



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Fibonacci's Liber Quadratorum

av

Elin Winther

2013 - No 9

Fibonaccis Liber Quadratorum

Elin Winther

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, Grundnivå

Handledare: Christian Gottlieb

2013

Liber Quadratorum

- Ett verk utav Fibonacci

Elin Winther

HT-2012

Handledare: Christian Gottlieb

Matematiska Intuitionen

Stockholms universitet

Förord

Fibonacci kom att influera och förändra matematiken för alltid då han redan i tidig ålder fick bekanta sig med matematiken. Under den tid då Fibonacci levde hade det romerska

räknesättet ett starkt grepp om matematiken. Detta skulle dock inte bestå särskilt länge till. Fibonacci undervisades i tidig ålder i den indoarabiska matematiken, där hans intresse väcktes och under sina många handelsresor i sin fars affärer kom han att träffa många matematiker. Dessa människor skulle komma att visa Fibonacci hur överlägset det indoarabiska räknesättet var, i jämförelse med det romerska räknesättet. De måste ha argumenterat fördelaktigt, eftersom det idag är Fibonaccis och det indoarabiska sättet som är den moderna matematiken. Det är dock inte det enda Fibonacci lämnat till eftervärlden, hans intresse för matematiken resulterade i ett antal böcker. Några av dem är översatta från latin till andra världsspråk såsom engelska, franska och italienska. Den bok som går att återfinna i denna text är den som heter Liber Quadratorum, Boken om kvadrater.

Syfte

Syftet med denna uppsats är att få en inblick i hur Fibonacci jobbade med sina matematiska problem. Då framförallt hur Fibonacci såg på och arbetade med kvadrattal.

Vi kommer ta oss igenom ett antal satser från Fibonaccis bok Liber Quadratorum. Vi kommer då titta på och försöka förstå hur Fibonacci tänkte kring dessa tal. Vi kommer att titta på hur vi

kan översätta Fibonaccis tankar och resonemang till den matematik som vi idag jobbar med och ägnar oss åt.

Vi kommer även titta kort på vem Fibonacci var och hur han levde.

Historia

1170 föddes i Toscana i staden Pisa en pojke som gavs namnet Leonardo Pisano, som översatt betyder Leonardo av Pisa. I Pisa var Leonardos pappa Guglielmo Bonacci en framgångsrik köpman. Leonardo kom senare att ändra sitt namn till Fibonacci, vilket betyder son till Bonacci.¹ Det är under detta namn, Fibonacci, vi idag känner Leonardo. Han kom att bli en

¹Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

viktig stöttepelare för den europeiska matematiken, han räknas som medeltidens största matematiker.² Fibonacci avled 1240.³

Då Fibonacci levde var korstågen i full gång och det fanns stora konflikter mellan den tysk-romerska kejsaren av det heliga romerska imperiet Fredrik II och påven.⁴ Fredrik II var även kung av Sicilien. Under denna tid var predikanten Sankt Franciscus av Assisi mycket framgångsrik, han predikade inom den katolska läran och har bland annat fått staden San Fransisco uppkallad efter sig.⁵ Runt tiden då Fibonacci levde var läget mellan Italiens kuststäder, då bland annat Pisa, Venedig och Amalfi, samt de Muslimska länderna och Medelhavsländerna mycket spänt. Då främst inom byteshandeln som var en stor verksamhet och många människors sätt att försörja sig på.⁶ Fredrik II hade många lärda människor runt sig i sitt hov, och även Fibonacci kom att tillhöra denna skara då han efter att ha löst ett problem givet av den man som senare kom att bli en av hans vänner Mäster Benedetto.⁷ Fibonacci och hans familj flyttade till staden Bugia i Afrika nuvarande Algeriet, då Fibonacci var runt 20 år gammal. Han blev tidigt introducerad till matematiken av sin far, som anställde en muslimsk privatlärare inom just matematik. Det var via denna lärare som Fibonacci första gången fick tillfälle att använda de tio indoarabiska siffrorna som ingår i det talsystem som vi idag använder.⁸ Han blev även introducerad till både aritmetik och algebra, något som araberna studerat under lång tid. Fibonacci hade förmånen att få bekanta sig med aritmetiken och algebran via *Al-Khwarizmi*s verk *Hisab al-jabr w'almuqabalah*.

2 Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1225, *Liber Quadratorum*, översättning Sigler L.E., 1987, *The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler*

3 *Nationalencyklopedin*

4 Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E, 2002, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*

5 *Nationalencyklopedin*

6 Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E, 2002, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*

7 *Nationalencyklopedin*

8 Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

Al-Khwarizmi var en mycket framstående persisk matematiker som levde runt år 825.⁹ Al-jabr i titeln på *Al-Khwarizmi* bok är ursprunget till dagens ord algebra, och Al-Khwarizmi är ursprunget till ordet algoritm.¹⁰

Det var under tiden som handelsresande som Fibonacci upptäckte att de arabiska siffrorna tillsammans med det decimala systemet var överlägsna de romerska siffrorna och det romerska siffrornas räknesystem.¹¹ Då Fibonacci reste runt medelhavet som handelsresande, valde han även att studera i några av de länder han besökte på sin resa. Han stannade bland annat i Egypten, Syrien, Provence, Bysans.¹²

Då Fibonacci senare återvände till Bugia, eller Bejaija som vi idag kallar staden, var han övertygad om att den arabiska räknekonsten var överlägsen den romerska. Fibonacci valde därför att använda sig av de indoarabiska siffrorna, 9 8 7 6 5 4 3 2 1 samt 0 då han skrev sin första bok *Liber Abaci*.¹³ Fibonacci börjar boken *Liber Abaci* med meningen ”Med dessa nio siffror samt med symbolen noll vilken araberna kallar Zephir, kan vilket tal som helst skrivas, vilket demonstreras nedan”¹⁴ *Liber Abaci*, Boken om räknekonsten, är Fibonaccis första bok som utkom 1202. Det vill säga då Fibonacci var 32 år fyllda. *Liber Abaci* i första utgåva innehåller 15 kapitel som behandlar samt förklarar allt från heltal till olika ekvationer av olika svårighetsgrad. Boken blev så pass populär att den utkom i en utvidgad upplaga 1228. Trots detta stora intresse för boken dröjde det flera århundranden innan bankerna valde att överge de romerska siffrorna till förmån för de indoarabiska. De nya siffrorna fick sitt stora genomslag då man insåg att belopp kan skrivas med både siffror och ord. Tidigare hade enbart ord använts vilket gjort det lättare att förfälska värdehandlingar med mera. Då bankerna la till siffror som komplement lyckades de undvika förfälskningar, eftersom det var en liten skara som var insatt i det nya systemet. Något som vi fortfarande idag brukar. *Liber Abaci* blev en av medeltidens mest betydelsefulla böcker inom matematik.¹⁵ Genomslaget genom att introducera de indoarabiska siffrorna samt algebraiska lösningsmetoder spred sig snabbt över

9 Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

10 *Nationalencyklopedin*

11 Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

12 Pisano ”Fibonacci” Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E,2002, *Fibonacci’s Liber Abaci. Leonardo Pisano’s Book of Calculation*

13 Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

14 Pisano ”Fibonacci” Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E,2002, *Fibonacci’s Liber Abaci. Leonardo Pisano’s Book of Calculation*

Europa. Den första engelska översättningen av den latinska original versionen *Liber Abaci* gjordes utav L. E Sigler.¹⁶

