspunkt med *H. H* har samma vinkelräta avstånd till *BE* som till *BC*, likaså har den samma vinkelräta avstånd till *BC* som till *CF*. *BE* och *CF* är förlängningarna av *AB* respektive *AC*, så *H* har samma vinkelräta avstånd till *AE* som *AF*. Detta betyder att *H* ligger även på förlängningen av den yttre bisektrisen till ∧*A*. De yttre bisektriserna vid ∧*B* och ∧*C* samt den inre bisektrisen vid ∧*A* skär varandra i *H* som har samma vinkelräta avstånd till *BE*, *CF* och *BC*.



Vi drar normalerna från punkten *H* mot *BE*, *CF* och *CB*. Vi betecknar fotpunkterna med *P*, *Q* och *R*. Eftersom *H* har samma vinkelräta avstånd till *BE*, *CF* och *CB*, så gäller likheten

$$HP = HR = HQ.$$

Vi ritar cirkeln med medelpunkten *H* och radie *HP*. Den går även genom *Q* och *R* på grund av likheten ovan.



HP är vinkelrät mot *BE*, så cirkeln tangerar *BE* i *P*.

HR är vinkelrät mot *CF*, så cirkeln tangerar *CF* i *R*.

HQ är vinkelrät mot *BC*, så cirkeln tangerar *BC* i *Q*.

Så cirkeln med medelpunkten *H* och radie *HP* är en vidskriven cirkel. På samma sätt bevisas att det finns två andra vidskrivna cirklar till triangel. Den ena tangerar *AC* och förlängningen av *BC* och *BA*, den andra tangerar *AB* och förlängningen av *CA* och *CB*.

□

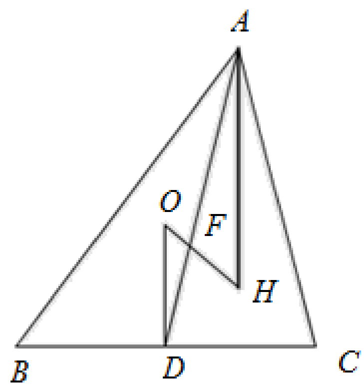
I.5 Eulers linje

Leonhard Euler (1707- 1783), var en schweizisk matematiker som tillbringade större delen av sitt liv i Ryssland. Han hade viktiga bidrag till alla grenar av matematiken. En av hans upptäckter är Eulerlinje.

I detta avsnitt hänvisar jag till [2] och [5].

Sats 32

Höjdernas skärningspunkt, tyngdpunkten i en triangel och omskrivna cirkelns medelpunkt ligger på en rät linje. Linjen kallas Eulerlinjen.



Bevis:

I figuren har vi att O är medelpunkten på den omskrivna cirkeln, AD är en median och F är tyngdpunkten.

Vi drar en linje genom O och F. Vi väljer en punkt H på linjen som inte ligger på samma sida om F som O och sådant att

$$FH = 2OF. \qquad (1)$$

Vi har bevisat i sats 27 att F delar AD i förhållandet 1:2 dvs

$$AF = 2\,DF. \qquad (2)$$

Av (1) och (2) får vi

$$OF/FH = DF/FA = 1/2.$$

Vertikalvinklarna $\wedge OFD$ och $\wedge AFH$ är lika stora enligt sats 5.

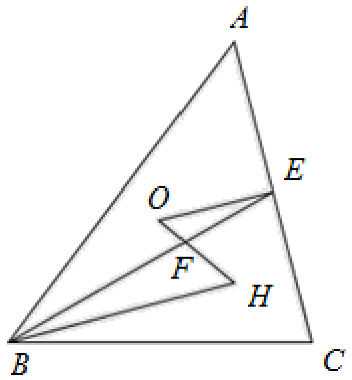
Första likformighetsfallet ger att ΔOFD och ΔHFA är likformiga. Detta medför att

$$\wedge ODF = \wedge FAH.$$

Enligt sats 7 är *OD* och *AH* parallella. *OD* är vinkelrät mot *BC*, så *AH* är en del av höjden mot *BC*. Alltså ligger *H* på höjden mot *BC*.

Vi uppför samma konstruktion utgående från en annan mittpunktsnormal och median, som figuren nedan visar.

I figuren nedan är *BE* en median och *OE* mittpunktsnormalen till AC. Med samma resonemang kan vi bevisa att trianglarna ΔOFE och ΔHFB är likformiga och sedan bevisa att *H* ligger på höjden mot *AC*.



Punkten *H* ligger på höjden från *A* mot *BC* och på höjden från *B* mot *AC*, så *H* är höjdernas skärningspunkt. På så sätt har vi visat att *O*, *F* och *H* ligger på en rät linje, som kallas Eulerlinjen.

□

I.6 Niopunktscirkel

Niopunktscirkeln är en cirkel som går genom nio orelaterade punkter på eller inuti en triangel. I följande avsnitt kommer vi att ge ett bevis till satsen som tar upp detta påstående.

I detta kapitel hänvisa jag till [5].

I.6.1 Cirkelfyrhörningar

Vi har sett i kapitel 4 i avsnitt I.4.2 att till varje triangel finns det en omskriven cirkel, men alla fyrhörningar har inte omskriva cirklar. Alla fyrhörningar som har en omskriven cirkel kallas cirkelfyrhörningar eller inskrivna fyrhörningar.

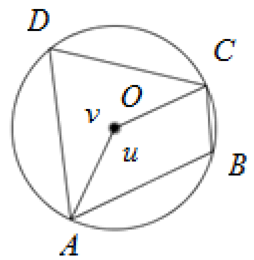
I detta avsnitt kommer vi att bevisa att en fyrhörning *ABCD* är en cirkelfyrhörning om och endast om motstående vinklar har summan 180°.

Sats 33

En fyrhörning är en cirkelfyrhörning om och endast om motstående vinklar har summan 180°.

Bevis

I figuren är *ABCD* en cirkelfyrhörning, *O* är cirkelns medelpunkt. Medelpunktsvinkeln som svarar mot $\wedge D$ och $\wedge B$ är markerad med *u* respektive *v*.



Summan av *u* och *v* är ett helt varv.

Alltså är

$$u + v = 360°.$$

Periferivinkelsatsen ger

$$\wedge B + \wedge D = \frac{360°}{2} = 180°.$$

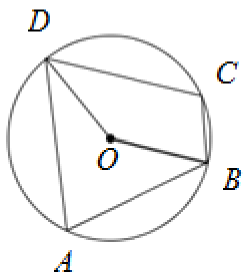
På samma sätt bevisas att

$$\wedge A + \wedge C = \frac{360°.}{2} = 180°.$$

För att bevisa omvändningen, antar vi att i fyrhörningen *ABCD* gäller att summan av motstående vinklar är180° dvs.

$$\wedge A + \wedge C = \wedge B + \wedge D = 180°.$$

Vi skall bevisa att den kan skrivas in i en cirkel.
Vi ritar den omskrivna cirkeln till triangeln ΔBCD, och låt medelpunkten till den omskrivna cirkeln vara *O*.



Enligt periferivinkelsatsen gäller att medelpunktsvinkeln för cirkelbågen mellan *B* och *D* där *C* inte ligger på är $2\ (\wedge C)$. Detta medför att medelpunktsvinkeln för den cirkelbåge där *C* ligger är $360 - 2\ (\wedge C)$.

Vi har enligt antagandet ovan

$$\wedge A + \wedge C = 180°,$$

$$\wedge A = 180° - \wedge C = \frac{1}{2}\left(360° - 2\ (\wedge C\ )\right).$$

Så omvändning till periferivinkelsatsen medför att *A* ligger på cirkeln.

□

Anmärkning 4 Rektanglar är cirkelfyrhörningar eftersom motstående vinklar har summan 180°. Medelpunkten är diagonalernas skärningspunkt.

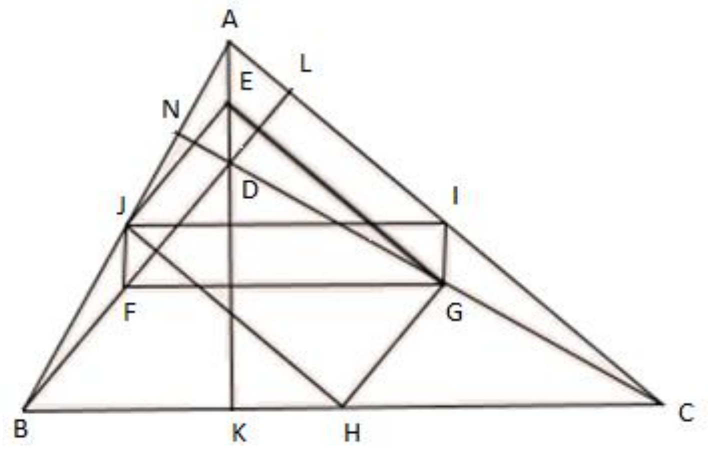
I.6.2 Niopunktscirkel

Sats 34

I en triangel ΔABC gäller följande.

Mittpunkterna på en triangels tre sidor, fotpunkterna för höjderna från *A*, *B* respektive *C* och mittpunkterna på sträckorna som går igenom höjdernas skärningspunkt och punkterna *A*, *B* respektive *C* ligger på en cirkel.

