SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Schemaläggning 90/10 - Ett linjärt optimeringsproblem

av

Joakim Wennlund

2014 - No 11

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Schemaläggning 90/10 - Ett linjärt optimeringsproblem

Joakim Wennlund

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, Grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2014

Schemaläggning 90/10

Ett linjärt optimeringsproblem

Joakim Wennlund

Matematiska institutionen

Matematik för lärare, självständigt arbete på grundnivå, MM6003, (15 hp)

Matematik

Vårterminen 2014

Handledare: Torbjörn Tambour

Examinator: Yishao Zhou

Stockholms universitet

Schemaläggning 90/10

Ett linjärt optimeringsproblem

Joakim Wennlund

Sammanfattning

Ett företag planerar att ändra sin schemaläggning. Idén med den nya schemaläggningen är att ge bättre förutsättningar för full bemanning vid sjukfrånvaro av personal. I den här uppsatsen redovisas ett förslag på matematisk metod för att ta fram det nya schemaläggningssystemet, och beräkningar enligt denna matematiska metod utförs. Metoden går kortfattat ut på att ställa upp, och lösa, ett linjärt optimeringsproblem med bivillkor som tar hänsyn till önskemål på schemats utformning från såväl arbetsgivare som arbetstagare.

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Ett välkänt problem för företag som har skiftarbete och en undre gräns för bemanning, är att göra en effektiv schemaläggning. I ett sådant ärende har jag fått kontakt med företag A, som har en idé om en ny arbetstidsmodell med schemaomläggning för medarbetarna på en av sina avdelningar, BF-enheten. Min del i det hela är att utforma en matematisk modell för hur en optimal schemaomläggning skulle kunna genomföras.

Företag A formulerar själva bakgrund och problembeskrivning av sitt förslag till ny arbetstidsmodell för medarbetare på BF-enheten som arbetar obekväm arbetstid enligt följande:

> Verksamheten på företag A sätter höga krav på kompetens och erfarenhet på arbetslaget. Handläggare och beslutsfattare är kompetensmässigt svåra att ersätta med timvikarier eller bemanningspersonal. […] Det rättsliga ramverket inom arbetsrätten sätter begränsningar på verksamhetens optimala bemanning med anledning av att ordinarie personal har arbetsrättsligt svårt att ersättas vid frånvaro, vilket resulterar i en osedvanligt hög övertidskostnad. […] Därmed presenteras ett nytt förslag till en ny arbetstidsmodell som utgår från 90/10 schema. Syftet med detta schema är att vikarieanvändning minskar, övertiden minskar utan att verksamhetens målsättningar inte [sic!] förändras samt att medarbetarna upplever en bättre återhämtning och egenstyrning av sin tid. Vidare innebär den nya arbetstidsmodellen att varje medarbetare får mer förutsägbarhet i sin arbetssituation (Företag A, 2013).

Som ett led i kvalitetsarbetet på företaget A, lades alltså som förslag att göra en förändring av schemaläggningen för arbetslaget på BF-enheten enligt en arbetstidsmodell som utgår från så kallat 90/10 schema. I företag A:s, arbetslaget på BF-enhetens fall innebär detta att deras nya månadsschema har sin grund i arbete på pass motsvarande 84 procent av tiden för en heltidstjänst. Utöver dessa 84 procent får de anställda rycka in som jourpersonal till ett antal arbetspass varje månad motsvarande 6 procent av tiden för en heltidstjänst, så att de varje månad kommer upp till arbete motsvarande 90 procent arbetstid. Detta fungerar i praktiken så att de anställda inför varje månad utöver sina ordinarie pass motsvarande 84 procent av tiden för en heltidstjänst registrerar sig för jourpass motsvarande 16 procent av tiden för en heltidstjänst, och är beredda på att rycka in på begäran på dessa jourpass. I de fall de anställda inte kommer upp i 90 procent arbetstid på en månad på grund av att de inte kallats in på jourpass i tillräckligt hög utsträckning, kommer ej något löneavdrag att göras. Det kommer alltså – för varje arbetstagare varje månad – alltid att återstå minst 10 procent av de anställdas ursprungliga arbetstid vid fulltidsarbete, och de anställda i arbetslaget på BF-enheten får fritt nyttja denna tid för återhämtning och hälsofrämjande åtgärder. För att kompensera för den minskade arbetstiden för de anställda på BF-enheten så kommer ytterligare en person att anställas på BF-enheten.

Syftet för företag A med denna schemaomläggning kan sägas vara två: Att öka kvaliteten i utfört arbete och att minska kostnaderna för frånvaro. Denna uppsats behandlar det matematiska optimeringsproblem som kan ställas upp vid ett eventuellt införande av 90/10 schema på företag A. Ställningstaganden angående den inverkan införandet av 90/10 schema kan ha på personalen på BF-enheten är ointressanta ur matematisk synvinkel, eftersom dessa är rent spekulativa. Ett sådant ställningstagande kommer därför endast nämnas när det uttalats av någon ur personalen på BF-enheten, i fall där detta ställningstagande har påverkat min formulering av ett bivillkor för optimeringsproblemet med schemaomläggningen. Anledningen till att jag tar hänsyn till vissa synpunkter från någon personal på BF-enheten är följande: Om min modell för schemaomläggning enligt 90/10 schema ska vara intressant för företag A, så är det en förutsättning att personalen på BF-enheten är välvilligt inställda till att prova att arbeta enligt min schemamodell.

1.2 Syfte

Schemamodellen som ska utarbetas syftar till att optimera effektiviteten för arbetslaget på BF-enheten. Genom införandet av ett 90/10 schema ska stress och sjukdom förebyggas hos arbetslaget, samt i de fall dessa skadliga faktorer trots detta blivit påtagliga, ge tid för vila och konvalescens. Önskemål från såväl arbetsledningen som arbetslaget på BF-enheten om bivillkor för hur schemat ska utformas ska tas i beaktande vid utformandet av förslaget på ett ramschema enligt 90/10. Ramschemat beskriver vilka dagar som är lediga från såväl ordinarie pass som jourpass, samt ger en bild av hur ordinarie pass och jourpass utan särskiljning idealt skulle placeras. Jag lämnar till arbetsledningen på företag A att tillsammans med arbetstagarna på BF-enheten bestämma placeringen av jourpass. Det jag arbetar med är en modell för hur konstruerandet av detta ramschema som beskrivits ovan skulle kunna se ut på företag A. De bivillkor som ställs upp är uppställda utifrån tänkbara önskemål från arbetare respektive arbetsledningen på företag A. Jag presenterar i avsnitt **3 Metod**, och **3.1 Schemaspecifikationer** en rad möjliga åsikter från arbetstagare och arbetsledning på hur schemat ska se ut. Dessa bildar tillsammans ett scenario som jag utgår från när jag gör beräkningar för framtagning av ett förslag på nytt ramschema i avsnitt **3.2 Matematisk modellering.** Genom att arbeta utifrån ett tänkt scenario är förhoppningen att på förhand kunna visa för arbetstagare och arbetsledningen på företag A hur det skulle kunna vara möjligt att ta hänsyn till olika önskemål vid införande av 90/10 schema och på så sätt få ett bättre optimerat schema för alla berörda parter.

2 Teoretiskt ramverk

Den teoretiska lösningsmetod som använts i denna uppsats för att få svar på mina forskningsfrågor är lösning med hjälp av linjär optimering. Schemaläggningsproblemet som jag arbetar med har alltså ställts upp som ett linjärt optimeringsproblem. Det huvudsakliga studieobjektet i ett optimeringsproblem, oavsett typ, är en reell-värd funktion f, som är definierad på en mängd F:

$$f: F \to \mathbb{R} \text{, där } \mathbb{R} \text{ är mängden av alla reella tal,}$$

och optimeringsproblemet är att bestämma ett $\hat{\boldsymbol{x}} \in F$ som minimerar f, det vill säga,

hitta ett $\hat{\boldsymbol{x}} \in F$ sådant att för alla $\boldsymbol{x} \in F$, så gäller det att $f(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq f(\boldsymbol{x})$ (Sasane & Svanberg, XXXX). I optimeringsproblem är F en delmängd till $\mathbb{R}^n$, det vill säga F är en radvektor med n stycken element. Grunduppställningen av ett optimeringsproblem är:

$$\begin{cases} minimera: f(\boldsymbol{x}), \\ \quad f\text{ör } \boldsymbol{x} \in F \end{cases}$$

där $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

är vektorn för de inräknade variablerna, $\boldsymbol{x}$ antar värden i $\mathbb{R}^n$, F är en given delmängd till $\mathbb{R}^n$, och f är en given reell-värd funktion som är definierad på F (Ibid.). Vid lösning av optimeringsproblemet väljer man ut dessa n stycken variabler $x_1, \dots, x_n$ som man valt att ta hänsyn till vid uppställningen av problemet (Svanberg, 2007). Dessa variabler tilldelas olika värden som på bästa möjliga sätt ska avbilda den verkliga situtationen, genom att en på förhand uppställd målfunktion antar så låga värden som möjligt vid beräkningar med variablernas värden, samtidigt som vissa givna bivillkor ska bli uppfyllda (Ibid.).