Fibonacci och hans *Liber Abaci* introducerade de indoarabiska talsystemet som spred sig över hela världen. Det var självklart av stor betydelse ute i samhället, men det är som matematiker Fibonacci gjorde stora avtryck. Han skrev inte enbart *Liber Abaci* utan han skrev även *Practica geometricae* (1223) och *Liber Quadratorum* (Boken om kvadrattal, 1225). Han visade även på en kreativ ådra då hans skrev de två skrifterna *Flos* (Blommor) samt *Epistola ad Magistrum Theodorum*. Därmed är han inte bara en erkänd matematiker utan även en vetenskapsman inom bland annat biologi.¹⁷

Fibonacci visade bland annat i sina skrifter hur vi kan lösa ett geometriskt problem med hjälp utav algebra, samt hur vi kan lösa ett algebraiskt problem med hjälp utav geometri.¹⁸

Historiskt sett finns det tre personer som ses som de största inom talteorin. Dessa tre är greken Diofantos som levde runt år 240, italienaren Fibonacci 1170-1240, samt fransmannen Pierre de Fermat 1601-1665. Mellan Diofantos och Fermat är det cirka 1400 år, detta säger något om hur stor Fibonacci var och hur stora hans metoder var. Ingen kunde mäta sig med hans kunskaper under de 1400 år som förflöt mellan hans kollegor. Vilket är något som bland annat Bengt Ulin påpekar i sin bok *Fibonaccitalen och det gyllene snittet*.

Fibonnaccis *Liber Abaci* kom att bli den bok de toskanska skolorna använde som undervisningsmateriel under tre århundranden.¹⁹

Det som Fibonacci är mest känd för eller det många kanske förknippar Fibonacci med är det gyllene snittet samt Fibonnaccis talföljd. Fibonnaccis talföljd ser ut som följer, 0,1,1,2,3,5,8,13...Här ser vi att de efterföljande talen är summan av de båda föregående.

15 R.B McClenon, Januari 1919, *The american mathematical monthly official journal of the mathematical association of America, volume XXVI January, 1919, Number 1, Leonardo of Pisa and his liber quadratorum*

16 Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E,2002, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*

17 Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

18 Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*

19 Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E,2002, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*

Liber Quadratorum

Boken Liber Quadratorum, The book of squares, eller som den fritt översatt på svenska heter Boken om kvadrattal skrevs och publicerades 1225. Den engelska översättningen är gjord utav L.E. Sigler. Liber Quadratorum har även översatts från latin till franska utav Paul Ver Eecke, 1952, samt från Latin till italienska utav Mästare Benedetto 1464.

Liber Quadratorum var Fibonaccis tredje bok som skulle komma att ha stor betydelse för matematiken, denna bok är den mest avancerade. Liber Quadratorum är även det verk som bäst visar på vilken stor matematiker Fibonacci var. Liber Quadratorum publicerades aldrig då Fibonacci levde, till skillnad från Liber Abaci.

Liber Quadratorum behandlar i 24 olika satser, enbart kvadrattal och hur dessa kvadrattal bland annat kan bilda nya kvadrattal. Med hjälp utav serier utav udda tal, finner han relationer mellan kvadrattalen. Genom bokens teser bygger han upp teorier som är både intressanta och imponerande. Vi startar relativt enkelt med att titta på hur två kvadrattal kan bilda ett tredje. Allt eftersom boken pågår ökar Fibonacci även svårighetsgraden i sina teser. Boken avslutas med ett problem som Fibonaccis nära vän Mäster Theodore gav Fibonacci då han ville bli en del utav Fredrik II hov. Problemet handlar om att finna tre tal som adderade med det första talet i kvadrat resulterar i ett kvadrattal. Därefter skall detta kvadrattal adderas med tal två i kvadrat vilket i sin tur skall resultera i ett kvadrattal. Sedan skall samma procedur utföras på det tredje talet.²⁰

I the book of squares översatt av L.E. Sigler, får man hjälp med att förstå Fibonaccis teser då Sigler lagt in kommentarer i slutet av varje kapitel. I dessa delar visar Sigler att Fibonaccis tankesätt har influerat den moderna matematiken, samt visar i moderna termer hur teserna kan åskådliggöras och användas, vilket gör Fibonaccis tankar mer tydliga och lätt följda.

20 Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1225, *Liber Quadratorum*, översättning Sigler L.E., 1987, *The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler*

The book of squares

“Introduction

I thought about the origin of all square numbers and discovered that they arise out of the increasing sequence of odd numbers; for the unity is a square and from it is made the first square namely 1; to this unity is added 3, making the second square, namely 4, with root 2; if to the sum is added the third odd number, namely 5, the third square is created, namely 9, with root 3; and thus sums of consecutive odd numbers and a sequence of squares always arise together in order.²¹

Boken om kvadrater

“Inledning (fritt översatt)

Jag tänkte på alla kvadraters ursprung och kom fram till att de uppstår i samband med den ökade sekvensen av udda tal, enheten är ett kvadrattal och från detta bildar vi det första kvadrattalet vilket är ett; till ett adderas tre, och skapar den andra kvadraten, nämligen fyra, med rot 2; om vi till summan adderar det tredje udda talet, nämligen fem, får vi en tredje kvadrat, vilket är nio, med rot tre; och därmed ger summorna av på varandra följande udda tal en sekvens av kvadrater som alltid sker i ordning.

Kommentarer till inledningen

Till att börja med är det värt att kommentera att Fibonacci sällan använder sig utav bevis då han arbetar fram sina lösningar. Han var mer en resonerande matematiker som med hjälp av bland annat tallinjer resonerade sig fram till hur han skulle lösa ett problem för att sedan kunna jobba sig fram till den slutgiltiga lösningen.

I denna uppsats kommer jag att använd mig utav begreppet rot eller rötter, med detta menar jag kvadratrot och kvadratrötter. Den allmänna formeln för det samband som Fibonacci kommit fram till ser ut likt följande, där $N=1,2,3\dots$. Detta sätt att se på en udda talserie var redan känt utav Pythagoras runt 500 f.Kr.²²

²¹ Pisano “Fibonacci” Leonardo, 1225, *Liber Quadratorum*, översättning Sigler L.E., 1987, *The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler*

²² Pisano “Fibonacci” Leonardo, 1225, *Liber Quadratorum*, översättning Sigler L.E., 1987, *The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler*

Formeln visar på att skillnaden mellan på varandra följande kvadrater är lika med summan av rötterna.

(

. Detta kommer att visas i de olika satserna som presenteras i boken. Detta kan vi finna i bokens inledning:

Inledningen visar att Fibonacci var medveten om att denna sekvens av udda tal ger kvadrattal. Något som han senare i sina satser kommer att försöka bevisa. Jag kommer att återkomma till detta senare i uppsatsen.

Jag tänker jämföra Fibonaccis serie med det vi idag känner som en aritmetisk summa av udda på varandra följande tal.

Allmänt för en udda aritmetisk summa gäller:

The book of squares

”Proposition 1

[Find two square numbers which sum to a square number.]