Bevis: I figuren nedan är



D höjdernas skärningspunkt,

E, F och *G* mittpunkterna på sträckorna *AD, BD* respektive *CD,*
H, I och *J* mittpunkterna på sidorna *BC, AC* respektive *AB,*
K, L och *N* fotpunkterna för höjderna från *A, B* respektive *C*.
Vi skall bevisa att punkterna *E, F, G, H, I, J, K, L, N* ligger på en cirkel.
Vi börjar med att bevisa att *JFGI* är en rektangel. Punkterna *I* och *J* är mittpunkterna på *AB* respektive *AC*. Första likformighetsfallet ger att ΔAJI och ΔABC är likformiga.

Likformiga trianglar ger,

$$\wedge AJI = \wedge ABC.$$

Sats 9 ger,

JI är parallell med *BC.*

F och *G* är mittpunkterna på *DB* respektive *DC*. Första likformighetsfallet ger att ΔDFG och ΔDBC är likformiga.

Likformiga trianglar ger,

$$\wedge DFG = \wedge DBC.$$

Sats 9 ger,

FG är parallell med *BC.*

På samma sätt bevisas att

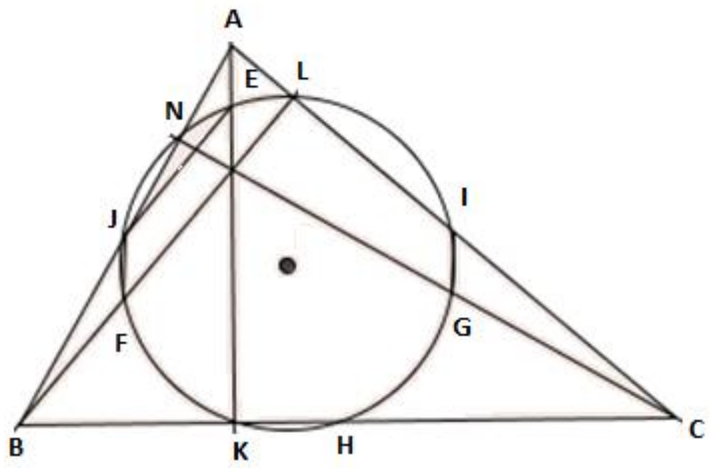
JF och *AD* är parallella, om vi betraktar trianglarna ΔABD och ΔJBF.
IG är parallell med *AD,* om vi betraktar trianglarna ΔACD och ΔICG.

Så fyrhörningen *JFGI* är parallellogram. Men *AK* är vinkelrät mot *BC,* så *JF* är vinkelrät mot *FG* och då är *JFGI* rektangel.

På samma sätt bevisar man att *EJHG* är en rektangel.

Mittpunkten på diagonalen *JG,* som också är mittpunkt på FI och EH, är medelpunkt på en cirkel på vilken punkterna *E, J, F, H, G* och *I* ligger. Det återstår att bevisa att *K, L* och *N* också ligger på denna cirkel.

EH är diameter i cirkeln. Eftersom $\wedge EKH$ är rät, så ligger *K* på cirkeln enligt omvändningen till periferivinkelsatsen. På samma sätt kan vi bevisa att *L* och *N* också ligger på cirkeln.



□

I.7 Morleys teori

En av de mest överraskande satserna i elementär geometri, upptäcktes omkring 1899 av Frank Morley. Efter tio år publicerades ett elementärt bevis av M.T. Naraniengar.

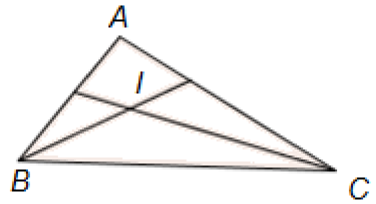
Jag hänvisar främst till [2] i detta avsnitt. Bilderna som jag har använt i Morley satsen är hämtade ur [11].

Som ett förberedande arbete inför denna sats, måste vi bevisa följande lemma.

Lemma 1

I triangeln ΔABC är *I* bisektrisernas skärningspunkt.

Då gäller att



$$\wedge BIC = 90° + ½ \wedge BAC.$$

Bevis: Vi har

$$\wedge ABC + \wedge ACB = 180° – \wedge BAC.$$

Vi har också

$$\wedge BIC = 180° – ½ (\wedge ABC + \wedge ACB).$$

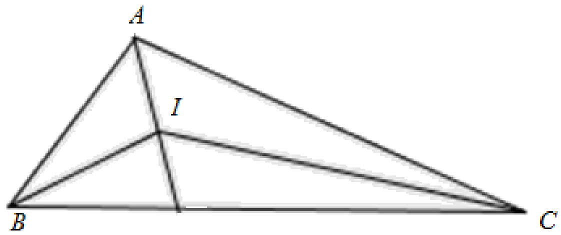
Detta medför att

$$\wedge BIC = 180° – 1/2 (180° – \wedge BAC) = 90° + 1/2 \wedge BAC.$$

□

Lemma 2

Om i en triangel ΔABC gäller att punkten *I* ligger på bisektrisen till vinkeln $\wedge BAC$ och



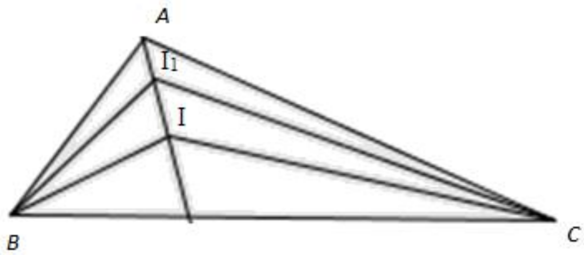
$$\wedge BIC = 90° + ½ \wedge BAC$$

så är *I* bisektrisernas skärningspunkt.

Bevis: Om *I* inte är bisektrisernas skärningspunkt, så måste finnas en annan punkt som är bisektrisernas skärningspunkt i triangeln ΔABC.

Vi antar att I_1 är bisektrisernas skärningspunkt.

Lemma 1 ger



$$\wedge BI_1C = 90° + ½ \wedge BAC.$$

Vi har också

$$\wedge BIC = 90° + ½ \wedge BAC.$$

Detta medför att

$$\wedge BI_1C = \wedge BIC.$$

Om vi betraktar fyrhörningen BI_1CI, så är

$$\wedge BI_1C + \wedge BIC = 90° + ½ \wedge BAC + 360° – 90°– \wedge BAC = 360°.$$

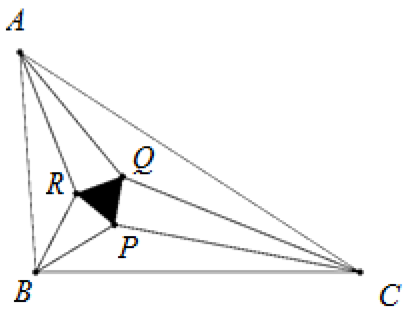
Detta medför att

$$\wedge I_1BI = \wedge I_1CI = 0.$$

Detta betyder att *I* och I_1 är samma punkt. Så *I* är bisektrisernas skärningspunkt.

□

Sats 35 (Morleys sats) I en triangel ΔABC, om varje vinkel delas i tre lika stora delar, så kommer linjerna som delar vinklarna i tre lika stora delar att skära varandra i tre punkter, och dessa punkter bildar en liksidig triangel ΔPQR. Triangeln kallas den första Morley triangeln eller Morleys triangel.



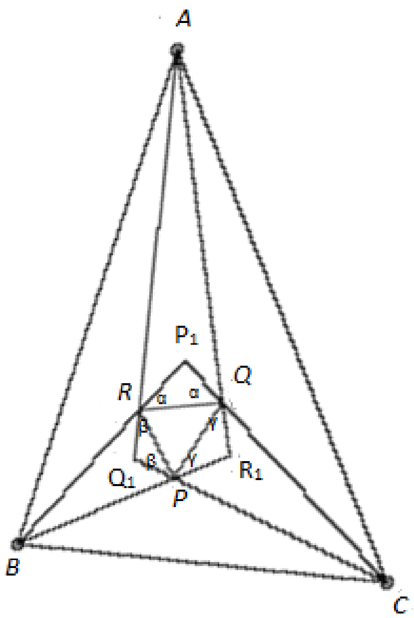
Bevis:

Vi kommer att bevisa satsen baklänges. Vi börjar med den liksidiga triangeln ΔPQR, sedan konstruerar vi triangeln ΔABC.

Låt ΔPQR vara en liksidig triangel, på sidorna QR, RP och PQ uppför vi likbenta trianglar P_1QR, Q_1RP och R_1PQ vars basvinklar α, β, γ uppfyller ekvationen

$$\alpha + \beta + \gamma = 120° \quad \text{så att } \alpha < 60°, \beta < 60° \text{ och } \gamma < 60°.$$

Vi förlänger sidorna i de likbenta trianglarna tills de möts i punkterna A, B och C, förlängningen av P_1R och R_1P möts i B, förlängningen av R_1Q och Q_1R möts i A och förlängningen av P_1Q och Q_1P möts i C, som figuren nedan visar.