2.1.1 Linjär optimering

Om den aktuella funktionen $f(x)$ i grunduppställningen för ett optimeringsproblem ovan är en linjär funktion, och om lösningsmängden F ges av en samling linjära olikheter, kallas optimeringsproblemet för ett linjärt optimeringsproblem[LP-problem] (Sasane & Svanberg, XXXX). Ett LP-problem har följande form:

$$\begin{cases} minimera: \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ \quad d\text{å } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \end{cases}$$

där $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ är givna vektorer, och $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m*n}$ är en given matris. Det finns m stycken skalära olikheter i $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$. Ett LP-problem är med andra ord ett specialfall av ett optimeringsproblem med formen

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x},$$

där $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (som antar värden i $\mathbb{R}^n$) är variabeln, och $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ ($\in \mathbb{R}^n$) är en vektor med konstanter.

Mängden F är mängden punkter i $\mathbb{R}^n$ som uppfyller en samling linjära olikheter:

$$a_{i,1} x_1 + \cdots + a_{i,n} x_n \geq b_i\,, \quad i \in \mathbf{I}, \text{ och } F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\} \text{ (Ibid.).}$$

LP-problemet ser alltså ut som följande: givet ett sådant $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$, minimera f, det vill säga hitta ett $\widehat{\boldsymbol{x}} \in F$ sådant att för alla $\boldsymbol{x} \in F$, så gäller att $f(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq f(\boldsymbol{x})$. Ett $\widehat{\boldsymbol{x}}$ som uppfyller detta villkor kallas för en tillåten lösning (Griva et al., 2009).

LP-problemet på formen

$$\begin{cases} minimera: \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ då\ \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \end{cases}$$

transformeras till formen

$$\begin{cases} minimera: \tilde{\boldsymbol{c}}^T \widetilde{\boldsymbol{x}}, \\ då\ \widetilde{\boldsymbol{A}} \widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \widetilde{\boldsymbol{b}}, \\ \widetilde{\boldsymbol{x}} \geq 0 \end{cases}$$

enligt följande:

Vi har att $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. För varje x_j där $j = 1, \ldots, n$ så inför vi två variabler $x_j^+ \geq 0$ och $x_j^- \geq 0$ så att $x_j = x_j^+ - x_j^-$. Låt $\widetilde{\boldsymbol{x}} = [x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+, x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Vi får att $\tilde{\boldsymbol{c}} = [\boldsymbol{c}^T, -\boldsymbol{c}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{A}]$ och $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}$, vilket bevisar att transformationen är korrekt.

Vidare transformeras LP-problemet på formen

$$\begin{cases} minimera: \tilde{\boldsymbol{c}}^T \widetilde{\boldsymbol{x}}, \\ då\ \widetilde{\boldsymbol{A}} \widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \widetilde{\boldsymbol{b}}, \\ \widetilde{\boldsymbol{x}} \geq 0 \end{cases}$$

till formen

$$\begin{cases} minimera: \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ då\ \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \end{cases}$$

enligt följande:

Vi har att $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{b}} \\ (0, 0, \ldots, 0)^T \end{bmatrix}$ där antalet nollor är n stycken.

Ovanstående rad visar att transformationen är korrekt.

LP-problemet kan uttryckas på ett mer överskådligt sätt enligt följande:

Minimera $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Bivillkor: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \ge b_i, \quad i = 1, \dots, m$ (¤) (Svanberg, 2007)
$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$

Alltså kan $c^T x$ skrivas om som $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ och ekvationssystemet $\boldsymbol{Ax} \ge \boldsymbol{b}$ kan skrivas som
$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \ge b_i, \quad i = 1, \dots, m$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$

Detta kan uttryckas i ord på följande sätt:

Funktionen $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ska minimeras. Det gäller att x_j är variabeln och c_j representerar kostnaden per enhet av variabeln x_j. Som bivillkor för minimeringen av z gäller att $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \ge b_i, \quad i = 1, \dots, m, \; x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n$. Varje element b_i för ett visst *i* ska alltså vara mindre än eller lika med en linjärkombination av elementen $a_{i,j}$ (för ett givet *i*), där antalen för $a_{i,j}$ ges av x_j. Bivillkoret i LP-problemet kan alltså beskrivas som att minimeringen av z ska ske så att det gäller för vektor $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ att varje rad *i* ska vara mindre än eller lika med en linjärkombination av $a_{i,j}$ för varje sådant *i* med $j = 1,2, \dots, n$, där $a_{i,j}$ är antal enheter av någonting som ingår per enhet av variabeln x_j. (Ibid.).

Det ovan nämnda sättet (¤) att överskådligt uttrycka ett LP-problem med olikhetsbivillkor kan även transformeras reversibelt till ett problem med likhetsbivillkor med bibehållet teckenkrav på variablerna, det vill säga:

Minimera $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Bivillkor: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$ (Ibid.)
$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$

Denna form, kallad *standardformen*, är den som jag utgår från i mitt behandlande av LP-problem i denna uppsats.

3 Metod

För att det ska kunna bli aktuellt med införandet av ett 90/10 schema för arbetslaget på BF-enheten så är det en förutsättning att en majoritet av personalen är välvilligt inställda till denna omställning. Därför är det av stor vikt att ta hänsyn till personalens önskemål gällande arbetspassen utformning et cetera. Detta är något som jag vill visa är fullt möjligt att ta hänsyn till. Därför ställer jag upp tänkta önskemål från arbetsledningen respektive arbetstagarna på BF-enheten. Sedan tar jag hänsyn till tänkta önskemål vid formulerandet av bivillkor för det LP-problem som jag ska ställa upp för att ta fram ett förslag på 90/10 schema. Jag arbetar utifrån scenariot att det på företag A finns en tillsatt arbetsgrupp som har lagt fram ett förslag med ramar för konstruerandet av det nya 90/10 schemat. Personalen på BF-enheten har därefter getts möjlighet att framföra sina åsikter om möjliga styrkor respektive svagheter med arbetsgruppens ovan nämnda ramverk för 90/10 schema. I de fall där en möjlig svaghet identifierats av en majoritet i arbetslaget så har jag försökt att eliminera förekomsten av denna i mitt schemaförslag. Grundförutsättningarna för min lösningsmetod bygger på att bestämma vissa delar av schemat på förhand då det gäller gemensamma konsensusbeslut av arbetstagarna och arbetsledningen på BF-enheten. Dessutom införs bivillkor i mitt LP vilka minimerar missbehagande inslag ur personalens synvinkel i modellen på nytt 90/10 schema.

En mycket central aspekt av införandet 90/10 schema på företag A är att varje arbetstagare på BF-enheten kommer att ha två olika scheman att ta hänsyn till varje 13-veckorsperiod: Ett **ramschema** med schemaläggning motsvarande 100 procents arbetstid, och ett **grundschema** med schemaläggning motsvarande 84 procents arbetstid. Det är grundschemat med 84 procents arbetstid som arbetarna följer i alla lägen, och de ytterligare 16 procents arbetstid som är tillagda på schemat med 100 procents arbetstid är jourpass som de anställda ska vara beredda att hoppa in på. Dessa 16 procents arbetstid motsvarar ungefär tio arbetspass varje 13-veckorsperiod för en arbetare på BF-enheten. Det schemaförslag som jag arbetar med att ta fram i denna uppsats är ett ramschema för 100 procents arbetstid.

Utöver ovanstående centrala aspekt för schemaläggningen tillkommer en aspekt som bygger på den tidigare. Varje arbetare följer som sagt ett schema som sträcker sig över en 13-veckorsperiod. Grundschemat med 84 procents arbetstid är gemensamt för alla 13 arbetare på BF-enheten. Detta fungerar på så sätt att man har ett så kallat rullande schema. Varje arbetare tilldelas initialt en av de 13 veckorna i grundschemat. Sedan följer man veckorna i den ordning som de står i grundschemat. Varje vecka i schemat kalla en veckorad, och schemat är följaktligen skrivet med veckorna i rader. När en vecka på schemat är slut, så hoppar arbetarna på BF-enheten en rad nedåt i schemat. Den person hade som hade veckoraden längst ned i schemat hoppar upp till den översta veckoraden. Systemet med rullande schema gör att det är mycket viktigt att skilja på grundschemat med 84 procents arbetstid och schemat med 100 procents arbetstid. Detta eftersom schemat med 100 procents arbetstid visserligen utgår från grundschemat, men utöver de 84 procenten i grundschemat också består av 16 procent arbetstid som är individuell för den enskilde arbetaren. De individuella skillnaderna beror på att arbetarna på BF-enheten måste skriva upp sig på jourpass motsvarande 16 procents arbetstid så att alla uppskrivna jourpass tillsammans täcker upp för alla passen i grundschemat i händelse av frånvarande kollegor. Det schema á 100 procent som jag tar fram är ett ramschema som är till hjälp för arbetarna att utgå ifrån när de ska lägga till ytterligare 16 procents arbetstid som jourtid på sitt grundschema á 84 procent. Arbetarnas individuella jourtid måste som sagt täcka upp för alla passen i grundschemat, vilket ramschemat á 100 procent inte gör. Det är dock optimerat utifrån de villkor som arbetarna gemensamt kommit fram till, vilket gör det till det mest önskvärda individuella schemat á 100 procent. Arbetarna får sedan så långt det är möjligt ändra lika många av passen från ramschemat till andra pass på sina individuella scheman á 100 procent och ha dem som jourpass, så att det finns jour för alla passen på grundschemat i händelse av frånvaro. På detta sätt blir systemet med 90/10 schema så rättvist som möjligt.