*Hence, to find two square numbers which sum to a square number, I shall take any odd square and I shall have it for one of the two said squares; the other I shall find in a sum of all odd numbers from unity up to the odd square itself. For example, I shall take 9 for one of the mentioned two squares, the other will be had in the sum of odd numbers which are smaller than 9, namely 1 and 3 and 5 and 7, which have sum 16, which is a square, which added to 9 will yield 25, which is a square number. And if we wish a geometric demonstration, any number of odd numbers from the unity in ascending order are adjoined, making the end be square; and let. **.ab.** be 1, **.bc.** be 3, **.cd.** be 5, **.de.** be 7, **.ef.** be 9; and because **.ef.**, 9 is a square and **.ae.** 16, is a square created from the sum of the odd numbers **.ab.** and **.be.** and **.cd.** and **.de.**, the total number **.af.** is likewise square; and thus from the sum of the two squares **.ae.** and **.ef.** is made the square. **af.***

a b c d e f

Also, alternatively, I shall take some even square, and shall let half of it be also even, as 36 of which half is 18; and I shall take from it 1, and to it shall add 1, to yield 17 and 19, which are odd numbers and consecutive, with no odd number falling between them; their addition yields 36, which is square, and the addition of the remaining odd numbers from 1 up to 15 yields 64; the addition of the two squares yields 100, which is square, and is the sum of the odd numbers from 1 up to 19. As well, I shall take an odd square number, of which a third part is whole, as 81 of which a third is 27; and I shall take 27 itself with two odd numbers of which 27 is the mean namely 25 and 29; and these three numbers sum to 81, which is square; and the sum of the others, which are from 1 up to 23, is 144, which has root 12; add then 144 to 81, from this comes a sum of odd numbers which are from 1 up to 29, namely 225, which is a square number and the root of it is 15. In a similar manner can be found four more consecutive odd numbers, the sum of which make a square number and the sum of the remaining smaller numbers down to unity yield also a square; and the two squares themselves always add to make a square number. “²³

Boken om kvadrater

”Sats 1 (fritt översatt)

[Hitta två kvadrater vars summa är en kvadrat.]

*Alltså, för att hitta två kvadrater vars summa är en kvadrat, kommer jag att ta vilken udda kvadrat som helst och använda denna som en av mina nämnda kvadrater; den andra kommer jag att hitta i summan av alla udda tal från ett till själva kvadraten. Till exempel, jag tar 9 som en av mina två angivna kvadrater; den andra kvadraten får jag genom att lägga samman alla udda tal mindre än 9, det vill säga 1, 3, 5 och 7. Summan av dessa kommer ge mig min andra kvadrat, i detta fall blir summan 16, vilket är en kvadrat. 16 adderat med 9 är lika med 25, vilket även detta är en kvadrat. Och om vi önskar se en geometrisk demonstration av detta, valfritt antal udda tal från ett i stigande ordning läggs samman, vilket i slutändan kommer ge en kvadrat. Låt **ab** vara 1, **bc** vara 3, **cd** vara 5, **de** vara 7, **ef** vara 9. Eftersom **ef** är 9 vilket är en kvadrat, och eftersom **ae** är lika med 16 är en kvadrat skapad av summan av alla udda tal **ab**, **bc**, **cd**, **de** med den totala summan **af** är även det en kvadrat. Så från summan av de två kvadraterna **ae** och **ec** ges då kvadraten **af**.*

a b c d e f

²³ Pisano “Fibonacci” Leonardo, 1225, *Liber Quadratorum*, översättning Sigler L.E., 1987, *The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler*

Dessutom som alternativ, kommer jag att ta en jämn kvadrat, där hälften av denna kvadrat är ett jämnt tal. Som 36 vilket delat på hälften blir 18, och jag skall subtrahera respektive addera 1 till 18. Detta ger mig 17 respektive 19, vilket är två udda tal som följer på varandra, det vill säga inga udda nummer finns mellan dem. Addera dessa och du får 36, addera därefter alla tal från 1 till 15 och du får 64 vilket är en kvadrat. Addera nu 36 till 64 och vi får 100, vilket i sin tur är summan av alla udda tal från 1 till 19.

Jag ska även ta en udda kvadrat vars tredjedel är ett heltal, ta 81 en kvadrat som delad på tre är 27. Från 27 skall jag addera respektive subtrahera 2, vilket ger oss 25 och 29. Dessa två adderat med varandra samt 27 ger oss 81 som tidigare nämnts är en kvadrat. Vi får en summa av 144 då vi adderar alla udda tal från 1 till 23, vilket har en rot som är 12. Addera 144 med 81 och vi får 225 vilket är en kvadrat med roten 15. På liknande sätt kan fyra andra på varandra följande udda tal, vars summa ger oss en kvadrat och där de resterande mindre talen till och med 1 också är en kvadrat. Samt att de två kvadraterna adderade med varandra alltid ger oss en kvadrat.”

Algebra Sats 1

Vi ser i den första delen av Fibonccis problem, som handlar om att finna två kvadrattal som adderade med varandra blir ett annat kvadrattal. Detta problem har vi stött på tidigare, nämligen då Pytagoras och pytagoreerna fann sambandet för sidorna i en rätvinklig triangel. Den formel de då kom fram till och som vi känner väl är $a^2+b^2=c^2$. Vi kan se att denna formel går att identifiera då Fibonacci jobbar med att finna två kvadrater vars summa är en kvadrat. Genom att välja talet nio har vi en kvadrat som är 3^2 , och genom att lägga samman alla udda tal mindre än nio får vi en summa som är 16. Detta är 4^2 , vilket som vi kan se är en kvadrat. Vi adderar 3^2 med 4^2 och får då 25, vilket också kan skrivas som 5^2 . Vi har alltså , vilket även kan skrivas som. Som vi tidigare behandlat i inledningen.

Om vi gör en allmän lösning till samma problem kan vi säga att är vilket udda tal som helst kvadrerat. Vi kan se att udda tal kvadrerade ger oss udda kvadrater och att jämna tal kvadrerade ger oss jämna kvadrater.

Om vi nu tillämpar att är en udda kvadrat, kan vi även konstatera att det udda tal som kommer innan kvadraten är . Där $n = 2,3,4,\dots$

Vi får då alltså en kvadrat i där resultatet även det är en kvadrat.

(I formeln är i första fallet vilket ger allmänt första fallet = .

Vi fortsätter,

Med hjälp utav den allmänna formeln kan vi då se att

ger oss ekvationen .

är udda.

Vi sätter $n=2$ i formeln vi just fått fram och får då resultatet vilket är vad Fibonacci också fått fram i sitt första exempel.

Vi testar även $n=3$ och får då , vilket stämmer.

Fibonacci's andra del av satsen handlar om att vi skall välja ett jämnt kvadrattal, i motsats till de udda kvadrattal vi jobbat med hittills. Vi låter vara ett jämnt tal kvadrerat, då är dess hälft . De två närmast angränsande udda talen är då respektive .

Vi kan då konstatera att det nästnästförekommade udda talet är . Om vi kopplar detta till det första problemet vi hade, skall vi ta alla udda tal upp till och med och addera dem samman.

Vi får då alltså

.

Vi får nu formeln . Vi testar att sätta in $n=3$, och får då .

Även i detta fall kan den allmänna formeln för aritmetiska summor användas vi får,

. Vilket överensstämmer med resultatet vi får från formeln .

Slutligen skall vi titta närmare på Fibonacci's tredje del utav sats ett. Denna del handlar om att vi har ett kvadrattal som är jämnt delbart med tre, vi låter detta tal vara . Vi får då tre på varandra följande udda tal som är, .

Vi får då,

.

Formeln som blir ser ut som följer, .

Exempel 1:

Exempel 2:

Vi kan även notera att Fibonacci utför samma sorts operationer med fyra på varandra följande udda tal. Denna summa skall ge oss en kvadrat och likaså skall resterande mindre talen till och med ett också vara en kvadrat.

Vi får därmed följande uttryck,

Fyra stycken på varandra udda tal är då, . Adderar vi dessa får vi, . Vilket vi kan se är en kvadrat, vi kommer även precis som tidigare i denna sats att få ett kvadrattal av alla udda tal från ett till talet . Det vill säga, .

The book of squares

”Proposition 2

[Any square number exceeds the square immediately before it by the sum of the roots.]

Similarly, I have found that any square exceeds the square immediately before it by the sum of the roots of these squares. For example 121, of which the root is 11, exceeds 100, of which the root is 10, by the sum of 10 and 11, namely the sum of the roots themselves. This is why one square exceeds the second square before it by the quantity which is four times the root of the square which is between them, as 121, which exceeds 81 by four times 10; and thus can be found differences between squares by the distances between the root themselves.