Vi sammanbinder *A* med *B*, *B* med *C* och *C* med *A*. vi får triangeln ΔABC. Vi ska undersöka om linjerna *AQ* och *AR* delar vinkeln $\wedge A$ i tre lika stora delar, och om linjerna *RB* och *PB* delar vinkeln $\wedge B$ i tre lika stora delar samt om linjerna *PC* och *QC* delar vinkeln $\wedge C$ i tre lika stora delar.

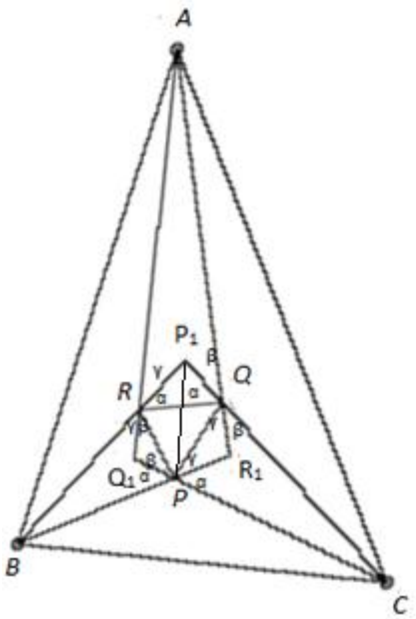
Eftersom

$$\alpha + \beta + \gamma = 120°.$$

Så är det

$$\alpha + \beta + \gamma + 60° = 180°.$$

Detta gör det lätt att komma fram till storleken på många vinklar, se figuren nedan.



I triangeln ΔAQR har vi

$$\wedge RAQ = 180° - (\alpha + \beta + \gamma + \alpha) = 60° - \alpha.$$

Och i triangeln ΔRP_1Q har vi

$$\wedge RP_1Q = 180° - 2\alpha.$$

Då är

$$1/2 \wedge RP_1Q = 90° - \alpha.$$

Vi har också

$$\wedge BPC = 180° - \alpha = 90° + 90° - \alpha = 90° + \frac{1}{2} \wedge RP_1Q.$$

Trianglarna ΔP_1RP och ΔP_1QP är kongruenta eftersom

$$RP_1 = QP_1$$

$$RP = PQ$$

$$\wedge P_1RP = \wedge P_1QP = 60° + \alpha$$

Så P ligger på bisektrisen till vinkeln $\wedge BP_1C$ i triangeln ΔBP_1C.

Enligt lemma 2 är P bisektrisernas skärningspunkt i triangeln ΔP_1BC. På samma sätt kan vi bevisa att Q är bisektrisernas skärningspunkt i triangeln ΔQ_1CA och att R är bisektrisernas skärningspunkt i triangeln ΔR_1AB.

Så alla tre vinklar i A, B och C är lika stora. Så vinklarna till triangeln ΔABC är delade i tre lika stora vinklar.

Varje delvinkel i A är $1/3 \wedge A = 60° - \alpha$ och det gäller varje delvinkel i B och C. Därmed är

$$\alpha = 60° - \frac{1}{3}\wedge A, \qquad \beta = 60° - \frac{1}{3}\wedge B, \quad \gamma = 60° - \frac{1}{3}\wedge C.$$

Om vi väljer dessa värden till baserna i våra likbenta trianglar, så kommer detta att ge en triangel som är likformig med triangeln ΔABC.

Eftersom likformigheten bevarar vinklarna oförändrade, så kommer linjerna, som delar triangelns vinklar i tre lika vinklar, att skära varandra i tre punkter som bildar en liksidig triangel.

□

II Ellips

II.1 Introduktion till Ellipsen

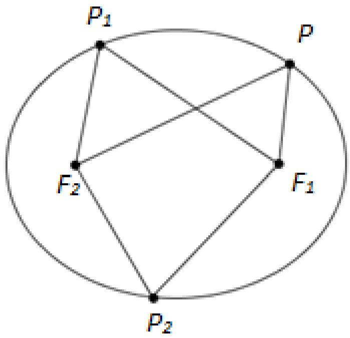
Den andra delen av mitt arbete behandlar ellipsen. Den utgår ifrån ellipsens definition och avslutas med ellipsen som en konisk sektion. Jag hänvisar främst till [4] i detta kapitel.

II.1.1 Ellipsens definition

En ellips är mängden av punkter P sådana att summan av dess avstånd till två fasta punkter F_1 och F_2 är konstant d v s att

$$PF_1 + PF_2 = \text{konstant.}$$

De fasta punkterna kallas brännpunkter för ellipsen. Definitionen ovan illustreras i figuren nedan där ellipsen ritas som en kurva med några punkter P, P_1 och P_2 på kurvan.



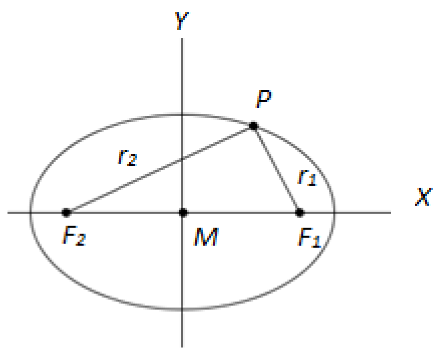
II.1.2 Ellipsens ekvation

I detta avsnitt kommer vi att söka ellipsens ekvation. För detta ändamål använder vi oss av ellipsens definition.

Vi inför ett rätvinkligt xy-koordinatsystem, där brännpunkten F_1 ligger på den positiva x-axeln så att $F_1 = (c, 0)$ och F_2 ligger på den negativa x-axeln så att $F_2 = (-c, 0)$ med $c \geq 0$ samt $M = (0, 0)$ är ellipsens medelpunkt.

Avståndet från $P = (x, y)$ till $F_1 = (c, 0)$ betecknas med

$$r_1 = PF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$



Och avståndet från $P = (x, y)$ till $F_2 = (-c, 0)$ betecknas med

$$r_2 = PF_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Kvadrering ger

$$r_1^2 = (c-x)^2 + y^2 \quad (1)$$

och

$$r_2^2 = (c+x)^2 + y^2. \quad (2)$$

Subtraktion av (2) från (1) ger

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$$

$$= (c-x)^2 + y^2 - [(c+x)^2 + y^2] = -4cx. \qquad (3)$$

Enligt ellipsens definition är $PF_1 + PF_2$ = konstant.

Vi betecknar konstanten med $2a$ där $a > c$, vilket medför att

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Och eftersom $PF_1 = r_1$ och $PF_2 = r_2$ uttrycket ovan kan skrivas som

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (4)$$

Division av (3) med $r_1 + r_2$ ger

$$r_1 - r_2 = \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2} = \frac{-4cx}{2a} = \frac{-2cx}{a}. \qquad (5)$$

Additionen och sedan subtraktion av (4) och (5) ger

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} \qquad (6)$$

och

$$r_2 = a + \frac{cx}{a}. \qquad (7)$$

Kvadrering och addition av (6) och (7) ger

$$r_1^2 + r_2^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = 2a^2 + \frac{2c^2x^2}{a^2}.$$

Additionen av (1) och (2) ger

$$r_1^2 + r_2^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 + c^2 + 2c + x^2 + y^2$$

$$= 2x^2 + 2c^2 + 2y^2.$$

Detta medför att

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}.$$

Vi flyttar c^2 till den högra sidan och $\frac{c^2x^2}{a^2}$ till den vänstra sidan, så får vi

$$x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2.$$

Vilket medför att

$$\frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2.$$

Eftersom $a > c$, så är $a^2 - c^2 > 0$. Vi sätter $a^2 - c^2 = b^2$, så får vi

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Divisionen av hela ekvationen med b^2 ger ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Så ellipsens ekvation med brännpunkterna F_1 och F_2 har formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

där $a > c \geq 0$ och $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ så att $0 < b \leq a$.

Om $y = 0$, ellipsen ovan skär x- axeln i punkterna $(a, 0)$ och $(-a, 0)$. Sträckan mellan dem kallas storaxeln för ellipsen och den har längden $2a$.
Om $x = 0$, ellipsen ovan skär y- axeln i punkterna $(0, b)$ och $(0, -b)$. Sträckan mellan dem kallas lillaxeln för ellipsen och den har längden $2b$.
Skärningspunkten mellan storaxeln och lillaxeln är ellipsens medelpunkt M.

Om $c = 0$ är $a = b$ och ellipsens brännpunkter F_1 och F_2 sammanfaller med dess medelpunkt M. Ellipsen är i detta fall mängden av punkter som har avståndet $a = b$ till M, och ellipsens ekvation skulle då övergå till $x^2 + y^2 = a^2$ och representera en cirkel med radie a och medelpunkt M. Denna cirkel kan betraktas som en ellips vars båda axlar är lika stora.

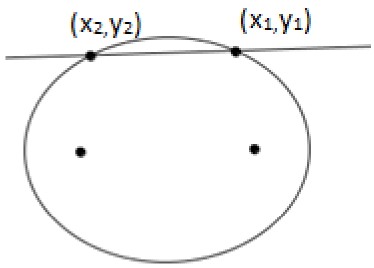
I.1.3 Normalen och tangenten till ellipsen

Ellipsens normal är en rät linje, som dras vinkelrät mot ellipsens tangent, genom tangerings punkt.

