SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Att förstå bråk. Ett förslag till en tydligare presentation av bråk i gymnasieskolan

av

Erik Widman

2013 - No 11

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Att förstå bråk. Ett förslag till en tydligare presentation av bråk i gymnasieskolan

Erik Widman

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, Grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2013

Att förstå bråk

Ett förslag till en tydligare presentation av bråk i gymnasiematematiken

Erik Widman

Matematiska institutionen, Stockholms Universitet
Examensarbete 15hp
Matematikdidaktik
Matematik för lärare, självständigt arbete
Vårterminen 2013
Handledare: Torbjörn Tambour
Understanding fractions

Stockholms universitet

Att förstå bråk

Ett förslag till en tydligare presentation av bråk i gymnasiematematiken

Understanding fractions

A proposal for a clearer presentation of fractions in upper secondary school mathematics

Erik Widman

Sammanfattning

Detta arbete ger en presentation av bråkbegreppet så som det framställs och bearbetas i gymnasiekurslitteraturen Matematik 5000, kursbok 1c, blå kursbok. Litteraturen har en intention att eleverna ska utveckla olika förmågor som utgör grunden till ett korrekt matematiskt förhållningssätt. Jag tycker mig dock se att det finns skäl att modifiera upplägget på olika sätt och gör med hjälp av olika externa matematik-didaktiska källor en ansats till att presentera den ursprungliga framställningen men kompletterad och kommenterad på ett sätt som jag tror förenklar och fördjupar förståelsen får rationella tal och bråk. Denna del behandlar också områden i artimetiken kring själva bråkbegreppet och hur de genom jämförelse och viss omstrukturering skulle kunna fungera som hjälpmedel för ett tydliggörande av och bättre förståelse för bråk och rationella tal.

Nyckelord Bråk, bråkbegrepp, rationellt tal, matematik

Innehållsförteckning

Inledning och bakgrund

I rollen som undervisande lärare söker man ständigt efter arbetssätt som tilltalar eller gör ny kunskap lättare tillgänglig för så många elever som möjligt. Finns det moment i undervisning som ger bättre kunskapsutdelning och vilka är dessa då man ska lägga upp genomgångar av och arbeta med matematik?

I en ny serie inom gymnasielitteraturen i matematik, ”Matematik 5000”, framtagen efter gymnasiereformen 2011, finns liksom i tidigare utgåvor teoretisk genomgång av aritmetik och bland annat begreppet bråk. I arbetssätten som presenteras i denna nya gymnasielitteratur i matematik finns efter analys möjligen moment som saknas och som genom studier av externa källor kan kompletteras eller omplaceras för att närma sig en optimal inlärningskälla för en så bred elevgrupp som möjligt.

Matematikläraren William Barman anser att matematiska läroböcker ibland förbiser det faktum att intresse för ämnet måste väckas genom diskussioner om var och varför elever behöver matematik och dess betydelse genom historien. När och hur används t ex bråkräkning? Det är kanske lättare att svara på frågan: när används inte bråkräkning? Bråk används dagligen. Ta t ex matlagning, vi har ett recept som beskriver innehållet till en måltid för två personer men vi ska själva laga till tre personer, hur gör vi då? Eller när vi ska köra bil en sträcka och har en fjärdedels tank kvar så funderar vi på om vi klarar oss på den bensinmängd vi har kvar för att nå en tänkt slutdestination. [1]

I mitt arbete som musiklärare arbetar jag och mina elever ofta med not- och pausvärden som beskriver musikens innehåll i olika taktarter. En vanlig taktart är 4-takt eller ofta 4/4-takt (fyra fjärdedelstakt). I varje takt får det plats ett visst antal not- och/eller pausvärden som givits olika namn beroende på deras längd i förhållande till taktarten. Man kanske inte tänker på det så ofta men nästan allt material vi spelar och arbetar med är ett kontinuerligt flöde i realtid av symboler som kan beskrivas med det matematiska begreppet bråk eller bråkdelar. Musiken är alltså matematisk i detta avseende och man kan tala om bråkräkning i ett initialt skede i genomgången av notvärden vilket ger en ny dimension både av matematiken och musiken som är direkt tillämpbar i vår verklighet. Helt plötsligt blir begreppet bråk kanske mer verkligt och till och med en spännande ingrediens i ett hantverk? Det är denhär uppenbarelsen som man som pedagog gärna vill att eleverna ska få när man presenterar och arbetar med olika ämnen. Men hur står det till med den litteratur som lärare och elever har till sitt förfogande, uppfyller den alla goda avsikter map beskrivning för förståelse? Ger den svar på och uppfyller sitt eget syfte för att ge eleverna de verktyg de behöver för att tillgodogöra sig kunskap och uppnå tänkta och bestämda målformuleringar? Det är detta jag avser titta närmare på i den nya gymnasiematematikens litteratur.
Fokus ligger på aritmetiken och särskilt på bråkbegreppet som det beskrivs i denna kurslitteratur.

[1] Barman W, (Hämtad 20130317) *Matematik för högstadiet*, http://barman.fi/matematik/brak/tillampningar.html

Syfte

Syftet med denna studie är att konstruera en mer detaljerad genomgång i gymnasie-matematiken som behandlar begreppet bråk. Jag vill belysa bråk enligt dess definition (eller den definition som den befintliga gymnasielitteraturen ger begreppet) och samtidigt ringa in flera olika bråkrelaterade moment och angreppssätt för att verkligen visa behandling av och förståelsen för bråk. Den semantiska (språkliga) konkretiseringen och betydelsen av matematikens olika begrepp vill jag lyfta fram som fundamental för inlärningen av nya begrepp och arbetsmetoder. Jag kommer därför på ett ambitiöst men enkelt sätt att ställa den språkliga behandlingen högt i syfte att förenkla och befästa inlärning hos den tänkta elevgruppen. Vidare vill jag också genom jämförelse av begrepp svara på frågor som jag tror kan dyka upp hos elever vid olika moment och visa hur man skulle kunna försöka undvika brister som kan uppstå i den skriftliga kommunikationen och som gör att vissa inte förstår varför eller vad de ska lära sig.
Jag vill också själv bättre förstå och sätta mig in i presentationen av en liten del i den nya gymnasiematematiken och försöka tolka och fördjupa förståelsen för dess teori kring rationella tal och bråkbegreppet.
Först ges en sammanfattning av bokens uppställning av arbetssätt samt kapitlet aritmetik.
Sedan en detaljerad genomgång av bokens presentation av rationella tal och bråk.
Sist kommer arbetets kärna, mitt eget försök till en kanske bättre presentation av rationella tal och bråkbegreppet.

Frågeställningar

1. Vad tar litteraturen upp?

2. Ger litteraturen genom den teoretiska presentationen eleverna möjlighet att utveckla de sju förmågorna som ”utlovas” i dess eget syfte?

3. Hur skulle litteraturen kunna förändras i presentationen av det teoretiska materialet med avseende på bråk?

Avgränsningar

Kurslitteraturen som finns tillgänglig för gymnasiet och som aktivt kommer att användas läsåret 2013 är Matematik 5000-seriens blå kursbok 1a,b,c, 2b,c samt 3c och därför tänkte jag initialt utgå jag från alla dessa vid studierna kring gymnasielitteraturens genomgång av bråkrelaterade begrepp.
Dock bestämde jag mig för att endast granska blå kursbok 1c (ämnad för natur- eller teknik-programmet) mer ingående då det är i denna bråkbegreppet presenteras, definieras och repeteras samt att min undervisning huvudsakligen kommer initieras i denna miljö.

Kurs 4, blå lärobok utkom i januari 2013 och kurs 5, blå lärobok utkommer i augusti 2013 men dessa böcker förutsätter redan full förståelse för bråkbegreppet och kommer inte heller att användas i detta arbete. Att studera vad teorin faktiskt tar upp kan (om man är djärv) liknas vid PRIM-gruppens arbete med att detaljfokusera problemformulering och bedömning av moment i lösningsförfarande och måluppfyllelse. Ett svårt och enormt ambitiöst arbete även på ett litet område av matematiken och det går knappast att återupprepa och applicera på varje moment av matematiken som man arbetar med tillsammans med eleverna.

Men det är ändå intressant och kan fungera som en uppstartsprocess i ambitionen att ge eleverna bästa möjliga helhetsbild av presentationen av ett matematiskt moment. Kan man som lärare upprätthålla några aspekter av intentionen med ett sådant arbetsförfarande i sitt vardagliga arbete med matematiken kan man över tid och genom erfarenhet förhoppningsvis bli bättre på att ge eleverna en roligare och mer effektiv förståelse för matematikens nomenklatur och arbetsformer.

Metod

Studie av den nya befintliga gymnasielitteraturen, Matematik 5000, blå kursbok 1c, dess teoretiska upplägg och samt jämförelse med annan didaktisk litteratur map bråks beskrivning samt innehåll av bråkrelaterad natur. Vidare studier av böcker, internetsidor, webbaserade uppslagsverk, videomaterial och didaktiska artiklar som berör bråkfenomenet och elevers förståelse för detta.

I samband med denna studie ger jag förslag till vad som kan kompletteras för en mer effektiv och övergripande inblick i bråkfenomenet och till detta angränsande ämnesinnehåll. Med mer effektiv och övergripande avses inte kortare och mer sammanfattad utan snarare ett slagkraftigt detaljerat, jämförande och uttömmande material med en bred infallsvinkel på begreppet bråk Jag tror eleven vill ha tillgång till mycket fakta som presenteras med en förhoppningsvis inspirerande språklig uttrycksfullhet kring matematiska moment för att förstå bättre eller i alla fall för att ges möjlighet att förstå bättre.

Innehållet i en tänkt skiftlig genomgång för bättre förståelse, utformas som en hybrid av det bästa metoderna och presenteras enligt kurslitteraturens intention samt med hjälp av externt material och mina egna antaganden kring effektiv skriftlig utlärning och förståelse för bråk.

Jag har gått igenom blå kursbok 1c och letat efter allt material som tangerar bråkrelaterad teori och sedan kompletterat detta med ändringar och tillägg som jag tror kan skapa ett mer uttömmade undervisningsmaterial. Matematik 5000, blå kursbok, 1c kommer i arbetet att kallas matematik 1c.

Vad tar litteraturen upp?

