



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Den halv-analytiska metoden för aerodynamiska svängningar

av

Valentina Kudinova

2014 - No 17

Den halv-analytiska metoden för aerodynamiska svängningar

Valentina Kudinova

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Annemarie Luger

2014



Den halv-analytiska metoden för aerodynamiska svängningar.

Sammanfattning: Påtvingad oscillationer av en cylinder beskrivs med linjära andra ordnings differentialekvationer. Teorin hur man kan lösa sådana differentialekvationer analytiskt eller numeriskt (t.ex med Runge-Kuttas metod) är väl kända i nuförtiden och vi betraktar olika möjliga fall. I arbetet presenteras en halv-analytisk metod för att lösa linjära andra ordnings differentialekvationer, som beskriver påtvingad elastiska vibrationer av ett mekaniskt system. Metoden byggs på vind drivkrafts approximation av polynom av grad en, två, tre eller fyra. Detta ger möjligheten att erhålla en analytisk lösning av differentialekvationer vid varje tidsintervall. Dessa lösningar jämförs med numeriska lösningar.

Contents

1	Inledning.....	5
2	Andra ordningens differentialekvationer.	6
2.1	Grundläggande begreppen.....	6
2.2	Homogen ekvation.....	8
2.3	Inhomogen ekvation med polynom av grad n i höga led.	9
2.4	Inhomogen ekvation med trigonometriska funktioner i höga led.....	9
3	Numeriska metoder.	11
3.1	Grundläggande begreppen.....	11
3.2	Feltermen.	12
3.3	Runge-Kuttas metod för första ordningens differentialekvationer.....	13
3.4	Runge-Kuttas metod för andra ordningens differentialekvationer.....	15
4	Halv-analytisk metod för att lösa inhomogena differentialekvationer för svängningar...	17
4.1	Aeroelastik oscillation av cylinder i flödet.....	17
4.2	Påtvängade elastiska vibrationer av cylindern.	18
4.3	Interpolering av driftkraften.	18
4.4	Halv-analytisk metod.....	21
5	Jämförelse halv-analytisk metod med Runge-Kuttas metod.....	23
5.1	Numeriska beräkningar av påtvängad oscillation.	23
5.2	Sammanfattning.....	27
6	Litteraturförteckning.	28

1 Inledning.

Mest av naturvetenskapliga problemen beskrivs ofta med något antal av storheter som är rums- och tidsberoende. Det motsvarar till ett matematiskt problem som består av en relation mellan den undersökta storheten och dess derivator. En ekvation som innehåller en funktion och dess första- och andra derivata kallas differentialekvation. Fysikaliska system som vibrerar eller oscilleras beskrivs med andra ordningens differentialekvationer. Teorin hur man kan lösa sådana typer av differentialekvationer analytiskt eller numeriskt är väl kända i nuförtiden och vi betraktar olika möjliga fall.

Vilken metod är då bättre att använda i praktiken: numerisk eller analytisk? Om vi använder Matlab eller vanliga numeriska programvaror som ANSYS behöver vi använda analytiska lösningar till differentialekvationer eller är det bättre att lösa allt numeriskt? Behöver vi använda analytiska lösningar för att minska räkningstiden med moderna datorer eller är det lättare att utnyttja bara numeriska lösning? På 70-80 talet fanns det en synpunkt att en del forskare föredrar analytiska metoder och andra numeriska. Vad är det som gäller idag? Är det bara numeriska metoder som används och utvecklas nu? Är det bara lärare som har nyttja av analytisk matematik? För ett modernt, komplicerat problem är det mycket viktigt att använda båda två approacher och behärska båda två samtidigt.

Betrakta som ett exempel den aeroelastiska oscillationen av en cylinder i ett flöde. Problemet beskrivs med Navier-Stokes ekvationer och ekvationer som beskriver oscillationens dynamik, så kallad kopplad problemet av aerodynamik. Båda två systemen har samma koordinatsystem och samma tidssteg, men olika numeriska metoder brukar användas för att hitta lösningen till varje system. Det är lättare för varje tidssteg att hitta en lösning separat för varje system. För varje tidsintervall antas först något av värdena för driftkraften och sen hittas de riktiga värdena som satisfierar både två systemet från iterativ cykel. Det ställer högre krav på noggrannhet av tillämpnings metod och kräver mindre tidssteg. Problemet beskrivs i tredje avsnitt av detta arbete.