För att finna ekvationen för en normal till ellipsen, skall vi söka tangentens ekvation först och därefter härleda normalens ekvation utifrån detta.

I.1.3.1 Tangentens ekvation

För att finna ekvationen för en tangent till ellipsen, skall vi söka ekvationen för en rät linje, som går genom två punkter (x_1, y_1) (x_2, y_2) på ellipsen, och därefter undersöker vi vad denna ekvation blir, när den ena punkten närmar sig den andra.



Ekvationen för en rät linje, som går genom punkterna (x_1, y_1) *och* (x_2, y_2) har formen

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad \text{där } x_1 \neq x_2. \quad (8)$$

Eftersom punkterna tillhör ellipsen måste deras koordinater satisfiera ellipsens ekvation. Detta medför följande två ekvationer

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \qquad (10)$$

Subtraktionen av (10) från (9) ger

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0.$$

Vi utvecklar denna ekvation, så får vi

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0.$$

Divisionen av föregående ekvation med $(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)$ och sedan multiplikationen med b^2 ger

$$\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)} \quad \text{där } y_1 \neq y_2. \quad (11)$$

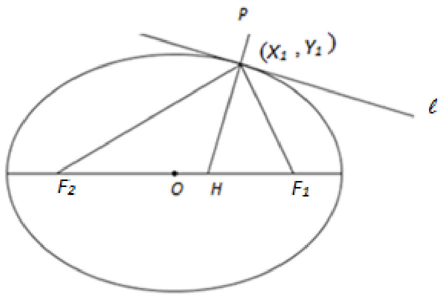
Substitutionen av ekvationen (11) i (8) ger

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)}(x - x_1).$$

Detta medför att

$$(y - y_1)(y_1 + y_2) = -\frac{b^2}{a^2}(x - x_1)(x_1 + x_2).$$

Ekvationen ovan är ekvationen för en linje som går genom (x_1, y_1) *och* (x_2, y_2). Om den ena punkten närmar sig den andra, så kommer denna linje att ha en gemensam punkt med ellipsen vilken i sin tur blir den sökta tangenten.



Nu låter vi $(x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$.

Detta medför att

$$\lim_{(x_2, y_2)\to(x_1, y_1)} (y - y_1)(y_1 + y_2) =$$
$$\lim_{(x_2, y_2)\to(x_1, y_1)} -\frac{b^2}{a^2}(x - x_1)\ (x_1 + x_2).$$

Vilket i sin tur ger

$$y_1(y - y_1) = -\frac{b^2}{a^2}\ x_1(x - x_1).$$

Utvecklingen av ekvationen och multiplikation med a^2 ger

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1 y_1 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2.$$

Förenkling av ekvationen ger

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Men $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, eftersom (x_1, y_1) är en punkt på ellipsen.

Detta medför att ekvationen för ellipsens tangent i (x_1, y_1) ges av ekvationen

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1. \quad (12)$$

I.1.3.2 Implicit derivation

I detta avsnitt kommer vi att härleda tangentens ekvation på annat sätt. Vi kommer att använda oss av implicit derivation. I implicit derivation deriverar man hela ekvationen med avseende på *x* innan man tar ut *y*. Alltså man deriverar först och löser ut derivatan istället för att lösa ut *y* först och derivera sedan.

Vi betraktar *y* som en funktion av *x*, *y* = *f(x)*. I ellipsens fall så uppfyller denna funktion likheten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y(x)^2}{b^2} = 1$$

Vi deriverar med avseende på *x*.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)}{b^2} y'(x) = 0$$

Vi löser ut $y'(x)$, vilket ger

$$y'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 y(x)}.$$

Tangentens ekvation i tangeringspunkten (x_1, y_1) har formen

$$y - y_1 = y'(x_1)\,(x - x_1)\;.$$

Eller

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\,(x - x_1), \quad \text{där } y_1 \neq 0.$$

Alltså är

$$y = \frac{-b^2}{a^2\, y_1} x_1 x + y_1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1{}^2}{y_1}.$$

Multiplikation med $a^2 y_1$ ger

$$a^2 y_1 y = -\,b^2 x_1 x + a^2 y_1 y_1 + b^2 x_1{}^2.$$

Vi flyttar $-b^2 x_1 x$ till vänstra sidan och dividerar hela ekvationen med $a^2 b^2$, så får vi

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2}\,.$$

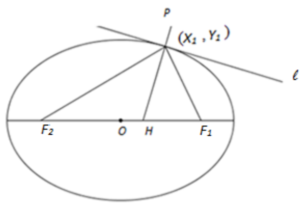
Eftersom tangeringspunkten uppfyller ellipsens ekvation d v s $\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1$, så förenklas tangentens ekvation till

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

I.1.3.3 Normalens ekvation

En normal till ellipsen är en rät linje PH, som genom tangeringspunkten (x_1, y_1) dras vinkelrät mot tangenten ℓ.

Enligt föregående avsnitt så är $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$ riktningskoefficient för den räta linjen, som tangerar ellipsen i punkten (x_1, y_1). Om vi drar normalen genom samma punkt så får vi följande ekvation som är normalens ekvation.



$y - y_1 = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1} \quad (x - x_1),$ där $x_1 \neq 0$.

Anmärkning 1

Om vi sätter $y = 0$ i normalens ekvation, så får vi

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}x = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}\ x_1 - y_1.$$

Multiplikationen av ekvationen ovan med $\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$ ger

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1 = \frac{c^2}{a^2}\ x_1.$$

Ur detta följer att normalen skär x- axeln på avståndet

$$OH = \frac{c^2}{a^2}\ x_1. \qquad (13)$$

Exempel 1

Här kommer vi att se på en rät linje med ekvationen

$$y = kx + m$$

och bestämma var denna linje skär ellipsen med ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{där } a > 0 \text{ och } b > 0$$

Vi ska undersöka om denna linje har en gemensam punkt med ellipsen och därmed är en tangent till ellipsen, eller har fler än en gemensam punkt med ellipsen vilket medför att linjen är ingen tangent till ellipsen.

Ellipsens ekvation kan skrivas som

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 .$$

Vi sätter in $y = kx + m$ i ellipsens ekvation vilket ger

$$b^2x^2 + a^2(kx + m)^2 = a^2b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kmx + m^2) = a^2b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2kma^2x + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2kma^2x + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + \frac{2kma^2}{b^2 + a^2k^2}x + \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -\frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} \pm \sqrt{\frac{a^2a^2k^2m^2}{(b^2 + a^2k^2)^2} - \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -\frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} \pm \sqrt{\frac{a^2a^2k^2m^2 - (a^2m^2 - a^2b^2)(b^2 + a^2k^2)}{(b^2 + a^2k^2)^2}} .$$

Förenkling av ekvationen ovan ger

$$x = -\frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2\,(b^2 + a^2k^2 - m^2)}{(b^2 + a^2k^2)^2}} .$$

x får olika värden beroende på *m,* och för detta ändamål diskuterar vi tre fall.

Fall 1: $b^2 + a^2k^2 - m^2 < 0$, då *x* har inga reella värde, och linjen har inga gemensamma punkter med ellipsen.

Fall 2: $b^2 + a^2k^2 - m^2 > 0$, d v s

$$-\sqrt{b^2 + a^2k^2} < m < \sqrt{b^2 + a^2k^2}$$

Här får vi två reella värden på x, och linjen skär då ellipsen i två punkter.

Fall 3: $b^2 + a^2k^2 - m^2 = 0$ d v s $b^2 + a^2k^2 = m^2$.

Alltså $m = \sqrt{b^2 + a^2k^2}$. eller $m = -\sqrt{b^2 + a^2k^2}$.

I detta fall får vi ett reellt värde på x och linjen skär då ellipsen i en punkt. Linjen kan skrivas på två sätt beroende på m. Alltså

$$y = kx + \sqrt{b^2 + a^2k^2} \text{ eller } y = kx - \sqrt{b^2 + a^2k^2} .$$

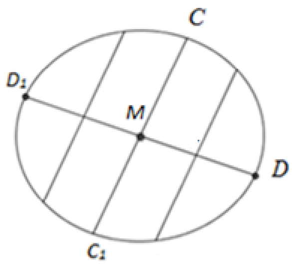
Denna linje är en tangent till ellipsen.

II.2 Konjugatdiametrar till ellipsen

Jag hänvisar främst till [4] i detta kapitel.

Definition

Konjugatdiametrar till en ellips kallas de diametrar CC_1 och DD_1 där CC_1 halverar alla kordor som är parallella med DD_1 likaså DD_1 halverar alla kordor som är parallella med CC_1.



Lemma 1: Mittpunkten till alla parallella kordor i en ellips, ligger på en rät linje. Linjen går genom ellipsens medelpunkt och utgör därmed en diameter till ellipsen.