Matematik 1c´s intention

Såhär skriver läromedelsförfattarna om bokens upplägg och dess intention att utveckla elevers förmågor inom det matematiska arbetet.I den nya ämnesplanen beskrivs sju förmågor som eleverna ska utveckla i matematik:

Matematik 5000 ger eleverna mycket goda förutsättningar att utveckla dessa förmågor och samtidigt nå kunskapsmålen tack vare en stor variation av arbetssätt, frågeställningar och uppgiftstyper i böckerna. Boken är också ett läromedel som gör det lätt att variera undervisningen. [2]

De sju förmågorna

1. Begrepp
Använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen

2. Procedur
Hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.

3. Problemlösning
Formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.

4. Modellering
Tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.

5. Resonemang
Följa, föra och bedöma matematiska resonemang.

6. Kommunikation
Kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.

7. Relevans
Relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

---

[2] Alfredsson, H. Brolin mfl (2011) *Matematik 5000, blå kursbok 1c* Stockholm: Natur och kultur

Bokens arbetsformer

I Matematik 5000:s alla läroböcker finns några återkommande inslag som ska ge eleven en ansats till varierade arbetssätt.

Teoriavsnitt
Utgår ofta från konkreta exempel som framställs och förklaras på ett sätt som ger eleverna möjlighet att förstå och upptäcka matematiken. Teorin avslutas med flera *lösta exempel,* som belyser det viktigaste. Därefter kommer *övningsuppgifter* i tre nivåer, a, b och c i stigande svårighetsgrad.

Aktiviteter
Aktiviteter ges i kategorierna *Undersök*, *Upptäck*, *Diskutera*, *Laborera* samt *Modellera*. Här får eleverna möjlighet att arbeta mer undersökande och kreativt. Ofta i grupp. I varje kapitel finns dessutom en kort *inledande aktivitet* som introducerar delar av kapitlets innehåll.

Tema
Vissa teman är allmänna och andra programspecifika och knyter an till elevens övriga studier inom programmets inriktning och framtida yrkesval.

Historik
Historik är ännu ett inslag i linje med den nya ämnesplanen. Här betraktas delar av det aktuella kapitlets innehåll ur ett historiskt perspektiv. Historiken kan avslutas både med enklare uppgifter och svårare uppgifter av problemlösningskaraktär.

Problemlösning
Detta poängteras i de nya kursplanerna. Bland böckernas övningsuppgifter finns en stor variation av uppgiftstyper och i många kapitel finns avsnittet *Problemlösning*, med uppgifter som är kopplade till kapitlet. Återkommande i böckerna är också sidan *Problem för alla*, där uppgifternas innehåll är av mer blandad karaktär. Eleverna får här möjlighet att lära sig att kreativt analysera och lösa matematiska problem där de inte har någon färdig strategi.

Kan du det här och diagnos
Ger eleverna möjlighet till egen kunskapskontroll

***Kan du det här* -** Elever kan i par eller smågrupper värdera sina kunskaper om matematiska begrepp och strategier

***Diagnos* -** Eleven kan enskilt testa sina grundläggande kunskaper

Blandade övningar
Blandade övningar ges i två versioner i slutet av varje kapitel. Nytt är att den första versionen omfattar övningar enbart på det aktuella kapitlets innehåll. Den andra versionen omfattar även övningar från alla tidigare kapitel. De blandade övningarna omfattar precis som tidigare en del som ska räknas utan räknare och en del som ska räknas med räknare. De avslutas alltid med så kallade utredande uppgifter. Blandade övningar fungerar alltså som en utmärkt repetition inför prov.

Repetition
I slutet av boken. Är texten till de lösta uppgifterna i bokens teoriavsnitt.

Svar, Ledtrådar, motiveringar och lösningar
Facit ger svaren på samtliga uppgifter, på vissa finns ledtrådar, motiveringar och lösningar

Lärarhandledningar
Lärarhandledningarna följer lärobokens upplägg och till samtliga aktiviteter finns här en didaktisk kommentar, t. ex. svar och lösningar, samt information om materiel och genomförande. Lärarhandledningarnas kopieringsunderlag består av *Aktiviteter*, *Träna mera*, *Teman* och *Uppgiftsbanker*. Uppgifterna är kategoriserade efter de förmågor som eleverna kan redovisa i sina lösningar. Till samtliga uppgifter ges svar och till vissa uppgifter finns dessutom en kommentar och/eller en lösning. Lärarhandledningarna är i pdf-form och säljs som abonnemang. Jag har fått tillgång till ett sådant abonnemang och tittat på innehållet i för detta arbete relevanta fall.

Aritmetikens innehåll förutom bråk

Kapitel 1 Aritmetik – om tal

I beskrivningen av bokens innehåll finns enligt läromedelsförfattarna alltså en mängd olika verktyg för att få eleverna att utveckla och uppnå ”De sju förmågorna”.
Frågan för detta arbete var bland annat om detsamma gäller för bråkbegreppet som enskild företeelse. Att eleven får arbeta mångsidigt med alla enskilda moment är kanske inte avsikten med bokens upplägg men det kan undersökas hur metoderna greppar ett enskilt fenomen som bråk.

De kringliggande moment som i matematik 1c presenteras i samma kapitel som ändamålet för detta arbete, bråkbegreppet, är också av vikt att visa då anknytning till bokens presentation av matematiska moment i allmänhet kommer att göras i samband med analysen av rationella och reella tal, kapiteldel 1.2. Alltså följer nedan först bokens introduktion av aritmetiken (kapitel 1.1) samt kapiteldelarna (1.3, 1.4) som kommer efter de rationella talen (kapiteldel 1.2).

Kapiteldel 1.1 Hela tal

Historia s.8
En kort presentation av matematiken med fokus på de stora civilisationerna i vilka matematik ”uppkommit” och utvecklats.

Olika typer av tal s.9
Översiktlig sammanfattning av naturliga, hela, rationella, irrationella och reella tal.

Positiva tal och räkneregler för dessa (räknesätten) samt räkneordning s.10-11
Ordningen för räkning med parenteser, potenser, multiplikation, division, addition och subtraktion.

Primtal s.13
Ansats till definition av primtal och sammansatta tal. Delbarhet och faktorisering samt primtalsfaktorisering**.**

Delbarhetsregler s.14
Delbarhetsregler för tal som divideras med talen 2,3 och 5.

Negativa tal s.16
Kort historik om negativa tal, räkneregler, motsatta tal, bakgrunden till subtraktions-, produkt- och kvotreglerna.

Tal i decimalform s.27
Decimalsystemet, utvecklad form, decimalutveckling, avrundningsregler.

Avrundning och gällande siffror s.30
Behandlas inte i detta arbete.

Kvadratrötter s.32
Behandlas inte i detta arbete.

Kapiteldel 1.3 Tal i potensform
Nämns i detta arbete.

Kapiteldel 1.4 Problemlösning
Nämns i detta arbete.

Kapitel 2 Procent
Nämns i detta arbete.

Bråkbegreppet enligt matematik 1 c

I kapitel 1.2, Rationella och reella tal**,** kommer introduktionen av bråkbegreppet (Nedan presenteras vad boken går igenom i de teoretiska delarna samt vad som behandlas i övningsuppgifterna i anslutning till dessa.)

Bråkbegreppet s.20
Delar en cirkel i 3 delar och benämner dessa delar tredjedelar

Bråkform
Att två tredjedelar skrivs 2/3 i bråkform.

Täljare och nämnare kort om bråkets beståndsdelar som att täljare (ovanför bråkstrecket) och nämnare (under bråkstrecket, får inte vara 0) kommer från tyskans zähler (förtäljer) och nenner (benämner).

Rationella tal
Kallas Q = alla tal a/b där a och b är heltal och $b \neq 0$

Förlänga och förkorta bråk
Exempel med 1/3 av 3 rektanglar. Multiplicera eller dividera både täljare och nämnare med samma tal för att förlänga och förkorta bråk.

Enklaste form
Enklaste form av ett bråk

Förhållande
Bråk kan användas för att ange ett förhållande mellan två tal
Förhållandet 2/3 Skrivs ofta 2:3 ”två till tre” det går 2 pojkar på 3 flickor

Lösta uppgifter
Uppgift 1201 Andelstal tas upp men inte teorin kring detta. Här skulle man vilja hänvisa till bråkets olika skepnader om de togs upp i matematik 1c
Uppgift 1202 hälften av ett bråk 1/6 kan visas med multiplikation
Uppgift 1203 a) vilket bråk är störst? Hitta gemensam nämnare
b) Ange ett bråk som ligger mellan två bråk med olika nämnare

Räkna med bråk
Repetition av räkneregler, begrepp och metoder som eleven enligt författarna ska ha mött förut. Addition och subtraktion, blandad form, multiplikation, inverterat tal och division med bråk

Sammanfattning
Boken ägnar sju sidor enbart åt bråkbegreppet och räkneregler för dessa.
Sedan återkommer arbete med bråkrelaterat material utspritt över aritmetikkapitlet och i form av olika arbetssätt i boken som beskrives nedan.

Bokens arbetsformer med bråk

Här har jag efter genomgång hittat fler ställen i boken som låter eleverna arbeta med bråk eller bråkrelaterade uppgifter.

Aktivitet, diskutera ”det är inte bara svaret som räknas” s.48
Här diskuteras tre elevlösningar, omvandling av enheter och bråkräkning förekommer.

Problemlösning s.49
Detta presenteras som strategi (för första gången) och ger förslag på tillvägagångssätt då man ska närma sig ett matematiskt problem.
Boken ger förslag på problemlösningens beståndsdelar 1.förstå 2.planera 3. genomföra 4.värdera

Aktivitet modellera s.52
Att göra en matematisk modell som är en förenkling av en verklig situation.
Söka fakta, göra uppskattningar, antaganden, överslagsräkna, utvärdera resultat och modellens begränsningar. (Ingen anknytning till bråkräkning)

Aktivitet, diskutera ”sant eller falskt” s.53
Uppgift 2. Då ett bråktal förkortas blir värdet mindre?

Sammanfattning 1, s.54
Kort genomgång av bråkbehandling, förkortning, förlängning, förhållande, räknesätten.

Kan du det här? s.56
Under rubriken rationella- och reella tal finns två kolumner där elevens måluppfyllelse finns angiven. Kolumnernas innehåll står nedan.

