



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

**Komplexa tal - hur komplext kan det vara? En historisk resa från
tredjegradslikvationer till talpar**

av

Lina Andersson

2013 - No 10

Komplexa tal - hur komplext kan det vara? En historisk resa från tredjegradsekvationer till talpar

Lina Andersson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, Grundnivå

Handledare: Christian Gottlieb

2013

Komplexa tal – hur komplext kan det vara?

En historisk resa från
tredjegradsekvationer till talpar

Lina Andersson

Inledning

Det här självständiga arbetet inleddes redan hösten 2011, då på ämnet polyedrar. Detta var under en tuff termin och med en kurs vars innehåll inte riktigt ville ta fäste hos mig. Därför hann jag egentligen bara, i samråd med min handledare Christian Gottlieb, komma fram till att ämnet inte passade och att det var dags att hitta på något annat att skriva om, innan det var dags att fortsätta mina idrottsstudier vid Gymnastik- och Idrottshögskolan. Därför har arbetet länge fått ligga på vänt och jag har i princip bara hunnit och haft motivation till att läsa in mig på ämnet under tiden fram till våren 2013. Men under den här vårterminen har det äntligen tagit fart! Mitt schema har varit lite mer luftigt och jag har känt mig motiverad till att gräva i de komplexa talens snåriga historia.

För mig har det varit en jätteutmaning! Jag har fått repetera kunskaper som på något sätt runnit ut ur örat, stött på märkliga beräkningar som jag till en början inte har rätt ut, fått anstränga mig med att läsa matematik på engelska och faktiskt varit tvungen att verkligen förstå matematiken. Men med en fenomenal handledare kan det ju bara gå bra till slut. Vi har haft möten, mailat och diskuterat tredjegrads ekvationer, geometri och mycket annat under flera fikastunder.

Så här när det börjar närma sig målgång känner jag dock att tiden utan aktivt arbete har fått både ämnet och mig att mogna – och att det förmodligen bara har varit bra att jag har tagit lång tid på mig. Jag tror inte att jag hade varit lika insatt i ämnet som jag nu har hunnit bli, sakta men säkert.

Eftersom matematik är roligt håller jag mig med en lättsam ton arbetet igenom. Trevlig läsning!

Stockholm, maj 2013

Sammanfattning

I följande självständiga arbete kommer vi att förflytta oss i tiden från sent 1400-tal till mitten på 1800-talet för att undersöka hur synen på de komplexa talen utvecklades. Under 1500-talet upptäcktes lösningar till tredjegradsekvationer av de italienska matematikerna Scipione del Ferro, Niccolo Fontana (Tartaglia) och Gerolamo Cardano. Herrarna var främst intresserade av de reella lösningarna men bland dessa förekom ibland kvadratrötter ur negativa tal. Rafael Bombelli och Gottfried Leibniz tog sedan vid och vidareutvecklade när de tre förstnämnda gick bet.

För att de komplexa talen skulle bli accepterade krävdes en geometrisk tolkning och för den stod framför allt skandinaven Kaspar Wessel för. Inblandade i denna var bland annat även Hamilton och Gauss. Termen "imaginär" (imaginära tal) myntades på 1600-talet av René Descartes.

Innehållsförteckning

Inledning.....	2
2 Historia – De första snubblande stegen mot att förstå	5
2.1 Italienarna visar framfötterna.....	5
2.2 Tysken fyller på.....	7
4 Historia - Den geometriska tolkningen av	8
4.2 Wallis.....	8
4.3 Wessel.....	9
4.4 Argand.....	10
4.5 Hamilton.....	10
4.6 Gauss.....	10
4.7 Vad hände sen?.....	10
5 Hur presenteras komplexa tal på gymnasiet?.....	10
5.1 Olika upplägg.....	10
5.2 Vad tycker lärarna?.....	11
5.3 Diskussion.....	11

1 Syfte

Syftet med det här självständiga arbetet är att undersöka hur synen på de komplexa talen har utvecklats genom den matematiska historien. Vi kommer att titta närmare på hur de ”upptäcktes” och på hur matematiker har brottats med dess geometriska tolkning. Det är en resa från sent 1400-tal till mitten på 1800-talet, genom funderingar, tvivel, återvändsgränder, genombrott, genidrag och acceptans. På vägen stöter vi på flera betydelsefulla personer inom matematiken. Som slutkläm ska vi kika litegrann på hur komplexa tal introduceras på gymnasiet idag. Får eleverna någon förståelse eller lär de sig bara att räkna med i ?

2 Historia - De första snubblande stegen mot att förstå

$$\sqrt{-1}$$

Negativa och imaginära tal betraktades länge med stor misstänksamhet. De blev ofta kallade falska, påhittade eller omöjliga som lösningar. De komplexa talen har vandrat en lång väg för att tas på allvar och till slut bli accepterade och använda. Vi kommer att förflytta oss i tiden från sent 1400-tal till mitten på 1800-talet för att se hur synen på de komplexa talen utvecklades.

Under 1500-talet upptäcktes lösningar till tredjegradsekvationer av de italienska matematikerna Scipione del Ferro, Niccolo Fontana (Tartaglia) och Gerolamo Cardano. Herrarna var främst intresserade av de reella lösningarna men bland dessa förekom ibland kvadratrötter ur negativa tal. Rafael Bombelli och Gottfried Leibniz tog sedan vid och vidareutvecklade när de tre förstnämnda gick bet eller helt enkelt gick och dog. För att komplexa tal skulle bli accepterade krävdes en geometrisk tolkning, den stod framför allt skandinavens Kaspar Wessel för. Inblandade i denna var bland annat även Hamilton och Gauss. Termen ”imaginär” (imaginära tal) myntades på 1600-talet av René Descartes.

2.1 Italienarna visar framfötterna

Historien om $\sqrt{-1}$ börjar med Scipione del Ferro (1465-1526), matematiker vid Universitetet i Bologna. Han upptäckte hur man kan lösa den så kallade reducerade tredjegradsekvationen (specialfall av den allmänna tredjegradsekvationen i vilken andragradstermen saknas). Eftersom hans lösning på den reducerade tredjegradsekvationen är central för ett första steg mot att förstå $\sqrt{-1}$, ska vi titta närmare på hur han kom fram till den.

Den allmänna tredjegradsekvationen kan skrivas (så som vi skriver idag):

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

där a_1 , a_2 och a_3 är okända.

Den tredjegradsekvation som del Ferro löste, har istället den allmänna formen

$$x^3 + px = q$$

där p och q är positiva. Del Ferro undviker negativa koefficienter i sina ekvationer.

Att lösa denna ekvation kan tyckas vara ofullständigt jämfört med den allmänna tredjegradsekvationen, men det kommer att visa sig att hans lösning faktiskt är generell. Vad del Ferro försökte sig på var att se lösningar av den reducerade tredjegradsekvationen som skillnaden av två termer. Vi kan uttrycka lösningen, x , som $x = u - v$. Om vi substituerar detta i den reducerade tredjegradsekvationen, $x^3 + px = q$, utvecklar och samlar termerna resulterar det i

$$u^3 - v^3 + (p - 3uv)(u - v) = q$$

Del Ferro skriver om ekvationen som två mindre komplicerade påståenden

$$p - 3uv = 0$$

Som ger oss

$$u^3 - v^3 = q$$

Hur kunde del Ferro veta att han skulle göra detta? Om vi löser första ekvationen för v , i termer av p och u , och substituerar i den andra ekvationen får vi

$$v = \frac{p}{3u}$$

$$u^6 - qu^3 = \frac{p^3}{27}$$

Vid första anblicken ser denna sjättegradsekvation ut som ett steg tillbaka men i själva verket är det inte det. Ekvationen är av sjätte graden men den är också en kvadratisk ekvation i u^3 . Så med hjälp av lösningsformeln för andragradsekvationer får vi (den enda positiva lösningen):

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

med den positiva roten

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Eftersom $v^3 = u^3 - q$ kan vi också skriva

$$v^3 = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

Det spelar inte någon roll om vi använder plus- eller minustecknet i uttrycken. Om vi byter plus mot minus byter u och v plats. Sålunda är en lösning till $x^3 + px = q$ det skräckinjagande uttrycket

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

Eftersom del Ferro har satt $p > 0$ och $q > 0$ är det uppenbart att uttrycket för x alltid kommer att vara reellt. Men! Till en tredjegradsekvation finns det ju tre rötter. Vi ska nu se visa att det alltid finns en reell positiv rot och två komplexa rötter till del Ferros tredjegradsekvation. (Nahin, s. 8-10)

Vi tittar på ett par exempel:

$$x^3 + 9x = 26$$

I det här fallet är $p = 9$ och $q = 26$. Vi sätter in det i formeln:

$$x = \sqrt[3]{13 + \sqrt{\frac{26^2}{4} + \frac{9^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{26^2}{4} + \frac{9^3}{27}} - 13}$$

Och får:

$$x = \sqrt[3]{13 + \sqrt{196}} - \sqrt[3]{\sqrt{196} - 13} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1} = 2$$

Men $x = 2$ är bara en av de tre lösningarna. För att hitta de andra två använder vi oss av lite moderna metoder och faktorerar vi polynomet $x^3 + 9x - 26 = 0$. Och eftersom

$x^3 - px - q$ är delbart med $x - r_1$, $(x - r_1)(\text{andragradsuttryck}) = 0$, utför vi en

polynomdivision $\frac{x^3 + 9x - 26}{x - 2}$ och kommer fram till att svaret blir $x^2 + 2x + 13$. Alltså

kan vi faktorisera:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 13) = 0$$

och löser ekvationen $x^2 + 2x + 13 = 0$.

Vi kvadratkompletterar och kommer fram till två lösningar:

$$x^2 + 2x = -13$$

$$x^2 + 2x + 1 = -12$$

$$(x + 1)^2 = -12$$

$$x + 1 = \sqrt{-12} = 2i\sqrt{3}$$

Eller

$$x+1=-2i\sqrt{3}$$

Alltså är de komplexa lösningarna:

$$x=2i\sqrt{3}-1$$

$$x=-2i\sqrt{3}-1$$

Vi kikar på ett annat:

$$x^3+3x=14$$

Vi sätter in $p=3$ och $q=14$ i formeln:

$$x=\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{14^2}{4}+\frac{27}{27}}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{14^2}{4}+\frac{27}{27}}-7}$$

$$x=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}-\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}$$

$$x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

Vi står nu inför problemet att hitta kubikrötterna ur dessa irrationella tal. Vi löser det på följande sätt. Om vi sätter $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$ och därefter upphöjer båda sidor till 3, får vi

$$7+5\sqrt{2}=(a+b\sqrt{2})^3$$

$$7+5\sqrt{2}=a^3+2\sqrt{2}b^3+3\sqrt{2}a^2b+6ab^2$$

Vilket är detsamma som

$$7+5\sqrt{2}=a(a^2+6b^2)+b(2b^2+3a^2)\sqrt{2}$$

Om vi sedan separerar de rationella och irrationella delarna och skriver som

$$7=a(a^2+6b^2)$$

$$5=b(2b^2+3a^2)$$

Vi kan sedan prova oss fram, men eftersom både 5 och 7 är primtal och bara delbara med sig själva och 1 måste både a och b vara lika med 1 (om vi förutsätter att a och b är heltal). Alltså, $a=1$ och $b=1$. På liknande sätt hittar vi sedan den andra kubikroten,

$$-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

Det ger oss, från

$$x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=(a+b\sqrt{2})-(b\sqrt{2}-a)$$

$$x=1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=2$$

Nu vet vi alltså att $x=2$ är en lösning. Vi utför en polynomdivision

$\frac{x^3+3x-14}{x-2}=x^2+2x+7$ och faktorerar sedan polynomet för att hitta resterande två lösningar.

$$(x-2)(x^2+2x+7)=0$$

Vi löser ekvationen $x^2+2x+7=0$ med hjälp av pq-formeln

$$x=-1\pm\sqrt{-6}$$

$$x=-1+\sqrt{-6}=i\sqrt{6}-1$$

$$x=-1-\sqrt{-6}=-i\sqrt{6}-1$$

Vi tittar på ett tredje:

$$x^3+3x=15$$

Vi sätter in $p=3$ och $q=15$ i formeln:

$$x=\sqrt[3]{\frac{15}{2}+\sqrt{\frac{15^2}{4}+\frac{27}{27}}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{15^2}{4}+\frac{27}{27}}-\frac{15}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{15}{2}+\sqrt{\frac{229}{4}}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{229}{4}}-\frac{15}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{15+\sqrt{229}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{229}-15}{2}}\approx 2,06496$$

De komplexa rötterna vill vi inte ens titta på...