Det huvudsakliga särdraget av problemet med aeroelastiska vibrationer är att drivkraften är känd för ett visst antal punkter och endast på de nuvarande eller tidigare intervallen. För denna typ av problem brukar användas bara numeriska metoder: Eulers, Runge-Kuttas osv. Noggrannhet av Runge-Kuttas metod var inte tillräckligt att undersöka konvergensen för hela problemet. Därför utvecklas den halv-analytiska metoden för att lösa differentialekvationer av andra ordningen, som beskriver påtvingade elastiska vibrationer av ett mekaniskt system. Den metoden har en analytisk lösning för varje tid steg och ge extremt noggranna resultat, ger möjlighet att öka tidssteg för ett problem om aeroelastiska cylinderns vibrationer.

I kapitel två av arbetet behandlas andra ordningens differentialekvationer som senare används för att lösa ekvationer av den påtvingade oscillationen av en cylinder. I det tredje avsnittet betraktas Runge-Kuttas metod som kan användas att lösa samma problem. Den halv-analytiska metoden beskrivs i det fjärde avsnittet av arbetet. I sista avsnittet gjordes jämförelser mellan halv-analytisk metoden och Runge-Kuttas metod.

2 Andra ordningens differentialekvationer.

Påtvungade oscillationer av en cylinder beskrivs med linjära andra ordnings differentialekvationer. I det här avsnittet betraktas kort grundläggande begrepp inom differentialekvationer, särskilt avseende ägnas åt lösning av linjära andra ordnings differentialekvation med konstanta koefficienter. Vi hänvisar läsaren till [1], där dessa frågor behandlas mer ingående.

2.1 Grundläggande begreppen.

Relationen mellan en undersökt storhet och dess derivator kallas en differentialekvation. Med andra ord en differentialekvation är en ekvation med okända funktioner, oberoende variabler och derivator av den okända funktionen. Vi ska betrakta bara andra ordningens differentialekvationen (differential ekvationen innehåller bara första- och andraderivator) som beror på en variabel (tiden) och kan skrivas som

$$F(t, y, y', y'') = 0 \quad (2.1)$$

Funktionen $y = \varphi(t)$ är den okända funktionen och vi behöver bestämma $y = \varphi(t)$ eller definiera funktionen implicit för att lösa differentialekvation (2.1). En funktion är lösning av (2.1) om den definieras på något intervall $t_1 < t < t_2$ och $F(t, \varphi(t), \varphi(t)', \varphi(t)'')$ är lika med 0. Funktionen $\varphi(t)$ måste vara deriverbar två gånger på intervallet $t_1 < t < t_2$ och lösning måste tillhöra för definitionsmängden F i (2.1). Vi antar att y'' kan lösas ut och differentialekvationen (2.1) är ekvivalent till ekvationen

$$y'' = f(t, y, y'). \quad (2.2)$$

För att lösa den ekvationen (2.2) försöker vi att integrera bägge leden i ekvationen. Om vi kan integrera ekvationen (2.2) två gånger så förekommer två godtyckliga konstanter i lösningen. Under vissa förutsättningar om f kan man bevisa att lösningen för (2.2) beror på två godtyckliga konstanter C_1 och C_2 och $y = \varphi(t, C_1, C_2)$ kallas då allmän lösning. För varje C_1 och C_2 har vi partikular lösning av differentialekvationen. I ett begynnelsevärdesproblem för andra ordningens differentialekvation behöver man hitta en partikular lösning som uppfyller även två begynnelsevillkor

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.3)$$

$$y'(t_0) = y_1, \quad (2.4)$$

där y_0, y_1 är reella tal. De två godtyckliga konstanterna C_1 och C_2 bestäms enligt (2.3)-(2.4). En korrekt formulering av begynnelsevärdesproblemet kräver bevis att lösningen existerar. Även om det finns naturvetenskapliga problem som beskrivs med hjälp av differentialekvationen, betyder det inte att det finns en lösning.