Begrepp som eleven ska kunna använda och beskriva.	**Eleven ska ha strategier för att kunna:**
Andel och förhållande Förlänga, förkorta, enklaste form och blandad form Inverterat tal Rationella och reella tal.	Skriva och jämföra tal i bråkform Skriva tal i bråkform på olika sätt Beräkna summa, differens, produkt och kvot av tal i bråkform

Diagnos 1, s.57
Fem tal berör rationella och reella tal. Tre av dessa berör bråkräkning
Uppgift 5. förhållande
Uppgift 6. räkneregler addition, division
Uppgift 7. andel

Blandade övningar 1a (utan räknare), s58
Uppgift 2. andel av hel
Uppgift 3. räkneregler
Uppgift 6. andel av bråk i blandad form
Uppgift 7. andel av hel

Blandade övningar 1a (med räknare), s59
Uppgift 23. del av antal

Blandade övningar 1b, s60
Uppgift 8. kopplar ihop samband mellan decimal- och bråktal
Uppgift 9. jämföra och förstå potenser, decimal- och bråktal
Uppgift 11. division med bråktal

Resultat och diskussion.

Är de sju förmågorna uppnådda?

Analys av gymnasielitteraturförfattarnas egen vision av uppnådda förmågor i kapitlet Rationella och reella tal: Här redovisas vad som faktiskt tas upp med avseende på de sju förmågorna under rubriken **Förekommande** och med underrubriken **Tillägg** för varje förmåga som ger stoff till vad som eventuellt skulle kunna förändras för att ge läsaren eller eleven en mer optimal förståelse.

Begrepp

Använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen

Förekommande

Bråkbegreppet: bråkform, täljare och nämnare, rationellt tal, förlänga och förkorta bråk, enklaste form, förhållande.

Räkna med bråk:
Addition och subtraktion, blandad form, multiplikation, inverterat tal, division med bråk

Tillägg

Det saknas generellt en uttömmande beskrivning av begrepp.
Återkommande är också att samband mellan begreppen finns ibland, internt i kapitlet aritmetik, men i ett större sammanhang finns flera begrepp som kunde presenteras parallellt eller nämnts i teorin mer sammankopplat för ökad förståelse. Tex blandad form kan nämnas samtidigt som enklaste form för koppling mellan begrepp.

Det finns en ganska bra beskrivning av användning av inverterat tal för att utföra division med bråk genom att man ”förvandlar” nämnaren till 1 men en förklaring av vad man faktiskt gör finns inte.

Tittar man på kopplingen mellan begreppen bråk, tal i decimalform och procent (och även potens) så presenteras tal decimalform och potenser som en avskiljd teoridel efter bråkbegreppet. Aritmetiken presenteras i kapitel 1 och procentbegreppet först i kapitel 2. De olika delarna måste ju naturligtvis presenteras första gången någonstans i boken men återigen kunde kopplingen mellan begreppen komma i anslutning till varandra.

Det är först i **Blandade övningar 1b, uppgift 8 och 9 på sidan 60,** som det för första gången förekommer en jämförelse mellan de olika begreppen potenser, decimal- och bråktal, lite sent kanske om man vill ge övergripande förståelse genom jämförelse av begrepp?

Det finns fler begrepp som eleven ska kunna använda och beskriva, tex i avsnittet **Kan du det här? på sidan 56,** framför allt andel och förhållande, som inte presenterats ingående. Jag återkommer till detta under rubriken ”Bråkens olika skepnader”.

Procedur

Hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.

Förekommande

Det finns en del standarduppgifter på sidorna 22,25 och 26 samt i **Diagnos, s.57** och i avsnittet **Blandade övningar 1a (utan räknare) s.58**

Problemlösning

Formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.

Förekommande

Detta presenteras som strategi (först) på sidan 49 (men då har vi för längesedan passerat bråkkapitlet) och ger förslag på tillvägagångssätt då man ska närma sig ett matematiskt problem. Matematik 1c ger förslag på problemlösningens beståndsdelar 1.förstå 2.planera 3. genomföra 4.värdera

Tillägg

Problem är för det första ett intressant val av begreppsord, eleven ska förstå att här är det något som ska rättas till, något problematiskt, låter föga inbjudande och fungerar matematiken alltid så? ”Lösningen” till någon matematisk uppgift handlar väl framförallt om ”lösarens” förståelse av innehållet och uppgiften snarare än att redan innan man föresatt sig att lösa något ska få veta att här kommer det att bli problematiskt.
Marit Johnsen Hoines uttrycker det snyggt ”Du ställs inför ett problem. Uppgiften är enligt definitionen endast ett problem, om du inte har någon metod att lösa den på” [3]

Efter genomgången av problemlösningsförfarandet blir dock uppgiftskaraktärerna mer intressanta. Förutom de ”utantillinlärda” staplingarna av räknesätten får eleven äntligen chansen att själv konstruera en metod och använda tillämpning av bråkräkning på lämpligaste vis efter sin egen tolkning.

Modellering

Tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.

Tillägg

Metoden för modellering ges på sidan 52 och sedan kan man se tendens till användning av modelleringsförfarandet i några uppgifter i blandade övningar 1 A och 1 B men momenten uppskattningar och antaganden behöver eleven sällan göra utan snarare ställa upp matematiska modeller med givna variabler.

---

[3] Johnsen HØines, M. (1990). *Matematik som språk* : verksamhetsteoretiska perspektiv. Malmö: *Liber Ekonomi.*

Resonemang
Följa, föra och bedöma matematiska resonemang.

Tillägg
Detta bör ju ske i alla uppgifter och intressant är att bedömningen av elevens eget resonemang kunde framhållas mer som extra viktig då man ”är färdig” med lösningen av en uppgift. Detta görs för sällan i det teoretiska materialet men ligger kanske avsiktligen mer på den undervisande läraren än litteraturen att trycka på.

Kommunikation
Kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.

Tillägg
Här ska eleven visa sin förmåga till praktiskt användande av modellering, resonemang och problemlösning. Boken beskriver inte tips och strategier för detta vilket skulle kunnat få en egen teoretisk del.

Relevans
Relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Förekommande
Det finns flera uppgifter, 1231-1246, på sidorna 25 och 26 som tar upp bråkfenomenet i ”verkliga” situationer. I uppgifterna ska eleverna bland annat räkna med tid, livsmedel, spel, folkhälsa, och egendom. I uppgift 1240 på sidan 26 behandlas de gamla egyptiernas stambråk samt en flyktig titt på begreppet kedjebråk (uppgift 1415, sidan 51).

En bättre introduktion till bråkens värld?

Historik och begrepp (saker som inte kommer på provet)

”Om man inte känner till det förflutna,
förstår man inte nutiden
och är inte lämpad att forma framtiden” [4]

Citatet finns i olika former av flera insiktsfulla personer och ger en fin tankeställare till hur introduktionen av kunskap genom historia kan fungera som ögonöppnare och inspiration för elever och inte alltid behöver vara av rent teoretisk natur.
Under min egen utbildning i matematik har det inte funnits många tillfällen då man fått se matematiken ur ett historiskt perspektiv men de gånger man fått en bakgrund till något moment har det gjort arbetet mer färgrikt och levande. Till exempel: Varför heter det **Gausselimination**? Var **Pythagoras** verkligen först med den kända satsen för förhållandet mellan den rätvinkliga triangelns sidor? (Man trodde ju länge att det faktiskt var han som ”hittade på” den) När användes den matematiska **konstanten π** första gången och varför kallas den pi?

Alla begrepp ovan står för matematiska samband och verktyg som används i arbetet med matematik men att introducera frågorna och ta upp dem till diskussion i arbetet med eleverna kan ge en mer nyanserad och spännande förståelse för matematiken på fler plan och därför bör någon form av historisk närvaro ha en given plats även i teoretisk matematiklitteratur. Man kan kanske inte ha med historiska anspelningar i alla moment, det skulle bli ett för omfattande material, men man skulle kunna ge eleverna möjlighet att se en kort historisk sammanfattning över de moment och begrepp som man arbetar med.

Vidare kunde Matematik 1c anamma det upplägg som Christer Kiselman och Lars Mouwitz har i sin bok ”Matematiktermer för skolan”. I denna inleds varje termpost med **termen** i fråga, följd av eventuella synonymer. Därefter följer **definitionen**. Denna är alltid skriven som en terminologisk definition, det finns en skillnad mellan denna typ av definition och den som används i läroböcker. Den terminologiska definitionen måste vara koncis och man tvingas tänka efter vad orden verkligen betyder. I en lärobok kan man först mer eller mindre utförligt beskriva ett sammanhang och sedan i flera steg närma sig begreppet.

Författarna har under arbetets gång övertygats om att den strikt terminologiska definitionen är ett utmärkt pedagogiskt och vetenskapligt hjälpmedel, och att den tillsammans med en **kommentar** ger den bästa grunden för förståelsen av nya och gamla begrepp. Kommentarens syfte är att sätta in begreppet i ett sammanhang, och där kan förekomma en mer läroboksmässig förklaring. Ofta kommer något eller några **exempel**

[4] Weil S (1909-1943)

att belysa begreppet och termens användning. Därefter följer i många fall begreppets och ordets **historia**, under rubrikerna historia respektive **etymologi**.

Slutligen ges för många termposter under rubriken **jämför** hänvisningar till ord som kan återspegla besläktade begrepp eller deras motsatser[5]

Ett exempel från boken Matematiktermer för skolan:

Term rationellt tal

Definition tal som är en kvot av två heltal, varav det andra inte är noll

Kommentar Ett rationellt tal har en periodisk decimalutveckling. Mängden av rationella tal betecknas vanligen Q. exempel 7, –9, 1/3 och 0,5, men inte √2

Etymologi Adjektivet rationell kommer från latinets rationalis, av ratio ’förnuft’, troligen en översättning av det grekiska lógos, som bland annat betyder ’lära, förnuft, världsordning’. Anledningen var att världen ansågs vara förnuftig, vilket bland annat betydde att storheter hade ett rationellt förhållande.

Jämför irrationellt tal, reellt tal

I denna bok, som förvisso är en uppslagsbok, fångas begrepp och termer i sin kärna samtidigt som dessa belyses från flera olika håll vilket ger bred insikt i både fokus för innehållet och dess omgivning.

Rationella och reella tal, varken förnuftiga eller verkliga?