Del Ferro letade dock inte efter flera rötter. Han var bara intresserad av att hitta en enda reell, positiv rot – lösningen på tredjegradsekvationen kort och gott. Negativa tal var länge förknippat med misstänksamhet och de accepterades till en början inte som möjliga lösningar på problem. Tänk då på hur $\sqrt{-1}$ måste ha uppfattats.

Vi pausar beräkningarna med en trevlig liten historia. Till skillnad från idag, när vissa matematiker livnär sig på att publicera sina resultat, var det tradition att hålla sina lösningar hemliga. Matematikerna på del Ferros tid visade nämligen sina kunskaper bland annat genom att utmana varandra i offentliga tävlingar i problemlösning. Vinnaren tog hem allt – ära, berömmelse och alla prispengar. Chansen att vinna sådana tävlingar förstärktes givetvis av att veta hur man löser problem som andra inte kunde lösa.

Även del Ferro hemlighöll sin lösning, in i det sista. Till slut, när han låg för döden, avslöjade del Ferro tredjegradslösningen för sin elev Antonio Maria Fior. Detta gjorde att Fior, som egentligen inte var någon särskilt vass matematiker, vågade utmana Niccolo Fontana (1500-1577), en bättre och mer känd matematiker, i en problemlösningstävling. Fior hade

uppmärksammat Fontana eftersom han nyligen meddelat att han kunde lösa tredjegradsekvationer av den allmänna formen $x^3 + px^2 = q$. Fior trodde dock att Fontana bluffade och såg honom därför som ett lätt offer med sina nyvunna kunskaper.

Det var mycket riktigt en bluff! Fontana, idag mer känd som Tartaglia ("den stammande"), misstänkte att Fior hade fått tredjegradslösningen av del Ferro och att det var det han skulle utmanas i. Därför satte han igång och försökte lösa den reducerade tredjegradsekvationen. Dagen innan tävlingen lyckades han och det slutade med att Tartaglia satte Fior på pottan och vann tävlingen. Även han hade för avsikt att hålla sin lösning hemlig.

Nyheten om Tartaglias tredjegradslösning nådde snabbt Girolamo Cardano (1501-1576). Cardano var en mycket framstående matematiker och hade ett stort intellekt. När han fick höra om Tartaglias hemliga lösning blev han genast nyfiken och försökte få honom att avslöja den. Efter att inledningsvis ha vägrat, gav Tartaglia till slut upp och avslöjade formeln för lösningen. Detta med ett tysthetslöfte från Cardano. (Nahin, s. 14 f)

Cardano var inte ett helgon men han var inte heller en skurk. Han hade säkert för avsikt att fullfölja sitt tysthetslöfte men han fick snart höra att Tartaglia inte var den första att lösa reducerade tredjegradsekvationer. Efter att ha fått se del Ferros arbete kände sig Cardano inte längre skyldig att hålla lösningen hemlig. Han härledde Tartaglias lösning för sig själv och publicerade den i sitt verk *Ars Magna* 1545. I denna bok gav han både Tartaglia och del Ferro erkännande men Tartaglia kände sig ändå kränkt och han anklagade Cardano för plagiat. Även om Tartaglia och del Ferro faktiskt erkändes som de sanna oberoende upptäckarna av lösningen har den kallats Cardanos formel efter hans publikation i *Ars Magna*.

Det Cardano visade var i själva verket hur man kan utvidga lösningen på den reducerade tredjegradsekvationen till alla tredjegradskurvor och detta var en stor framgång i sig. Vi tittar på hur det kan ha sett ut om Cardano räknade på det idag.

Vi startar med en allmän tredjegradsekvation, $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, och gör sedan substitutionen $x = y - \frac{1}{3}a_1$, detta i avsikt att reducera bort andragradstermen. När vi stoppar in detta i den allmänna tredjegradsekvationen, utvecklar och samlar termerna får vi

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right)y = \frac{-2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_2a_1 - a_3$$

Denna ekvation är på formen $y^3 + py = q$ där

$$p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2$$

$$q = \frac{-2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_2a_1 - a_3$$

Den reducerade tredjegradsekvationen kan nu lösas med Cardanos formel. Till exempel, om vi börjar med $x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = 0$, och sedan gör Cardanos förändring av variabeln $x = y + 5$, får vi

$$(y+5)^3 - 15(y+5)^2 + 81(y+5) - 175 = 0$$

När vi har utvecklat och samlat ihop termerna får vi $y^3 + 6y = 20$, vilket ger den reella lösningen $y = 2$. Alltså är $x = 7$. Så det ser ut som om problemet med tredjegradsekvationen äntligen har lösts. Men Cardano visste att det fanns mer att undersöka. Vi tittar tillbaka på lösningen på $x^3 + px = q$, då p och q var positiva:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

Cardano löste även ekvationen $x^3 = px + q$ på liknande sätt. Idag är vi mer avslappnat inställda till negativa tal, och kan göra det lite snabbare genom att sätta $p = -p$ (p i sig är positiv). Då får vi Cardanos andra formel:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

Om $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ innehåller formeln kvadratroten ur ett negativt tal.

Cardano var förbryllad över de fall då det blir något negativt under rottecknet. Bland annat i ett berömt problem i sitt verk *Ars Magna*: "Dela tio i två delar, vars produkt är 40.". Han påstår till en början att problemet är omöjligt att lösa eftersom man omedelbart stöter på svårigheter, då produkten maximalt kan vara 25. Problemet leder även till ekvationen

$x^2 - 10x + 40 = 0$, en ekvation med komplexa rötter: $x = 5 + \sqrt{-15}$ samt $x = 5 - \sqrt{-15}$. Deras summa är naturligtvis tio eftersom de imaginära delarna tar ut varandra, men vad är produkten?

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - \sqrt{-15}^2 = 25 + 15 = 40$$

Cardano menade att om bara hanterade $\sqrt{-15}$ som vilket tal som helst skulle det gå fint att utföra beräkningen. Men i det här fallet tar ju produkterna ut varandra, så Cardano behövde egentligen inte fundera särskilt mycket kring $\sqrt{-15}$. (Nahin, s. 16 f)

Någon som funderade kring tal som $\sqrt{-15}$ var Cardanos efterföljare Rafael Bombelli (1526-1572). Bombelli var en italiensk ingenjör, idag känd som en expert inom algebran. Han försökte reda ut det som Cardano inte riktigt lyckades med: att förklara lösningarna med kvadratrötter ur negativa tal.

I sitt verk *Algebra* från 1572 presenterar Bombelli tredjegradsekvationen $x^3 = 15x + 4$, till vilken man ganska fort kan finna lösningen $x = 4$. Det är troligt att Bombelli valde en

ekvation med en heltalslösning för att se hur Cardanos formel fungerade. Han var nog nyfiken på hur $x=4$ kunde uttryckas.

Vi använder faktorisering för att visa att de andra två lösningarna till $x^3=15x+4$ är $x=-2\pm\sqrt{3}$. Samtliga tre lösningar är reella.

Vi kikar på Cardanos andra formel då $p=15$ och $q=4$:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}}$$

Eftersom $\frac{q^2}{4}=4$ och $\frac{p^3}{27}=125$ får vi

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Cardanos formel ger en lösning som är summan av kubrötterna av två komplexa konjugat. Cardano kallade dem frustrerat för irreducibla och funderade inte mer på den saken. Han kunde inte förstå hur man skulle beräkna kubroten ur ett komplext tal och hans beräkningar gick bara runt i cirklar - det var förmodligen därför han kallade dem irreducibla. Problemet är alltså tillbaka där vi startade: hur beräknar man något sådant? Vad gör man med det? Om Cardanos lösning är reell måste $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ och $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ vara komplexa konjugat. Så om a och b är två godtyckliga reella tal tänkte Bombelli att man kanske skulle kunna skriva

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+b\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-b\sqrt{-1}$$

Detta påminner ju om det vi gjorde tidigare, då vi bestämde kubikroten ur ett irrationellt tal. Det vi får den här gången är $x=2a$, vilket är reellt. Det första av dessa två påståenden säger att

$$2+\sqrt{-121}=(a+b\sqrt{-1})^3$$

Och av $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$, med $m=a$ och $n=b\sqrt{-1}$, får vi

$$(a+b\sqrt{-1})^3=a^3-b^3\sqrt{-1}+3ab\sqrt{-1}(a+b\sqrt{-1})=a^3-b^3\sqrt{-1}+3a^2b\sqrt{-1}-3ab^2=a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}$$

Om det här uttrycket är lika med det komplexa talet $2+\sqrt{-121}$ och vi separerar de reella och imaginära delarna får vi

$$a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}=2+\sqrt{-121}$$

$$a(a^2-3b^2)=2$$

$$b(3a^2-b^2)=11$$

Om vi antar att a och b båda är heltal kan vi se att $a=2$ och $b=1$ fungerar i båda villkoren. Bombelli provade att stoppa in dessa och fick

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-b\sqrt{-1} \quad \square \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+b\sqrt{-1} \quad \square \quad \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$

Vilket ger

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

Med dessa resultat kunde Bombelli visa att lösningen till Cardanos mystiska formel är

$x=4$ (när $a=2$ och $b=1$). Att något så, till synes, avancerat uttryck kan sluta med en så simpel lösning som $x=4$, är lite häpnadsväckande. Man kan misstänka att Bombelli hade en hel del tur när han utförde beräkningen, men det visar ju sig vara framgångsrikt att våga prova sig fram. Det ska jag försöka ta fasta på! Poängen är att vi på vägen mot lösningen var tvungna att applicera algebraiska räkneregler för tal som $\sqrt{-1}$. Det här var Bombellis sätt att acceptera komplexa tal, de hjälpte honom att få reella lösningar till tredjegradsekvationer. (Nahin, s. 18 ff)

2.2 Tysken fyller på

Ungefär 100 år efter Bombellis utläggning om hur Cardanos formel fungerar för de mer kluriga fallen, blev den unge Gottfried Leibniz (1646-1716) på något sätt övertygad om att problemet fortfarande stod öppet. Leibniz var väl bekant med Bombellis *Algebra* men tyckte att det fanns saker att tillägga. Han spenderade därför en hel del tid för att förstå betydelsen av komplexa tal och hur man kan behandla dem.