And when consecutive roots added make a square number, then the square of the greater root is equal to the sum of two squares.

Likewise, when four times another root is square, then the square of the following root is equal to the sum of two squares, one of which will be that created by the mentioned quadruple and the other is that which has root one less than the quadruple root. Therefore, if 9 is quadrupled, then 36 is created. Thus 100, of which the root is 10, is equal to the sum 64, which has root 8, and 36, which was the quadruple of 9.

And it is noted that out of the quadrupling of any number a square is obtained only if the number itself was a square because, as Euclid has shown, when the ratio of a number to another number is the same as the ratio of squares, then as the square is made from multiplication, and because 4 is a square, the number that it multiplies should also be square in order to make a square.

And thus in many ways we can find three square numbers so that one always is equal to the sum of the other two.

*But it appears that every square exceeds its preceding square, as we said, by as much as the sum of the roots themselves, which will be evident if we place the roots on the segments **.ab.** and **.bg.**. And since **.ab.** and **.bg.** are consecutive numbers, one will be bigger than the other by one. Let then **.bg.** be bigger than **.ab.** by one, and subtract the unity **.dg.** from **.bg.** and there will remain **.bd.**, equal to **.ba.**;*

a b d g

*and since **.bg.** is a number divided into two parts, namely **.bd.** and **.dg.**; **.dg.** the product of **.bd.** by itself added to the product of **.dg.** by itself added to twice **.bd.** times **.dg.** will be equal to the product of **.bg.** with itself. But the product of **.bd.** with itself is equal to the product of **.ab.** with itself. Therefore, the square of the number **.bg.** exceeds that of the number **.ab.** by the quantity which is the sum of **.gd.** times itself and twice **.gd.** times **.bd.**. But the product of **.dg.** with itself is one, which equals and is the same as the unity **.dg.**; and twice **.dg.** times **.bd.** make twice **.bd.**, as **.dg.** is 1; therefore, twice **.bd.** is **.ad.**; therefore, the square of the number **.bg.** exceeds the square made by the number **.ab.** by a quantity which is the sum of the roots themselves, which are **.ab.** and **.bg.**. this is what had to be demonstrated.*

*Alternatively, since the number **.bd.** equals the number **.ba.** the total **.ad.** will be divided into two equal parts by the point **.b.**; and to **.ad.** is added the unity **.dg.**; then the product of **.dg.** by **.ag.** added to the square of the root **.ab.**, will equal the square made by the root **.bg.**; this is why the square of the number **.bg.** exceeds the square of the number **.ab.** by that which is the product of **.dg.** times **.ag.**. But **.dg.** multiplied by **.ag.** makes the number **.ag.**, since **.dg.** is 1. Therefore, the square of **.bg.** exceeds the square of **.ab.** by the sum of the roots themselves, which sum is the number **.ag.**.*

*Similarly, it is demonstrated that any square exceeds any smaller square by the product of the difference of the roots by the sum of the roots. For example, let **.ag.** and **.gb.** be two roots of any two squares whatsoever, and let **.gb.** be bigger than **.ag.** by the number **.db.**. Because the product of **.ag.** with itself, plus the product of **.db.** with **.ab.**, equals the product of **.gb.** with itself, the square of **.gb.** exceeds the root **.ag.** multiplied by the sum of **.gb.** and **.ag.**, namely, by the product of **.db.** and **.ab.**. This is what had to be demonstrated.”*

Boken om kvadrater

“Sats 2 (fritt översatt)

[Varje kvadrattal överstiger det kvadrattal som kommer direkt före med summan av rötterna]
(Fibonacci kommer här med ett exempel samt ett påstående, men han kommenterar inte dessa förens senare i sin text)

På likande sätt har jag funnit att varje kvadrattal överstiger kvadrattalet närmast före det med summan av dessas rötter. Till exempel 121, vars rot är 11, överstiger 100, vars rot är 10, med summan av 10 och 11, nämligen summan av rötterna själva. Det är därför en kvadrat överstiger kvadraten näst närmast före med fyra gånger roten ur kvadraten mellan dem, likt 121, som överstiger 81 med fyra gånger 10; och således kan vi finna skillnaderna mellan kvadrater utifrån skillnaden mellan rötterna.

Och när rötter som följer på varandra adderas och skapar nya kvadrattal, då motsvarar den större kvadraten summan av två kvadrater.

(Med detta menar Fibonacci att om vi sätter talen till a och $a+1$ och summan är en kvadrat b^2 så är vilket är kvaderingsregeln.)

Likaså, då fyra gånger en rot är ett kvadrattal, så motsvarar kvadraten på den påföljande roten summan av två kvadrater, den ena skapas av den nämnda kvadrupeln och den andra är den kvadrat vars rot är ett mindre än kvadrupel roten. Således, om vi multiplicerar 9 med fyra får vi 36. Så 100, vars rot är 10 är lika med summan av 64, vars rot är 8 och 36, som är en kvadrupel av 9.

Vi noterar också att av en kvadrupling av ett tal fås en kvadrat bara om talet självt är en kvadrat, detta för att som Euklides visat, när förhållandet mellan tal är detsamma som förhållandet mellan kvadrater, när sedan kvadraten fås genom multiplikation, och eftersom 4 är en kvadrat, bör talet som det multipliceras med också vara en kvadrat för att kunna skapa en annan kvadrat.

Och på många sätt kan vi alltså hitta tre kvadrattal så att ett alltid är summan av de bägge andra.

Men det visar sig att varje kvadrat överstiger den föregående kvadraten, som vi sa, med så mycket som summan av rötterna själva, vilket kommer att bli uppenbart då vi placerar rötterna på segmenten **.ab.** och **.bg.**. Och eftersom **.ab.** och **.bg.** är på varandra följande tal, kommer det ena överstiga det andra med ett. Låt nu **.bg.** överstiga **.ab.** med ett, och subtrahera enheten **.dg.** från **.bg.** vilket ger **.bd.**, som är lika med **.ba.**;

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & d & & g \\ x & & x & & 1 & & \\ & & & & & & y \end{array}$$

och eftersom **.bg.** är ett tal delat i två delar, nämligen **.bd.** och **.dg.**; kommer produkten av **.bd.** med sig självt adderat med produkten av **.dg.** med sig självt adderat med två gånger **.bd.** gånger **.dg.** vara lika med produkten av **.bg.** med sig självt.

(Vi får alltså vilket för oss är känt som kvadreringsregeln)

Men produkten av **.bd.** multiplicerat med sig själv är lika med produkten av **.ab.** multiplicerat med sig självt. Därför kommer kvadraten av talet **.bg.** överstiga kvadraten av **.ab.** med den kvantitet som är summan av **.gd.** gånger sig självt och två gånger **.gd.** gånger **.bd.**.

() Men produkten av **.dg.** multiplicerat med sig själv är ett, vilket är lika med och det samma som **.dg.** och två gånger **.dg.** gånger **.bd.** ger två gånger **.bd.** då **.dg.** är 1; därför är, två gånger **.bd.** är **.ad.**; därför överstiger kvadraten av talet **.bg.** kvadraten av **.ab.** med summan av rötterna själva, vilket är **.ab.** och **.bg.** det är detta som är skulle demonstreras.