Vad gäller rationella tal och bråk ges i boken begreppen täljare och nämnare sitt språkliga ursprung dock utan historisk belysning. Jag tycker att något liknande kunde stått om att mängden av alla rationella tal, de rationella talen skrivs Q. Men eleven får ingen förklaring till var detta Q kommer ifrån. En intressant utläggning ger att mängden fick sitt namn 1895 av den italienske matematikern Giuseppe Peano. Q kommer från italienskans quoziente, engelskans quotient eller svenskans kvot, alltså helt enkelt resultatet av division. [6] Att talen kallas rationella har inget att göra med att de skulle vara speciellt förnuftiga, utan det kommer från det latinska ordet ratio som helt enkelt betyder förhållande mellan två tal av samma slag. [7] [8]
Sedan kan man väl berätta för eleverna varför kapitlet heter Rationella OCH Reella tal
Det finns i boken ingen förklaring till kopplingen till reella tal och samma tanke som med begreppet rationella tal, är reella tal mer verkliga än andra typer av tal och vad är det i så fall för tal som är mindre verkliga?

---

[5] Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*, Göteborgs universitet: NCM

[6] Rational Number http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_number

[7] Ratio http://en.wikipedia.org/wiki/Ratio

[8] Tambour, T *Bråk och bråkräkning* kurser.math.su.se/mod/resource/view.php?id=21437

Intresse hos en trött eller försenad elev kan kanske väckas om man berättar om att det var en vetenskapsman vid namn Rene Descartes som under 1600-talet introducerade reella tal som kan skiljas från imaginära tal (vilka är tal vars kvadrat är ett negativt, reellt tal) [9] Man menade på den tiden att imaginära tal inte kan existera! ”Häftigt!” kanske en elev tänker och vaknar ur sitt gubbritande i matteblocket, ”ett tal som inte kan existera, vad betyder det? berätta mer!” Naturligtvis (och till elevernas stora glädje) bör imaginära tal nämnas och om man törs, komplexa tal i samma andetag. I alla fall eftersom boken på ett orättvist sätt ger talmängden primtal en egen sektion. Här finns ännu en iakttagelse.

Matematik 1c lyfter i aritmetikens introduktion de olika talmängderna som förhåller sig till varandra så att en mängd av tal hierarkiskt underordnas en annan mängd av tal. När primtalen sedan plötsligt definieras på sidan 13 slår kanske en elev tillbaka till denna talmängdspresentation för att leta efter talmängden primtal. Där hittar man dock inget om detta och det är lite av den känslan som återkommer i kapiteldelen om rationella och reella tal, varför presenteras primtalen först här (och nämns inte bland de andra talmängderna?). Sedan avslutar en klurig matematikbok kanske med att nämna att imaginära tal faktiskt inte anses vara mer imaginära (påhittade) än andra tal. Man har valt att behålla denna benämning av historiska skäl [10]

När man sedan ändå är igång och gräver i de rationella talens definition kan ju deras ”motsats”, de irrationella talen, lyftas fram som en jämförelse.

En gammal legend berättar om den grekiske filosofen Pythagoras, som ytterst trodde att allt i världen var heltal, som även kan användas för att ange bråktal. Legenden säger att han skickade ut sin lärljunge Hippasos för att hitta längden av hypotenusan på en rätvinklig triangel med katetlängden 1 enhet. Pythagoras var övertygad om att Babyloniernas tidigare nedskrivna hypotenusalängd (roten ur 2) gick att uttrycka som ett rationellt tal, men Hippasos insåg att han funnit en ny typ av tal, de irrationella talen. Insikten av att roten ur 2 är irrationellt, det vill säga inte kan uttryckas exakt som ett bråk, rubbade pythagoréernas världsbild på samma sätt som när en ny kontinent upptäcks och det sägs att Pythagoras lät dränka Hippasos som straff när denne försökte sprida upptäckten till världen. [11]
Men sådana saker kan ju vara något som läroboksförfattarna åsyftat att lägga på kurslärare att lyfta utanför ”basteorin”.

[9] *Imaginära tal* http://sv.wikipedia.org/wiki/Imagin%C3%A4ra_tal

[10] *Real number* http://en.wikipedia.org/wiki/Real_number

[11] Marcus du Sautoy, (2008) *The story of maths* part 5, BBC Four http://www.dnatube.com/video/6537/History-of-Mathematics-part5

Vad ska vi ha bråken till då?

Professor emeritus Sten Kaijser antyder i sin skrift ”De matematiska begreppens historia” att det var för människor i tidiga samhällen inte räknandet och mätandet i sig utan hennes försök att beskriva, tolka och förstå vad det var hon gjorde som var av betydelse och gav upphov till matematiken.

Exempelvis hade stenåldersmänniskan (som sägs ha vandrat omkring på jorden för över 2 miljoner år sedan) som regel mycket små behov av att mäta och ännu mindre behov av att ange resultatet i annan form än ett konstaterande i stil med:
Den här käppen är tillräckligt lång eller *din fisk är tyngre än min.*

Men långt senare, närmare vår tid, med jordbruk, ägande och mer organiserade samhällen blev behovet av mätningar allt större. Tidiga former av organiserade arbeten som förutsatte mätningar bör ha varit uppförandet av större byggnader, vägar och bevattningsanläggningar. Allmänt kan det sägas att så snart som ett konstruktionsarbete kunde delas mellan flera individer som arbetade oberoende av varandra så krävdes det mätningar och måttangivelser för att **delarna** (bråkdelarna) skulle passa ihop. [12] Här kommer tankarna om bråken in i vår historiska och idag samtida verklighet.

Från den egyptiska civilisationen som tros ha uppstått kring 3000 fKr finns bland annat en papyrusrulle, kopierad runt 1600fKr av den egyptiske skrivaren Ahmose. Skriften kallas Rhindpapyrusen och innehåller räkneproblem med lösningar och visar bland annat räkning med bråk.
Ahmose inleder skriften anspråkslöst med ”Detta är en grundlig genomgång av allting, den ger insikter i allt som existerar och kunskap om alla dunkla hemligheter” [13]
Tänk om man kunde säga samma sak om en presentation av bråkbegreppet….

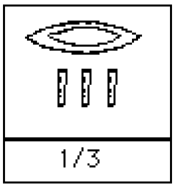
Att formulera bråk i exakt form var något egyptierna var först med. När man skrev bråktal använde man sig bland annat av en symbol som såg ut som en mun som skrevs tillsammans med de andra talsymbolerna.

---

[12] Kaijser, S (hämtad 20130312) *De matematiska begreppens historia* http://www2.math.uu.se/~sten/mhd/matbetot.pdf

[13] Axling, O (hämtad 20130314) *Tutanchamons och Hammurapis matematik ca 2000 f.Kr* Linköping: matematiska institutionen www.math.liu.se/~olaxl/kurser/LIMGB1/.../limgb1Fo1,2.pdf

Figur. Bråket 1/3 uttryckt på egyptiskt vis. Munnen ovanför strecken symboliserar division. [14]



För bråk, utom för två tredjedelar, som hade en särskild beteckning, använde de enhetsbråk eller stambråk (bråk med täljare = 1) te x en halv, en tredjedel, en fjärdedel osv. För att ange tre fjärdedelar skrev de en halv + en fjärdedel, för att ange nitton tjugondelar skrev de en halv + en fjärdedel + en femtedel. Egyptiernas system för bråkräkning kan kanske uppfattas som besvärligt men har sina fördelar.[15]

Familjepizza i det gamla Egypten

I Ahmoses räknelära finns en uppgift som lyder: Dela ut två bröd till sju män. ”Giv till varje man ett kvartsbröd samt ett tjugoåttondelsbröd”

”Svaret” är givet men lösningen fås te x som nedan och illustreras i figur 1.
Tag nämnaren (7) och sätt den i en kolumn, den högra, och talet 1 i den vänstra.
Nu vill vi dividera talet 7 så många gånger som behövs för att summan av ett antal av dessa divisioner ska bli 2 (som är vår ursprungliga täljare).
Vi dividerar även talet 1 i vänsterkolumnen på samma sätt som talet 7 hela tiden.
Men nu kan man se att när vi utfört divisionerna 7/2 och sedan (3 + ½)/2 så ”behöver” vi ¼ till för att summan av divisionerna ska bli 2 (som vi ville ha).

Nu blir ju (1 + ½ + ¼)/2 verkligen inte ¼ utan vi måste ta till ett knep för att få det tal vi vill ha. Vi provar att dela 7 med 28 vilket ju faktiskt kan skrivas som ¼ och då måste vi också slutligen i vänsterkolumnen dela 1 med 28 och plötsligt var vi klara.
Adderar vi högerkolumnens 1 + ½ + ¼ och ¼ får vi 2 vilket vi ville ha.
Då blir vårt sökta enhetsbråk ¼ + 1/28 som syns i vänsterkolumnen.
Varje man får alltså ¼ bröd + 1/28 bröd om 7 män ska dela på 2 bröd.

Figur . Dela ut två bröd till sju män

Täljare	Nämnare
1	7
½	7/2 = 3 + ½
¼	(3 + ½)/2 = 1 + ½ + ¼
1/28	7/28 = ¼

[14] Johansson, B.G (2004) *Matematikens historia* Studentlitteratur AB

[15] Lindholm H (1985) *Glimtar ur matematikens historia* Nämnaren nr1
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5257_85-86_1.pdf

Det finns förstås fler knep i andra typer av omvandling till enhetsbråk men just detta kan tjäna som ett lite kul exempel med historisk touch och praktisk tanketips för förståelse. Kanske bör man idag jobba med mer populära livsmedel bland ungdomar (snickers eller calzone). Hur det går till i praktiken utan egyptiernas något krångliga tillvägagångssätt då 2 pizzor ska delas på 7 elever (som är trötta på skolmaten)

Fall 1. Jo, man börjar med att dela de 2 pizzorna i största möjliga bitar för att alla ska få en bit först.
Om man först delar varje pizza i 4 delar då blir det ju totalt 8 bitar och så tar varje elev en sådan bit.
Då har alla fått ¼ (av 1 pizza). Men nu finns det ju ¼ pizza kvar som också ska delas på 7 elever. Då utför vi divisionen, ¼ pizza delat på 7 elever blir 1/28 (av 1 pizza).
Alltså har varje elev fått ¼ + 1/28 av 1 pizza precis som egyptierna kom fram till.