På den här tiden brevväxlade vetenskapsmän ofta med varandra. Det var ett enkelt sätt att få snabb respons på sina lösningar och upptäckter. En sådan kontakt höll Leibniz med Christian Huygens (1629-1695), holländsk vetenskapsman. I breven som skickats dem emellan kan man bland annat läsa Leibniz's kommentarer på Bombellis arbete. I ett av dem presenterar han bland annat sitt berömda resultat

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6} \quad ,$$

med kommentaren ” Jag minns inte att jag har noterat ett mer unikt och paradoxalt faktum i all analys, ty jag tror att jag är den förste att ha reducerat irrationella rötter, imaginära till formen, till reella värden ...” (Naturligtvis var det Bombelli som var först med ett sekel.).

Han fann detta häpnadsväckande och efter hans död hittade man opublicerade papper med flera sådana uttryck. Det såg ut som han hade räknat i all oändlighet utan att ge upp. Lösandet av tredjegradsekvationerna $x^3-13x-12=0$ och $x^3-48x-72=0$ ledde honom till

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}=4$$

och

$$\sqrt[3]{36+\sqrt{-2800}}+\sqrt[3]{36-\sqrt{-2800}}=-6$$

Som är två av de sex lösningar vi får av de båda tredjegrads ekvationerna. Leibniz menade att svårigheten med Cardanos formel uppstår när tredjegrads ekvationen har tre reella rötter.

(Nahin, s. 24 ff, McClenon, s. 369 f)

Hur kan det vara så att en reell kvantitet, en rot till den nyss nämna ekvationen, uttrycks med imaginära inslag? För det är anmärkningsvärt att, som beräkningen visar, de här imaginära inslagen bara dyker upp från de här tredjegrads ekvationerna som inte har några imaginära rötter. Den här konstigheten var för mycket för många, de påstodde helt enkelt att Cardanos formel fallerar i det här fallet. Leibniz däremot, försökte gå till botten med problemet och blev ledd till lösningen genom ett liknande problem, av vilket vi saknar en del information. Vi ska titta på hur han gjorde.

Problemet ledde till två ekvationer, $x^2+y^2=b$ samt $xy=c$ (där $c>b$), varav

$$x^2=\frac{c^2}{y^2}$$

och

$$\frac{c^2}{y^2}+y^2=b$$

$$y^4-by^2+c^2=0$$

$$y^2=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}$$

$$y=\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$$

Substituera värdet på y^2 i $x^2+y^2=b$, vilket ger

$$x^2-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}=0$$

$$x=\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$$

Men i det här fallet var det känt att c var större än b och därför var $\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}$

imaginärt. Han visste att summan av $x+y$ var ett reellt tal och lika med en given sträcka d , vilket förbryllade honom, eftersom han från den föregående beräkningen hade härlett

$$d = x + y = \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}.$$

Han kunde inte förstå hur en reell rot kunde uttryckas med inblandning av komplexa tal och gick på nytt igenom sina beräkningar på jakt efter felaktigheter. Detta var helt meningslöst för resultatet han kom fram till var alltid detsamma. Till slut provade han följande matematiska operation:

Vi utgår från d , se ovan. Kvadrera båda sidor.

$$d^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} + 2c$$

Därför följer att $d^2 = b + 2c$ och $d = \sqrt{b + 2c}$. Likställ de båda värdena på d

$$\sqrt{b + 2c} = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$$

Om vi sätter $b = 2$ och också $c = 2$, $b = c = 2$, blir resultatet

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$$

Leibniz trodde att han var först med detta, att reducera komplexa rötter till reella. Han fortsätter med att applicera den här operationen på Cardanos formel. Först utvidgar han föregående beräkningar med kvadratrötter till att innefatta kubrötter och ett tu tre – konstigheterna försvinner. Leibniz visar ett exempel när ett negativt tal, -6 , är roten till tredjegradekvationen $x^3 - 48x - 72 = 0$ och fastställer det faktum att

$$\sqrt[3]{-36 + \sqrt{-2800}} + \sqrt[3]{-36 - \sqrt{-2800}} = -6.$$

Han tar tjuren vid hornen och stoppar in uttrycket för x , enligt Cardanos formel, i $x^3 - 48x - 72 = 0$ och visar, genom att kubera uttrycken i Cardanos formel rent allmänt, således att ekvationen stämmer. (McClenon, s. 371 ff)

Leibniz menade att svårigheten med Cardanos formel uppstår när tredjegradekvationen har tre reella rötter. Idag kan vi analysera detta på följande vis. Vi utgår från ekvationen

$x^3 = px + q$, där p och q är positiva reella tal. Sedan sätter vi $f(x) = x^3 - px$, $f(x)$ är alltså lika med $-q$. Om vi skissar grafen kommer vi se att funktionen har tre nollställen; 0 och $\pm\sqrt{p}$. Vi kan även se två vändpunkter, M och $-M$.

Om $q = 0$ har funktionen tre reella rötter, precis de som vi precis nämnde; 0 och $\pm\sqrt{p}$. Om q blir större eller mindre än 0 förflyttar sig q , jämförelsevis, uppåt eller neråt i koordinatsystemet. Om vi låter q växa litegrann har vi fortfarande tre rötter. Men låter vi q växa till sig ytterligare får vi bara två rötter, och till slut endast en. Vi kan säga att precis när $q = M$ har vi två rötter. Observera att av de tre reella rötterna är endast en positiv och det var just denna positiva som intresserade Bombelli.

Vi tar reda på för vilka q det finns tre rötter. Detta kan vi göra genom att ta reda på kurvans vändpunkt, M , och det är ju där derivatan är lika med 0. Vi har alltså

$$f(x) = x^3 - px$$

$$f'(x) = 3x^2 - p$$

Och $f'(x) = 3x^2 - p$ har rötterna $\pm \sqrt{\frac{p}{3}}$. Men det är bara den negativa roten vi bryr oss

om just nu, alltså $-\sqrt{\frac{p}{3}}$. Och för att ta reda på M , som ju var vårt huvudmål, stoppar vi

in $x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$ i ekvationen.

$$f(x) = y = x^3 - px$$

$$y = M$$

$$M = \left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 - p\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right) = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Som vi tidigare sa har vi tre rötter till ekvationen då $0 \leq q < M$ och i det här fallet

$0 \leq q < \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$. Den högra olikheten kan skrivas om:

$$q < \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$q^2 < \frac{4p^2}{9} \cdot \frac{p}{3}$$

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

Och det är ju precis när vi kommer till $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ vi får problem i Cardanos formel.

4 Historia - Den geometriska tolkningen av $\sqrt{-1}$

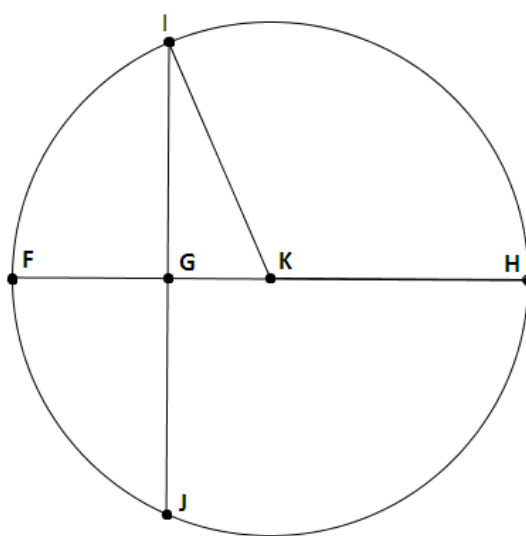
Trots Bombellis framgångar med att förklara $\sqrt{-1}$ saknades det fortfarande en fysisk tolkning. Matematiker på 1500-talet var bundna till den grekiska traditionen av geometri. De var vana vid storheter som area och sträcka och kände sig därför obekväma med att inte kunna ge någon geometrisk tolkning till tal som $\sqrt{-1}$. Därför skriver Euler i sin Algebra från 1770 att alla sådana uttryck eller tal, som t.ex. $\sqrt{-1}$, följaktligen är omöjliga eller imaginära. ”Detta eftersom de representerar rötter ur negativa kvantiteter och sådana tal,

ansåg Euler, kan vi försäkra oss om att de varken är ingenting och inte heller större eller mindre än ingenting.”

4.1 Descartes

Inga sådana "negativa" känslor riktades mot kvadratrötter av positiva tal men detta berodde troligen på att man åtminstone delvis kunde ge en geometrisk tolkning av dem. En av dem som gav sig i kast med att försöka skapa en geometrisk tolkning var René Descartes (1596-1650), fransk matematiker och filosof.

Följande konstruktion är en fri tolkning av den som ges av René Descartes (1596-1650) i hans *La Geometrie* från 1637. Antag att GH är ett givet linjesegmentet som visas i figuren nedan, och problemet är att konstruera ett annat linjesegment med längden $\sqrt{GH}$.



Vi utvidgar GH till F , där FG är en längdenhet. Sålunda är $FH = FG + GH = 1 + GH$. Därefter finner vi K , mittpunkten av FH . Genom att sedan använda K som centrum, konstruerar vi en cirkel med radien $KH = FK$. Slutligen, vid G , drar vi en vinkelrät linje som skär halvcirkeln vid I och J (så $IK = KH = FK$).

Med hjälp av Kordasatsen kan vi skriva

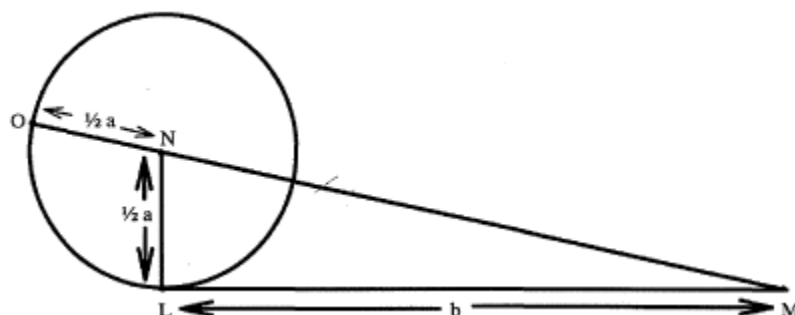
$$FG \cdot GH = IG \cdot GJ = IG^2$$

$$1 \cdot GH = IG^2$$

Alltså, $\sqrt{GH} = IG$. (Descartes, s. 12 f, Nahin, s. 31 f)

Den här konstruktionen hanterar kvadratrötter av positiva längder. Men vad kunde kvadratroten av ett negativt tal betyda geometriskt? Enligt Descartes var det fullständigt omöjligt att göra en geometrisk konstruktion. För att se hur Descartes tänkte när han påstod

att en geometrisk tolkning av imaginära tal var en omöjlighet, ska vi titta på hur han löser andragradsekvationer med hjälp av geometriska konstruktioner (från *La Geometrie*).