Alternativt, eftersom talet **.bd.** är lika med talet **.ba.** kommer summan **.ad.** att delas i två lika stora delar vid punkten **.b.**; och till **.ad.** adderas enheten **.dg.**; () då kommer produkten av **.dg.** med **.ag.** adderad till kvadraten av roten **.ab.**, vara lika med kvadraten bildad av roten **.bg.**; det är därför kvadraten av talet **.bg.** överstiger kvadraten av talet **.ab.** med det som är produkten av **.dg.** gånger **.ag.**. men **.dg.** multiplicerat med **.ag.** ger talet **.ag.**, eftersom **.dg.** är 1. Därför överstiger kvadraten av **.bg.** kvadraten av **.ab.** med summan av rötterna själva, vilken summa är talet **.ag.**. ()

På liknande sätt, kan det demonstreras att vilken kvadrat som helst överstiger vilken mindre kvadrat som helst med produkten av skillnaden av rötterna med summan av rötterna.

Tillexempel, låt **.ag.** och **.gb.** vara två rötter av vilka två kvadrater som helst, och låt **.gb.** överstiga **.ag.** med talet **.db.**. Eftersom produkten av **.ag.** med sig själv adderat med produkten

av *.db.* och *.ab.* är lika med produkten av *.gb.* med sig själv, kommer kvadraten av *.gb.* överstiga roten *.ag.* multiplicerat med summan av *.gb.* och *.ag.*, nämligen med produkten av *.db.* och *.ab.*. Detta är vad som måste påvisas.”

Algebra och kommentarer sats 2

Då Fibonacci i sin sats refererar till Euklides, kan vi bara anta att det är till Euklides verk elementa han syftar.

Vi kan även här se att Fibonacci ser på tal som en sträcka. Han använder utan att själv kommentera detta sig utav det vi idag kallar för kvadreringsregeln. Att detta går okommenterat kan betyda att han ser detta geometriskt.

Skillnaden mellan de på varandra följande kvadraterna är lika med summan av rötterna, vilket vi visade i inledningen. Detta kan vi koppla till en andragsgrads kurva, . Studera kurvan för $x > 0$, där x är positiva heltal. Om x_1 och x_2 är två på varandra följande värden kommer skillnaden mellan y_2 och y_1 att vara lika med $x_1 + x_2$.

Vi kan även åskådliggöra problemet med hjälp av formeln

Där vi kan konstatera att $\sqrt{4+3}$ är rot till

Vi ser att $\sqrt{4+3}=7$. Det vill säga att skillnaden mellan kvadraterna är detsamma som rötterna adderade med varandra så som Fibonacci sa.

Fibonacci utvidgar detta sätt att tänka genom att hoppa över den mellanliggande kvadraten eller talet, och därefter multiplicera denna överhoppade roten med fyra. Om vi till exempel har .

Problemet kan även presenteras med hjälp av den kända konjugatregeln

The book of squares

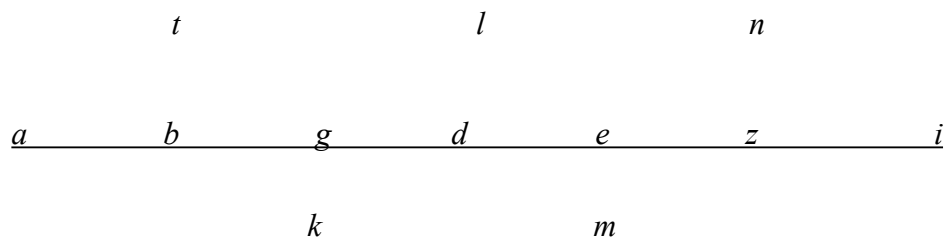
”Proposition 4

“I wish to demonstrate how a sequence of squares is produced from the ordered sums of odd numbers which run from 1 to infinity.

Adjoin, beginning with the unity .ab., any number of consecutive numbers, .bg., .gd., .de., .ez., .zi.; join together .bg. with .ab. to make the number .t.; similarly join together each number

with its antecedent and with its successor; and let *.k.* be the sum of the numbers *.bg.* and *.gd.*; even join the numbers *.gd.* and *.de.* to make the number *.l.*; also the numbers *.de.* and *.ez.* to make the number *.m.*; and *.n.*, namely, the sum of *.ez.* and *.zi.*. I say first that *.t.*, *.k.*, *.l.*, *.m.*, *.n.* are consecutive odd numbers beginning with unity. Certainly the number *.zi.* is either even or odd; if the number *.zi.* is even, then the number *.ez.* is odd; and if the number *.zi.* is odd, then the number *.ez.* is even; for these numbers certainly are consecutive. Therefore, the sum of the numbers *.ez.* and *.zi.*, namely *.n.*, is odd. Similarly, we shall show the sum of the numbers *.de.* and *.ez.*, namely *.m.*, is odd. By the same method, the numbers *.l.*, *.k.*, *.t.* will be shown to be odd; I say, in fact, that *.t.*, *.k.*, *.l.*, *.m.*, *.n.* are consecutive odd numbers. In fact, the number *.n.* is made from the addition of *.ez.* with *.zi.*; and from the addition of *.de.* with *.ez.* is made the number *.m.*. As much, therefore, as the number *.zi.* exceeds the number *.de.*, the number *.n.* exceeds the number *.m.*. In truth, the number *.zi.* exceeds the number *.ez.* by one, the same by which the number *.ez.* exceeds the number *.de.*. Therefore, the number *.zi.* exceeds the number *.de.* by two. Therefore, the number *.n.* exceeds the number *.m.* similarly by two; in the same manner, it will be found that the number *.m.* exceeds the number *.l.*, and the number *.l.* the number *.k.*, and the number *.k.* the number *.t.*, and the number *.t.* the unity *.ab.*. Therefore, the unity and *.t.*, *.k.*, *.l.*, *.m.*, *.n.*, are, as we predicted, consecutive odd numbers.

And, as shown above. the square which is made by the number *.zi.* exceeds the square which is made by the number *.ez.* by a number which is the sum of *.zi.* and *.ez.*; this is the number *.n.*. Similarly, it is shown that the square made by the number *.ez.* exceeds the square made by the number *.de.* by the sum of the numbers *.de.* and *.ez.*; this is number *.m.*. And the square made by the number *.de.* exceeds the square made by the number *.gd.*, the number *.l.*. And the square made by the number *.gd.* exceeds the square made by the number *.bg.* by *.k.*. And the square of the number *.bg.* exceeds the square of the unity by the number *.t.*; *.t.* is certainly 3, and *.bg.* is 2. Therefore, if to the square of unity, that is 1, is added the number *.t.*, by which the square of *.bg.* exceeds the square of unity, the square of the number *.bg.* is obtained; if to that is added the number *.k.*, the square of the number *.gd.* will result; if to this square is added the number *.l.*, the square of the number *.de.* will result; if to this square is added the number *.m.*, the square of the number *.ez.* will result; if to this again is added the number *.n.*, by which the square of the number *.zi.* exceeds the square of the number *.ez.*, clearly will result the square of the number *.zi.*. Certainly the numbers *.ab.*, *.bg.*, *.gd.*, *.de.*, *.ez.*, *.zi.* are consecutive and their squares arise from the sum of consecutive odd numbers *.ab.*, *.t.*, *.k.*, *.l.*, *.m.*, *.n.* as was to be shown.”



(Fibonacci väljer att se talen som en tallinje. Han kopplar sedan samman sina sträckor och döper om dem enligt schemat ovan. Vi kan bara spekulera i varför han valde just detta sätt.)