I figur 1 på nästa sida ser du ett förslag på ramschema á 100 procent enligt BF-enhetens nya 90/10 schemaläggning, innan hänsyn tagits till arbetstagarnas fiktiva synpunkter och förslag på utformningen av schemat. Detta schemaförslag utgår jag ifrån när jag tar fram min matematiska modell för att kunna ta fram en optimerad schemamodell för 90/10 schema. Min matematiska modell syftar som sagt till att ta fram ett ramschema för arbetstagarnas individuella scheman med 100 procents arbetstid.

I det efterföljande avsnittet **3.1** beskriver jag det tilltänkta ramschemats grundläggande funktion. Därefter följer i avsnitt **3.2** en beskrivning av de villkor för schemat som arbetstagarna och arbetsledningen i mitt tänkta scenario har lyckats enas om på förhand. Avsnitt **3.3** består av en redogörelse av de beräkningsmodeller jag använt mig av för att konstruera förslag på nytt ramschema á 100 procents arbetstid för arbetslaget på BF-enheten.

BF 100%

Timmar		Måndag	Tisdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lördag	Söndag
Total 42,5	1	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16-30	D 8-16.30	FP	FP
38	2	D 8-20.30	F	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP	FP
38	3	D 8-16.30	D 8-20.30	F	D 8-16.30	D 8-16.30	FP	FP
38	4	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-20.30	F	D 8-16.30	FP	FP
38	5	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-20.30	F	FP	FP
37,5	6	F	F	F	F	D 8-20.30	D 8-20.30	D 8-20.30
50	7	F	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP	FP
42,5	8	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP	FP
62,5	9	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30	F	F	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30
0	10	F	F	F	F	F	FP	FP
25	11	F	F	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30	F	FP	FP
42,5	12	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP	FP
42,5	13	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP	FP
Totalt 497								

Figur 1

3.1 Schemaspecikationer

BF-enheten använder sig som tidigare nämnts av så kallat rullande schema. Schemat har 13 veckorader för vilka de anställda är inskrivna en person för varje veckorad. När en vecka är slut så hoppar varje person ett steg ner i raderna, förutom den person som stod på den nedersta raden, rad 13. När man slutfört veckorad 13 så är nästkommande veckans veckorad för den personen, veckorad 1, och så vidare.

Arbetstagarna på BF-enheten har på förhand lyckats enas om en rad villkor för ett eventuellt införande av den nya schemamodellen. Dessa villkor beskrivs i texten nedan. I varje textstycke refererar jag till en siffra/symbol som hör till den förändring som gjorts på det ursprungliga schemaförslaget á 100 procents arbetstid. Denna siffra/symbol är sedan markerad i ett nytt förslag på ramschema á 100 procents arbetstid som redovisas i figur 2 på nästa sida. Siffrans/symbolens placering visar var förändringen som beskrivs kommer till uttryck i praktiken i mitt nya schemaförslag.

De anställda på BF-enheten har en person varje dygn som jobbar natt (1). Schemaläggningen för veckorna med nattpassen inklusive mellanliggande vecka (#) har de anställda enats om på förhand. De är placerade på veckorad 9-11 enligt arbetarnas önskemål. Detta innebär att veckoraderna som jag ska schemalägga reduceras med tre rader för mina linjära optimeringsproblem. Alltså återstår 10 veckorader för BF-enheten som jag ska schemalägga.

Vidare är det varje vardagsdygn en person (i **en** av veckoraderna) som arbetar långt dagpass (2), vilket innebär att personen slutar sitt dagpass först kl 20.30. Denna passtyp är tänkt att inför införandet av 90/10 schema tilldelas manuellt till vissa passnummer i veckoraderna i grundschemat utifrån arbetarnas gemensamma beslut.

Det finns två helgdagpass i schemaförslaget (3). Dessa placeras på en på förhand bestämd veckorad. I schemaförslaget ovan är veckorad 6 angiven för BF-enheten, men arbetarna enades sedan om en ny lösning. I mitt schemaförslag för BF-enheten så placerades helgdagpassen på veckorad 5, enligt arbetarnas önskemål.

I schemaförslaget ser man att för de 10 veckorader som återstår för mig att schemalägga så gäller att helgerna utöver dagpasshelgerna och nattpasshelgerna är lediga, så kallade helgfripass (4). Denna bemanning gäller även för det schema jag ska ta fram. I och med att helgpassen är på förhand bestämda så minskas de dagar som jag ska schemalägga. Lägger man ihop helgpassen samt de tre veckor med nattpass-schema som är på förhand bestämda så återstår nu följande för mig att schemalägga:

10 veckorader med de fem vardagarna i varje veckorad, totalt 50 dagar.

Varje vardag i schemaförslaget för BF-enheten är det två veckorader som har fripass, förutom på fredagar då det bara är en veckorad som har fripass. För enkelhets skull så väljer jag att alla vardagar i veckoraderna har två fripass inlagda i min matematiska modell för ramschema á 100 procent. För att enkelt kunna läsa av i schemaförslaget vad jag åsyftar så läs av vardagarna i de olika kolumnerna i respektive enhets schema. Då kan man lätt utläsa det jag här försökt förklara i text, nämligen att det bara är ett fripass inlagt på fredagar. I min matematiska modell så väljer jag som sagt att utgå från två fripass varje vardag. Arbetarna på BF-enheten kan sedan när jag tagit fram ett schemaförslag ha en omröstning om vilken specifik dag i någon veckorad som de vill lägga in ett extra dagpass på i mitt förslag på ramschema á 100 procent.

Arbetsledningen på BF-enheten har satt upp som villkor att ha spridning på fripassen, eftersom de är få i antal i förhållande till antalet dagpass. Fripassen ger arbetarna möjlighet att vila upp sig, vilket förebygger sjukdomar. Att sprida ut fripassen bör därför ligga i linje med syftet med införandet av 90/10 schema från arbetsledningens sida. Detta är som tidigare nämnts att minimera antalet sjukdagar, eftersom sjukfrånvaro medför merkostnader för företag A. I syfte att få spridning på fripassen så ställs en rad bivillkor upp, vilka beskrivs under rubrik **3.2** på nästkommande sidor.

Timmar		Måndag	Tisdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lördag	Söndag
Total 42,5	1	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16-30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
38	2	D (2) 8-20.30	F	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
38	3	D 8-16.30	D (2) 8-20.30	F	D 8-16.30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
38	4	D 8-16.30	D 8-16.30	D (2) 8-20.30	F	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
38	5	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D (2) 8-20.30	F	D (3) 8-20.30	D (3) 8-20.30
37,5	6	F	F	F	F	D (2) 8-20.30	FP (4)	FP (4)
50	7	F	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
42,5	8	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
62,5	9	Natt(1)(#) 20-8.30	Natt(1)(#) 20-8.30	F (#)	F (#)	Natt(1)(#) 20-8.30	Natt(1)(#) 20-8.30	Natt(1)(#) 20-8.30
0	10	F (#)	F (#)	F (#)	F (#)	F (#)	FP (#)	FP (#)
25	11	F (#)	F (#)	Natt(1)(#) 20-8.30	Natt(1)(#) 20-8.30	F (#)	FP (#)	FP (#)
42,5	12	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
42,5	13	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	D 8-16.30	FP (4)	FP (4)
Totalt	497							

Figur 2

3.2 Matematisk modellering

Vid modellerandet för att försöka komma fram till optimerade schemakonstruktioner har jag arbetat stegvis. Först har jag utarbetat en grundmodell (beskrivs i avsnitt **3.2.1**), i vilken jag ställer upp matematiska villkor och bivillkor som jag vill ska gälla för mitt schemaproblem. Bivillkoren omformuleras sedan till bivillkor som är skrivna i enlighet med *standardformen* vilken beskrivs under **2.2.1**. Jag utgår sedan ifrån grundmodellen när jag utformar en linjär optimeringsmodell för framtagning av ett optimerat förslag på ramschema á 100 procent (beskrivs i avsnitt **3.2.2**).