Bevis: Vi har undersökt linjens skärningspunkter med ellipsen i exemplet ovan. En linje kan ha en gemensam punkt med ellipsen och linjen är då en tangent, eller linjen kan ha två gemensamma punkter med ellipsen och då betraktas linjen som en korda till ellipsen.

x- koordinater för kordans ändpunkter p_1 och p_2 fås genom

$$x = -\frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2\,(b^2 + a^2k^2 - m^2)}{(b^2 + a^2k^2)^2}}\,,\ b^2 + a^2k^2 - m^2 > 0$$

Och medelvärdet av *x*- koordinaterna är *x*-koordinaten för mittpunkten *p* på kordan p_1p_2 d v s.

$$x = -\frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} .$$

Och *y*- koordinaten för mittpunkten *p* fås genom

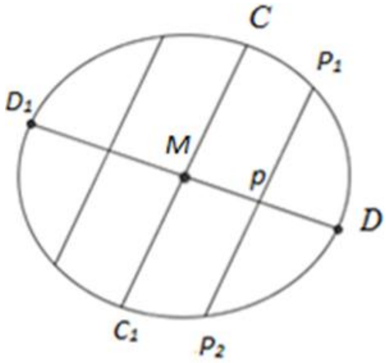
$$y = kx + m = -\frac{k^2ma^2}{b^2 + a^2k^2} + m$$

$$= \frac{-k^2ma^2 + (b^2 + a^2k^2)m}{b^2 + a^2k^2} = \frac{b^2m}{b^2 + a^2k^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2k} \cdot \frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} = -\frac{b^2}{a^2k} \cdot -\frac{kma^2}{b^2 + a^2k^2} .$$

Detta kan skrivas som

$$y = -\frac{b^2}{a^2k}x = k_1x, \quad \text{där } k_1 = -\frac{b^2}{a^2k} \text{ eller } kk_1 = -\frac{b^2}{a^2} .$$



Denna ekvation är en ekvation för en rät linje som går genom origo och har lutning k_1. Alltså ligger mittpunkten på kordan p_1p_2 på en linje med lutning k_1 och går genom origo och ligger också på linjen $y = kx + m$.

Detta betyder att mittpunkten på alla kordor som är parallella med p_1p_2 ligger på en rät linje som går genom origo och utgör därmed diametern DD_1 till ellipsen.

Kordor som är parallella med p_1p_2 har samma lutning *k* och en av dem CC_1 har mittpunkten *M* som sammanfaller med ellipsens medelpunkt *M*. *DD1* och *CC1* är konjugatdiametrar eftersom DD_1 och CC_1 är belägna så att DD_1 halverar alla kordor som är parallella med CC_1 och CC_1 halverar alla kordor som är parallella med DD_1.

När en av dem är given så kan man konstruera den andra genom att rita först en korda parallell med den givna diametern och dra en linje i mitten av kordan till mittpunkten på ellipsen och detta är den sökta konjugatdiametern.

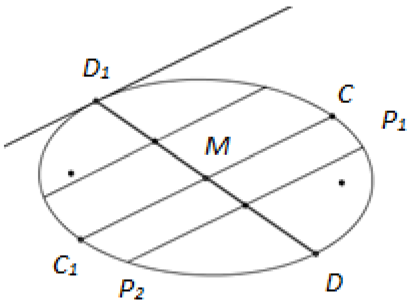
□

Lemma 2: Tangenten som dras genom ändpunkten av en diameter är parallell med konjugatdiametern.

Bevis: Vi ritar diametern DD_1 genom ändpunkterna D_1 och D.

Låt x_1, y_1 vara koordinater för punkten D_1, så diameter DD_1 har lutningen $k_1 = \frac{y_1}{x_1}$.

Vi har enligt beviset på lemma 1



$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k}.$$

Detta medför att

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{b^2}{a^2 k}.$$

Detta medför, enligt lemma 1, att
lutningen k till diametern CC_1 och till alla kordor som är parallella med CC_1 ges enligt ekvationen

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Men $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ är lutningen för tangenten i D_1.

Alltså tangenten som dras genom ändpunkten av en diameter, är parallell med konjugatdiametern.

□

II.3 Tangentens konstruktion

I detta avsnitt kommer vi att diskutera fyra fall för att rita en tangent till en ellips. I detta syfte kommer vi att söka egenskaperna till normalen och tangenten och deras relation med brännpunktsradier.

Jag hänvisar främst till [4] i detta kapitel.

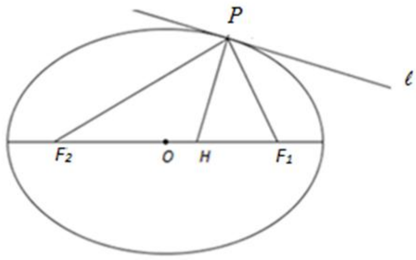
Sats 1

Normalen PH halverar vinkeln $\wedge F_1PF_2$ mellan brännpunktsradierna.

Bevis:

Låt P vara tangeringspunkten, vars koordinater är (x, y).

Vi har tidigare fått brännpunktsradierna uttryckta i c och a som formlerna nedan visar.



$$r_1 = a - \frac{cx}{a}. \quad \text{Och} \quad r_2 = a + \frac{cx}{a}.$$

Normalen skär x- axeln enligt (13) på avståndet

$$OH = \frac{c^2}{a^2}x.$$

Med hjälp av denna formel kan vi uttrycka F_1H och F_2H med ekvationerna

$$F_1H = c - \frac{c^2}{a^2}x. \qquad (14)$$

$$F_2H = c + \frac{c^2}{a^2}x. \qquad (15)$$

Divisionen av (14) med (15) ger

$$\frac{F_1H}{F_2H} = \frac{c-\frac{c^2}{a^2}x}{c+\frac{c^2}{a^2}x} = \frac{a^2c-c^2x}{a^2c+c^2x} = \frac{a^2-cx}{a^2+cx} = \frac{a-\frac{cx}{a}}{a+\frac{cx}{a}} = \frac{PF_1}{PF_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Omvändningen till bisektissatsen medför att PH är en bisektris till $\wedge F_1PF_2$. Detta betyder att vinklarna $\wedge F_1PH$ och $\wedge HPF_2$ är lika stora. Alltså normalen halverar vinkeln $\wedge F_1PF_2$.

□

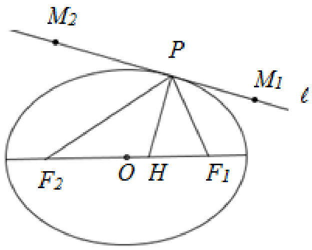
Sats 2

Tangenten bildar lika stora vinklar med brännpunktsradierna.

Bevis:

Att normalen *PH* halverar vinkeln mellan brännpunktsradier, som vi har sett i satsen ovan, ger följande samband med avseende på figuren till höger.

$$\wedge F_1PH = \wedge HPF_2 \ .$$



Och eftersom normalen är vinkelrät mot tangenten, så är även

$$\wedge HPM_1 = \wedge HPM_2 \ .$$

Detta medför att

$$\wedge F_1PM_1 = \wedge F_2PM_2 \ .$$

□

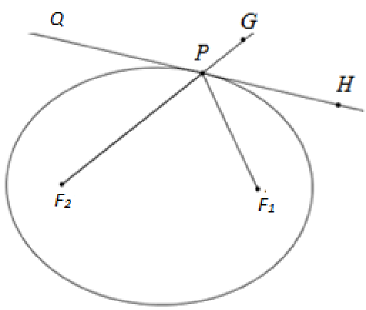
Tangentens konstruktion

Vi har bevisat att tangenten bildar lika stora vinklar med brännpunktsradierna. Man kan formulera omvändningen till detta på följande sätt att varje linje som bildar lika stora vinklar med brännpunktsradierna är en tangent till ellipsen. Denna är också sann.

Denna egenskap som karakteriserar tangenten är grunden för vår konstruktion av en tangent till ellipsen i de tre första fallen.

Vi diskuterar fyra fall för att konstruera en tangent.

1) Att dra en tangent genom en punkt P på ellipsen.



Vi drar brännpunktsradierna $F_1P \ och \ F_2P$.

Låt G vara en punkt på förlängning av F_2P.

Vi delar vinkeln $\wedge F_1 PG$ i mitten genom en rät linje QH.

Vi får följande likheten

$$\wedge F_1PH = \wedge GPH.$$

Och eftersom vertikalvinklarna är lika stora, så får vi

$$\wedge GPH = \wedge QPF_2.$$

De sista två likheterna ger

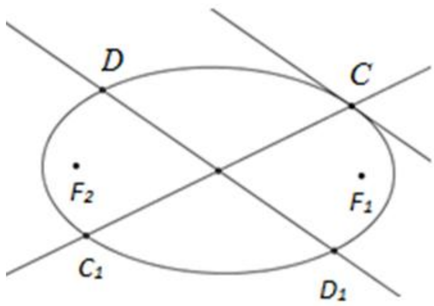
$$\wedge F_1PH = \wedge QPF_2.$$

Enligt satsen ovan är linjen QH en tangent.

2) Vi presenterar annat sätt att dra en tangent genom en punkt på ellipsen.

Vi har bevisat att tangenten som dras genom ändpunkten av en diameter är parallell med konjugatdiametern. Denna sats ger oss en enkel metod att konstruera en tangent till ellipsen genom ändpunkten C på diametern CC_1.