Fall 2. Nu börjar det bli intressant eftersom någon säkert undrar varför varje elev inte först fick 1/8 av pizzorna, det var ju 8 bitar som delades mellan 7 elever så varje elev borde ju fått en 1/8 först och sedan den sista 1/8-delen delad på 7 elever vilket ger 1/56 bit så att varje elev ska ha fått 1/8 + 1/56 bit.
Jämför vi de olika utfallen med antal bitar så gav ju den första fördelningen ¼ + 1/28 bit vilket i enklaste form blir 2/7 bit.
I den andra fördelningen fick ju varje elev 1/8 + 1/56 bit vilket i enklaste form blir 1/7 bit.

Får man då mer mat om man gör fördelningen map 1 pizza? Nej tyvärr kan matematiken inte trolla fram mer mat utan här handlar det om vilken sektorindelning man gör.
Man kan upptäcka att här är ¼ och 1/8 av något olika eller lika beroende på vad de är delar av. Här har man verkligen fått en historisk presentation och ett direkt arbetsområde i ett ”angeläget” verklighetsfall som sedan kan knytas till bråk som operator, se vidare under rubriken ”Bråkets olika skepnader”.

Pythagoras elgitarrer och Bachs symmetri

Sten Kaijser, nämnd ovan, skriver också att längre fram i historien fanns ett brödraskap som kallade sig Pythagoreerna som verkade under 500-talet före Kristus, alltså Pythagoras (han med den kända satsen) och hans anhängare. De upptäckte ett samband mellan hela tal och musik som gav bråktalen en helt ny innebörd och betydelse. Deras upptäckt var att om två strängar, av samma material och med samma spänning klingade harmoniskt tillsammans så fanns det ett enkelt samband mellan längderna. Om den längre strängen gav grundtonen så gav en hälften så lång sträng oktaven, en som var 2/3 gav kvinten och 3/4 gav kvarten. Även de andra rena tonintervallen svarade mot enkla samband mellan "små" hela tal. Här kan man göra en tilltalande hybrid av musik och matematik som passar fint på te x ett naturvetenskapligt program med musikinriktning (som jag undervisar inom idag)

I Lasse Berglunds bok ”Tal och mönster” [16] nämns också barocktonsättaren Bachs fugor som exempel på hur man matematiskt kan arbeta med grupper av notvärden av olika längd och tonhöjd för att skapa sk polyfona (flerstämmiga)stycken. Strukturen var i Bachs kompositioner viktig, en linjär ström av välplacerade 1/16-noter och 1/8-pauser, precis som när matematikern (eller den nervöse gymnasieeleven) ska lösa serier med bråkuppgifter.

Här har alltså listats ett antal olika sätt som bråkbegreppet skulle kunna introduceras på för att ge både historia, bakgrund, gruppuppgifter och diskussion men framförallt inspiration till arbete med matematiken.

Matematik 1c kan i stort ge eleven intrycket av det som många böcker i teoretisk matematik gör. Språket är sällan inspirerande och det står inget om huruvida relevansen kan vara ett roligt, kreativitetsskapande resultat. Det finns alltför sällan ögonöppnare, fantastiska tips och spännande, skrämmande historia. Det ger ämnet en fantastisk dimension att berätta om utvecklingen av matematiken för att levandegöra ämnet. Inled geometrin med Arkimedes sista ord (”rubba inte mina cirklar”), skräm eleverna med Pythagoras sats genom lärljungen Hippasos upptäckt, Visa att matematiken en gång (och ibland fortfarande) kan handla om yrkesheder och överlevnad genom att berätta om tjafset om vem som tillerkändes lösningen på tredjegradsekvationer, var det del Ferro, Tartaglia eller Cardano? Ligger detta på den kreativa, roliga, inspirerande (och tillslut utmattade) läraren att ta fram eller kanske kan litteraturen hjälpa till på det området?

---

[16] Berglund, L (2009) Tal och mönster, Studentlitteratur

Bråkbegreppet definieras

När en inspirerande historisk ansats gjorts för att fånga läsarens/elevernas intresse går den begreppsliga och språkliga utformningen vidare för att definiera och beskriva bråk. Matematik 1c kunde gott i definitionen av bråkform berätta var ordet bråk kommer ifrån för att det inte bara ska bli ännu ett terminologiskt utantillord (utantillkunskap är ju omatematiskt i vissa kretsar). NCM skriver att etymologiskt kommer bråk från det låg-tyska brok 'brytning, brott', ett översättningslån från latinets fractio, taget från arabiskans kasr 'brytning, brott', översatt från sanskritens bhinna 'bruten'. [17] Det finns alltså flera språkliga dimensioner av bråket men det förekommer också i flera skepnader som kan användas på olika sätt.

Cirklar och rutnät

Det förhärskande sättet att konkretisera bråk är att utgå från ett cirkelområde. Språket som med ord beskriver vad olika delar står för saknas eller blir för snävt i Matematik 1c. Sven Lundqvist skriver i Nämnaren flera bra saker om detta. Ett cirkelområde symboliserar t ex talet 1. Området delas upp i lika stora sektorer. Det totala antalet sektorer motsvarar det aktuella bråkets nämnare. Genom att markera en eller flera sektorer anges bråkets täljare. [18]

I samma syfte används också rutnät. Antalet rutor i grundbilden motsvarar bråkets nämnare. Täljaren anges genom markering av en eller flera rutor. Men detta nämns inte i Matematik 1c utan här används rutorna istället för att visa begreppen förlängning och förkortning. Vidare beskrivs förlängning och förkortning av bråk men inte varför man ska göra det (eller att själva operationerna varken gör bråken längre eller kortare). Det kommer först som metod senare för att jämföra två tal med olika nämnare men ingen koppling görs mellan teorin och uppgiften.

Hanteringen av ovan beskrivna konkretionsmedel hämmas i viss mån av deras statiska karaktär. Vissa elever får därför svårt att förstå att bråken kan stå för relationer mellan tal ,t ex 2 av 5, men också beskriva funktioner som 2/5 av något. Man upptäcker då att t ex "fjärdedelar av" kan vara olika stora beroende på vad de är fjärdedelar av. Exemplet ovan med pizzorna som skulle delas beskriver just detta. Bråkens mångtydighet måste definieras och diskuteras.

---

[17] Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008) *Matematiktermer för skolan* Göteborgs universitet: NCM

[18] Lundqvist, S (1987) *Konkretion vid bråkräkning* Nämnaren nr 1 http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2427_87_1.pdf

Bråkformen på två olika sätt

Enklaste bråkform

Då ett bråk är skrivet med täljare och nämnare som positiva heltal, och täljaren och nämnaren inte är delbara med samma heltal, större än 1, sägs bråket vara skrivet i enklaste bråkform eller kortare enklaste form. Det kan även sägas vara "förkortat så långt som möjligt". [22] Matematik 1 c tar bara upp detta sistnämnda och nämner inte blandad form förrän ett par sidor senare. Det bör ju stå i direkt anslutning till detta.

Blandad form

Ett tal större än 1 och skrivet som ett positivt heltal och ett bråk mindre än 1 sägs vara skrivet i blandad form. Det kan nämnas (efter alla gånger elever tänkt fel vad beträffar detta) att $4\frac{1}{4}$ är summan (inte produkten) av 4 och $\frac{1}{4}$. Alltså $4\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} \neq 4 * \frac{1}{4}$. [20]

Täljaren & Nämnaren

Vidare betraktas ett bråks beståndsdelar i matematik 1c som så uppenbara att de inte behöver definieras och i boken ges egentligen bara en språklig översättning från tyskan som förklaring till delarnas namn. En vidare språklig definition kunde kanske ge en tydligare demonstration av vad täljare och nämnare faktiskt är, något som Matematik 1c missar. Boken kunde alltså generellt passa på att skriva tillägg till den stringenta, terminologiska definitionen av begrepp för att visa dessa tydligare och ge en starkare koppling mellan olika fenomen inom aritmetiken.

Täljaren

En bra beskrivning är att täljaren talar om hur många delar man har av en enhet. 2/5 betyder två stycken femtedelar eller två delar av enheten femtedelar. Täljarens innebörd tydliggörs också vidare under rubriken ”Bråkens olika skepnader”.

Nämnaren

Nämnaren talar om hur många lika stora delar som behövs för att göra en hel enhet. Det handlar alltså om namnet eller storleken på delarna. 1/5 anger att det behövs fem delar för att göra en hel. Storleken är alltså en femtedel. Noterbart är också att ju större nämnaren är desto mindre är delarna som man delat enheten i. Återigen ”enkla” konstateranden, men livsviktig språklig konkretisering saknas nästan helt i matematik 1c.

Division eller bråk?

Om ett bråk kan kallas en olöst division så har själva räkneoperationen (att dividera) syftet att finna vilket tal (c) ett givet tal (b) skall multipliceras med för att man om möjligt skall erhålla ett annat givet tal (a). Detta kan man ta som exempel.

$$\frac{a}{b} = c$$

Det är också absolut värt att repetera betydelsen av vilka egenskaper täljare och nämnare får bortom själva den matematiska operationen divison. Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008) skriver att storheter kan adderas och subtraheras endast om de har samma dimension. T ex 1 kg räkor + 1 kg räkor = 2 kg räkor men 1 avokado + 1 kg räkor ≠ 2 kg avokadoräkor. De kan däremot divideras även om de har olika dimension. Av alla möjliga divisioner har två haft speciella namn i skolmatematiken.

Innehållsdivision

Är division när dividenden (täljaren) och divisorn (nämnaren) har samma dimension och alltså blir kvoten dimensionslös. (Malmer 1984) tar exemplet: Till hur många påsar räcker 12 kg potatis om man ska ha 3 kg i varje påse?
12 kg / 3 kg = 4 ”12 kg innehåller 3 kg 4 gånger” Svar: Potatisen räcker till 4 påsar

Delningsdivision

Är division när nämnaren är dimensionslös och alltså kvoten får samma dimension som täljaren. Återigen ett exempel från (Malmer 1984):
12kg frukt delas så att 3 familjer får lika mycket var.
Hur mycket får varje familj?
12 kg / 3 = 4 kg Svar: varje familj får 4 kg

Det kan tilläggas att Skolöverstyrelsens utredning i skolfrågor nummer 5, ”Terminologi, beteckningssätt och uppställningstyper i den elementära matematikundervisningen” (1961), underkände termen innehållsdivision och angav att endast division skall användas för operationen. Det är ju rätt tänkt att man försöker generalisera för att förenkla men innebörden av de matematiska operationerna måste kunna verbaliseras för förståelse, varför de olika divisionstyperna bör nämnas.