Boken om kvadrater

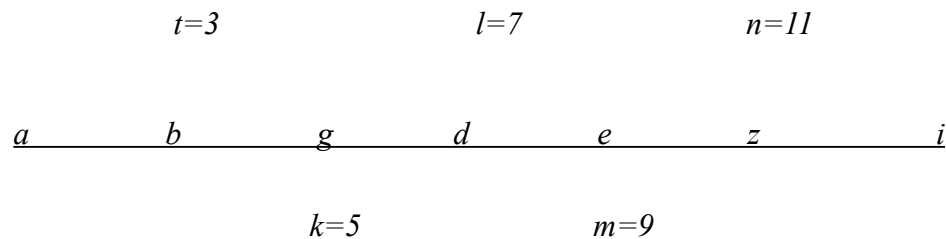
“Sats 4 (fritt översatt)

Jag önskar demonstrera hur en sekvens utav kvadrattal är skapade från ordnade summor av udda tal från ett till oändligheten.

*Tillfoga, med början i enheten .ab., ett godtyckligt antal på varandra följande tal .bg., .gd., .de., .ez., .zi.; kombinera .bg. med .ab. för att skapa talet .t.; på liknande sätt kombinerar varje tal med dess föregångare och med dess efterföljare; och låt .k. vara summan av talen .bg. och .gd.; kombinera även talen .gd. och .de. för att få talet l; även talen .de. och .ez. för att ge talet .m, och .n., nämligen summan av .ez. och .zi.. Först säger jag att (**Här bör nämnas att innan t har vi l**) .t., .k., .l., .m., .n. udda på varandra följande tal som startar med ett. Naturligtvis är talet .zi. antingen udda eller jämnt; om talet .zi. är jämnt, då är talet .ez. udda; och om talet .zi. är udda, så är .ez. jämnt; dessa tal är givetvis på varandra följande. Därför, summan av .ez. och .zi., nämligen .n. är udda. På liknande sätt, skall vi visa att summan av talen .de. och .ez., nämligen .m. är udda. Med samma metod skall vi visa att talen .l., .k., .t. är udda; jag säger i själva verket att .t., .k., .l., .m., .n. är udda tal som följer på varandra.*

I själva verket kommer talet .n. från additionen av .ez. med .zi.; och från additionen av .de. med .ez. får vi .m.. Så mycket som talet .zi. är större än talet .de., är därför talet .n. större än talet .m.. I sanning, överstiger talet .zi. talet .ez. med ett, lika mycket som .ez. är större än talet .de.. Därför, är talet .zi. två större än talet .de. Därför är talet .n. större än .m. på liknande sätt med två; på samma sätt, kommer vi se att talet .m. överstiger .l. och talet .l. talet .k. och talet .k. talet .t. och talet .t. startvärdet .ab.. Därför, ett och .t., .k., .l., .m., .n. är som vi förutspådde, udda tal som följer på varandra.

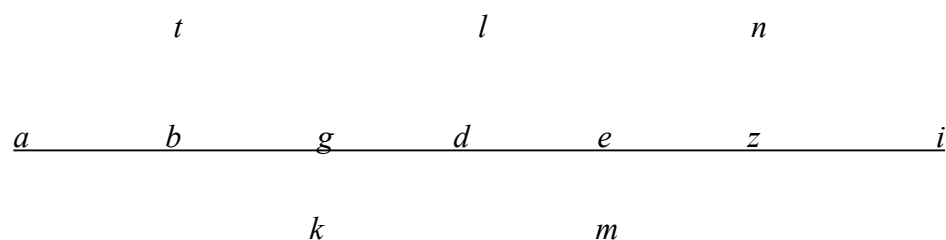
Och som vi visat ovan, är den kvadrat som kommer ur talet **.zi.** så mycket större än den kvadrat som kommer ur talet **.ez.** som ett tal som är summan av **.zi.** och **.ez.**; vilket är talet **.n.** På liknande sätt är det visat att kvadraten som kommer ur talet **.ez.** som överstiger kvadraten som kommer ur talet **.de.** med summan av talen **.de.** och **.ez.** det är talet **.m.** Och kvadraten av talet **.de.** överstiger talet som kommer ur **.gd.** vilket är **.l.** Och kvadraten av talet **.gd.** är större än kvadraten av talet **.bg.** med **.k.**



(I schemat ovan har jag valt att lägga till de tal som Fibonacci resonerar sig fram till i sin text.)

(
Men $t = 3$)

Och kvadraten av talet **.bg.** är större än enheten med **.t.**, **.t.** är säkerligen 3 och **.bg.** är 2. Därför, om till kvadraten av enheten, det är 1, är adderat **.t.** genom vilket kvadraten av **.bg.** överstiger kvadraten på enheten, då har kvadraten på **.bg.** erhållits; om vi till detta adderar **.k.**, erhålles kvadraten på talet **.gd.**; om vi till detta tal adderar talet **.l.**, erhålles kvadrattalet **.de.**; om vi till detta adderar talet **.m.**, erhålles kvadrattalet **.ez.** om vi till detta ännu en gång adderar talet **.n.**, med vilket kvadraten av talet **.zi.** är större än kvadraten på talet **.ez.**, blir resultatet uppenbarligen kvadraten av talet **.zi.** Med säkerhet är talen **.ab.**, **.bg.**, **.gd.**, **.de.**, **.ez.**, **.zi.** på varandra följande tal och deras kvadrater kommer ur summan av udda på varandra följande tal **.ab.**, **.t.**, **.k.**, **.l.**, **.m.**, **.n.** som skulle visas.”



(

Algebra och kommentarer sats 4

Vi kan se att Fibonacci ofta resonerar sig fram till sina svar. Han startar med en idé som han sedan med hjälp utav bland annat schemat ovan utvecklar till en lösning. Denna lösning ger då vidare idéer om hur nästa steg i problemet och lösningen kan se ut.

Vi kan även se att denna sats är ett bevis på den formel som Fibonacci presenterar i introduktionen, nämligen, . Formeln är som vi tidigare nämnt i inledningen formade av att skillnaden mellan på varandra följande kvadrater är summan av rötterna till samma kvadrater. Formeln visar udda på varandra följande tal.

The book of squares

”Proposition 12

If two numbers are relatively prime and have an even sum, and if the triple product of the two numbers and their sum is multiplied by the number by which the greater number exceeds the smaller number, there results a number which will be a multiple of twenty-four.

Let two relatively prime numbers .ab. and .bg. be given, the sum of them be the even number .ag., the ratio of the number .ab. to the number .bg. be in lowest terms. Let .bg. be the larger number. From the number .bg. is taken the number .bd. equal to the number .ab..

$$\frac{a \quad b \quad d}{k} \quad g$$

Therefore, the number .bg. will exceed the number .ab. by the number .dg.. I say, in fact, that if the number .ab. is multiplied by the number .bg. and this is multiplied by the number .ag., and this product is multiplied by .dg., there will result a number which is a multiple of twenty-four; dividing by three times eight or by four times six will yield a whole number. The numbers .ab. and .bg. are, in fact, both odd; for if one were odd their sum would not be even. Neither can both be even; for then they would not be relatively prime. Therefore, both numbers .ab. and .bg. are odd. And because the number .bd. is equal to the number .ab., the number .ad. is therefore twice the number .ab.. Therefore, the number .ad. is even. Therefore, the difference .dg. is even; for if an even number is subtracted from an even number, there remains an even number; and because .dg. is even, half of it will be a whole number, even or odd. First, let the half be odd. Half of the number .ad., namely .ab., is odd. The sum of half