3.2.1 Matematisk modell 0 – Grundmodell

Grunden för mitt modellerande är att de olika veckoraderna företräds av olika personer. Detta på grund av att BF-enheten använder sig av rullande schema. Eftersom jag har 10 veckorader att schemalägga för BF-enheten så är det alltså 10 personer. I beräkningsmodellen betecknar jag en viss *veckorad/person* med $i = 1, \ldots, 10$, där siffran avgör vilken veckorad/person som åsyftas. Hädanefter i detta avsnitt åsyftas samma index *i* oavsett om jag på grund av språkliga skäl i olika sammanhang skriver veckorad respektive person.

Vidare betraktar jag de olika veckodagarna som skilda element, med index *j*. För BF-enheten innebär detta att måndagen i veckoraderna tilldelas nummer 1, tisdagen nummer 2, och så vidare till fredag som har nummer 5. I den aktuella beräkningsmodellen betecknar jag alltså på så sätt en viss *dag* i veckan med *j*, där $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Jag vill konstruera en modell som sprider ut fripassen så att de ligger antingen på en eller flera onsdagar, på en eller flera måndagar och tisdagar respektive på en eller flera torsdagar och fredagar. Detta för att arbetarna ska antingen kunna vila upp sig med två dagars förlängd helgledighet, eller få en välbehövlig ledig dag på en onsdag för att få lite vila i mitten av veckan. Detta sätt att modellera utgår från ett logiskt resonemang om att en arbetare torde klara minst två arbetsdagar innan denne har behov av vila.

Det tredje indexet jag använder mig av i denna modell 0 är *k*, vilket betecknar vilken *passtyp* som betraktas. Här gäller $k = 1, 2$, där $k = 1 \rightarrow dagpass$ och $k = 2 \rightarrow fripass$.

Vi inför nu en variabel $x_{i,j,k}$, för vilken gäller att

$$x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 \text{ om person } i \text{ tar passtyp } k \text{ dag } j \\ \qquad\qquad 0 \text{ annars} \end{cases}$$

Detta gör vi för att på enklast möjliga sätt kunna beskriva om passtypen *k* förekommer dag *j* för person *i*. Det kan endast utföras ett pass av passtypen *k* en viss dag *j* av en person *i*. Detta innebär alltså att om vi har värdet 1 för ett visst $x_{i,,k}$ betyder alltså detta att ett pass av passtyp k utförs dag *j* av person i. Om vi har värdet 0 för ett visst $x_{i,j,k}$ betyder detta att inget pass av passtypen *k* utförs dag *j* av person *i*.

I mitt fall har jag, som tidigare formulerats**,** tre index *i*, *j* och *k* för *c* och *x*, i stället för som i *standardformen* för LP-problem som angavs i avsnitt **2.2.1** endast index *i*. Det kommer visa sig att jag har totalt fyra olika index med i mina beräkningar i stället för de två som anges i *standardformen* i avsnitt **2.2.1**. Detta innebär att jag måste tänka till lite när jag skriver ned mitt linjära optimeringsproblem matematiskt. Jag tar det steg för steg nedan.

Jag utgår i min grundmodell från *standardformen:*

Minimera $z = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j$

Bivillkor: $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$

Det c_j som står i den övre summa är en variabel som i mitt fall betecknas $c_{i,j,k}$. Denna variabel kan enklast beskrivas som en kostnadsvariabel som hör ihop med $x_{i,j,k}$. Passtyp k, utförd av person *j* dag *i* innebär alltså kostnaden $c_{i,j,k}$. Jag vill i mitt fall minimera $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$ med bivillkoret $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k,} x_{i,j,k} = b_l$, $l = 1, \dots, m$, $x_{i,j,k} \geq 0$, för alla *i, j, k*. Bivillkoret inrymmer alla de bivillkor som gäller för mitt specifika problem med hjälp av användning av index *l*. Bivillkoret väljer jag hädanefter i denna omskrivning av standardformen att kalla för bivillkor 0.

Jag inför nu de bivillkor för mitt problem som ska vara uppfyllda för variabeln $x_{i,j,}$ i min problemformulering för min matematiska grundmodell.

Bivillkor 1: Varje person *i* kan endast ta en passtyp k dag j. Det kan synas vara självklart, men detta måste formuleras matematiskt för att optimeringen av schemaförslaget ska bli korrekt. Eftersom variabeln $x_{i,j,k}$ endast kan anta värdena 0 eller 1 och det finns två passtyper $k = 1, 2$ gäller att:

$x_{i,j,1} + x_{i,j,2} = 1$, för alla *i*, *j*.

Detta bivillkor tillsammans med $x_{i,j,k} \geq 0$, för alla *i*, *j*, *k*, vilket gäller enligt bivillkor 0, medför att

$$x_{i,j,} = \begin{cases} 1 \text{ om person } i \text{ tar passtyp } k \text{ dag } j \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

nu gäller enligt bivillkor 1 insatt i bivillkor 0. Detta kan enkelt ses genom att man sätter in giltiga värden på *i* och *j* i likheten i bivillkor 1 och samtidigt följer bivillkor 0 som säger att $x_{i,j,k} \geq 0$, för alla *i*, *j*, *k*.

Bivillkor 2: Varje dag *j* ska 8 stycken pass av passtyp $k = 1$ utföras av alla personerna $i = 1, 2, \dots, 10$. Dessutom gäller att varje dag *j* ska 2 stycken pass av passtyp $k = 2$ utföras av alla personerna $i = 1, 2, \dots, 10$. Detta ger sammantaget:

$\sum_{i=1}^{10} x_{i,j,1} = 8$, $\sum_{i=1}^{10} x_{i,j,2} = 2$, för alla j.

Bivillkor 3: Varje person *i* måste ta samma passtyp *k* måndag och tisdag respektive torsdag och fredag. Detta innebär att:

$\begin{Bmatrix} x_{i,1,k} - x_{i,2,k} = 0 \\ x_{i,4,k} - x_{i,5,k} = 0 \end{Bmatrix}$ för alla *i*, *k*.

Syftet med införandet av detta bivillkor beskrivs nedan.

Bivillkor 4: Det kan utläsas ur det tidigare formulerade bivillkor 3 att jag vill ha fripassen placerade antingen på en eller flera onsdagar, en eller flera måndagar och tisdagar respektive på en eller flera torsdagar och fredagar. Jag vill dock undvika att dessa placeringar kombineras på en och samma vecka(veckorad) i schemat. Detta på grund av att jag vill sprida ut fripassen enligt arbetarnas och arbetsledningens önskemål. Denna spridning av fripassen kan uppnås på följande sätt:

Det finns tre olika möjligheter (vilka även kan kombineras) som fripassen kan placeras felaktigt på. Antingen kan de placeras måndag, tisdag, torsdag och fredag, eller måndag, tisdag och onsdag, eller onsdag, torsdag och fredag. Detta vill jag inte ska inträffa i mitt optimerade schemaförslag. Jag kan skriva detta matematiskt på följande sätt: $\sum_{i=1}^{10}(x_{i,1,2} \times x_{i,5,2} + x_{i,1,2} \times x_{i,3,2} + x_{i,3,2} \times x_{i,5,2}) = 0$. Detta betyder alltså att oavsett vilken person *i* man betraktar så ska denna person inte ha fripass ($k = 2$) måndag, tisdag, torsdag och fredag, eller måndag, tisdag och onsdag, eller onsdag, torsdag och fredag.

$\sum_{i=1}^{10}(x_{i,1,2} \times x_{i,5,2} + x_{i,1,2} \times x_{i,3,2} + x_{i,3,2} \times x_{i,5,2}) = 0$ kallar jag bivillkor 4. Detta är mitt sista bivillkor för variabeln $x_{i,j,k}$.

3.2.2 Matematisk modell 1 – Optimering av ramschema á 100 procent enligt *standardformen*

Denna modell utgår helt och hållet från grundmodellen. Jag använder här alla bivillkoren som ställdes upp i grundmodellen och formulerar om dessa så att de kan införas i bivillkor 0 i min formulering av mitt problem på *standardformen*. Därmed kan de sedan användas i min slutgiltiga modell för linjär optimering av schemaläggningsproblemet.

Jag vill alltså ställa upp ett linjärt optimeringsproblem enligt min omskrivning på *standardformen:*

Minimera $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$

Bivillkor 0: $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l, \quad l = 1, \dots, m,$
$x_{i,j,k} \geq 0$ för alla i, j, k.