Bråk och andra begrepp – jämför och förtydliga

En ansats till att presentera bokens genomgång av begrepp och samband (i den ordning matematik 1 c valt) men med tillägg av detta arbetes författare samt övrig matematisk litteratur och andra hjälpmedel följer här.

(Malmer 1984) beskriver talbegreppet och talskrivningen som ett område som inte får tillräcklig uppmärksamhet, i detta innehålls bl a tal i **bråkform, decimalform, procentform** [19] En jämförelse mellan dem verkar vara på sin plats i kapitlet om de rationella talen. Eftersom tal i **potensform** kommer i kapiteldelen efter rationella tal kan man lika gärna nämna dessa också (utan att bli för ingående).

Bråk definieras som ett uttryck av formen a/b. I uttrycket a/b kallas a täljare och b nämnare. Ett tal uttryckt som ett bråk sägs vara i bråkform.[20] Redan här kan man kanske fånga fler läsare/elever genom att visa andra former som tal kan uppträda i för att jämföra och kanske skapa igenkänning och samband.

Innan vi gör detta bör man titta på definitionen för bråk och rationella tal, de verkar ju vara samma sak? Nja, inte ens de två professorer i matematik, Christer Kiselman och Lars Mouwitz som skrivit ”Matematikterminologi för skolan” har lätt att svara på den frågan. I artikeln ”Vad betyder orden” i Nämnaren beskriver de svårigheten att definiera rätt på ett klurigt sätt. ”Ibland hävdas att bråk är en division, dvs en slags operation. Samtidigt används bråkform ibland för att representera rationella tal, och då är ju poängen att inte utföra någon operation. Och bråkformen är ofta användbar då man ska uttrycka resultatet av en division, inte själva divisionen. Är det inte dessutom en återvändsgränd att uppfatta bråk som en division med tanke på att våra elever ska kunna hantera formler och algebraiska omskrivningar och förenklingar i framtiden?
Man kan också fråga sig om bråk är ett slags tal, vi brukar till exempel säga att 3/7 och 6/14 är två olika bråk, trots att de representerar samma tal. Och bråk kan knappast heller vara de rationella tal som inte är heltal. Alla heltal kan ju faktiskt skrivas som bråk” [21]

Det är alltså inte lätt att begära att våra elever eller vi lärare som inte är matematik-professorer att alltid kunna leverera rätt definitioner. Ibland får man nöja sig med enklare definitioner för förståelse. Som Bruno Kevius uttrycker snyggt i sin matematiska terminologi, ”Ett bråk är icke annat än en betecknad (och olöst) division” [22]

---

[19] Malmer. G (1984) *Matematik ett ämne att räkna med,* Stockholm: Almqvist & Wiksell läromedel AB

[20] Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008) *Matematiktermer för skolan* Göteborgs universitet: NCM

[21] Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Vad betyder orden?* Nämnaren, nr4.

[22] Bråk http://matmin.kevius.com/brak.php

Ett rationellt tal

Ett rationellt tal KAN uttryckas i bråkform men också i annan form. Detta ger att rationella tal är alla heltal inklusive alla bråktal, och bråktalen, som alltså ingår i mängden av rationella tal, kommer att hamna mellan heltalen på tallinjen och så att säga fylla ut den. [23] Ett rationellt tal är enligt definitionen ett tal som är en kvot av två heltal, varav det andra inte är noll. Ett rationellt tal har dessutom en periodisk decimalutveckling. Vad är det då (om vi ändå vill jämföra med decimalform)?

Decimalform

Det är bra att decimalbegreppet introduceras i matematik 1c men det kommer först efter bråkbegreppet och kunde lika gärna kommit i anslutning till detta. Decimaltal är ett rationellt tal, som med ett **ändligt antal** siffror kan skrivas i decimalform
T ex är det rationella talet som i bråkform skrivs ¼ = 0,25 skrivet i decimalform
Nu återgår vi till decimalutvecklingar som kan se ut på följande sätt.

Decimalutvecklingar

Ändlig

Ändlig om talet är ett decimaltal, exempel 1/4 = 0,25 (ändlig decimal-utveckling), Matematik 1c visar tydligt på sidan 28 hur man omvandlar decimaltal till bråktal genom att i exemplet ovan skriva 0,25 som 25/100 och sedan förkorta till ¼ men det finns fler fall som kunde jämföras.

Oändlig och periodisk (upprepas)

Oändlig och periodisk om talet är ett rationellt tal, som inte är ett decimaltal

Exempel 12/37 = 0,324 324 324…

Eller $\frac{1}{4}$ = 0,250000000000…

Här är en intressant fördjupning som boken inte tar upp i hur man omvandlar ett sådant tal till bråkform.
Man kallar 0,324 324 324… för obekant, säg att vi kallar den för x.
Då är 1000x = 324,324 324 324… Tar vi sedan 1000x – x får vi differensen 999x som då är samma sak som att ta 324,324 324 324… - 0,324 324 324… vilket är lika med 324
Alltså är 999x = 324 och vi har fått ett uttryck för x som i bråkform kan skrivas 324/999.
Förkortar vi detta får vi 324/999 = 108/333 = 36/111 = 12/37.

[23] Heltal och Naturliga tal http://www.matteboken.se/lektioner/matte-1/tal/heltal-och-naturliga-tal

Oändlig och icke-periodisk

Oändlig och icke-periodisk om talet är ett irrationellt tal.
Här finner vi bland annat Pythagoras gamla ärkefiende $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730951… eller (arkimedes konstant) π = 3,141 592 653 589 793… eller (Eulers konstant) basen för de naturliga logaritmerna e = 2.71828182846…..
Dessa tal är ju ”spännande” i sig själva men fungerar framförallt som en jämförelse med de rationella talen.

Procentform

Procentbegreppet presenteras i matematik 1c i ett eget kapitel, skiljt från aritmetiken vilket är synd då bråkbegreppet kan förtydligas omedelbart genom introduktion av procent. Doug M. Clarke, Anne Roche och Annie Mitchell skriver i sin artikel “Practical tips for making fractions come alive and make sense” att många elever väljer att göra om bråk till decimalform eller procent när de stöter på problem som innehåller bråk. Detta flexibla tänkande bör uppmuntras, då särskilt procent verkar vara intuitivt meningsfullt för många elever. [24] Här finns det skäl att nämna att procent definieras som hundradel och att tecknet för procent är %. Vidare motsvarar 100% en hel. Alltså sägs ett tal med efterföljande procenttecken vara skrivet i procentform. Exemplet får bli 0,1 = 10/100 = 10%
En procentsats kan alltså sägas vara ett bråk med 100 som nämnare. Vidare behandling utöver jämförelsen av procentbegreppet kan lämnas till kapitlet procent.

Potensform

Potens är ett uttryck av formen b^x = och $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ när x är ett negativt heltal.

Potensen 2^{-2} är då lika med $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

För förståelse av rationella tal eller bråk kanske inte potensformen ger något konkret direkt användningsområde men det är ett alternativt sätt att uttrycka bråkform och kan fungera effektivt vid olika beräkningar (t ex vid division av ett bråk med ett annat bråk)
Ett intressant fall dock (om man uppskattar kopplingar mellan musik och matematik) är att i formeln för frekvensen f av den n-te tangenten på ett piano uppträder negativa heltal som exponent precis för tonen A i olika oktaver nedanför ”ettstrukna A” eller a^1.

Formeln för frekvensen ser i en form ut såhär f(n) = $2^{(n-49)/12} \times 440\,\text{Hz}$
Detta innebär att ”ettstrukna A” fås om man trycker på den 49:e tangenten vilket ger frekvensen $2^0 \times 440\,\text{Hz} = 440\,\text{Hz}$

[24] Clarke, DM, Anne Roche, A Mitchell, A (Mars 2010) *Tio sätt att göra bråk levande*, Nämnaren nr2

För ”ostrukna A”, eller bara a, kan man alltså finna vilken tangenten man ska trycka på genom att söka den negativa exponenten -1. Får att få denna måste man trycka ner den 37:e tangenten och får genom formeln $2^{-1} \times 440\,\text{Hz} = 110$ Hz. [25]

Exemplet är kanske långsökt men ger en konkret (och kanske rolig) verklighetsförankring av potensbegreppet som annars ofta stannar på det abstrakta planet.

Att kunna jämföra och använda de olika talformerna ger en flexibilitet i tänkandet och just översättandet mellan tal uttryckta på olika sätt kan hjälpa elever att få en bättre förståelse av rationella tal. [24]

Man kan genom talformerna kombinera tal uttryckta på flera sätt för att underlätta och utveckla elevernas hantering av dessa.

Slutresultatet kan ju kortare skrivas såhär.

Figur. Jämförelse av talformer.

Bråkform	Decimalform	Procentform	Potensform
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25$	$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25=25\%$	$\frac{1}{4} = 4^{-1}$

Bråkets definition i boken fungerar alltså översiktligt men saknar detaljerna som beskriver bråkets olika funktioner och skapar snabb förståelse. Wiggo Kilborn skriver att det är ofta inte bråket i sig som är svårt, utan själva konkretiserandet av bråket varför valet av didaktisk teori är viktig.[26] Han framhåller dock också i den inspelade föreläsningen ”Bråk, decimaler och procent” att all matematik inte handlar om att konkretisera utan även att definiera och abstrahera och acceptera logiska regler. Men man bör konkretisera där det är möjligt. Ingenjören som ska prata med förmannen på bygget, läraren som ska prata med eleverna i klassrummet (eller en bra kursbok som behandlar bråk) måste ge uttryck för ett språk som ger förståelse. Så fort konkretiseringen är klar för förståelsen kan man abstrahera. [27] Konkretisering av bråk är ju på gymnasienivå oftast inte laborativ som i grundskolan med fysiska hjälpmedel som pengar, bråkstavar (cuisenairstavar), klockor, papper, OH-plast mm. Den kan snarare innebära att man rör sig gränslandet mellan att vara abstrakt och konkret som ovan genom jämförelser med tal, begrepp och samband samt lättförståeliga beskrivningar av dessa.