Vi drar diametern CC_1 och vi ritar dess konjugatdiameter DD_1. Vi ritar genom C en linje ℓ parallell med DD_1. Linjen ℓ är den sökta tangenten genom C.



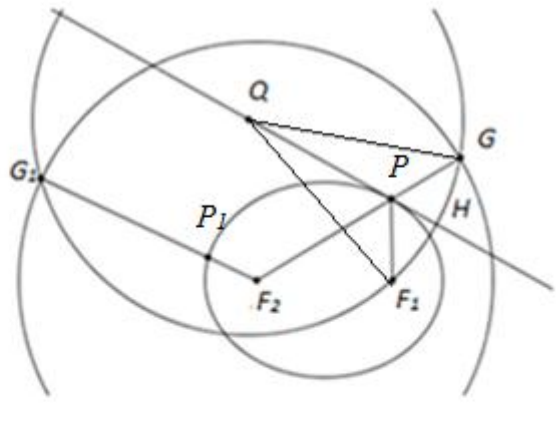
3) Att dra en tangent genom en punkt Q utanför ellipsen.

Vi ritar en cirkel med radie $2a$ och medelpunkten F_2.

Vi ritar annan cirkel med medelpunkten Q vars periferi går genom den andra brännpunkten F_1.

Båda cirklarna skär varandra i $G \text{ och } G_1$.

Vi sammanbinder G och G_1med F_2, så får vi två punkter P och P_1. Vi ska bevisa att P och P_1 är tangeringspunkter.



Vi har

$$F_2G = 2a = F_2P + PF_1.$$

Detta medför att

$$PF_1 = PG.$$

Nu drar vi radien genom punkterna Q och P som träffar cirkeln i punkten H.

Trianglarna ΔF_1PQ och ΔGPQ är kongruenta, ty

$$PF_1 = PG,$$

QP är en gemensam sida,

$QF_1 = QG$ radier i samma cirkel.

Detta medför att $\wedge F_1PQ = \wedge GPQ$.

Vi har

$\wedge F_1PH = 180° - \wedge F_1PQ$

$= 180° - \wedge GPQ = \wedge HPG.$

Alltså är

$$\wedge F_1PH = \wedge HPG.$$

Vertikalvinklarna är lika stora vilket ger

$$\wedge HPG = \wedge F_2PQ.$$

Detta medför att

$$\wedge F_1PH = \wedge F_2PQ.$$

Så linjen QH bildar lika stora vinklar med brännpunktsradierna. Följaktligen är denna linje en tangent till ellipsen i tangeringspunkt P.

På samma sätt bevisas att P_1 är en annan tangeringspunkt och linjen QP_1 är också en tangent till ellipsen.

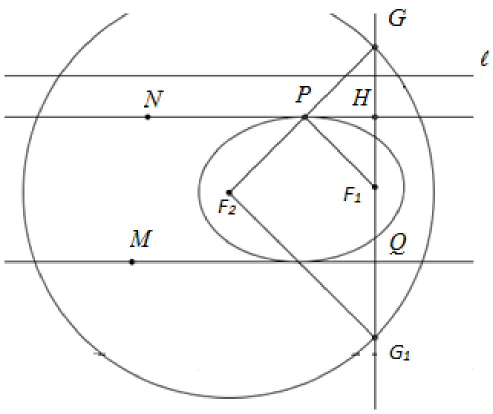
4) Att dra en tangent, parallell med en given rät linje.

Vi ritar cirkel med radie $2a$ och medelpunkten F_2.

Vi ritar en vinkelrät linje från F_1 mot den givna linjen ℓ.

Denna linje skär cirkeln i G och G_1.

Låt H vara mittpunkten på F_1G. Vi ritar mittpunktsnormalen till F_1G.



Vi har följande likheter

$$F_2G = 2a = F_2P + PF_1.$$

Detta medför att

$$PG = PF_1.$$

Trianglarna ΔF_1PH och ΔGPH är kongruenta, ty

$$PF_1 = PG,$$

PH är gemensam sida,

$F_1H = HG$. Eftersom PH är mittpunktsnormal.

Kongruenta trianglar ger $\wedge GPH = \wedge HPF_1$.

Vertikalvinklarna ger att $\wedge GPH = \wedge NPF_2$.

De två sista likheterna ger $\wedge HPF_1 = \wedge NPF_2$.

Så linjen HN bildar lika stora vinklar med brännpunktsradierna. Följaktligen är mittpunktsnormalen HN en tangent till ellipsen.

På samma sätt bevisas att mittpunktsnormalen MQ till F_1G_1 är också en tangent till ellipsen.

Beviset grundar sig på mittpunktsnormalen till den vinkelräta linjen mot ℓ genom G. I beviset har vi valt linjen ℓ utanför ellipsen och beviset är detsamma med linjen som skär ellipsen.

II.4 Ellipsens konstruktion

Jag hänvisar främst till [8] i detta kapitel. I [8] har de visat olika metoder att konstruera en ellips eller punkter på en ellips. Vi har valt några av metoderna och undersökt varför dessa metoder konstruerar en ellips eller punkter på ellipsen.

II.4.1 Tråd och pennans metod

Karakteriseringen av en ellips som punktlinjen, så att summan av avstånden till brännpunkterna är konstant, leder till en metod för att dra en ellips med två spikar, en tråd och en penna. Spikarna placeras där man vill ha ellipsens brännpunkter. Vi fäster tråden i spikarna och vi spänner tråden med hjälp av pennans spets. Vi för runt pennspetsen som kommer att beskriva en ellips vid denna rörelse.

II.4.2 Parallellogram metoden

Vi börjar med att konstruera punkter på en ellips med storaxel *a* och lillaxel *b*.

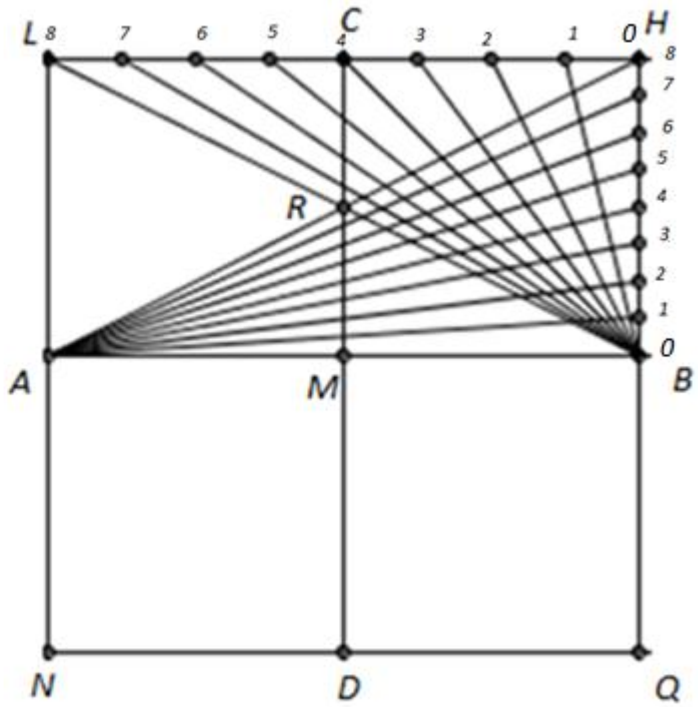
Vi ritar en linje $AB = 2a$ och från mittpunkten *M* ritar vi en vinkelrät linje *CD* så att $CM = 2b$.

Vi inför ett koordinatsystem med *x*- axeln utefter *AB* och *y*-axeln utefter *CD*.

Vi ritar rektangeln *ABHL*. Vi delar *HB* i ett antal lika delar och HL i samma antal lika delar.

Delningspunkterna på *HB* resp *HL* med samma ordningsnummer, som bilden nedan visar, sammanbindas med *A* resp *B*. Skärningspunkterna är punkter i den första kvadranten på ellipsen med halvaxlarna *a* och *b* som vi kommer att visa senare.

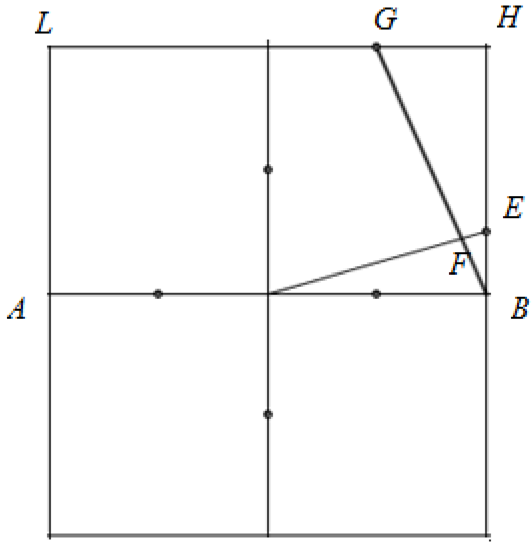
Analogt fås punkter i den andra, tredje och fjärde kvadrant.



Undersökning

Undersökningen går ut på att kontrollera om skärningspunkterna ligger på en ellips med storaxeln *a* och lillaxeln *b*.