Sats 1. Om funktion $f(t, y, y')$ och dess partiella derivator $\frac{\partial f(t, y, y')}{\partial y}$ och $\frac{\partial f(t, y, y')}{\partial y'}$ med avseende på de argumenten y och y' är kontinuerliga i en domän som innehåller (t_0, y_0, y_1) ,

så finns det $y = y(t)$, som är en unik lösning av ekvationen $y'' = f(t, y, y')$ med begynnelsevärdena (2.3) och (2.4).

En förutsättning, att partiella derivator $\frac{\partial f(t, y, y')}{\partial y}$ och $\frac{\partial f(t, y, y')}{\partial y'}$ är kontinuerliga, brukar användas för en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter som beskriver den påtvingade oscillationen. Picards sats [1] brukar användas för en allmän differentialekvation av första ordningen som har formen

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y). \quad (2.5)$$

Picards sats Låt F vara en kontinuerligt differentierbar funktion på definitionsmängden $(a, b) \times (c, d)$. Vi antar att funktionen F är begränsad,

$$|F(x, y)| \leq M, \quad (2.6)$$

och dessutom att F uppfyller Lipschitzvillkoret:

$$|F(x, s) - F(x, t)| \leq C \cdot |s - t|. \quad (2.7)$$

Låt $x_0 \in (a, b)$ och $y_0 \in (c, d)$. Då finns det ett $h > 0$ sådant att $(x_0 - h, x_0 + h) \subseteq (a, b)$ och en kontinuerligt differentierbar funktion y på $(x_0 - h, x_0 + h)$ (med värden i (c, d)) som löser begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2.8)$$

Lösningen är unik i den meningen att om \tilde{y} är en annan kontinuerligt differentierbar funktion på något intervall $(x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h})$ som löser begynnelsevärdesproblemet i ekvation (2.8), så är $(y \equiv \tilde{y})$ på $(x_0 - h, x_0 + h) \cap (x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h})$ [1].

I mitt arbete kommer förekomma bara en viss typ av andra differentialekvationer, nämligen linjära med konstanta koefficienter som beskriver den påtvingade oscillationen:

$$y'' + A_1 y' + A_2 y = Q(t) \quad (2.9)$$

där $Q(t)$ är en känd kontinuerlig funktion och $A_1 = \text{const}, A_2 = \text{const}$. ”Attributet ”linjär” härrör från det faktum att det vänstra ledet innehåller en differentialoperator som verkar linjärt på rummet av differentierbara funktioner” [1]. Satsen om existens och entydighet av lösningar gäller för dessa ekvationer, då (2.9) är ett speciellt fall av ekvationer (2.2).

Man kan lösa sådana ekvationer analytiskt. Om $Q(t) = 0$, då kallas ekvationen homogen. Den inhomogena ekvationen är ekvationen med $Q(t) \neq 0$. Den allmänna lösningen kan delas upp i två delar, den homogena och den partikulära.

Sats 2. Om funktionen y_h är lösning till den homogena ekvationen och funktion y_p är en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen då summan är

$$y = y_h + y_p \quad (2.10)$$

en lösning till den inhomogena ekvationen (2.9), där $Q(t) \neq 0$.

Lösningformeln för ekvationen (2.9) härleds i nästa avsnitt.

2.2 Homogen ekvation.

Den andra ordningen homogena linjära ekvationen med konstanta koefficienter är

$$y'' + A_1y' + A_2y = 0. \quad (2.11)$$

Låt att $y = Ce^{\lambda t} \neq 0$ vara en lösning av ekvationen (2.11). Om vi substituerar det i (2.11) erhåller vi

$$Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) = 0. \quad (2.12)$$

Eftersom $y = Ce^{\lambda t} \neq 0$ får vi då karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0. \quad (2.13)$$