Han började med ekvationen $z^2 = az + b^2$, där a och b^2 är positiva, och som han antog vara längderna av två givna linjesegment (se ovan). Anta att LM är lika med kvadratroten av den givna b^2 . Anta också att $LN = \frac{1}{2}a$ och att LN är vinkelrät mot

LM . Därefter konstruerar han cirkeln med radien $\frac{1}{2}a$, med N som mittpunkt. Dra linjen NM och slutligen: förläng NM så den skär andra sidan av cirkeln, i O . Då är det direkt uppenbart att

$$OM = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$$

som är den positiva algebraiska lösningen till $z^2 = az + b^2$. Sålunda har Descartes konstruerat en geometrisk lösning till andragradsekvationen. Den här konstruktionen fungerar alltid, för alla givna positiva värden för a och b^2 . Notera att Descartes ignorerar den

andra lösningen, $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$, vilken är negativ för alla positiva a och b^2 .

Hans anledning till detta var, som tidigare nämnt, att matematikerna på hans tid inte accepterade sådana falska rötter, som Descartes kallade dem.

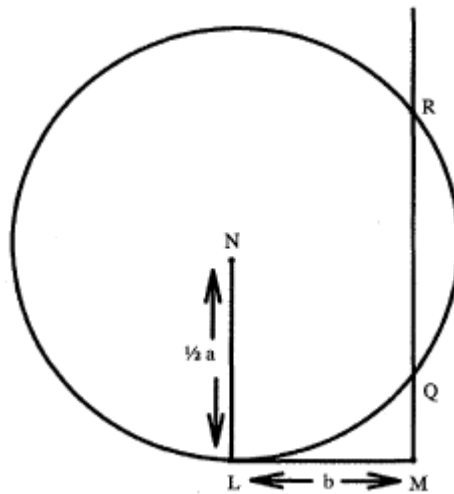
Descartes behandlade också $z^2 = az - b^2$. Den algebraiska lösningen till denna ekvation är

$$z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

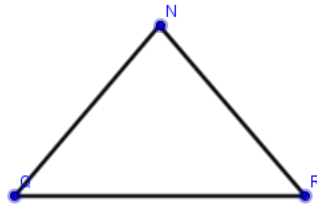
Nu kan vi få rötter med negativa tal under rottecknet, även med a och b^2 begränsade till att vara positiva. Descartes utforskade de geometriska konsekvenserna av den här

möjligheten. Han började, som tidigare, med linjesegmenten $LN = \frac{1}{2}a$ och $LM = b$ (se nedan). Men istället för att sammankoppla N och M , drog han en vinkelrät linje från

M . Sedan, med N som mittpunkt, ritade han en cirkel med radien $\frac{1}{2}a$. De två punkterna där cirkeln skär den vinkelräta linjen från M , definieras som Q och R .



Descartes observerade då att de två linjesegmenten MQ och MR är de två lösningarna till ekvationen, om de existerar (linjerna eller lösningarna?). Vi ska försöka visa att MQ och MR verkligen är lika med två värden på z som ges ovan. Titta på triangeln NQR och använd Pythagoras sats för att hitta QR :



$QN = NR = \frac{1}{2}a$. Vi delar sträckan QR i två lika delar och kallar varje del för x ,
 $QR = 2x$. Då har vi:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b^2 + x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{4}a^2 + b^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

$$QR = 2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

Sen ser vi att

$$MQ = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

$$MR = MQ + QR = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} + 2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

Vad drar Descartes för slutsats av allt detta? I slutet av sin analys skrev han "Och om den cirkel som beskrivs om N och passerar genom L varken skär eller berör linjen MQR har ekvationen inte någon rot (reell rot, skulle Descartes ha sagt)."

Följaktligen utesluter Descartes frågan om en dubbelrot, när han inte tillåter cirkeln bara beröra den vinkelräta linjen, d.v.s. att låta R och Q vara samma punkt. Lägg märke till att, för att det inte ska finnas någon skärningspunkt alls, gäller det geometriska villkoret att

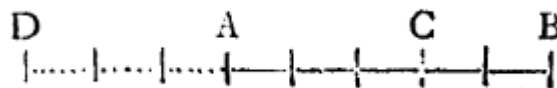
$b > \frac{1}{2}a$. Detta är även förutsättningen som ger komplexa icke-reella rötter till

andragradsekvationen. Descartes ignorerar helt ekvationen $z^2 + az + b^2 = 0$ eftersom den aldrig har positiva rötter om a och b^2 båda är positiva. (Descartes, s. 14 ff, Nahin, s. 34 ff)

4.2 Wallis

Jaha, men $\sqrt{-1}$ då? Vi har fortfarande inte kommit fram till någon passande geometrisk tolkning. Trots Descartes skepsis kring komplexa tal och dess geometriska tolkning, tänkte en yngre matematiker att det åtminstone måste finnas något som skulle kunna representera $\sqrt{-1}$. Denne yngre matematiker var John Wallis (1616-1703), som till en början mest studerade aritmetik som en "behaglig förströelse under lediga timmar". Wallis gjorde snabba framsteg och kring 1647 hade han kommit så långt att han kunde härleda Cardanos formel för sig själv.

Som en upptakt till hans analyser av kvadratroten ur ett negativt tal, inledde Wallis sin *Algebra* med att konstatera att negativa tal i själva verket har en fullständigt klar fysisk tolkning. Han funderar kring positiva och negativa tal och deras förhållande till varandra. (Nahin, s. 40 ff) Vi tittar på några av hans exempel. Anta att en man avancerat (från A till B) 5 yards och sedan backar (från B till C) 2 yards. Hur långt har han då avancerat när han står vid C? Wallis kom fram till att mannen hade avancerat 3 yards (eftersom $5 - 2 = 3$).



Men om han har avancerat 5 yards till B och sen backat 8 yards tills D, hur långt har han då avancerat (när han står vid D)? Wallis finner att svaret är -3 yards (eftersom $5 - 8 = -3$). Det vill säga, han har avancerat 3 yards mindre än ingenting. Vilket det såklart inte kan vara, eftersom inget kan vara mindre än ingenting. Så på linjen AB fungerar inte det här. Men om vi förlänger linjen bakåt från A finner vi punkten D, 3 yards bakom A.

Därmed kan man säga att han avancerat -3 yards. Idag säger vi snarare att han har backat 3 yards eller att han behöver röra sig 3 yards framåt för att stå vid A. Och därmed är det -3 som definierar punkten D, som 3 definierar punkten C. Så 3 betyder 3 yards framåt, och -3 betyder 3 yards bakåt: men fortfarande på samma raka linje.

Vad som gäller för linjer, måste på samma sätt gälla i plan. Vi tittar på ett annat av Wallis exempel. Om vi antar att vi på ett ställe får 30 acres, men på ett annat ställe förlorar 20 acres. Om vi nu frågar oss hur många acres vi har fått är svaret 10 acres (eftersom $30 - 20 = 10$), vilket är 1600 Square Perches (ett gammalt engelskt areamått). En acre är nämligen lika med ett plan med längden 40 Perches och bredden 4 Perches, vars area är 160. Så 10 acres är 1600 Square Perches, som i formen av en kvadrat har sidan 40 eller -40 Perches. Wallis erkänner alltså den negativa roten. Om vi sedan förlorar ytterligare 20 acres, och återigen frågar oss hur många acres vi har fått, måste svaret vara -10 acres ($30 - 20 - 20 = -10$). Det är alltså en förlust med 10 acres, eller 1600 Square Perches.

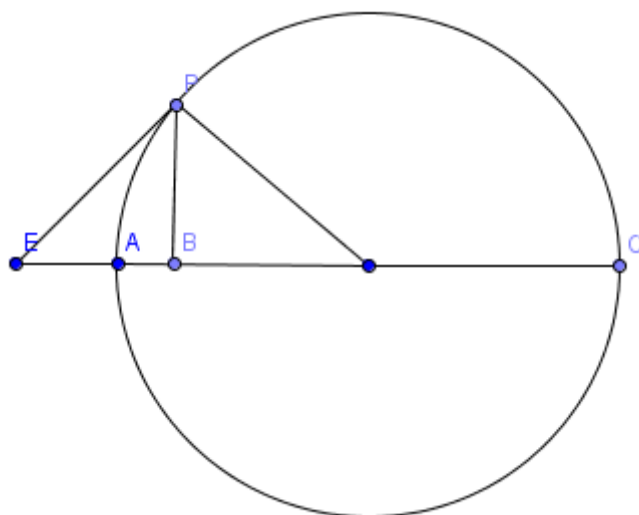
Och hittills har det inte uppstått några nya svårigheter. Men om vi antar att det här negativa planet på -1600 Square Perches har formen av en kvadrat, får man ju anta att kvadraten har en sida. Vad skulle denna sida vara i så fall? Vi kan inte säga att den är 40 och inte heller -40. Wallis menade att sidan snarare är $\sqrt{-1600}$.

Han hade alltså en idé om en linje där en viss punkt markeras som nollpunkten. Vidare förklarade Wallis att ett positivt tal betyder avståndet mätt från nollpunkten till höger, och att ett negativt tal betyder avståndet mätt från nollpunkten till vänster. Han funderade även kring sträckor med längden " $\sqrt{-x}$ ". När den fysiska tolkningen av negativa tal därmed var "avklarad", satte han tänderna i nästa, lite mer avancerade problem. Det var med den här konstruktionen, som han bokstavligen började röra sig i rätt riktning för att låsa upp den geometriska hemligheten med $\sqrt{-1}$. (Wallis, s. 264 ff, Pycior, s. 131)

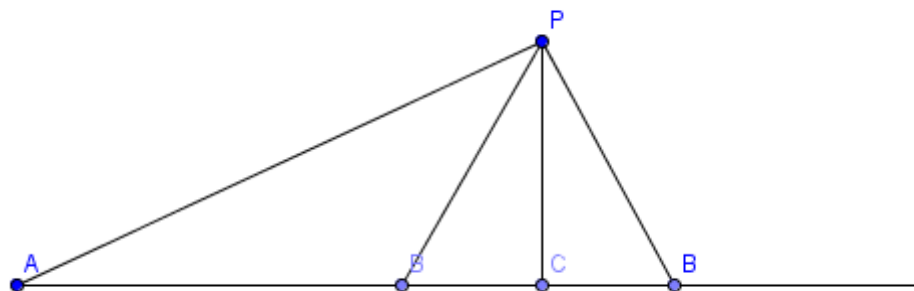
Wallis inledde genom att bland annat behandla nedanstående figur. Han lekte med Pythagoras sats och med tanken på att sträckor kunde vara både positiva och negativa, t.ex.

$$\sqrt{256} = \pm 16.$$

Wallis hade snubblat på tanken att den geometriska tolkningen av imaginära tal, på något sätt, skulle kunna vara vertikala rörelser i planet. Dessa tankar var ganska virriga och ledde egentligen ingen särskild vart. Vi ska i alla fall titta litegrann på vad han sysslade med.