Vi delar *HB* och *HL* i samma förhållande δ genom *E* respektive *G*, se figuren nedan.



Ändpunkterna på linjen *AE* har koordinatorna $A\left(-a,0\right), E(a,\delta 2b)$ och ändpunkterna på linjen BG har koordinatorna $B(a,0) och\ G(a-\delta 2a,2b)$. Vi undersöker skärningspunkten *F* då *AE* skär *BG*.

Linjen *AE* har ekvationen

$$y-0=\frac{-\delta 2b}{-a-a}\ (x+a).$$

$$\Updownarrow$$

$$y=\frac{\delta b}{a}\ (x+a).$$

Linjen *BG* har ekvationen

$$y-0=\frac{0-2b}{a-a+2\delta a}\ (x-a).$$

$$\Updownarrow$$

$$y=\frac{-b}{\delta a}\ (\ x-a).$$

Vi eliminerar δ, så får vi egenskapen för skärningspunkten *P*. Detta sker genom att multiplicera ekvationerna för *AE* och *BG*.

$$y^2 = \frac{\delta b}{a}\frac{-b}{\delta a}\,(x^2 - a^2).$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 = \frac{-b^2}{a^2}\,x^2 + b^2.$$

Efter förenkling får vi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Detta betyder att skärningspunkten är en punkt på ellipsen med storaxeln *a* och lillaxeln *b*.

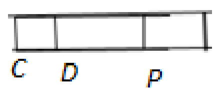
Beviset betyder att om vi delar *HB* och *HL* i samma förhållande, så kommer vi att få en punkt på ellipsen. Detta medför att om vi delar *HB* och *HL* i samma antal lika delar, så kommer alla skärningspunkter, som vi fick i konstruktionen ovan, att ligga på ellipsen med storaxeln *a* och lillaxeln *b*.

II.4.3 Trammelmetoden eller ellipsografmetoden

Ellipsograf är ett instrument för konstruktionen av ellipser. Detta instrument grundar sig på en enkel metod att rita en ellips med. Nedan kommer vi att använda oss av den enkla metoden som ellipsografen grundar sig på för att konstruera olika punkter på en ellips med halvaxlarna *a* och *b*.

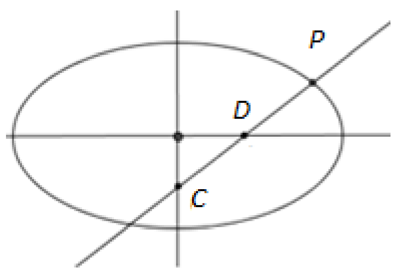
Vi inför ett rätvinkligt koordinatsystem. Dessa kommer att vara de större och mindre axlarna på ellipsen.

Vi markerar tre punkter *P*, *D* och *C* på linjalen. Se figuren till höger



Låt *PC* = *a* vara längden av storaxeln och *PD* = *b* vara längden av lillaxeln. Vi för linjalen på papperet, så att punkten *C* hålls alltid på *y*- axeln och *D* på *x*- axeln.

Vi följer med pennan punkten *P*, så kommer vi att få olika punkter på ellipsen.



Undersökning

Vi ritar en rät linje som skär x- axeln i D och y- axeln i C, så att $CD = a - b$

Vi väljer en punkt P som ligger utefter CD sådant att $CP = a$.

Vi drar genom P en linje parallell med x-axeln och en annan linje parallell med y-axeln som skär x- axeln i M.

Vi drar genom origo en linje som är parallell med PC. Vi får skärningspunkterna K och L, som figuren visar.

$OLPD$ är en parallellogram eftersom motstående sidorna är parallella. I parallellogram gäller att motstående sidor är lika långa och i denna parallellogram har vi

$$LO = PD = b.$$

Och

$$LP = OD.$$

Vi har

$\wedge CDO = \wedge DOL$ ”Alternatvinklar”

och

$\wedge DOL = \wedge PLK$ ”Likbelägna vinklar”

I trianglarna ΔKPL och ΔCOD har vi

$$LP = OD,$$

$$\wedge KPL = \wedge COD = 90,$$

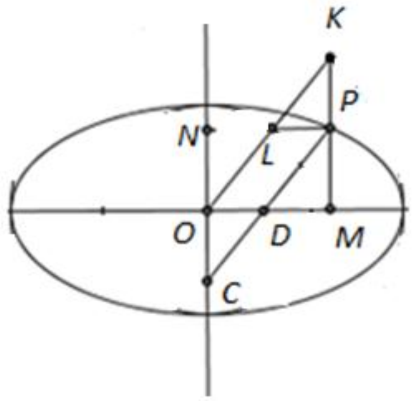
$$\wedge KLP = \wedge CDO.$$

Detta medför att trianglarna ΔKPL och ΔCOD är kongruenta, detta ger

$$KL = CD = PC - PD = a - b.$$

Eftersom $KL = a - b$, så är

$$KO = KL + LO = a - b + b = a.$$



Trianglarna ΔKPL och ΔKMO är likformiga, eftersom vinklarna i den ena triangel är lika med vinklarna i en andra triangel. Detta ger oss följande likformighetsskala

$$\frac{KM}{KP} = \frac{KO}{KL}\,.$$

Detta kan skrivas som

$$\frac{KM}{KM-PM} = \frac{KO}{KO-LO}.$$

Vilket ger

$$\frac{KM}{KM} - \frac{KM}{PM} = \frac{KO}{KO} - \frac{KO}{LO}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{KM}{PM} = \frac{KO}{LO} = \frac{a}{b}\,.$$

K har koordinaterna (x, y_k) och P har koordinaterna (x, y_p). Likheten ovan kan skrivas som

$$\frac{y_k}{y_p} = \frac{a}{b}\,.$$

Triangeln ΔKMO är en rätvinklig triangel, enligt pythagoras satsen får vi

$$y_k = \sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Enligt ovan har vi

$$y_p = \frac{b}{a}\, y_k = \frac{b}{a}\, \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kvadrering och sedan förenkling av ekvationen ger

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{{y_p}^2}{b^2} = 1$$

Detta betyder att *P* uppfyller ekvationen

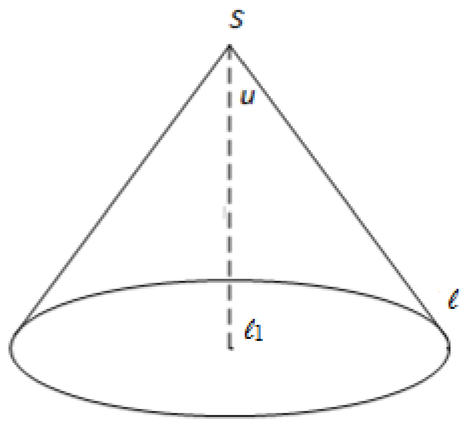
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Så punkten *P* som ligger utefter linjen *CD* där *CP = a* och punkterna *C* och *D* hålls alltid på y- axeln resp x-axeln är en punkt på en ellips med storaxeln *a* och lillaxeln *b*.

II.5 Ellipsen som en konisk sektion

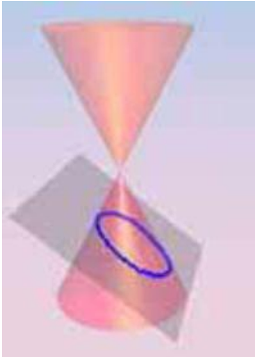
Jag hänvisar främst till [1] i detta kapitel.

Låt en rät linje ℓ skära en annan linje ℓ_1 under vinkeln u. Om L roterar kring L_1 utan att förändra sitt läge d v s roterar under den konstanta vinkeln u, alstras en rotationskon K. Den fasta linjen kallas en axel, den rörliga linjen är den genererande linjen, den vinkel de båda linjerna bildar med varandra är den genererande vinkeln och den punkt S där de två linjerna skär varandra kallas spets till konen.



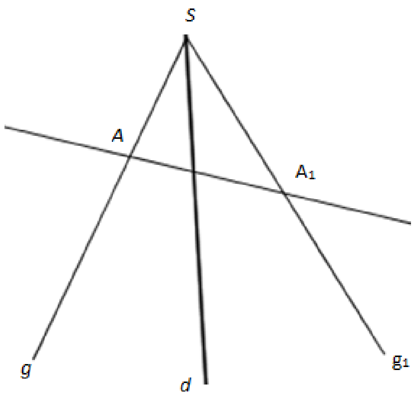
Ett kägelsnitt är den kurvan som fås då ett plan skär konen. Olika fall kan inträffa, beroende på den vinkeln som planet bildar med roationskonens axel. Kägelsnittet kan bli en cirkel, en ellips, en parabel och en hyperbel.

I detta arbete kommer vi att koncentrera oss på ellips fallet, se bilden nedan. Bilden är hämtad ur [9].