Jag väntar med att beskriva funktionen z ytterligare i nuläget, av skäl som kommer uppenbara sig senare, och börjar med att titta på bivillkor 0. Som tidigare sagts så kan denna likhet inrymma de bivillkor som ställs upp för ett specifikt problem. Jag kommer därför att gå igenom de bivillkor som jag ställt upp för mitt problem en i taget, och beskriva hur de införs i bivillkor 0. Jag börjar med bivillkor 4 på grund av att det behöver omformuleras för att passa in i bivillkor 0.

Bivillkor 4:

$\sum_{i=1}^{10}(x_{i,1,2} \times x_{i,5,2} + x_{i,1,2} \times x_{i,3,2} + x_{i,3,2} \times x_{i,5,2}) = 0.$

Detta bivillkor innebär att varje person i ska ha fripass högst en av dagarna i dagkombinationerna måndag och fredag, måndag och onsdag respektive onsdag och fredag. Likheten ovan kan skrivas om som tre olikheter enligt följande:

$$\begin{Bmatrix} x_{i,1,2} + x_{i,5,2} \leq 1 \\ x_{i,1,2} + x_{i,3,2} \leq 1 \\ x_{i,3,2} + x_{i,5,2} \leq 1 \end{Bmatrix} \text{ för alla } i.$$

Dessa tre olikheter vill jag transformera till tre stycken likheter, för att på så sätt formulera detta bivillkor enligt *standardformen*. Detta kan jag göra genom att införa en rad så kallade slackvariabler (Griva et al., 2009). Jag lägger till tre stycken fiktiva dagar i mitt index j, så att det nu gäller att $j = 1, \dots, 8$. Efter tilläggning av slackvariabler består variabeln $x_{i,j,k}$ av $10 \times 8 \times 2 = 160$ element. För slackvariablerna $x_{i,6,k}$, $x_{,7,k}$ respektive $x_{i,8,k}$, $i = 1, \dots, 10$, $k = 1, 2$, gäller liksom för övriga $x_{i,j,k}$ att de är större än eller lika med 0. Om jag adderar slackvariablerna $x_{,6,2}$, $x_{i,7,2}$ och $x_{i,8,2}$, $i = 1, \dots, 10$, till vänsterledet i varsin av olikheterna i bivillkor 4 kan jag därmed skriva om olikheterna till likheter. Detta på grund av att om summan av de två första termerna är 0 så gäller likheten om slackvariabeln sätts till 1 och om summan av de två första termerna är 1 så gäller likheten om slackvariabeln sätts till 0. Det finns alltså bara två möjliga värden som slackvariablerna $x_{i,6,2}$, $x_{i,7,2}$ respektive $x_{i,8,2}$ kan anta: 0 och 1. För dessa slackvariabler liksom för övriga slackvariabler $x_{i,6,k}$, $x_{,7,k}$ och $x_{i,8,k}$ gäller dessutom bivillkor 1: $x_{i,j,1} + x_{i,j,2} = 1$, för alla i, j.

Detta innebär att slackvariablerna uppfyller det villkor som jag tidigare ställt upp för variabeln $x_{i,j,k}$, nämligen

$$x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 \text{ om person } i \text{ tar passtyp } k \text{ dag } j \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

Visserligen är de tre dagarna $j = 6$, $j = 7$ respektive $j = 8$ som tidigare nämnts rent fiktiva, och därmed allt som är kopplat till dessa, men de behövs för att kunna beskriva och lösa mitt problem enligt *standardformen.*

Så här ser alltså bivillkoret ut med slackvariablerna inräknade:

$$\begin{Bmatrix} x_{i,1,2} + x_{i,5,2} + x_{i,6,2} = 1 \\ x_{i,1,2} + x_{i,3,2} + x_{i,7,2} = 1 \\ x_{i,3,2} + x_{i,5,2} + x_{i,8,2} = 1 \end{Bmatrix} \text{ för alla } i.$$

Efter tilläggning av slackvariabler ser mitt LP-problem ut så här:

Minimera $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$

Bivillkor 0: $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l, \ = 1, \dots, m,$
$x_{i,j,k} \geq 0$ för alla i, j, k.

Det enda som har förändrats är alltså index j och därmed antalet koefficienter $c_{i,j,k}$ respektive

$a_{l,i,j,k}$ samt antalet variabler $x_{i,j,k}$. Eftersom inget annat av mina bivillkor innehåller olikheter så behöver inga fler slackvariabler införas i beräkningarna för dessa. De slackvariabler jag infört i anslutning till bivillkor 4 ska inte ingå i beräkningarna för övriga bivillkor eftersom slackvariablerna är specifika för bivillkor 4. Detta löses matematiskt genom att koefficienterna till slackvariablerna i beräkningarna för övriga bivillkor sätts lika med 0. Detta kommer att framgå i beskrivningarna av övriga bivillkor.

Bivillkor 4 ser alltså ut så här:

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{(1)} & x_{i,1,2} + x_{i,5,2} + x_{i,6,2} = 1 \\ \mathbf{(2)} & x_{i,1,2} + x_{i,3,2} + x_{i,7,2} = 1 \\ \mathbf{(3)} & x_{i,3,2} + x_{i,5,2} + x_{i,8,2} = 1 \end{matrix}\right\} \text{ för alla } i.$$

Dessa likheter skrivs om enligt *standardformens* $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l$, $l = 1, \ldots, m$, med raderna *l* utskrivna. Numreringen på raderna utgår ifrån bivillkor 1, och på detta följer bivillkor 2 och så vidare. Detta medför att likhet **(1)** beskrivs i raderna 106-115, likhet **(2)** i raderna 116-125 och likhet **(3)** i raderna 126-135. Jag skriver dock bara ut de två första raderna och den sista för varje likhet. Detta för att mönstret för skillnaderna mellan raderna är detsamma mellan alla raderna. Nedan följer alltså raderna *l* utskrivna för de tre likheterna i bivillkor 4:

(1) $a_{106,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{106,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{106,1,5,2}x_{1,5,2} + \cdots + a_{106,1,6,2}x_{1,6,2} + \cdots + a_{106,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{106,1,1,2} = 1$, $a_{106,1,5,2} = 1$, $a_{106,1,6,2} = 1$ för alla *i*, och övriga $a_{106,i,j,k} = 0$ för alla *i*.

$a_{107,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{107,2,1,1}x_{2,1,1} + a_{107,2,1,2}x_{2,1,2} + \cdots + a_{107,2,5,2}x_{2,5,2} + \cdots + a_{107,2,6,2}x_{2,6,2} + \cdots + a_{107,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{107,2,1,2} = 1$, $a_{107,2,5,2} = 1$, $a_{107,2,6,2} = 1$ för alla *i*, och övriga $a_{107,i,j,k} = 0$ för alla *i*.

$a_{115,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{115,10,1}x_{10,1,1} + a_{115,10,1,2}x_{10,1,2} + \cdots + a_{115,10,5,2}x_{10,5,2} + \cdots + a_{115,10,6,2}x_{10,6,2} + \cdots + a_{115,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{115,10,1,2} = 1$, $a_{115,10,5,2} = 1$, $a_{115,10,6,2} = 1$ för alla *i*, och övriga $a_{115,i,j,k} = 0$ för alla *i*.

(2) $a_{116,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{116,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{116,1,3,2}x_{1,3,2} + \cdots + a_{116,1,7,2}x_{1,7,2} + \cdots + a_{116,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{116,1,1,2} = 1$, $a_{116,1,3,2} = 1$, $a_{116,1,7,2} = 1$ för alla *i*, och övriga $a_{116,i,j,k} = 0$ för alla *i*.

$a_{117,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{117,2,1,2}x_{2,1,2} + \cdots + a_{117,2,3,2}x_{2,3,2} + \cdots + a_{117,2,7,2}x_{2,7,2} + \cdots + a_{117,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{117,2,1,2} = 1$, $a_{117,2,3,2} = 1$, $a_{117,2,7,2} = 1$ för alla *i*, och övriga $a_{117,i,j,k} = 0$ för alla *i*.

$a_{125,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{125,10,1,2}x_{10,1,2} + \cdots + a_{125,10,3,2}x_{10,3,2} + \cdots + a_{125,10,7,2}x_{10,7,2} + a_{125,10,8,1}x_{10,8,1} + a_{125,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{125,10,1,2} = 1$, $a_{125,10,3,2} = 1$, $a_{125,10,7,2} = 1$ för alla *i*, och övriga $a_{125,i,j,k} = 0$ för alla *i*.

(3) $a_{126,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{126,1,3,2}x_{1,3,2} + \cdots + a_{126,1,5,2}x_{1,5,2} + \cdots + a_{126,1,8,2}x_{2,7,2} + \cdots +$

$a_{126,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{126,1,3,2} = 1$, $a_{126,1,5,2} = 1$, $a_{126,1,8,2} = 1$ för alla i, och övriga $a_{126,i,j,k} = 0$ för alla i.