Den karakteristiska ekvationen (2.13) har rötterna

$$\lambda_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}. \quad (2.14)$$

Om $A_1^2 - 4A_2 > 0$ är rötterna i ekvationen (2.13) reella och olika. Lösningen av den homogena ekvationen (2.11) är

$$y = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}. \quad (2.15)$$

Om $A_1^2 - 4A_2 = 0$ är roten i ekvationen (2.13) reell och har storleksordning två. Det betyder att $y = Ce^{-\frac{A_1}{2}t}$ och $y = Cte^{-\frac{A_1}{2}t}$ är lösningar av ekvationen. Lösningen av den homogena ekvationen (2.11) är

$$y = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{A_1}{2}t} \quad (2.16)$$

Om $A_1^2 - 4A_2 < 0$ blir rötterna i ekvationen (2.13) komplexa och lösning av homogena ekvationen (2.11) är

$$y = e^{-\frac{A_1}{2}t}(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \quad (2.17)$$

där $k = 0.5\sqrt{4A_2 - A_1^2}$. Konstanterna C_1 och C_2 bestäms från begynnelsevilkoren (2.3) och (2.4).

2.3 Inhomogen ekvation med polynom av grad n i höga led.

Betrakta ekvationen (2.9) med begynnelsevärdesproblemet (2.3)-(2.4). Vi antar att $Q(t)$ är ett polynom av grad n

$$Q(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \dots + B_n t^n = \sum_{i=0}^n B_i t^i. \quad (2.18)$$

Enligt (2.10) behöver vi hitta lösningen till motsvarande homogena ekvation (se Homogen ekvation.) och en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Som partikulärlösning gissar vi på ett polynom av grad n . Om rötterna i ekvationen (2.13) och en polynom (2.18) är olika är denna gissningen rimlig

$$y_p(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n = \sum_{i=0}^n b_i t^i. \quad (2.19)$$

Om vi sätter in detta i (2.9) och grupperar likartade termer har vi

$$\begin{aligned} A_2 b_n &= B_n \\ nA_1 b_n + A_2 b_{n-1} &= B_{n-1} \\ n(n-1)b_n + (n-1)A_1 b_{n-1} + A_2 b_{n-2} &= B_{n-2} \\ &\dots \\ 3 \cdot 2b_3 + 2A_1 b_2 + A_2 b_1 &= B_1 \\ 2b_2 + A_1 b_1 + A_2 b_0 &= B_0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Koefficienterna b_i bestäms enligt nedan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{A_2} B_n \\ b_{n-1} &= \frac{1}{A_2} (B_{n-1} - nA_1 b_n) \\ b_{n-2} &= \frac{1}{A_2} (B_{n-2} - n(n-1)b_n - (n-1)A_1 b_{n-1}) \\ &\dots \\ b_1 &= \frac{1}{A_2} (B_1 - 3 \cdot 2b_3 - 2A_1 b_2) \\ b_0 &= \frac{1}{A_2} (B_0 - 2b_2 - A_1 b_1). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vi har polynomet av grad n och det betyder att $B_n \neq 0$. Från första ekvationen (2.20) har vi att $A_2 \neq 0$.

2.4 Inhomogen ekvation med trigonometriska funktioner i höga led.

Betrakta ekvationen (2.9) med begynnelsevärdesproblemet (2.3)-(2.4) och $A_1 \neq 0$. Låt oss anta att $Q(t)$ är

$$Q(t) = D \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.22)$$

Enligt (2.10) behöver vi hitta lösningen till den motsvarande homogena ekvationen (se Homogen ekvation.) och en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Om $\omega \neq k$ gissar vi som partikulär lösning på

$$y_p(t) = d \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (2.23)$$

Vi sätter in gissningen i (2.9), vilket efter några deriveringar och lite algebra ger

$$\begin{aligned} (A_2 - \omega^2) d - A_1 \omega b &= D \\ A_1 \omega d + (A_2 - \omega^2) b &= B. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Koefficienterna d och b bestäms enligt nedan, efter lösning av systemet för två ekvationen med två okända koefficienterna