Se ovanstående bild. Wallis ansatte ("framåt" från A) $AB=b$ och $BC=c$, vilket ger oss $AC=AB+BC=b+c$ och det geometriska medelvärdet $BP=\sqrt{bc}$. Han satte också ("bakåt" från A) $AB=-b$, och sedan framåt från det B :et, $BC=c$. Detta ger oss $AC=AB+BC=-b+c$. Och det geometriska medelvärdet blir $BP=\sqrt{-bc}$.



Anta nu att en triangel står på linjen AC (se ovan), vars ena ben $AP=20$ är given, tillsammans med höjden $PC=12$ och längden av det andra benet; $PB=15$. Med hjälp av detta ska vi hitta längden av basen AB . Detta innebär att kvadraten av AP och PC blir 400 respektive 144 och att differensen blir $(AP)^2 - (PC)^2 = 400 - 144 = 256$, som ju är kvadraten på AC . Och av detta ser vi att $AC = \sqrt{256} = 16$ eller -16 , alltså framåt eller bakåt beroende på om vi tar den positiva eller negativa roten. I det här fallet tar vi den positiva.

Eftersom $(PB)^2 = 225$ och $(PC)^2 = 144$ är $(CB)^2 = 81$ och $CB = \sqrt{81}$, vilket ju antingen är lika med 9 eller -9 . Just nu rör vi oss alltså antingen framåt eller bakåt från C , vilket Wallis menar ger en tvetydig längd av sträckan AB ; $AB = 16 + 9 = 25$ eller $AB = 16 - 9 = 7$ (båda är positiva). Men Wallis menade att man också kunde se det som att $AB = -16 + 9 = -7$ eller $AB = -16 - 9 = -25$ (båda är negativa). Och i den här stilen fortsatte han, men kom tyvärr inte fram till något revolutionerande.

Det skulle ta ytterligare ett århundrade innan den nu "uppenbara" representationen av komplexa tal som punkter i planet, varvid de horisontella och vertikala riktningarna är de reella respektive imaginära riktningarna, skulle komma fram. Men Wallis var mycket nära. (Nära nog att vi i början av 1900-talet finner filosofen Ernst Mach, vars åsikter är kända för att i hög grad ha påverkat Einsteins, skrivande i sitt verk *Space and Geometry* från 1906 om $\sqrt{-1}$ som "en genomsnittlig riktning, proportionell mellan $+1$ och -1 .") Men nära skjuter ingen hare, och Wallis arbete om de komplexa talens geometri är idag ihågkommet endast av historiker. (Nahin, s. 44 ff)

4.3 Wessel

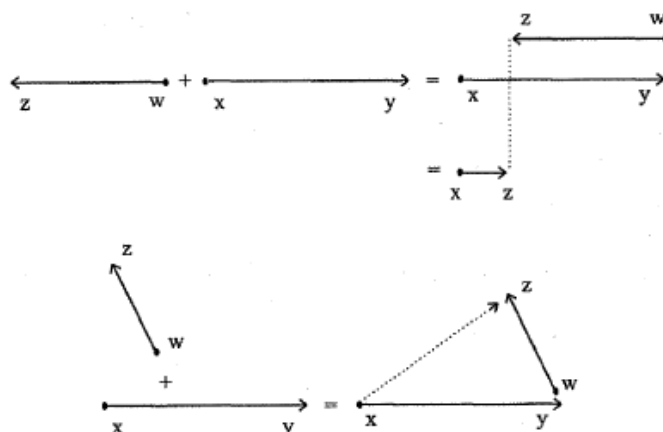
Mer än hundra år senare, efter Wallis tappra men bristfälliga försök att tolka komplexa tal geometriskt, blev problemet plötsligt löst av den norske Kaspar Wessel (1745-1818). Detta är anmärkningsvärt, när man betänker att Wessel inte var någon professionell matematiker, men förståeligt eftersom han arbetade med lantmäteri. Wessels genombrott på ett problem, som förbryllat många skarpa hjärnor, var egentligen ganska naturligt eftersom han dagarna i ända ägnade sig åt att rita kartor och regelbundet stötte på mätdata i form av plana och sfäriska polygoner. Han kom inte från någon familj med matematiktraditioner utan hade bara sitt arbete som inspirationskälla. Trots att Wessel var ett av tretton syskon och den dåliga ekonomin som det måste ha resulterat i, fick han en bra gymnasieutbildning följt av ett år vid universitetet i Köpenhamn.

Trots att han var en respekterad lantmätare, var det lite överraskande att just han presenterade ett arbete med titeln *Om directionens analytiske betegnning, et forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske polygoners opløsning*, för den Kungliga Danske Vetenskapsakademien. Detta skedde år 1797. Det är känt att Wessel fick hjälp att skriva sitt arbete av ordförande för vetenskapssektionen på akademien, men det intellektuella innehållet var helt och hållet Wessels. Dess kvalitet och värde bedömdes vara så hög att det var det första arbetet som accepterats för publicering i Akademiens memoarer 1799, av en författare som inte var medlem av akademien.

Arbetet var skrivet på danska och publicerades i en tidskrift som inte lästes av särskilt många utanför Danmarks gränser och det var därför som "dömt" att inte få något genomslag. Det kom att dröja ända till 1895 innan arbetet återupptäcktes och Wessel äntligen erkändes som den pionjär han var. Äntligen! Även om flera andra, några år efter Wessels arbete, publicerade liknande texter var det ändå Wessel som var först med att finna en tillfredsställande geometrisk tolkning av $\sqrt{-1}$. Vi ska kika på vad han egentligen gjorde för något. (Nahin, s. 48 f)

Ja, hur blev Wessel ledd till det nu vanliga sättet att representera komplexa tal? Jo, han började sitt arbete genom att beskriva det som idag kallas vektoraddition. Det vill säga, om vi har två riktade linjesegment båda ligger utmed x-axeln (men kanske i motsatta riktningar), då kan vi addera dem genom att placera startpunkten för den ena vid ändpunkten av den andra, och summan är resultanten som är det riktade linjesegment som sträcker sig från den initiala punkten för den första linjen till ändpunkten av den andra. Wessel menade att summan av två

icke parallella linjer ska lyda samma regel, och detta förfarande visas i figuren nedan. (Branner & Lützen, s. 72)



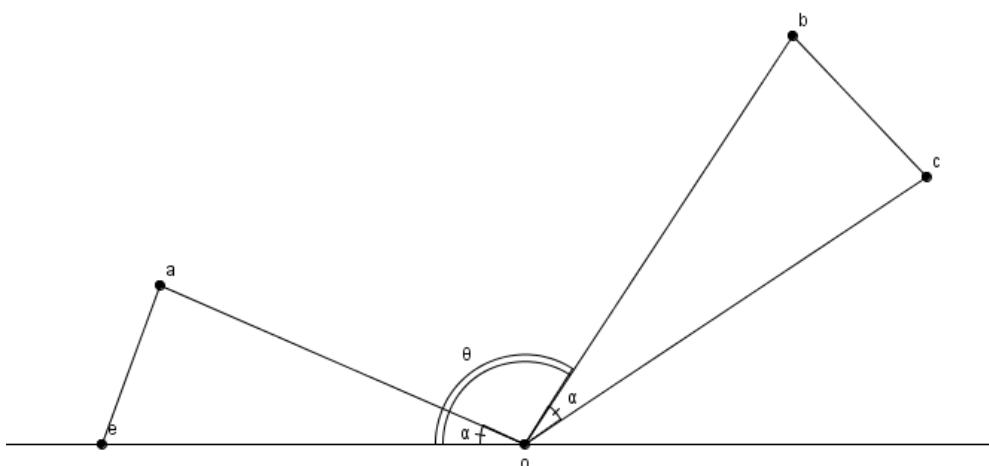
Hittills har Wessel inte kommit med något särskilt nytt. Hans bidrag låg framförallt i hur man kan multiplicera dessa. Det Wessel upptäckte var att man kan multiplicera linjesegment genom att göra en smart generalisering från beteendet av reella tal. Han noterade att produkten av två tal (t.ex. 3 och -2, med en produkt -6) har samma förhållande

till varje faktor som den andra faktorn har till 1. Det vill säga, $\frac{-6}{3} = -2 = \frac{-2}{1}$ och

$$\frac{-6}{-2} = 3 = \frac{3}{1}. \text{ (Nahin, s. 50 f)}$$

Vi tittar på det. Först introducerade han ett enhetssegment, oe . Medan Wessels definition av summan av två riktade linjesegment gäller i den tredimensionella rymden, har han endast definierat multiplikation för linjesegment som är belägna i ett plan som innehåller enhetssegmentet. Låt oa och ob vara två segment och låt oc vara den okända produkten. Wessel krävde att oc skulle vara belägen i det av oa och ob bestämda planet, och dessutom "att produkten av två räta linjer i alla avseenden skulle vara bildad från en faktor på samma sätt som den andra faktorn är bildad av enheten.". (Branner & Lützen, s. 73)

Så, om vi multiplicerar två linjesegment, den ena med vinkeln θ och den andra med vinkeln a , bör "vinkelprodukten" vara summan $\theta + a$, eftersom $\theta + a$ skiljer sig från θ med a (den vinkel a -segmentet skiljer sig från enhetssegmentet) och $\theta + a$ skiljer sig från a med θ (den vinkel θ -segmentet skiljer sig från enhetssegmentet). (Nahin, s. 51)



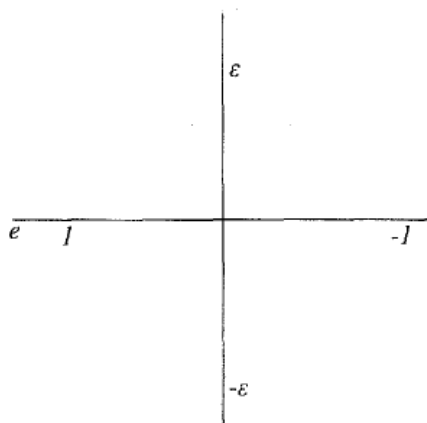
Om vi föreställer oss att oa bildas från oe genom att låta den senare vridas en viss vinkel och genom att låta dess längd multipliceras med ett visst tal, detta leder till slutsatsen att trianglarna oea och obc måste vara likformiga och orienterade på liknande sätt. Detta innebär då $\angle$ betecknar vinkel och $\parallel$ betecknar längd - att

$$\angle eoc = \angle eoa + \angle eob \quad \text{och}$$

$$\parallel oc \vee : \vee ob \vee \parallel \vee oa \vee : \vee oe \vee \parallel \quad \text{eller}$$

$$\parallel oc \vee \parallel \vee oa \vee \cdot \vee ob \vee \parallel$$

Wessel använde just dessa förhållanden för att definiera produkten oc (även om han inte tillämpade tecknet $\parallel \vee \parallel$). Det bör noteras, som Wessel själv gjorde, att när oa och ob har samma riktning som enheten, då motsvarar produkten oc en vanlig produkt av två linjesegment.