$a_{127,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{127,2,3,2}x_{2,3,2} + \cdots + a_{127,2,5,2}x_{2,5,2} + \cdots + a_{127,2,8,2}x_{2,8,2} + \cdots + a_{127,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{127,2,3,2} = 1$, $a_{127,2,5,2} = 1$, $a_{127,2,8,2} = 1$ för alla i, och övriga $a_{127,i,j,k} = 0$ för alla i.

$a_{135,1,1,1}x_{1,1,1} + \cdots + a_{135,10,3,2}x_{10,3,2} + \cdots + a_{135,10,5,2}x_{10,5,2} + \cdots + a_{135,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{135,10,3,2} = 1$, $a_{135,10,5,2} = 1$, $a_{135,10,8,2} = 1$ för alla i, och övriga $a_{135,i,j,k} = 0$ för alla i.

Sammanfattningsvis är alltså $b_{106} = b_{127} = \cdots = b_{135} = 1$.

Bivillkor 1:

$x_{i,j,1} + x_{i,j,2} = 1$, för alla i, j.

Denna likhet skrivs om enligt $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l, \quad l = 1, \dots, m$, med raderna l utskrivna:

$a_{1,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{1,1,1,2,}x_{1,1,2} + \cdots + a_{1,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{1,1,1,1} = 1$, $a_{1,1,1,2} = 1$ och övriga $a_{1,i,j,k} = 0$.

$a_{2,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{2,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots a_{2,1,2,1}x_{1,2,1} + a_{2,1,2,2}x_{1,2,2} + \cdots + a_{2,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$ där $a_{2,1,2,1} = 1$, $a_{2,1,2,2} = 1$ och övriga $a_{2,i,j,k} = 0$.

$a_{80,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{80,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{80,10,5,1}x_{10,5,1} + a_{80,10,5,2}x_{10,5,2} + a_{80,10,8,1}x_{10,8,1} + a_{80,10,8,2}x_{10,8,2} = 1$, där $a_{80,10,5,1} = 1$, $a_{80,10,5,2} = 1$ och övriga $a_{80,i,j,k} = 0$.

Sammanfattningsvis är alltså $b_1 = b_2 = \cdots = b_{80} = 1$.

Bivillkor 2:

$\sum_{i=1}^{10} x_{i,j,1} = 8$, $\sum_{i=1}^{10} x_{i,j,2} = 2$, för alla $j = 1, \dots ,5$. Anledningen till att $= 6, 7, 8$ inte är medräknade är att dessa svarar mot slackvariabler. Dessa är ovidkommande för detta bivillkor på grund av att det bivillkoret säger är att det ska utföras ett visst antal pass av varje passtyp varje dag i schemat, och slackvariablerna svarar inte mot några dagar i schemat.

Bivillkor 2 kan förenklas. Eftersom bivillkor 1 säger att $x_{i,j,1} + x_{i,j,2} = 1$, för alla i, j, så räcker det att skriva bivillkor 2 som $\sum_{i=1}^{10} x_{i,,2} = 2$, för alla $j = 1, \dots ,5$. Bivillkor 1 garanterar oss att de 8 pass som återstår varje dag när fripassen har placerats ut sätts till dagpass. Bivillkor 2 förenklas till $\sum_{i=1}^{10} x_{i,,2} = 2$, för alla $j = 1, \dots ,5$.

Denna likhet skrivs om enligt $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l, \quad l = 1, \dots, m$, med raderna l utskrivna:

$a_{81,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{81,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{81,2,1,2}x_{2,1,2} + \cdots + a_{81,3,1,2}x_{3,1,2} + \cdots +$

$a_{81,10,1,2}x_{10,1,2} = 2$, där $a_{81,,1,2} = 1$ för alla $i = 1, \dots, 10$, och övriga $a_{81,i,j,k} = 0$.

$a_{82,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{82,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{82,2,2,2}x_{2,2,2} + \cdots + a_{82,3,2,2}x_{3,2,2} + \cdots +$
$a_{82,10,2,2}x_{10,2,2} = 2$, där $a_{82,,2,2} = 1$ för alla $i = 1, \dots, 10$, och övriga $a_{82,i,j,k} = 0$.

$a_{85,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{85,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{85,2,5,2}x_{2,5,2} + \cdots + a_{85,3,5,2}x_{3,5,2} + \cdots +$
$a_{85,10,5,2}x_{10,5,2} = 2$, där $a_{85,,5,2} = 1$ för alla $i = 1, \dots, 10$, och övriga $a_{85,i,j,k} = 0$.

Sammanfattningsvis är alltså $b_{81} = b_{82} = \cdots = b_{85} = 2$.

Bivillkor 3:

$\begin{Bmatrix} x_{i,1,k} - x_{i,2,k} = 0 \\ x_{i,4,k} - x_{i,5,k} = 0 \end{Bmatrix}$ för alla i, k.

Bivillkor 3 kan förenklas. Eftersom bivillkor 1 säger att $x_{i,,1} + x_{i,j,2} = 1$, för alla i, j, så räcker det att skriva bivillkor 2 som $\begin{Bmatrix} (\mathbf{1})\ \ x_{i,1,1} - x_{i,2,1} = 0 \\ (\mathbf{2})\ \ x_{i,4,1} - x_{i,5,1} = 0 \end{Bmatrix}$ för alla i.

Dessa likheter skrivs om enligt $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k}x_{i,j,k} = b_l$, $\quad l = 1, \dots, m$, med raderna *l* utskrivna. Likhet **(1)** beskrivs i raderna 86-95 och likhet **(2)** i raderna 96-105. Jag skriver dock bara ut de två första raderna och den sista för varje likhet. Detta för att mönstret för skillnaderna mellan raderna är detsamma mellan alla raderna. Nedan följer alltså raderna *l* utskrivna för de tre likheterna i bivillkor 3:

(1) $a_{86,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{86,1,1,2}x_{1,1,2} + a_{86,1,2,1}x_{1,2,1} + \cdots + a_{86,10,8,2}x_{10,8,2} = 0$, där $a_{86,1,1,1} = 1$, $a_{86,1,2,1} = -1$ och övriga $a_{86,i,j,k} = 0$.

$a_{87,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{87,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{87,2,1,1}x_{2,1,1} + \cdots + a_{87,2,2,1}x_{2,1,1} + \cdots +$
$a_{87,10,8,2}x_{10,8,2} = 0$, där $a_{87,2,1,1} = 1$, $a_{87,2,2,1} = -1$ och övriga $a_{87,i,j,k} = 0$.

$a_{95,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{95,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{95,10,1,1}x_{10,8,2} + \cdots + a_{95,10,2,1}x_{10,8,2} + \cdots +$
a95,10,8,2x10,8,2=0, där *a95,10,1,1=1*, *a95,10,2,1=−1* och övriga *a95,i,j,k=0*.

(2) $a_{96,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{96,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{96,1,4,1}x_{1,4,1} + \cdots + a_{96,1,5,1}x_{1,5,1} + \cdots +$
$a_{96,10,8,2}x_{10,8,2} = 0$, där $a_{96,1,4,1} = 1$, $a_{96,1,5,1} = -1$ och övriga $a_{96,i,j,k} = 0$.

$a_{97,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{97,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{97,2,4,1}x_{2,4,1} + \cdots + a_{97,2,5,1}x_{2,5,1} + \cdots +$
$a_{97,10,8,2}x_{10,8,2} = 0$, där $a_{97,2,4,1} = 1$, $a_{97,2,5,1} = -1$ och övriga $a_{97,i,j,k} = 0$.

$a_{105,1,1,1}x_{1,1,1} + a_{105,1,1,2}x_{1,1,2} + \cdots + a_{105,10,4,1}x_{10,4,1} + \cdots + a_{105,10,5,1}x_{10,5,1} + \cdots +$
$a_{105,10,8,2}x_{10,8,2} = 0$, där $a_{105,10,4,1} = 1$, $a_{105,10,5,1} = -1$ och övriga $a_{105,i,j,k} = 0$.

Sammanfattningsvis är alltså $b_{86} = b_{87} = \cdots = b_{105} = 0$.

Jag har nu beskrivit de matematiska utseendena för de fyra olika bivillkoren. Summorna från de fyra olika bivillkoren skrivs i rader utifrån formeln $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k}x_{i,j,k} = b_l$,

$l = 1, \ldots, m$, där jag nu beräknat fram m till 135.Så här ser nu mitt problem ut enligt *standardformen:*

Minimera $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$

Bivillkor 0: $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l, \quad l = 1, \ldots, 135,$
$x_{i,j,k} \geq 0$ för alla i, j, k.