of $.ad.$ with half of $.dg.$, namely half of the number $.ag.$, is even because the sum of two odd numbers is an even number. Therefore, $.ag.$ is even even, that is half of the number $.ag.$ is even. The total number $.ag.$ will be a multiple of four. Therefore, from the multiplication of $.ag.$ and $.gd.$ arises a number which is a multiple of eight. But if half the number $.gd.$ is even, then $.gd.$ will be a multiple of four. Therefore, from the multiplication of $.dg.$ and $.ag.$ will result a number which is similarly a multiple of eight. Therefore, if the product of $.ag.$ and $.bg.$ is multiplied by $.ab.$, there will result a number which is a multiple of eight. And because $.ab.$ and $.bg.$ are odd, one of them is a multiple of three or neither is. Suppose the first. Therefore, from the multiplication of the numbers $.ab.$, $.bg.$, $.ag.$ and the number $.dg.$ results the number $.k.$, which is a multiple of three and also a multiple of eight. Therefore, $.k.$ will be a multiple of twenty-four as we said before. And if neither of the numbers $.ab.$ and $.bg.$ is a multiple of three, and if each of them is divided by 3, their remainders will be equal or unequal. First, suppose they are equal. Then the number $.gd.$ is a multiple of three. Therefore, the aforementioned product multiplied by $.dg.$ yields a number which is a multiple of three. But if the remainders upon dividing $.ab.$ and $.bg.$ by 3 are unequal, then one of the remainders will be 1 and the other will be 2. Therefore, the sum of $.ab.$ and $.bg.$, namely the number $.ag.$, will be a multiple of three. Hence the triple product of $.ab.$, $.bg.$, $.ag.$ will be a multiple of three. Therefore, from the multiplication of this triple product with the number $.dg.$ results a number which is a multiple of three. And because similarly it is a multiple of eight, it will be therefore a multiple of twenty-four, which had to be shown. And this will again be true if the numbers $.ab.$ and $.bg.$ are not relatively prime.

And if one of the numbers $.ab.$ and $.bg.$ is even, the sum of them will be odd; then it will be similarly shown that from the product of the doubles of each of the numbers and their sum and the number $.dg.$ will arise a number which will be a multiple of twenty-four whether the numbers are relatively prime or not. This obtained number, namely the multiple of twenty-four, is called congruous.”

Boken om kvadrater

“Sats 12 (fritt översatt)

(Om vi bryter ned den 12:e satsen i mindre delar så kommer detta att hjälpa oss att förstå Fibonaccis tankar.)

Om två tal är relativt prima och har en jämn summa, och om trippelprodukten av de två talen och deras summa multipliceras med det tal som det större talet överstiger det mindre talet, blir resultatet ett tal som är en multipel av 24.

*Låt två relativt prima tal **.ab.** och **.bg.** vara givna, låt summan av dem vara ett jämnt tal **.ag.** och förhållandet mellan talet **.ab.** och talet **.bg.** vara maximalt förkortat. Låt **.bg.** vara det större talet. Från talet **.bg.** drar vi av talet **.bd.** som är lika med talet **.ab.**.*

$$\frac{a \quad b \quad d}{k} g$$

Fibonacci pratar om att förhållandet mellan talet ab och talet bg är maximalt förkortat vilken innebär att dessa tal är relativt prima.

För att förenkla våra uträkningar väljer jag att benämna Fibonaccis tal likt nedan.

$$\frac{\begin{matrix} x & x & y-x \\ a & b & d \end{matrix}}{\begin{matrix} y \\ k \end{matrix}} g$$

Påståendet: ”Då kommer talet **.bg.** överstiga talet **.ab.** med talet **.dg.**. Jag säger i själva verket att om talet **.ab.** multipliceras med talet **.bg.** och detta multipliceras med talet **.ag.**, och denna produkt multipliceras med **.dg.**, kommer detta resultera i ett tal som är en multipel av tjugofyra; dividerat med tre gånger åtta eller fyra gånger sex kommer det ge ett heltal.”

Säger oss att . Vilket leder oss till påståendet som säger att är delbart med 24.

Vi gör detta påstående med den nya benämningen från ovan får vi att , och även att och detta är delbart med 24 enligt Fibonaccis sats.

Fibonacci bevisar detta med: Talen **.ab.** och **.bg.** är i själva verket båda udda, för om ett av talen vore udda skulle deras summa inte vara jämn. Inte heller kan båda vara jämna för då skulle de inte vara relativt prima.

Fortsättningen på Fibonaccis bevis säger nu att: Därför är båda talen **.ab.** och **.bg.** udda. Och eftersom talet **.bd.** är lika med talet **.ab.**, är talet **.ad.** två gånger talet **.ab.**. Därför är talet **.ad.** jämnt. Därför är skillnaden **.dg.** jämn, för om ett jämnt tal subtraheras från ett jämnt tal, kommer det som blir kvar vara ett jämnt tal, och eftersom **.dg.** är jämnt, kommer hälften av det att vara ett heltal, jämnt eller udda.

Vilket innebär att som vi tidigare sagt att $dg = y - x$ är jämn. Vilket i sin tur innebär att

Fibonacci delar nu upp det förgående påståendet i två fall, låt oss kalla dem fall A och fall B.

Fall A: Först, låt hälften vara udda. (). Hälften av talet $.ad.$ nämligen $.ab.$, är udda. Summan av hälften av $.ad.$ (udda) och hälften av $.dg.$ (udda), nämligen hälften av talet $.ag.$ är jämnt eftersom summan av två udda tal är ett jämnt tal. Därför är $.ag.$ jämnt jämnt, d.v.s hälften av talet $.ag.$ är jämnt. Det totala talet $.ag.$ kommer vara en multipel av fyra. Därmed uppstår från multiplikationen av $.ag.$ och $.gd.$ ett tal som är en multipel av åtta.

Fall B : Men om hälften av talet $.gd.$ är jämnt, så är $.gd.$ en multipel av fyra. Då fås från multiplikationen av $.dg.$ och $.ag.$ ett tal som på samma sätt är en multipel av åtta. ($dg \cdot ag$ är delbart med åtta) Därför, om produkten av $.ag.$ och $.bg.$ multipliceras med $.ab.$, blir resultatet en multipel av åtta.

Vi kan nu konstatera att i både fall A och fall B är $dg \cdot ag$ delbart med åtta.

Och eftersom $.ab.$ och $.bg.$ är udda, är en av dem en multipel av tre eller också är ingen av dem det.

Antag det förstnämnda. Då fås genom multiplikation av talen $.ab.$, $.bg.$, $.ag.$ och talet $.dg.$ talet $.k.$, som är en multipel av tre och även en multipel av åtta. Därför kommer $.k.$ att vara en multipel av tjugofyra som vi sa förut.

Och om ingen av talen $.ab.$ och $.bg.$ är en multipel av tre och om var och en av dem delas med 3, kommer deras rester att vara lika eller olika.

Först, antag att de är lika. Då är talet $.gd. (ty \text{ } bg - bd = bg - ab)$ en multipel av tre. Därför ger den ovannämnda produkten multiplicerad med $.dg.$ ett tal som är en multipel av tre.

Men om resterna vid delning av $.ab.$ och $.bg.$ med tre är olika, så måste en av resterna vara 1 och den andra måste vara 2. Då kommer summan av $.ab.$ och $.bg.$, nämligen talet $.ag.$ att vara en multipel av tre. Alltså är trippelprodukten av $.ab.$, $.bg.$, $.ag.$ en multipel av tre. Då fås från multiplikationen av denna trippelprodukt med talet $.dg.$ ett tal som är en multipel av tre. Och eftersom det också är en multipel av åtta, kommer det att vara en multipel av tjugofyra, som skulle visas.

Och detta kommer återigen att vara sant om talen $.ab.$ och $.bg.$ inte är relativt prima.

Nedan följer ett bevis som Fibonacci inte visar, det är konstruerat av mig.

ab och bg är inte relativt prima, största gemensamma nämnare = d .