[25] Piano key frequencies http://en.wikipedia.org/wiki/Piano_key_frequencies

[26] Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2 : rationella och irrationella tal.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

[27] Kilborn, W (2010) *Bråk, decimaler och procent* UR Samtiden – Underbar matematik, http://www.ur.se/Produkter/161032-UR-Samtiden-Underbar-matematik-Brak-decimaler-och-procent

Bråkets olika skepnader

Fler saker kan kompletteras till Matematik 1c beskrivning av bråkets roller, vad bråk faktiskt kan vara. Det är möjligt att arbetet med bråkräkning i grundskolan tar upp dessa olika ”innebörder” av bråk men att eleverna i dessa åldrar har möjlighet att språkligt kunna diskutera kring dem och framförallt behålla kunskapen till gymnasiet verkar inte vara fallet.
Wiggo Kilborn pekar på stora kunskapsbrister hos elever när det gäller bråk och decimaltal. Eftersom bråkräkning är en viktig förkunskap till algebran får bristerna stora konsekvenser för elevernas möjligheter till högre studier. [26] Vad högre studier innebär kan ju diskuteras men grunderna för matematik som innefattar förståelsen av t ex bråkens användningsområden borde finnas i aritmetikdelen i matematik 1c.

På följande sätt kan bråken representeras som

Ett tal

Talet 2/5 har en plats på tallinjen, precis som de hela talen. (Kilborn, 1999)
Genom att förlänga bråket till 4/10 ser vi att talet är detsamma som decimaltalet 0,4.
Det kan noteras och framläggas för eleverna att man i uttrycket 2/5 kan skilja mellan bråkstrecket (som noterar ett tal) och divisionstecknet (som noterar en aritmetisk operation) (Kilborn & Löwing 2002)

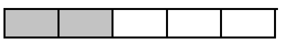
Figur. tallinjen med talet 2/5 inskrivet.

```
I----I----I----I----I----I
0         2/5            1
```

Del av en hel

En hel som delas upp i ett antal lika stora delar. Vilket namn delen/delarna får beror på antalet delar. (Malmer G, 1999). [28] 1/5 är en beteckning för en del av fem. 2/5 av en kaka betyder att en kaka har delats i fem delar och att man tagit två av dessa. (Kilborn & Löwing 2002)

Figur. 2/5 av en kaka.

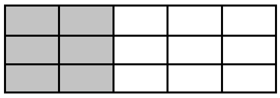


[28] Malmer, G (1999) *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur

Del av ett antal

För att kunna ”ta” flera delar av ett antal måste man ta reda på hur mycket en del är.
För att t ex kunna ”ta” eller få fram (hur många) 2/5 av 15 är så måste man ta reda på hur mycket (hur många) 1/5 av 15 är. Det kan man göra genom att dela 15 i 5 grupper. En av dessa grupper omfattar då 1/5 av 15 (eller 3 rutor). Två av dessa grupper utgör 2/5 av 15 (eller 6 rutor) (Kilborn, 1999)
Själva bråket som man använder för att bestämma delen av något kan ges benämningen operator. [29] Tar man t ex 2/5 av 15 (2/5 * 15 = 6) så är 2/5 operatorn och 15 vår valda helhet eller delmängd.

Figur. 2/5 av 15.



Proportion eller andel.

Delen eller delarna är bestämda men oberoende av helheten.
T ex 2/5 kan ju skrivas som 40%. Men både 2/5 (ibland) och särskilt 40% är en proportion som saknar antalsbetydelse eller storlek. Det är först när det är en proportionen av något annat som det blir ett tal.
Ett exempel är t ex om jag som ägare i ett bolag ska ha 2/5 av vinsten, då är min del av vinsten oberoende av den totala vinstens storlek. (Kilborn, 1999)

Förhållande eller relation

Här uppträder bråket 2/5 i formen 2 kg salt för 5 kronor., alltså som förhållandet 2 till 5 där 2 och 5 har olika enheter. (Kilborn & Löwing 2002).
Ett exempel är den klassiska saftblandningsrelationen där blandningens koncentration uttrycks som 1 till 4, 1 del koncentrerad saft till 4 delar vatten. Här är helheten 5 delar och den koncentrerade saftens del är 1/5 av den totala helheten, men förhållandet mellan koncentrerad saft och vatten är 1 till 4, 1:4 och den är allmängiltigt, dvs det gäller för alla volymer drickfärdig saft som ska blandas. Man kan också ta exemplet det går 2 armar på en människa även om så alltid inte är fallet.

[29] Clarke, DM, Anne Roche, A Mitchell, A (Mars 2010) *Tio sätt att göra bråk levande*, Nämnaren nr2

Att räkna med bråk

Här tar matematik 1c upp räknereglerna för bråk. Addition, subtraktion, multiplikation och division med bråk sammanfattas på en sida (s.23) Räknereglerna förutsätts av boken vara bekanta för läsaren och det är de kanske men ett par tillägg skulle ändå kunna göras för att återkoppla till bråkens skepnader.

Additionen och subtraktion av bråk

Detta beskrivs genom att bråktal med olika täljare och nämnare ska adderas och subtraheras. Det som förutsätts här men bör nämnas är att de olika bråken måste vara bråkdelar av samma helhet eller storhet. Skulle de inte vara det blir uppgiften meningslös.

I additionen $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ måste respektive bråk vara delar av samma storhet

Belysande exempel: $\frac{5}{6}$ av 3 är $\frac{5}{6}$ av en storhet, nämligen talet 3 men $\frac{5}{6}$ av 4 är också $\frac{5}{6}$ fast av en annan storhet, nämligen talet 4. Båda delarna av storheterna säger man är $\frac{5}{6}$ men det som man tar $\frac{5}{6}$ av (3 eller 4) är olika stora tal.

Multiplikation av bråk

Multiplikation av bråktal beskrivs i matematik 1c med ett exempel som ger att för att lösa uppgiften så multipliceras täljare och nämnare var för sig.

Wiggo Kilborn nämner exemplet att ”ta en” tredjedel av ett heltal vilket i slutändan innebär division och är lätt att konkretisera och förstå. [30]

En tredjedel av tre uttrycks $\frac{1}{3} \times 3 = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 1$ medan

En tredjedel av två femtedelar är svårare att konkretisera. $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

Naturligtvis går detta att visa ganska enkelt men här är ett intressant läge igen i vilket Kilborn anser att det kan vara läge att skriva att man befinner sig i gränslandet mellan konkretisering och abstraktion och diskutera innebörden av detta. Det finns tydligen en matematik för matematiker och en för gymnasieelever men både konkretiseringen och abstraktionen (ett mer rent matematiskt förhållningssätt) bör finnas med.

---

[30] Kilborn, W, (2010) *Bråk, decimaler och procent* UR Samtiden – Underbar matematik,

Division av bråk

Matematik 1 c beskriver att division med två bråktal ger samma resultat som att multiplicera nämnarbråket med täljarbråkets inverterade tal. Här visas uträkningen genom att både täljarbråket och nämnarbråket förlängs med detta inverterade bråktal. [31] ”Tricket” med det inverterade bråket ger ett effektivt räkneverktyg som dock inte nödvändigtvis kräver förståelse för vad man faktiskt gör. Rikard Bögvad visar samma ”trick” i sin Algebra 1 samt två andra typfall som man bör kunna utantill. [32]

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad \text{och} \quad \frac{1}{\frac{1}{b}} = b$$

Denhär sortens typfall och den statiska räknekunskapen är nödvändig men det får inte stanna på den nivån, konkretiserandet bör finnas när det är möjligt.

Det är alltså en effektiv metod för själva beräkningen men här (då man inte kan använda delningsdivisionstänkandet bör man koppla till innehållsdivisionen igen för att förstå vad man gör [33]

Konkret exempel: $\frac{4}{3} / \frac{1}{6} = \frac{8}{6} / \frac{1}{6} = 8$

”$\frac{4}{3}$ (eller förlängt $\frac{8}{6}$) innehåller $\frac{1}{6}$ 8 gånger”

Det vi gjort istället för att bara invertera ett av bråken är att tolka uppgiften som ”hur många gånger innehålls $\frac{1}{6}$ i $\frac{4}{3}$? Sedan har vi gjort bråken liknämniga för att se proportionen mellan täljar- och nämnarbråket. Intressant är att det då bara blir en fråga om hur många gånger den högra täljaren går upp i den vänstra.

Ytterligare ett konkretiserat exempel $\frac{3}{4} / \frac{1}{4}$ kanske ser svårt ut men Kilborn förenklar ”hur många kvartar går det på tre kvart”? Lättare? [27]

[31] L. Alfredsson, H. Brolin mfl (2011) *Matematik 5000, blå kursbok 1c*, Stockholm: Natur och kultur

[32] Bögvad, R (2012) *Algebra 1*, matematiska institutionen SU, fjärde tryckningen

[33] Löwing, M. och Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik* : för skola, hem och samhälle. Lund: Studentlitteratur.

Avslutning

Matematik 1c avslutar bråkbehandlingen efter räknereglerna för bråk och sedan följer olika sektioner med bråkrelaterat material utspritt över aritmetikkapitlet och i form av olika arbetssätt i boken.

Matematik 1c har i sin behandling av rationella tal och bråk en stor uppgift i sin teoretiska utformning. Det är komplicerat att presentera ett teoretiskt material som innefattar så många begrepp och samband och tangerar till flera andra områden om man har ambitionen att vara både detaljerad, övergriplig och komprimerad. Dock verkar det som om boken i denna del tenderar till viljan att stanna på ett kortfattat och övningspraktiskt matematiskt plan.
Många begrepp och samband förutsätts läsaren vara förtrogen med och innebörden av samband och räkneregler ges liten plats. Man får intrycket av att förståelsen och de olika förmågor som ska utvecklas hos läsaren ska komma mer genom olika former av övningar än genom en utförlig presentation som ska ge djup förståelse för olika fenomen.
Det blir lite som Sven Ove Hansson nämner i sin skrift ”Konsten att vara vetenskaplig” Att eleverna genom handlingskunskap, *techne,* kommer att nå faktakunskap, *episteme,* när det kanske borde vara tvärtom. [34] Det blir en hönan och ägget- konstruktion (lär jag mig det jag behöver kunna genom teorin eller måste jag lösa uppgifter för att förstå den?) Matematiken är till sin natur abstrakt och generell och har sin egen notation och terminologi där begrepp och samband kan uttryckas med tal och symboler. Dock kan man sällan ge skolelever (eller människor i största allmänhet) samma egenskaper. Jag har i mitt arbete med bråkbegreppet försökt ge en mer ingående presentation av matematikens syfte genom att använda ett språk som jag tror att fler förstår och jag konkretiserar mer i ett försök ge en mångdimensionell syn på de moment som matematik 1c tar upp.