Nu passar det bra att titta på funktionen $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$. Eftersom jag införde slackvariabler motsvarande $j = 6, 7, 8$ så har vi nu också i summan för funktionen z att index $j = 1, \ldots, 8$. Variabeln $c_{i,j,k}$ i funktionen z står för en kostnad per enhet av ett visst pass $x_{i,j,k}$. Eftersom det finns två olika passtyper för varje veckodag i schemat, så ska jag resonera lite kring dessa var för sig. Eftersom ett inskrivet fripass i en radspecifik veckodag i schemat innebär att det inte kan vara inskrivet ett dagpass på samma postition, och vice versa, så räcker det med att tilldela ena typen av pass kostnader, och sätta kostnaderna för den andra passtypen till noll. Utöver detta sätts kostnaderna $c_{i,j,k}$ med $j = 6, 7, 8$ till noll, eftersom de svarar mot de fiktiva dagarna $x_{i,j,k}$ med $j = 6, 7, 8$, vilka jag på grund av dess fiktiva karaktär inte vill ska påverka minimerandet av z i LP-problemet. Eftersom fripassen är färre till antalet än dagpassen så är det vidare enklast att beskriva den passformens olika positioner som kostnader i form av olika variabler $c_{i,,2}$, medan alla $c_{i,j,1}$ vilka svarar mot dagpassen sätts till noll. Jag betraktar alltså fripassens position, och dessa kan ge olika kostnader $c_{i,,2}$. Därför tänker jag att vid konstruerandet av ramschema á 100 procent för arbetstagarna på BF-enheten, så ges arbetarna i mitt scenario möjligheten att i en omröstning önska vilka positioner i schemat som fripassen optimalt ska placeras på. Sedan tar jag hänsyn till antalet röster på respektive position och bestämmer kostnader utifrån en matematisk formel för de olika positionerna för fripassen. Kostnaderna beräknas utifrån en linjär formel som ger viktade kostnader $c_{i,,2}$ för de olika positionerna med fripass. Arbetstagarna får givetvis rösta enligt modellen med fripass placerade i en vecka på måndag och tisdag, på onsdag, eller på torsdag och fredag. Utöver detta gäller att det ska vara två fripass varje vardag i de 10 veckorader som schemaläggs med hjälp av optimering. Jag har i mitt scenario resultatet av en sådan undersökning som återges nedan. Siffran/siffrorna i respektive ruta anger antalet personer som röstat för att ha fripass den positionen i schemat.

i, j, 2	Veckorad	Måndag i, 1, 2	Tisdag i, 2, 2	Onsdag i, 3, 2	Torsdag i, 4, 2	Fredag i, 5, 2
1, j, 2	1	2	2	2	3	3
2, j, 2	2	1	1	0	2	2
3, j, 2	3	4	4	8	1	1
4, j, 2	4	0	0	5	4	4
5, j, 2	5	1	1	1	10	10
6, j, 2	6	10	10	2	0	0
7, j, 2	7	1	1	0	2	2
8, j, 2	8	3	3	4	1	1
9, j, 2	9	2	2	2	1	1
10, j, 2	10	2	2	2	2	2

Figur 3

Jag inför kostnader som svarar mot antalet röster men där differensen mellan antalet röster och skillnaden i kostnader är lika stora på följande sätt. Kostnaderna $c_{i,j,2}$ för placering av fripass sätts till $10 - antalet\ röster$. Därigenom ges placering av fripass de olika radspecifika dagarna olika kostnader som skiljer sig mellan varandra analogt med differensen mellan antalet röster på fripass de olika radspecifika dagarna. Som exempel så är $c_{9,1,2} = 10 - 2 = 8$ och $c_{8,1,2} = 10 - 3 = 7$.

3.3 Lösning av uppställt optimeringsproblem

När det gäller lösning av LP-problemet använde jag mig av ett datorprogram som heter YALMIP. Detta är ett Matlab-baserat datorprogram, som använder sig av de befintliga kommandona i Matlab vid lösandet av LP-problem och andra optimeringsproblem (Löfberg, 2004).

Mitt LP-problem ställs som bekant upp på följande sätt enligt *standardformen*:

Minimera $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$

Bivillkor 0: $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{2} a_{l,i,j,k} x_{i,j,k} = b_l, \ = 1, \dots, 135,$
$x_{i,j,k} \geq 0$ för alla i, j, k.

För att kunna mata in mina data i YALMIP och Matlab så får jag transformera problemet så att det är skrivet på formen

$\begin{cases} minimera\ z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ då\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{cases}$ vilket egentligen är grunduppställningen för ett LP-problem, beskriven i avsnitt **2.1.1**. Här är $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_{1,1,1} \\ \vdots \\ x_{i,j,k} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{1,1,1} \\ \vdots \\ c_{i,j,k} \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{95} \end{bmatrix}$. Värdena på elementen i $\boldsymbol{b}$, samt hur elementen i $\boldsymbol{c}$ beräknades finns nedskrivet i avsnitt **3.2.2**. Jag redovisar värdena för elementen i $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ i vektorform samt alla ingående element i matris ***A*** i bilaga 1. När jag har ***A***, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ återstår för mig att beräkna det resulterande ***x*** med hjälp av inmatning i datorprogrammen YALMIP och Matlab. Resultatet redovisas i avsnitt **4**. En mer utförlig beskrivning av matris ***A*** ges före det i avsnittet **3.3.2.1**. Men allra först vill jag betona några grundläggande specifikationer för matris ***A***:

Bivillkor 0 motsvaras av $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Det gäller ju nämligen att raderna som bildas av summorna i bivillkor 0 för $l = 1, \ldots, 95$ alla består av likheter, och dessa bildar ett ekvationssystem som transformeras till formen $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. ***A*** är alltså matrisen som byggs upp av element som ges av koefficienterna $a_{l,i,j,k}$,och har *l* rader och $i \times j \times k$ kolumner.

3.3.1.1 Matris *A*:s utseende

I följande avsnitt beskrivs matris ***A***:s utseende genom uppdelning i delmatriser, där varje delmatris hör ihop med ett visst bivillkor. Noteringarna med flera lodräta punkter i följd, ⋮, har i dessa delmatriser getts betydelsen att mönstret som går att skönja i raderna ovanför punkterna fortsätter likadant i lodrät riktning, rad för rad. Noteringarna *p s s* har getts betydelsen att mönstret som går att skönja i kolumnerna till vänster om dessa noteringar fortsätter likadant i vågrät riktning till höger, kolumn för kolumn. I övrigt så följer notationerna i delmatriserna gängse normer vad gäller betydelse.

Bivillkor 1 : $80 \times 160 - matris$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bivillkor 2: $5 \times 160 - matris$

Kolumn:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & & & & 10 & & & 18 & & & & & 26 & & & & & 154 & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p & s & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p & s & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p & s & s & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & p & s & s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bivillkor 3(1): $10 \times 160 - matris$

Kolumn:

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} 1 & & & & & 17 & & & & & 145 & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Bivillkor 3(2): $10 \times 160 - matris$

Kolumn:

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} 1 & & & & & & 18 & & & & & 146 & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Bivillkor 4(1): $10 \times 160 - matris$

Kolumn:

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} 1 & & & & 10 & & & & & 18 & & & 26 & & & & & 146 & & & 154 & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bivillkor 4(2): $10 \times 160 - matris$

Kolumn:

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} 1 & & & & & & 7 & & 14 & & & 18 & & & & & & & 30 & & & 146 & & & & & & & 158 & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bivillkor 4(3): $10 \times 160 - matris$

Kolumn:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccc}
1 & & & & & 6 & & & 10 & & & 16 & & & 22 & & & 26 & & & 32 & & & 150 & & & 154 & & & 160
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

4 Resultat

Vi lösning av optimeringsproblemet med hjälp av datorprogrammen YALMIP och Matlab, blev resultatet en entydig optimal lösning. Utifrån den uppställning av optimeringsproblemet som LP-problem jag gjorde så kan fripassen placeras på ett optimalt sätt. Jag redovisar här under i figur 4 resultatet av omröstningen som arbetstagarna fick gör om fripassens placering på nytt, men nu med tillägget att de dagar där fripassen placeras optimalt enligt lösning med datorprogrammen YALMIP och Matlab är markerade med *:

BF 100%

i, j, 2	Veckorad	Måndag i, 1, 2	Tisdag i, 2, 2	Onsdag i, 3, 2	Torsdag i, 4, 2	Fredag i, 5, 2
1, j, 2	1	2	2	2	3 *	3 *
2, j, 2	2	1	1	0	2	2
3, j, 2	3	4	4	8 *	1	1
4, j, 2	4	0	0	5 *	4	4
5, j, 2	5	1	1	1	10 *	10 *
6, j, 2	6	10 *	10 *	2	0	0
7, j, 2	7	1	1	0	2	2
8, j, 2	8	3 *	3 *	4	1	1
9, j, 2	9	2	2	2	1	1
10, j, 2	10	2	2	2	2	2