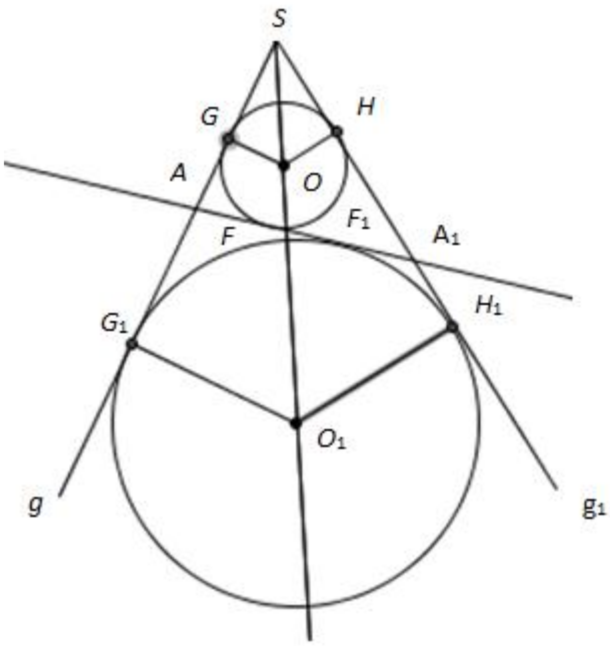


En ellips fås om vinkeln mellan det skärande planet och roationskonens axel är större än den genererande vinkeln. Vi kommer att kontrollera att snittkurvan uppfyller ellipsens definition. Vi ska bevisa att summan av avstånden från en punkt på snittkurvan till två fasta punkter är konstant.

Till ändamålet väljer vi ett plan π genom konens axel, ortogonalt mot det skärande planet φ. Detta nya plan π, möter konen utefter två genererande linjer g och g_1 och det skärande planet φ utefter en viss rät linje AA_1. A är skärningspunkten mellan planet φ och den genererande linjen g och A_1 är skärningspunkten mellan planet φ och den genererande linjen g_1. Alltså i detta plan har vi axeln d, generatriserna g och g_1 samt skärningslinjen AA_1 som figuren nedan visar.



I planet π ritar vi den inskrivna cirkeln till triangeln ΔSAA_1 med medelpunkten O och tangeringspunkterna F, G och H, likaså ritar vi den vidskrivna cirkeln med medelpunkten O_1 och tangeringspunkterna F_1, G_1 och H_1 som tangerar AA_1 och förlängningen på de två andra sidorna SA och SA_1, som figuren nedan visar.



Trianglarna ΔSHO och ΔSGO är kongruenta, ty

Medelpunkterna ligger på bisektrisen till vinkeln $\wedge S$, vilket medför att $\wedge OSH$ och $\wedge OSG$ är lika stora. Linjerna SA och SA_1 är tangenter d v s $\wedge OGS = \wedge OHS = 90°$. Detta medför att $\wedge SOG$ och $\wedge SOH$ är lika stora. Vi har också sidan SO en gemensam sida.

Kongruenta trianglar ger

$$SG = SH.$$

Samma argument med trianglarna ΔSG_1O_1 och $\Delta\ SH_1O_1$ ger

$$SG_1 = SH_1.$$

Vid figurens rotation kring axeln beskriver dessa cirklar två sfärer som tangerar konen. Tangeringspunkterna G, H, G_1 och H_1 beskriver vid denna rotation två cirklar där sfärerna tangerar konen, som figuren nedan visar. Det skärande planet tangerar den ena sfären i punkten F och den andra i punkten F_1.

Vi väljer en godtycklig punkt M på konens och planets skärningskurva. Genom M drar vi generatrisen MS som tangerar sfärerna i L och L_1. Likaså drar vi två räta linjer MF och MF_1. Eftersom tangenter från en punkt till samma sfär är lika långa, som kommer att bevisas i lemmat nedan, så är det

$$MF = ML$$

och

$$MF_1 = ML_1.$$

Additionen av likheterna ovan ger

$$MF + MF_1 = ML + ML_1 = LL_1.$$

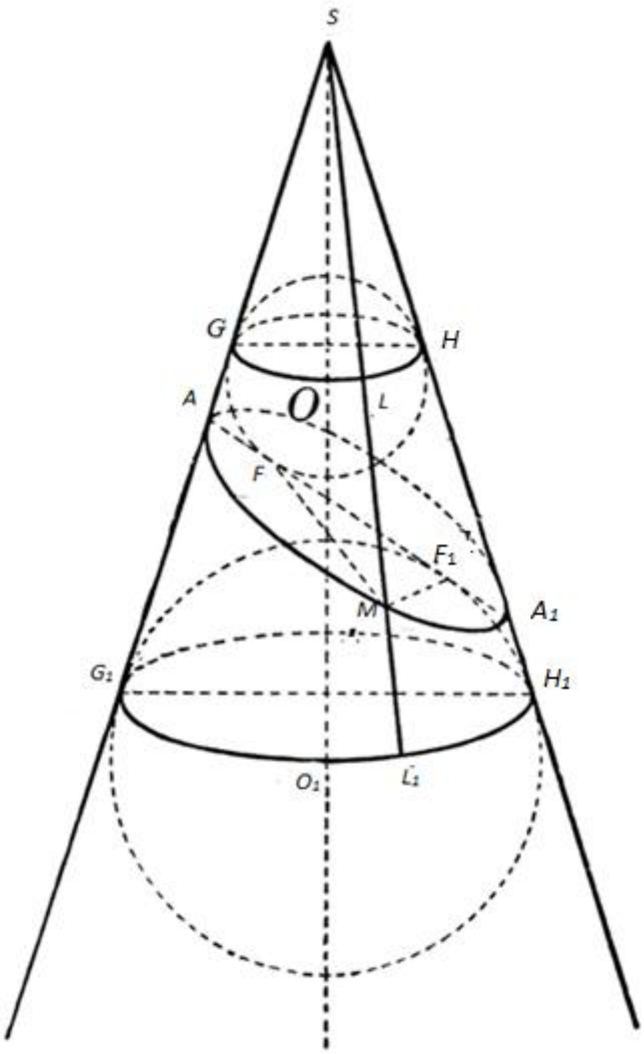
Men

$$LL_1 = GG_1 = HH_1$$

eftersom

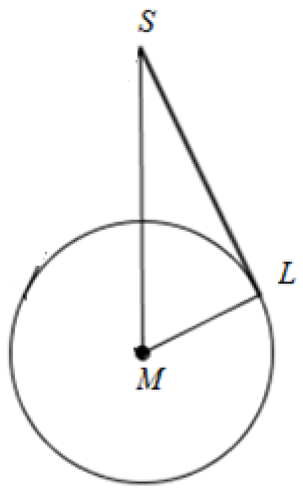
$$SG = SH \text{ och } SG_1 = SH_1.$$

Så LL_1 är konstant och oberoende på vilken punkt på kägelsnittet vi väljer. Alltså är summan av avstånden från en punkt M på skärningskurva till två fasta punkter F och F_1 konstant. Denna kurva är en ellips med brännpunkterna F och F_1. Bilden nedan är hämtad ur [10].



Lemma 3: Tangenter från en punkt till samma sfär är lika långa.

Bevis: Till detta ändamål betraktar vi bilden nedan, i bilden har vi en cirkel och en tangent till cirkeln.

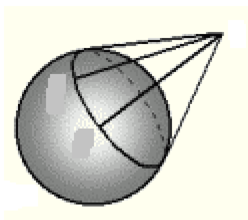


Vi har

$$SL = \sqrt{(SM)^2 - r^2}$$

Tangentens längd är beroende på *SM* och på *r* som är konstanta. Så vi får samma resultat oberoende på vilken tangent vi väljer.

Om vi roterar figuren kring *SM* så kommer cirkeln att beskriva en sfär, tangenten till cirkeln beskriver oändligt många tangenter till sfären som figuren nedan visar.



Tangenterna är beroende på linjen *SM* och på radien *r* till cirkeln, vilka är konstanta. Då är alla tangenter till sfären dragna från samma punkt lika långa.

□

OBS: Alla bilder som finns i detta arbete med undantag av de som jag har refererat till, har jag konstruerat själv. Jag har använt mig av ett program (GeoGebra). Detta program kan laddas på *www.*geogebra.*org*

Referenser

[1] Carlson, F (1946). *Lärobok i geometri*, 2 uppl. Lund : Gleerup förlag

[2] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1969. ISBN 471 18283 4

[3] Johansson, B G (2004). *Matematikens historia*. Studentlitteratur, Lund. ISBN 91-44-03322-2

[4] Lindelöf, L (1909). *Lärobok i analytisk geometri,* 5 uppl. Stockholm : Bonnier förlag.

[5] Tambour, Torbjörn *EUKLIDISK GEOMETRI*. Matematiska institutionen. Stockholms universitet. Första upplagan 2002.

[6] 2 Neutral geometri – Matematiska institutionen- Uppsala universitet
www2.math.uu.se/~lal/kompendier/Geometribok.pdf

[7] Euklides Geometri- sammanfattning 1, teori
www.malinc.se/math/geometry/**s**ummaryonesv.php
(Hämtad 2012-09-05)

[8] Ellipse-Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse
(Hämtad 2012-10-15)

[9] Conic Section- Math
http://math2.org/math/algebra/conics.htm
(Hämtad 2012-12-01)

[10] http://etc.usf.edu/clipart/galleries/449-conic-sections-ellipses
(Hämtad 2012-12-01)

[11] www.mathpages.com/home/.../kmath376.htm