Matematik 1c vill att eleverna ska utveckla sju förmågor som ska prägla deras arbetssätt med matematiken. Begrepp, Procedur, Problemlösning, Modellering, Resonemang, Kommunikation och Relevans. Dock uppfyller bokens eget upplägg i denna del inte flera av dessa förmågor. I analysen av förekomsten av elevens förutsättningar att tillgodogöra sig dessa finns tyvärr för få representerade. (i alla fall som teoretiskt beskrivna)
Upplägget i boken biter sig själv i svansen och man ges en känsla av kräftgång då begrepp, samband och jämförelser inte förklaras och man förstår inte riktigt varför olika moment presenteras där de gör.

- Räknesätt betonas i teoridelarna och beskrivs, men inte vad det är man gör

- Förståelsen för vad räknesätten handlar om ska (avsiktligen?) komma genom övningsuppgifterna

- Övningsuppgifter och arbetssätt tar upp saker som teorin inte gjort.

---

[34] Hansson S O (2007) *Konsten att vara vetenskaplig* , Institutionen för filosofi och teknikhistoria, KTH

Wiggo Kilborn ställer också sig mot detta och påstår att fokus ofta ligger mer på att analysera förmågor istället för på konkretisering och abstraktion och att faktiskt lära sig och kunna räkna rätt. [35] Hur välmenande det än är att vilja mäta elevernas förmågor så kunde i alla fall lika mycket energi läggas på att skriva utförliga matematikböcker som på att bedöma uppnådd kunskap.
I John Hattie banbrytande studie ”Visible Learning” nämns att lärare behöver röra sig från de enskilda idéerna till mångfalden av idéer, relatera till dessa och sedan erbjuda dem så att eleverna konstruerar och rekonstruerar kunskap och idéer. Det är inte kunskapen eller idéerna, utan elevernas konstruktion av denna kunskap och dessa idéer som är det kritiska. Vi måste också ifrågasätta lärarnas uppfattningar, förväntningar och begrepp och ställa oss frågan varför dessa leder lärarna till att fatta beslut om vilket undervisningsmaterial som ska användas utan att ta hänsyn till några argument (andra än att materialet använts förut) om att det är det optimala.[36] Nu fokuserar ju Hattie huvudsakligen på de kognitiva och psykologiska processer som sker mellan lärare och elever i klassummet men man kan tolka det som att lärarna försöker spegla undervisningsmaterial så gott de kan för att ge eleverna rätt kunskap. Då bör ju ett mer utförligt undervisningsmaterial ge eleverna bättre förutsättningar att tillgodogöra sig kunskap och samtidigt ge lärare en lättare uppgift i att spegla detsamma. Enligt Hattie ifrågasätts inte befintlig kurslitteraturs metod eftersom den är framtagen av experter som ”vet” vad det generellt bästa för elever är just idag.

Arne Engström (1997) beskriver också att ifrågasättandet av befintlig matematisk presentation inte alltid saknar grund. När matematiska begrepp introduceras och analyseras genom t ex modeller eller cirklar som matematik 1c så görs detta i avsikt att dessa modeller ska ligga nära begreppets matematiska struktur. När begreppsbildningen sedan befästs genom övningar ska eleverna tillämpa kunskapen i praktiska situationer dvs i en text. Att eleven genom detta ska kunna se de för läraren uppenbara begreppen eller strukturerna är inte alltid så troligt. [37] Precis som jag antytt beror elevens tolkning på de erfarenheter och det språk som han eller hon utvecklat och den utvecklingen i rätt riktning kan en brett belysande läromedel hjälpa till med.

Harry Lindholm berättar i sin artikel ”Glimtar ur matematikens historia” om den grekiske filosofen och matematikern Platon. Han var han inte intresserad av teknik, experiment och praktiska problem. Hans synsätt kom att prägla inriktningen av studier vid skolor och universitet under medeltiden och långt fram i nyare tider. Enligt Platon var sökandet efter kunskap inte till för att lösa praktiska problem, det var något för att utveckla själen. Platon ansåg att den dåtida grekiska matematiken var väl lämpad för detta. Matematikens abstrakta begrepp, som endast fanns i idéernas värld, och dess höga krav på logisk bevisföring tilltalade honom. Antika författare vittnade om att över ingången till den tomt där han undervisade skall det ha stått att läsa: ”Må ingen som är okunnig i geometri här inträda” [38] Såhär kan nog matematiken uppfattas av elever och även blivande lärare i matematik.

[35] Kilborn, W (2010*) Bråk, decimaler och procent*” UR Samtiden – Underbar matematik,

[36] Hattie, J (2011) *Synligt lärande, Presentation av en studie om vad som påverkar elevers studieresultat*, Stockholm: SKL

[37] Engström, Arne. (1997). *Reflektivt tänkande i matematik – Om elevers konstruktioner av bråk.* Malmö: Graphic Systems AB

[38] Lindholm H (1985) *Glimtar ur matematikens historia* Nämnaren nr1

Att den är något som inte är avsedd att förstås av alla för att den är abstrakt och inte avsedd att förklaras genom kopplingar till vår verkliga värld.

Bengt Ulin skriver flera bra saker om matematiken som skolämne i sin bok ”Att finna ett spår”. Han betonar att matematiken är ett övningsämne, arbetet med förståelsen handlar många gånger om att öva upp sin kunskap genom repetition, om och om igen.
Det första mötet med en aritmetisk formel eller det första lösta övningsexemplet ger bara en glimt av innehållet. Men vi pedagoger kan skapa förutsättningar för att matematiskt innehåll tränger djupare in i eleven än om vi endast skulle tala som en bok. [39] (Här kan man ana att boken som avses är en matematikbok som ges egenskapen oinspirerande?)
Men jag tror inte att det behöver vara så. Genom att konstruera läromedel som inledningsvis eller vid flera tillfällen kan återknyta till något vackert, tankeväckande eller skapa en atmosfär av spänning så ger man läsaren möjlighet att få mer levande minneskunskaper av innehållet.

Dock blir det slutligen en fråga om matematikens natur och mening och huruvida avsikten med en matematikboks upplägg mottas av olika läsare. En mer ren matematisk presentation är ofta mer abstrakt och matematiken i sig själv behöver inget vardagskonkretiserande eller fyrverkerier för att fungera.
Däremot behöver vi människor som ska tolka matematiken levande konkretiserande för att förstå den och för att kunna göra den till en del av vår verklighet.

[39] Ulin Bengt (1988) *Att finna ett spår – motiv och metoder i matematikundervisningen*, Stockholm: utbildningsförlaget

Källor

Böcker och artiklar

Alfredsson, L, Brolin, H mfl (2011) *Matematik 5000, blå kursbok 1c*, Stockholm: Natur och kultur

Axling, O (hämtad 20130314) *Tutanchamons och Hammurapis matematik ca 2000 f.Kr* Linköping: matematiska institutionen www.math.liu.se/~olaxl/kurser/LIMGB1/.../limgb1Fo1,2.pdf

Barman W, (Hämtad 20130317) *Matematik för högstadiet*, http://barman.fi/matematik/brak/tillampningar.html

Berglund, L (2009) *Tal och mönster*, Studentlitteratur

Bögvad, R (2012) *Algebra 1*, matematiska institutionen SU, fjärde tryckningen

Clarke, DM, Anne Roche, A Mitchell, A (Mars 2010) *Tio sätt att göra bråk levande*, Nämnaren nr2

Engström, Arne. (1997). *Reflektivt tänkande i matematik – Om elevers konstruktioner av bråk.* Malmö: Graphic Systems AB

Hansson S O (2007) *Konsten att vara vetenskaplig* , Institutionen för filosofi och teknikhistoria, KTH

Hattie, J (2011) *Synligt lärande, Presentation av en studie om vad som påverkar elevers studieresultat*, Stockholm: SKL

Johansson, B.G (2004) *Matematikens historia* Studentlitteratur AB

Johnsen HØines, M. (1990). *Matematik som språk* : *verksamhetsteoretiska perspektiv*. Malmö: Liber Ekonomi.

Kaijser, S (hämtad 20130312) *De matematiska begreppens historia* http://www2.math.uu.se/~sten/mhd/matbetot.pdf

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2 : rationella och irrationella tal.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*, Göteborgs universitet: NCM

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Vad betyder orden?* Nämnaren, nr4.

Lindholm H (1985) *Glimtar ur matematikens historia* Nämnaren nr1
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5257_85-86_1.pdf

Lundqvist, S (1987) *Konkretion vid bråkräkning* Nämnaren nr 1
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2427_87_1.pdf

Löwing, M. och Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik* : för skola, hem och samhälle. Lund: Studentlitteratur.

Malmer. G (1984) *Matematik ett ämne att räkna med,* Stockholm: Almqvist & Wiksell läromedel AB

Malmer, G (1999) *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur

Tambour, T *Bråk och bråkräkning*, matematiska institutionen SU
kurser.math.su.se/mod/resource/view.php?id=21437

Ulin Bengt (1988) *Att finna ett spår – motiv och metoder i matematikundervisningen*, Stockholm: utbildningsförlaget

Citat

Weil, Simone (1909-1943)

Uppslagsord – (Samtliga är vägda mot *Matematiktermer för skolan* av Kiselman, C. & Mouwitz, L.)

Bråk	http://matmin.kevius.com/brak.php
Heltal och Naturliga tal	http://www.matteboken.se/lektioner/matte-1/tal/heltal-och-naturliga-tal
Imaginära tal	http://sv.wikipedia.org/wiki/Imagin%C3%A4ra_tal
Piano key frequencies	http://en.wikipedia.org/wiki/Piano_key_frequencies
Real number	http://en.wikipedia.org/wiki/Real_number
Ratio	http://en.wikipedia.org/wiki/Ratio
Rational Number	http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_number

Strömmande media

Kilborn, W (2010) *Bråk, decimaler och procent* UR Samtiden – Underbar matematik, http://www.ur.se/Produkter/161032-UR-Samtiden-Underbar-matematik-Brak-decimaler-och-procent

Sautoy, Marcus du (2008) *The story of maths part 5*, BBC Four
http://www.dnatube.com/video/6537/History-of-Mathematics-part5