Figur 4

Resultatet i form av värden på x-variablerna i $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_{1,1,1} \\ \vdots \\ x_{i,j,k} \end{bmatrix}$ är enligt följande:

$x_{1,1,1} = x_{1,2,1} = x_{1,3,1} = x_{2,1,1} = x_{2,2,1} = x_{2,3,1} = x_{2,4,1} = x_{2,5,1} = x_{3,1,1} = x_{3,2,1} = x_{3,4,1} = x_{3,5,1} = x_{4,1,1} = x_{4,2,1} = x_{4,4,1} = x_{4,5,1} = x_{5,1,1} = x_{5,2,1} = x_{5,3,1} = x_{6,3,1} = x_{6,4,1} = x_{6,5,1} = x_{7,1,1} = x_{7,2,1} = x_{7,3,1} = x_{7,4,1} = x_{7,5,1} = x_{8,3,1} = x_{8,4,1} = x_{8,5,1} = x_{9,1,1} = x_{9,2,1} = x_{9,3,1} = x_{9,4,1} = x_{9,5,1} = x_{10,1,1} = x_{10,2,1} = x_{10,3,1} = x_{10,4,1} = x_{10,5,1} = x_{1,4,2} = x_{1,5,2} = x_{3,3,2} = x_{4,3,2} = x_{5,4,2} = x_{5,5,2} = x_{6\ 1,2} = x_{6,2,2} = x_{8,1,2} = x_{8,2,2} = 1$, $x_{i,j,k} = 0$ för alla övriga kombinationer med indexen $i = 1, \ldots, 10$, $= 1, \ldots, 5$, $k = 1, 2$. $x_{i,j,k}$ med indexen $i = 1, \ldots, 10$,

$j = 6, 7,\ k = 1, 2$ är slackvariabler som inte är med i ursprungsproblemet och redovisas därför ej exakt.

Resultatet i form av det slutgiltiga förslaget på ramschema á 100 procent redovisas nedan.

BF 100%

	Måndag	Tisdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lördag	Söndag
1	D	D	D	**F**	**F**	FP	FP
2	D	D	D	D	D	FP	FP
3	D	D	**F**	D	D	FP	FP
4	D	D	**F**	D	D	FP	FP
5	D	D	D	**F**	**F**	D 8-20.30	D 8-20.30
6	**F**	**F**	D	D	D	FP	FP
7	D	D	D	D	D	FP	FP
8	**F**	**F**	D	D	D	FP	FP
9	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30	F	F	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30
10	F	F	F	F	F	FP	FP
11	F	F	Natt 20-8.30	Natt 20-8.30	F	FP	FP
12	D	D	D	D	D	FP	FP
13	D	D	D	D	D	FP	FP

Figur 5

5 Resultatdiskussion

Jag kan använda mig av prövning för att undersöka huruvida jag kan uppnå ett mindre värde på målfunktionen z under förutsättning att bivillkoren är uppfyllda. Genom att pröva att flytta fripassen enligt gällande bivillkor försöker jag få totala antalet röster på fripassdagarna att bli fler till antalet än de är i den lösning jag har fått fram i YALMIP. Detta skulle i så fall medföra att värdet på målfunktionen z blir lägre, eftersom antalet röster på en fripassdag är omvänt proportionellt till kostnaden $c_{i,j,2}$ för samma fripassdag. Jag har prövat flera olika alternativ vilka anges på nästkommande sidor, men inget av dessa ger lägre värde på z än den aktuella lösningen som tagits fram i YALMIP.

BF 100%

i, j, 2	Veckorad	Måndag i, 1, 2	Tisdag i, 2, 2	Onsdag i, 3, 2	Torsdag i, 4, 2	Fredag i, 5, 2
1, j, 2	1	2	2	2	3 *	3 *
2, j, 2	2	1	1	0	2	2
3, j, 2	3	4 *	4 *	8	1	1
4, j, 2	4	0	0	5 *	4	4
5, j, 2	5	1	1	1	10 *	10 *
6, j, 2	6	10 *	10 *	2	0	0
7, j, 2	7	1	1	0	2	2
8, j, 2	8	3	3	4 *	1	1
9, j, 2	9	2	2	2	1	1
10, j, 2	10	2	2	2	2	2

Figur 6

$$z = 7 \times 1 + 7 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 6 \times 1 = 33 > 27$$

Värdet 33 som fås på z är högre än värdet på z som fåtts i lösningen som tagits fram i YALMIP, vilket är 27.

BF 100%

i, j, 2	Veckorad	Måndag i, 1, 2	Tisdag i, 2, 2	Onsdag i, 3, 2	Torsdag i, 4, 2	Fredag i, 5, 2
1, j, 2	1	2	2	2 *	3	3
2, j, 2	2	1	1	0	2	2
3, j, 2	3	4	4	8 *	1	1
4, j, 2	4	0	0	5	4 *	4 *
5, j, 2	5	1	1	1	10 *	10 *
6, j, 2	6	10 *	10 *	2	0	0
7, j, 2	7	1	1	0	2	2
8, j, 2	8	3 *	3 *	4	1	1
9, j, 2	9	2	2	2	1	1
10, j, 2	10	2	2	2	2	2

Figur 7

$$z = 8 \times 1 + 2 \times 1 + 6 \times 1 + 6 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 7 \times 1 + 7 \times 1 = 36 > 27$$

Värdet 36 som fås på z är högre än värdet på z som fåtts i lösningen som tagits fram i YALMIP, vilket är 27.

BF 100%

i, j, 2	Veckorad	Måndag i, 1, 2	Tisdag i, 2, 2	Onsdag i, 3, 2	Torsdag i, 4, 2	Fredag i, 5, 2
1, j, 2	1	2	2	2	3 *	3 *
2, j, 2	2	1	1	0	2	2
3, j, 2	3	4 *	4 *	8	1	1
4, j, 2	4	0	0	5 *	4	4
5, j, 2	5	1	1	1	10 *	10 *
6, j, 2	6	10 *	10 *	2	0	0
7, j, 2	7	1	1	0	2	2
8, j, 2	8	3	3	4 *	1	1
9, j, 2	9	2	2	2	1	1
10, j, 2	10	2	2	2	2	2

Figur 8

$$z = 7 \times 1 + 7 \times 1 + 6 \times 1 + 6 \times 1 + 5 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 6 \times 1 = 37 > 27$$

Värdet 37 som fås på z är högre än värdet på z som fåtts i lösningen som tagits fram i YALMIP, vilket är 27.

6 Att skapa ett slutgiltigt 90/10 schema

Min linjära optimeringsmetod ledde fram till ett ramschema á 100 procent arbetstid. För att skapa ett slutgiltigt 90/10 schema krävs några ytterligare åtgärder:

1. Arbetsledningen och arbetstagarna tar från ramschemat á 100 procent arbetstid bort 10 vanliga dagpass och lägger på deras platser till 10 fripass. På så sätt skapas ett grundschema á 84 procent arbetstid. De 10 dagpassen som togs bort betecknas därefter som jourpass på ramschemat á 100 procent
2. Varje arbetstagare får i samråd med arbetsgivaren placera ut 10 jourpass i grundschemat á 84 procent arbetstid, så att resultatet blir ett individuellt schema á 100 procent som avviker på ett antal av jourpassen från ramschemat á 100 procent. De olika arbetstagarnas individuella scheman konstrueras så att de avviker på lika många jourpass från ramschemat inbördes så långt det är möjligt, för att skapa så rättvisa scheman som möjligt. Dessutom ska placeringen av jourpassen uppfylla en rad villkor som redovisas nedan.
3. Till varje helgdag ska det finnas 2 jourer. Helgjourerna ska täcka upp för både förlängt dagpass och nattpass. Bemanningen på helgerna ska därigenom hållas konstant. Dessa jourer ska tilldelas personer som har fripass på efterföljande måndag.
4. Till varje vardag ska det finnas 1-2 jourer. Dessa jourer ska tilldelas maximalt två dagar i rad till personer som har fripass dagen efter. Vardagsjourerna ska täcka upp för vanligt dagpass, förlängt dagpass och nattpass. I första hand är dessa jourer till för det förlängda dagpasset och nattpasset. Detta på grund av att BF-enheten måste vara bemannad dygnet runt. Om det inte finns tillräckligt många jourer för personer frånvarande från vanligt dagpass en vardag så accepteras en underbemanning.

7 Referenser

Företag A. (2013). *Arbetstidsmodell på XXXXX, Företag A.* Utredning. Personlig kommunikation.

Griva, I. Nash, S. & Sofer, A. (2009). *Linear and Non-linear Optimization*. *Second edition.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Löfberg, J. (2004) *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan

Sasane, A. & Svanberg, K. (2012). *Optimization*. Stockholm: Kungliga Tekniska Högskolan.

Svanberg, K. (2007). *Linjär optimering*. Stockholm: Kungliga Tekniska högskolan.