För att kunna arbeta med sina linjesegment algebraiskt (och för att kunna multiplicera dem) tog Wessel ett steg som idag verkar naturligt, men som var ganska anmärkningsvärt på sin tid. Han introducerade en andra enhet som han lät definiera med längden 1 och riktning

90° och som han betecknade ε (idag kallar vi den för i). Genom att tillämpa definitionen $\angle eoc = \angle eoa + \angle eob$ fann Wessel att riktningen av $\varepsilon \cdot \varepsilon$ är 180° , som är riktningen på -1 , och från $\angle oc \vee : \vee ob \vee \angle \vee oa \vee : \vee oe \vee \angle$ drog han slutsatsen att $\varepsilon \cdot \varepsilon$ har längden, som är av samma längd som -1 , så att

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = -1 \quad (\text{Branner \& Lützen, s. 73-74})$$

Genom liknande "appliceringar" av villkoren, $\angle eoc = \angle eoa + \angle eob$ och $\angle oc \vee : \vee ob \vee \angle \vee oa \vee : \vee oe \vee \angle$ eller $\angle oc \vee \angle \vee oa \vee \cdot \vee ob \vee \angle$, konstruerade Wessel en multiplikationstabell för 1 , -1 , ε och $-\varepsilon$ och påstod sedan att "av det här följer att $\varepsilon = \sqrt{-1}$ ". Han var alltså medveten om att han hade givit $\sqrt{-1}$ en geometrisk tolkning. (Branner & Lützen, s. 74)

	1	-1	ε	$-\varepsilon$
1	1	-1	ε	$-\varepsilon$
-1	-1	1	$-\varepsilon$	ε
ε	ε	$-\varepsilon$	-1	1
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε	1	-1

Från multiplikationen av "enheterna" gick Wessel vidare mot att finna generella algebraiska uttryck för linjesegment samt en algebraisk multiplikationsregel. Han behandlade både linjesegment med längden 1 och generella linjesegment. Genom att applicera sin definition av addition fann Wessel att ett generellt linjesegment kan skrivas som $a + \varepsilon b$ och när det har riktningen v och längden r kan man skriva

$$\begin{aligned} &v + \varepsilon \sin v \\ &\cos \angle \\ a + \varepsilon b &= r \angle \end{aligned}$$

Och genom att multiplicera $a + \varepsilon b$ med

$$\begin{aligned} &u \\ \cos u + \varepsilon \sin \angle \\ c + \varepsilon d &= r' \angle \end{aligned}$$

Erhöll Wessel resultatet:

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = r r' [\cos(v + u) + \varepsilon \sin(v + u)]$$

Han sökte efter ett mer direkt sätt att beräkna vänsterledet och hittade detta genom att använda sig av additionsformlerna för sinus och cosinus.

$$\cos(v + u) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\sin(v+u) = \cos v \sin u + \cos u \sin v$$

Dessa, tillsammans med $\begin{matrix} v+\varepsilon \sin v \\ \cos \varepsilon \\ a+\varepsilon b=r \end{matrix}$ och $\begin{matrix} u \\ \cos u+\varepsilon \sin u \\ c+\varepsilon d=r \end{matrix}$, tillät honom att skriva om högerledet som

$$(r \cos v \cdot r' \cos u - r \sin v \cdot r' \sin u) + \varepsilon (r \cos v \cdot r' \sin u + r \sin v \cdot r' \cos u) = ac - bd + \varepsilon (ad + bc)$$

Och därigenom hade han bevisat formeln

$$(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon (ad + bc)$$

Det var genom de här geometriska definitionerna Wessel insåg att hans multiplikation följer samma regler som produkten av komplexa tal (när ε behandlas som $\sqrt{-1}$). Dessutom hade han underförstått visat hur komplexa tal, och såväl en summa som en produkt, kan bli tolkade geometriskt. Vilken höjdare han var, den där Wessel! (Branner & Lützen, s. 74 f)

Bara med hjälp av dessa få av Wessels lysande idéer kan vi göra extraordinära beräkningar. Vi kikar lite på det.

Vad är $(0,3+i2,6)^{17}$? Till en början ser det här ut som en helt vedervärdig beräkning som tar halva helgen att utföra. $(0,3+i2,6)^{17}$ betyder $0,3+i2,6$ multiplicerat med sig själv 17 gånger. Istället för att utföra den vansinniga beräkningen lyssnar vi på Wessel, som säger oss att istället höja absolutbeloppet till sjutton och multiplicera argumentet med 17.

Så först måste vi hitta absolutbeloppet. Om z är lika med det komplexa talet $0,3+i2,6$ är absolutbeloppet $|z| = \sqrt{0,3^2 + 2,6^2} = \sqrt{6,85}$. Detta är alltså längden på vektorn. Wessel uppmanar oss att upphöja absolutbeloppet till 17, alltså får vi $\sqrt{6,85}^{17} = 12687319,0$. Längden på vektorn $(0,3+i2,6)^{17}$ är alltså 12687319,0.

Han uppmanar oss även att multiplicera argumentet med 17. Så då tar vi reda på $\arg z$.

$$z = 0,3+i2,6 = r \left(\frac{0,3}{r} + i \frac{2,6}{r} \right) = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\arg z = \alpha$$

Vi har r , radien. $r = |z| = \sqrt{0,3^2 + 2,6^2} = \sqrt{6,85}$.

Så om vi stoppar det vi vet får vi

$$z = \sqrt{6,85} \left(\frac{0,3}{\sqrt{6,85}} + i \frac{2,6}{\sqrt{6,85}} \right)$$

Vilket ger oss

$$\cos \alpha = \frac{0,3}{\sqrt{6,85}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2,6}{\sqrt{6,85}}$$

$$\alpha = 83,4^\circ$$

$$\alpha = \arg z, \quad \arg z \cdot 17 = 83,4^\circ \cdot 17 = 1418,0^\circ$$

$(0,3+i2,6)^{17}$ är alltså ett komplext tal med längden 12687319,0 och vinkeln $1418,0^\circ$. Eftersom vinkeln $1418,0^\circ$ inte säger oss så mycket kan vi subtrahera 360° -bitar av argumentet tills vi kommer till en vinkel mindre än 360° . Vi får således ett argument på $337,8^\circ$. Och slutresultatet blir:

$$(0,3+i2,6)^{17} = 12687319,0 \cdot (\cos 337,8^\circ + i \sin 337,8^\circ)$$

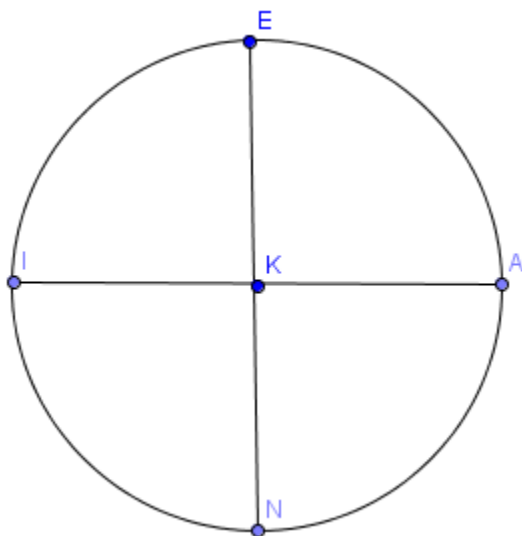
Innan Wessel skulle denna beräkning ha krävt att vi multiplicerade $0,3+i2,6$ med sig själv sjutton gånger och detaljerna skulle ha gjort de flesta helt tokiga. Att Wessel multiplicerade två riktade linjesegment har för oss inneburit en tvåstegsmetod; att multiplicera två längder (längd antas alltid vara ett positivt värde) och addera de två vinklarna. Dessa två operationer bestämmer längd och vinkel på produkten, och det är den här definitionen av en produkt som ger oss förklaringen till vad $\sqrt{-1}$ betyder geometriskt. Wessel krediteras i allmänhet av historiker för att vara först med att associera den vinkelräta axeln mot den reella axeln som axeln för imaginära tal. (Nahin, s. 52)

4.4 Argand

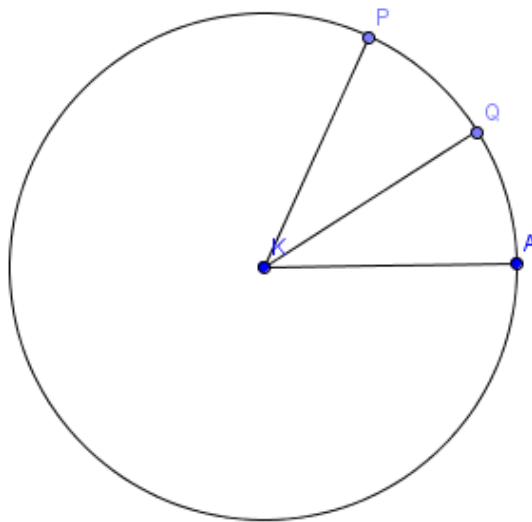
Wessels bidrag var briljant men det var, som sagt, ingen som läste det. Inte förrän det dök upp ur någon unken gammal källare långt senare. Wessel var inte helt ensam om sina idéer och inom ett decennium efter den ursprungliga presentationen av hans arbete var det återupptäckt. 1806 kom det i själva verket ett arbete vars innehåll liknade Wessels komplexa plan och hans imaginära axel. Dess författare var den schweiziske Jean-Robert Argand (1768-1822). I huvudsak är nästan ingenting känt från Argands liv, men han var troligen inte formellt utbildad i matematik. Man vet att han 1806, nästan 40 år gammal, arbetade i det fördolda som bokhållare i Paris. I en rapport, som ett försök att kartlägga Argands liv, sammanfattade Guillaume-Jules Hoüel (1823-1886) med följande ord: "[...] vi ska ha klart för oss att allt vi har kunnat lära oss av denna originelle människa, vars blygsamma liv kommer att förbli okänt, men vars tjänster till vetenskapsmännen Hamilton och Cauchy är värt eftervärldens tacksamhet."

Trots sin förmodligen enkla bakgrund fick Argand sitt arbete om komplexa tal publicerat i en mindre tidskrift år 1806. I detta arbete introducerade han sin idé om absolutbeloppet och komplexa tal som punkter i ett plan $(a+b\sqrt{-1})$. (Nahin, s. 73 f) Argand arbetade precis

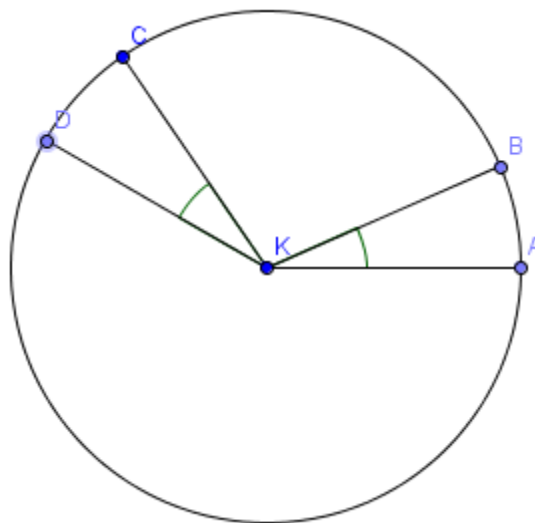
som Wessel med riktade linjesegment. Men medan Wessels syfte var att lära sig räkna med dem, var Argand intresserad av att ge mening åt komplexa tal. Han startade sitt arbete med att påstå att negativa tal ibland bara verkar existera i fantasin men att de kan bli verkliga om man tolkar dem på lämpligt sätt. Argand förstod att sättet att göra dem verkliga bestod i att titta på både deras absolutbelopp och riktning. Detta var hans startidé för att få $\sqrt{-1}$ att krypa fram ur skuggorna.