Och om ett av talen *.ab.* och *.bg.* är jämnt, kommer summan av dem att bli udda, då kan det på liknande sätt visas att från produkten av det dubbla av varje tal och deras summa och talet *.dg.* får vi ett tal som kommer att vara en multipel av tjugofyra oavsett om talen är relativt prima eller inte. Detta erhållna tal, nämligen en multipel av tjugofyra kallas kongruent. ”

Låt oss säga att $ab = x$ och $bg = y$, där x är jämnt och y är udda. Vi sätter $x = 2z$.

Vi får att

)

Delbart med 8

Även detta är något som Fibonacci gör, utan som är konstruerat av mig.

Nu måste vi ta reda på om detta även är delbart med 3, vilket i då skulle ge oss att talet är delbart med 24.

Vi har alltså,

Fall A:

Fall B:

Fall C:

The book of squares

”Proposition 23

I wish to find three squares so that the sum of the first and the second as well as all three numbers are square numbers.

I shall find first two square numbers which have sum a square number and which are relatively prime. Let there be given 9 and 16, which have sum 25, a square number. I shall take the square which is the sum of all odd numbers which are less than 25, namely the square 144, for which the root is the mean between the extremes of the same odd numbers, namely 1 and 23. From the sum of 144 and 25 results, in fact 169, which is a square number. And thus is found three square numbers for which the sum of the first two and all three together are square numbers. If to 169 is still added the square number which is the sum of all the odd numbers from one up to 167, of which the root is 84, namely half 168, there results 7225, which is a square number and its root is 85. And thus are found four squares for which the sum of two or three or all together make a square number.

Moreover, 7225 we can add three distinct squares and with each of them make a square number. The first is the square with root 3612 resulting from the sum of all the odd numbers

smaller than 7225. The second is the square with root 720, which results from the sum of all the odd numbers which is less than a fifth part of 7225 diminished thence by the two preceding odd numbers. The third square with root 132 results, in fact, from the sum of the odd numbers which are smaller than 1/25 of 7225, diminished by twelve odd numbers of this 1/25 part. And thus can be found an infinite number of square numbers that separately or added make square numbers according to this arrangement.”²⁴

Boken om kvadrater

“Tes 23 (fritt översatt)

Jag önskar finna tre kvadrater sådana att summan av den första och den andra liksom alla tre tal är kvadrater.

Jag ska först finna två kvadrat tal vars summa är en kvadrat och som är relativt prima. Låt oss ta 9 och 16, vars summa är 25, ett kvadrattal. Jag kommer att ta kvadraten som är summan av alla udda tal mindre än 25, vilket är kvadraten 144, vars rot är medelvärdet mellan extremvärdena av dessa udda tal, nämligen 1 och 23. Från summan av 144 och 25, får vi i själva verket 169, vilket är en kvadrat. Och sålunda finns tre kvadrater vars summa av de första två talen samt alla tre tillsammans är kvadrattal. Om till 169 fortfarande tillsätts kvadratiska tal som är summan av alla udda tal från ett till 167, vars rot är 84, nämligen hälften av 168, vilket ger 7225, vilket är en kvadrat och dess rot är 85. Och således finns det fyra kvadrater där summan av två eller tre eller alla tillsammans ger ett en kvadrat.

Dessutom kan vi addera tre skilda kvadrater till 7225 och med var och en av dem bildat ett kvadrattal. Den första är en kvadrat med roten 3612 som är ett resultat utav summan av alla udda tal mindre än 7225, Den andra är en kvadrat vars rot är 720, vilket är resultatet av alla udda tal som är mindre än en femtedel utav 7225 de två föregående udda talen uteslutna. Den tredje kvadraten med roten 132 resulteras i själva verket från summan av alla udda tal som är mindre än 1/25 av 7225, 12 udda tal uteslutna från denna 1/25. Och på så sätt kan en oändlig mängd av kvadrattal som separat eller adderade ger kvadrattal enligt detta arrangemang.”

²⁴ Pisano “Fibonacci” Leonardo, 1225, Liber Quadratorum, översättning Sigler L.E., 1987, The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler

Algebra sats 23

I denna sats skall vi finna två kvadrater så att summan av kvadrat ett och två likväl som summan av kvadrat ett, två och tre skall vara kvadrater. Vi kan använda en tidigare känd formel från Pythagoreerna, som även nämns i samband med Fibonaccis tredje sats.

Vi använder samma metod som vi gjort tidigare i sats 1.

Vi använder denna formel på en kombination vi sedan tidigare stött på, nämligen $9+16=25$.

Vi fortsätter och sätter och får då,

Vi utför samma förfarande en tredje gång,

n	Udda tal	Skillnad mellan kvadrattal 1 och kvadrattal 2	Kvadrattal 1	Kvadrattal 2

1	3	9		
2	5	25		
3	7	49		
4	9	81		
5	11	121		
n				

Genom att ta ett udda tal, exempelvis talet 3, kvadrera så får vi talet 9. Därefter bildar vi två tal och . Skillnaden mellan kvadraterna på de båda talen 5 och 4 är 9, alltså . Detta kan också skrivas som . Vilket vi känner igen sedan tidigare. Nedersta raden i tabellen ger där Vi kan alltså hitta kvadrattalen utifrån att kvadraten på det udda talet utgör skillnaden mellan de två sökta kvadrattalen.

Enligt Fibonacci finns det tre olika sätt att addera entydiga kvadrater till kvadrattalet 7225 där alla svar kommer att vara ett annat kvadrattal. Första sättet är som vi tidigare behandlat med alla de udda tal som är mindre än 7225. Vi får då, .

Där k är en udda kvadrat.

Vi skall addera alla udda tal som är mindre än en femtedel utav 7225 (**vi sätter 7225 till**), bortsett från de två udda tal som närmast föregår en femtedel av 7225. Vi får då,

(5n=)Vi gör som tidigare och får då följande,

.

Men vi skulle minska med de två följande talen och därefter addera. Vi får då, denna summa har roten 720 enligt Fibonacci.

Slutligen det tredje sättet är att vi skall addera alla udda tal mindre än $1/25$ av 7225, utom de tolv tal som närmast föregår denna $1/25$. Vi får då,

Vi skall addera utom .

Då får vi

Skrivs

Vi får då alltså,

Det kvadrattal som blir då vi adderar kommer att ha roten 132.

Med hjälp av dessa tre olika sätt kan vi få oändligt många kvadrattal som är separerade eller adderade.

Efterord

Det har varit mycket intressant att läsa om Fibonacci och hans matematiska arbete. Dessa studier har hjälpt mig att förstå hur stor han faktiskt var och är inom den matematiska världen. Jag har bara haft chansen att skrapa lite på ytan på några av hans verk, det finns mycket mer att läsa och lära sig.

Jag vill tacka min handledare Christian Gottlieb på Matematiska institutionen vid Stockholms Universitet för den hjälp och det stöd han bistått med under året.

Källförteckning

Böcker

Boyer Carl B., 1968, *A history of mathematics*

Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1202, *Liber Abaci*, översättning Sigler L.E., 2002, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*

Pisano "Fibonacci" Leonardo, 1225, *Liber Quadratorum*, översättning Sigler L.E., 1987, *The book of Squares an annotated translation into modern English by L.E Sigler*

Ulin Bengt, 2008, *Fibonaccitalen och gyllene snittet*
Nationalencyklopedin

Artiklar

R.B McClenon, Januari 1919, *The american mathematical monthly official journal of the mathematical association of America, volume XXVI January, 1919, Number 1, Leonardo of Pisa and his liber quadratorum*

Internetsidor

<https://www.google.se/search?q=fibonacci+talf%C3%B6lj&hl=sv&client=firefox-a&hs=sPn&tbo=u&rls=org.mozilla:en-US:official&tbm=isch&source=univ&sa=X&ei=CEzHULu2HIXd4QTg1oG4Ag&ved=0CFwQsAQ&biw=1366&bih=665>