Han började med att definiera $x = \sqrt{-1}$ med relationen $1 : x = x : (-1)$ och ville visa det här förhållandet geometriskt. Efter det introducerade han en enhetscirkel (se figuren ovan) med K som mitt och två punkter, A och I , så att $K'A = 1$ och $K'I = -1$ och lät $K'E$ vara radien vinkelrät mot $K'A$. I enlighet med detta satte han $K'E = \sqrt{-1}$ och $K'N = -\sqrt{-1}$. Han gick sedan vidare för att visa att ett riktat linjesegment parallellt med KA kan skrivas som $\pm a$, och att ett riktat linjesegment parallellt med KE kan skrivas som $\pm b\sqrt{-1}$. Genom att använda sig av parallelogramregeln för addition kom han fram till att ett riktat linjesegment kan skrivas på formen $\pm a \pm b\sqrt{-1}$. Sedan påstod han omvänt att $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ alltid betyder ett riktat linjesegment. Alltså är $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ något verkligt, eftersom riktade linjesegment finns i verkligheten.



Om Argand bara hade velat visa hur $a+bi\sqrt{-1}$ kan tolkas geometriskt hade han kunnat stanna här, men det gjorde han inte (se figuren ovan). Han fortsatte för att visa en geometrisk tolkning av en produkt av riktade linjesegment och använde sig av att han hade fått $\overline{KE}$ genom att halvera vinkeln $\angle AKI$. Sedan hävdade han följande. För varje given radie $\overline{KP}$ i enhetscirkeln, är radien $\overline{KQ}$ (bestämd av $\angle AKQ = \angle QKP$) ett geometriskt medelvärde mellan $\overline{KA}$ och $\overline{KP}$.



Vidare lät han $\overline{KB}$ och $\overline{KC}$ vara två givna radier i enhetscirkeln. Sedan låter han $\overline{KD}$ vara radien definierad av

$$\angle CKD = \angle AKB$$

Då hävdar han att följande gäller

$$\overline{KA} : \overline{KB} = \overline{KC} : \overline{KD}$$

Han använde det ovanstående förhållandet som hypotes hävda att komplexa tal multipliceras genom att sätta

$$KD = KB \cdot KC$$

Förhållandena $\angle CKD = \angle AKB$ och $KA : KB = KC : KD$ visar att för riktade linjesegment med längden 1, är Argands hypotes av en produkt densamma som Wessels definition. Det finns alltså en väsentlig skillnad mellan Wessels och Argands ansatser.

Wessel och Argand hade inte bara olika syn på definitionen av produkten. De använde dessutom produkten på olika sätt. Som vi har sett använde Wessel sin produkt för att härleda den vanliga algebraiska regeln för att multiplicera uttryck på formen $a + b\sqrt{-1}$. Argand tog den här regeln för givet och använde sin produkt för att härleda välkända satser på ett nytt sätt. (Branner & Lützen, s. 84 ff)

Eftersom Argand förmodligen planerade att ge bort kopior på sitt arbete till vänner och korrespondenter, som ju skulle veta vem författaren var, satte han inte sitt namn på titelbladet. Hans arbete, med titeln *Essay on the Geometrical Interpretation of Imaginary Quantities*, var alltså dömt att försvinna ännu snabbare än Wessels. Men Argand hade tur! En av dem som fått tag i en kopia av hans arbete var den store franske matematikern Adrien-Marie Legendre (1752-1833), som i sin tur nämnde det i ett brev till Francois Francais (1768-1810). Francais var professor i matematik med en militär bakgrund. Han hade en yngre bror, Jacques (1775-1833), i samma militärmatematiska branch. När Francais dog, ärvde Jacques alla handlingar och när han gick igenom den äldre broderns papper fann han Legendres brev från 1806, i vilket Argands arbete beskrivs. Tyvärr fick han inte reda på Argands namn eftersom Legendre inte hade nämnt det i brevet. Stimulerad av de idéer han läst om i denna skrivelse, publicerade Jacques en artikel med de geometriska grunderna av komplexa tal år 1813 i ett nummer av tidskriften *Annales de Mathematiques*. I det sista stycket erkände Francais att han inspirerats av Legendres brev och uppmanade den anonyma författaren, vars arbete Legendre diskuterar, att komma fram. Lyckligtvis fick Argand höra talas om artikeln och hans svar dök upp i nästa nummer av tidskriften. Medföljande Argands svar fanns en kort anteckning från Francais, där han förklarade Argand vara den första att ha utvecklat geometrin kring komplexa tal och att han var glad att få bekräfta detta (man hade naturligtvis inte hört talas om Wessel).

Wessel och Argand dog med bara fyra års mellanrum, utan att ha hört talas om varandras arbete och med större delen av världen ovetandes om båda. I Hoüels nytryck av Argands arbete ingick följande kommentar i det inledande förordet, ord citerat från den nyligen avlidne tyske matematikern Hermann Hankel (1839-1873): "Den första att visa hur man representerar det komplexa talet $a + b\sqrt{-1}$ med punkter i ett plan, och att ge regler för deras geometriska addition och multiplikation, var Argand. Om inte något äldre verk upptäcks, måste Argand betraktas som den sanna grundaren av teorin om komplexa kvantiteter i ett plan.". Två decennier senare, blev naturligtvis Wessels äldre arbete upptäckt. (Nahin, s. 73 f)

4.5 Hamilton

Efter år 1814 drev Argands arbete mot samma glömska som Wessels, och ämnet måste återupptäckas ännu en gång. År 1828 såg ytterligare två arbeten ljuset; ett i Cambridge och det andra i Paris. Dessa publicerades av två herrar, C.V. Mourey respektive pastor John Warren (1796-1852). (Crowe, s. 11) Warrens arbete hade störst effekt bl.a. för hur dess geometriska tillvägagångssätt avvisades av William Rowan Hamilton. Hamilton inspirerades

av Warrens arbete men var övertygad om att han kunde göra det bättre själv. Hamilton (1805-1865) föddes i Dublin, Irland, och när han dog (inte långt från där han föddes) hade han lämnat stora spår inom matematisk fysik. Han hade en ganska udda start, dock. Hamilton ägnade nämligen många av sina tidiga år åt att skaffa sig färdigheter i flera olika språk - latin, grekiska och hebreiska i femårsåldern, och vid nio års ålder hade han bland annat lagt persiska, arabiska och sanskrit till högen. Men till slut blev matematik hans passion och 1824 presenterade han en avhandling om optik för Kungliga irländska Akademin. Akademin hade lite svårt att förstå allt som den fortfarande tonårige Hamilton försökte säga, men 1836 hade han lärt sig att uttrycka sig tillräckligt väl och Royal Society tilldelade honom det året sin Royal Medal för vissa viktiga optiska studier.

Inom matematik skrev även Hamilton ett arbete om komplexa tal. 1829 blev han nämligen uppmanad att läsa Warrens arbete, som publicerades året tidigare. Han gjorde så och avlog genast den geometriska tolkningen av komplexa tal som presenterades. Hamilton ansåg nämligen att algebran - med $\sqrt{-1}$ - var skild från geometrin. Han ansåg snarare att $\sqrt{-1}$ skulle ha en rent algebraisk tolkning. Som han skrev långt senare (1853); "Jag var missnöjd med alla tankar och idéer, som inte gav imaginära tal en tydlig tolkning från början, och önskade att detta borde ha gjorts för kvadratrötter av negativa tal, utan att införa överväganden så uttryckligen geometriska som de som involverar föreställningen/uppfattningen av en vinkel."

Hamilton menade att, precis som geometri är vetenskapen om rymd och precis som vetenskapen hade funnit sitt matematiska uttryck i Euklides Elementa, borde algebra också vara vetenskapen om något i vår fysiska existens. Han bestämde att "något" måste vara tid, en idé han plockade upp från Kants filosofi. Hamilton skulle säkert ha varit mindre självsäker angående detta resonemang om han hade vetat att det inte finns *en* vetenskap om geometri (d.v.s. att Euklides geometri är bara en av många möjliga motsägelsefria geometrier).

I juni 1835 presenterade Hamilton titeln *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time* för den irländska Akademin. I detta arbete definierade han bland annat ordnade par av reella tal, (a, b) och definierade addition och multiplikation av två par enligt följande:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Observera att dessa är definitioner, och kräver ingen ytterligare förklaring. Det är tydligt att Hamilton redan visste att det är så här komplexa tal fungerar. Hans matematiskt "rena och abstrakta" par (a, b) är bara ett annat sätt att skriva $a + ib$. Hamilton, tyckte dock att hans notation såg bättre ut eftersom den undviker användning av absurda $\sqrt{-1}$.

I vilket fall som helst, för att fortsätta med analogin till komplexa tal, skrev Hamilton det

reella talet a som paret $(a, 0)$. Det här är såklart precis vad man gör när man skriver a som den förkortade formen av $a+0\sqrt{-1}$. Så, vi har från definitionen för multiplikation

$$a(c, d) = (a, 0)(c, d) = (ac, ad) \quad \text{och i synnerhet om } a = -1 :$$

$$-1(c, d) = -(c, d) = (-1, 0)(c, d) = (-c, -d) .$$

Nu kikar vi på

$$(0, 1)^2(c, d) = (0, 1)(0, 1)(c, d) = (0, 1)(-d, c) = (-c, -d) = -(c, d)$$

Således är $(0, 1)^2 = -1$ eller, precis som man kan förvänta sig, är $(0, 1) = \sqrt{-1}$. Det bör inte vara någon överraskning att $(0, 1) = i = \sqrt{-1}$, eftersom vi startade med $(a, b) = a + ib$. (Nahin, s. 77 ff)

4.6 Gauss

Vid tiden då Hamilton publicerade sitt arbete hade den geometriska tolkningen redan fått sitt erkännande av den intellektuella jätten Carl Friedrich Gauss (1777-1855). I april 1831, fyra år före Hamilton, hade Gauss redan lagt fram sina egna geometriska idéer om komplexa tal i en memoar till Göttingens Kungliga sällskap. I själva verket hade Gauss haft dessa idéer redan 1796 (före Wessel) och hade använt dem för att reproducera Wessels resultat. Men, som med så många andra av hans geniverk, hade han väntat med att publicera tills han kände att han hade allt "precis rätt".

Gauss förståelse av komplexa (termen komplex är hans) tal utvecklades över tid. Till exempel, under tiden han satt och skrev på sin avhandling ansåg han att det kunde finnas en oändlig hierarki av komplexa tal, d.v.s. att komplexa tal kanske inte är fullständiga. Han kallade dem allt mer komplexa talen "vera umbrae umbra" eller "verkliga skuggor av skuggor." Senare insåg han naturligtvis att så inte är fallet. I hans ära kallas ibland det komplexa planet "Gauss-planet", utom i Frankrike där man är lika benägna att kalla det "Argand-planet". Komplexa tal på formen $a + ib$ när a och b båda är heltal kallas gaussiska heltal. (Nahin, s. 81 f)

Som tidigare nämnt var första gången Gauss uttryckligen nämnde en tolkning av de komplexa talen i en tidskrift år 1831. Även om han menade att han presenterade en geometrisk tolkning av de komplexa talen redan 1799, i hans bevis av den algebrans fundamentalsats, refererade han inte direkt till komplexa tal 1799. År 1831 publicerade han alltså ett arbete, med titeln *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secund*, i vilket han fokuserade på att utöka talteorin till mängden av komplexa tal, $m + ni$, där m och n är heltal.

Han ville ge de komplexa talen en tolkning och funderade kring dem som i ett plan. Genom att begränsa sin undersökning till komplexa tal på formen $m + ni$ introducerade han ett obegränsat rutnät i planet och tänkte sig dessa tal som hörn i rutorna. Han påstod att om man

rör sig till en närliggande punkt betyder det att man, beroende på riktning, adderar $+1, -1, +i$ eller $-i$, och vidare att i kan bli behandlad som ett geometriskt medelvärde mellan 1 och -1 . Gauss arbete är väldigt tunt och beskriver inte hela det komplexa talplanet, med förmodligen bidrog det till det här planet accepterades.

Gauss avslutade sitt arbete genom att lova att återkomma till problemet med de komplexa talen och i samband med det arbeta med frågan om varför de vanliga aritmetiska reglerna inte fungerar i högre dimensioner än två. Gauss publicerade aldrig detta arbete men hans sammanfattning indikerar att han, likt Wessel och ett par andra, hade undersökt möjligheten att utöka de komplexa talen till tre dimensioner, och att han även kommit fram till att det inte fungerade. Ett formellt bevis av den här omöjligheten gavs senare av flera matematiker, bland annat av Karl Weierstrass och Hermann Hankel. (Branner & Lützen, s. 88 f)

År 1831 uttrycker han sig om komplexa tal på följande sätt; "Om detta ämne hittills har studerats från fel synvinkel och därmed blivit insvept i mystik och omgivet av mörker, är det till stor del den olämpliga terminologin som bör klandras. Hade $+1$, -1 och $\sqrt{-1}$, istället för att kallas positiv, negativ och imaginär (eller ännu värre omöjlig), fått namn, t.ex. direkt, invers och lateral, skulle det knappast ha funnits något utrymme för en sådan otydlighet." (s. 82) Efter Gauss, godtogs $\sqrt{-1}$ som en legitim symbol och, i samband med 50-årsjubileumet (1849) av sin doktorsexamen, fick han höra att "Du har gjort det omöjliga möjligt." (Nahin, s. 81 f)

4.7 Vad hände sen?

Även efter de komplexa talens geometriska tolkning och "erkännande" fanns det en del skepsis bland flera matematiker, bland annat De Morgan, Airy och Boole. Tal som $\sqrt{-1}$ baktalades fortfarande i termer som "meningslös", "själv motsägande" och "opålitlig inkräktare". En del av dem kom förmodligen underfund med att de komplexa talen visst är meningsfulla, kanske berodde misstänksamheten på att de inte riktigt förstod. Så kan det ju vara med nya saker som man inte känner till eller behärskar. Andra kanske aldrig förstod vitsen. Förändringar är svåra, även för matematiker.

Som John Stillwell uttryckte det, "I början av historien blev de komplexa talen $a+b\sqrt{-1}$ behandlade som "omöjliga tal", som bara tolererades i begränsade algebraiska sammanhang eftersom de verkade vara användbara i lösningarna till tredjegradsekvationer. Men deras betydelse kom att bli geometrisk och ledde slutligen till föreningen av algebraiska funktioner med konforma avbildningar, potentialteori och ett annat "omöjligt" fält; icke-euklidisk geometri. Den här geometriska upplösningen av paradoxen $\sqrt{-1}$ var så betydelsefull/kraftfull, oväntad och vacker att den bara går att beskriva med ordet "mirakel". (Nahin, s. 82 f, Stillwell, s. 188)

5 Hur presenteras komplexa tal på gymnasiet?

För att snabbt och smidigt få en inblick i de komplexa talen på gymnasiet har jag läst Anna Sundelins examensarbete i matematik vid Stockholms universitet från 2005. Hon har studerat

olika läromedel för gymnasiets matematikkurs E, i vilken de komplexa talen ingår, samt intervjuat matematiklärare kring olika upplägg för introduktionen samt elevers förståelse. En kort sammanfattning följer.

5.1 Olika upplägg

Sundelin uppfattar att det finns två olika upplägg när de komplexa talen ska introduceras i böckerna, det ena går via talsystemet och det andra via andragradsekvationer. Ingången via talsystemet inleds ofta med en kort genomgång av talsystemets uppbyggnad. Eleverna förväntas då uppmärksamma att det inte finns något passande tal för lösningen på ekvationen $x^2 = -1$ och slutsatsen blir att vi måste införa nya tal – komplexa tal. Därefter går böckerna två olika vägar. Antingen införs $i^2 = -1$ och det komplexa talplanet direkt. I det andra fallet görs en geometrisk jämförelse med de reella talen innan $i^2 = -1$ införs.

Även ingången via ekvationer finns i två olika modeller. Den ena inleder med att påminna om att det för alla reella tal x gäller att $x^2 \geq 0$. Sedan dyker $x^2 = -1$ upp och vi inser att det inte finns något reellt tal som uppfyller ekvationen. Ekvationen löses och eleverna blir presenterade för lösningarna $x = \pm \sqrt{-1}$, därefter introduceras beteckningen $i = \sqrt{-1}$. I det andra fallet inleder läromedelsförfattarna med att ge olika exempel på andragradsekvationer som har reella rötter, eller med en andragradsekvation med en rot $\sqrt{-a}$.

Anna Sundelin ger exempel på olika citat som går att finna:

”Ett komplext tal är ett uttryck av formen $z = a + bi$ där a och b är reella tal och $i^2 = -1$ ”

”Man räknar med de komplexa talen på samma sätt som med de reella talen men med tillägget att $i^2 = -1$.”

(Jacobsson et al., Sundelin, kap 6)

5.2 Vad tycker lärarna?

Anna Sundelin har intervjuat fyra lärare och har betecknat dem som lärare A, B, C och D - vi fortsätter kalla dem det.

Lärare A försöker köra sitt eget race, istället för att följa böckerna slaviskt. Hon tror att avsnittet introduceras som det gör för att man försöker göra matematiken lite mer teoretisk. Hon tycker att man gör en för stor grej av komplexa tal och tror samtidigt att eleverna inte riktigt förstår vad de är för tal, detta för att eleverna inte får någon verklighetsanknytning till området. Hon föreslår bland annat att man ska tala mer om talmängder och andragradsekvationer vid introduktionen av komplexa tal.

Lärare B tror att boken introducerar komplexa tal på det sätt den gör helt enkelt för att det fungerar. Hon tror att eleverna tycker att komplexa tal verkar vara onödiga p.g.a. de inte förstår vad de ska ha för användning av dem. Vidare menar lärare B att hon upplever att boken inför en rad begrepp som eleverna inte förstår. Hon tycker att eleverna framförallt koncentrerar sig på att räkna med komplexa tal eftersom det inte är så svårt.

Lärare C har framförallt genomgått sina elever och tror inte att de tittar så mycket i boken, han tror därför inte att upplägget har så stor betydelse. Han försöker förbereda sina elever för komplexa tal redan i A-kursen genom att arbeta med ekvationer som leder till negativa tal under rottecknet. Han önskar att han hade lite mer kunskap om matematikens historiska utveckling så han kunde ge eleverna en bättre helhetsbild.

Lärare D har, precis som lärare C, inte så mycket med boken att göra eftersom han främst undervisar utan den. Han tycker att bokens introduktion om komplexa tal är ”sådär” men har inga konkreta förbättringsförslag. Lärare D brukar försöka visa nyttan med de komplexa talen i kapitlet efter, som handlar om derivator och integraler. Han har liten kunskap om den historiska utvecklingen men tror att det skulle kunna vara en bra ingång. (Sundelin, kap 6)

5.3 Diskussion

Sundelin är kritisk till de olika introduktionerna av de komplexa talen i läroböckerna. Hon menar att det framställs som att komplexa tal har införts för att kunna lösa ekvationer av typen $x^2 = -1$ och att det ger eleverna en falsk bild. Vidare skriver hon att hon inte tycker att böckerna motiverar de komplexa talen tillräckligt – den praktiska nyttan borde framhävas mer. Sundelin tror heller inte att eleverna uppnår Skolverkets mål att eleven bland annat ska ”kunna förklara hur och motivera varför talsystemet utvidgas till komplexa tal” eftersom flertalet av de läromedel som används idag inte nämner något annat än andragradsekvationer. Hon menar att en ingång skulle kunna vara via tredjegradsekvationerna, att visa att de irreducibla tredjegradsekvationerna kan få reella rötter via de komplexa lösningarna.

Angående lärarintervjuerna är hon bekymrad över att de inte verkar ha så god inblick i matematikens historia. Hon tror nämligen att det kan vara ett av flera bra sätt att introducera de komplexa talen. Andra förslag på alternativa introduktioner hon ger är den via talsystemet (utvidgningens fördelar och nackdelar) samt den via de negativa talen (historien och nyttan med dem). (Sundelin, kap 7)

Litteraturförteckning

Crowe, Michael J. (1994[1967]). *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. New York: Dover

Descartes, René (translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, 1954[1925]). *The geometry of René Descartes: with a facsimile of the first edition, 1637*. New York: Dover

Jacobsson, Sven; Wallin, Hans & Wiklund, Staffan. (1996) *Matematik program N, kurs E*. Malmö: Liber

McClenon, R. B. (1923) *Contribution of Leibniz to the History of Complex Numbers*; The American Mathematical Monthly; Vol 30, No 7, s. 369-374

Nahin, Paul J. (2010) *An imaginary tale: the story of [the square root of minus one]*. Princeton, N.J.: Princeton University Press

Pycior, Helena M. (1997) *Symbols, impossible numbers and geometric entanglements i*, Cambridge University Press

Stillwell, John. (1989) *Mathematics and its history*. New York: Springer-Vlg

Sundelin, Anna. (2005) *Introduktionen av komplexa tal i Matematik E*, examensarbete Stockholms universitet

Wallis, John. (1685) *A treatise of algebra, both historical and practical [Elektronisk resurs] shewing the original, progress, and advancement thereof, from time to time, and by what steps it hath attained to the heighth at which it now is : with some additional treatises* London: Printed by John Playford, for Richard Davis

Wessel, Caspar. (1797) (Edited by Branner, Bodil & Lützen, Jesper.; Translated by Flemming 1999). *On the analytical representation of direction: an attempt applied chiefly to solving plane and spherical polygons, 1797*. Copenhagen