$$\begin{aligned} d &= \frac{BA_1\omega - D(A_2 - \omega^2)}{(A_2 - \omega^2)^2 + (A_1\omega)^2} \\ b &= \frac{-DA_1\omega + B(A_2 - \omega^2)}{(A_2 - \omega^2)^2 + (A_1\omega)^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Om $A_1 = 0$ och $\omega = k$, då kan vi inte använda (2.25), på grund av att vi delar med ett tall som är 0. Observera exempelvis att om A_1 är mycket liten och om ω nästan är lika med $\sqrt{A_2}$ så är rörelsen svagt dämpad och den externa (påtvungade) frekvensen nästan lika med den naturliga frekvensen. I detta fall är amplituden mycket stor. Detta fenomen kallas resonans. Om $\omega = k$ och $A_1 = 0$ gissar vi som partikulär lösning på

$$y_p(t) = d t \sin \omega t + b t \cos \omega t. \quad (2.26)$$

Vi sätter in gissningen i (2.9), vilket efter några deriveringar och lite algebra ger

$$\begin{aligned} -2\omega b &= D \\ 2\omega d &= B. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Koefficienterna d och b bestäms enligt nedan, efter lösning av systemet för två ekvationen med två okända koefficienterna

$$\begin{aligned} d &= \frac{B}{2\omega} \\ b &= -\frac{D}{2\omega}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

3 Numeriska metoder.

Numeriska lösningen av differentialekvationer är ett väl utvecklat ämne som brukar används för att lösa svåra tekniska problem. I detta avsnitt betraktas kort de grundläggande begreppen inom numeriska metoder. Särskilt avseende ägnas åt lösning av linjära andra ordnings differentialekvationer med Runge-Kuttas metod. Vi hänvisar läsaren till [1, 3], där dessa frågor behandlas mer ingående.

3.1 Grundläggande begreppen.

Snabba datorer har gjort det både enkelt och möjligt att hitta nästan alla lösningar till differentialekvationer. När vi ska lösa ekvationer numeriskt ska vi ersätta derivatorna i ekvationen med differenser och kontinuerliga variabler med diskreta variabler. Efter den ersättningen har vi ett system av algebraiska ekvationer som approximerar differentialekvationer. Efter varje approximation har vi någon förlust. Vi ersätter den exakta lösningen av något approximativa svar, för vilket det alltid kommer finnas en felterm. Det kan ge upphov till instabilitetsfenomen. Om man använder numeriska metoden för att lösa differentialekvationer ska man alltid granska lösningen på något enkelt problem. Man ska också bedöma om lösningen är begränsad, periodisk eller stabil och kontrollera konvergensen [1, 3].

Den numeriska metoden förklaras med ett enkelt exempel för differenser. Betrakta differentialekvation

$$y'(t) - Ay(t) = 0 \quad (3.1)$$

med begynnelsevillkoren

$$y(0) = 1. \quad (3.2)$$

Låt oss anta att $h > 0$ är steglängden och vi ersätter funktion $y(t)$ med tabellen av diskreta värden

$$\tilde{y}(0), \tilde{y}(h), \tilde{y}(2h), \dots, \tilde{y}(nh), \dots \quad (3.3)$$

Ersätta derivatorna med differenser, som är approximation av derivatorna

$$\frac{\tilde{y}(t+h) - \tilde{y}(t)}{h}. \quad (3.4)$$

Steglängden h måste bli tillräckligt liten. Om vi substituerar (3.4) i (3.1) då får vi den nya ekvationen med differenser som approximerar differentialekvationer.

$$\frac{\tilde{y}(t+h) - \tilde{y}(t)}{h} + A \tilde{y}(t) = 0 \quad (3.5)$$

eller efter en enkel omskrivning har vi den rekursiva formeln

$$\tilde{y}(t+h) = (1 - Ah) \tilde{y}(t). \quad (3.6)$$

Anta att $t = 0, h, 2h, \dots$, då får vi en tabell

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= 1 \\ \tilde{y}(h) &= (1 - Ah) \\ \tilde{y}(2h) &= (1 - Ah)^2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \tilde{y}(Nh) &= (1 - Ah)^N \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

eller vi kan definiera att

$$y_k(kh) = (1 - Ah)^k$$

där $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Om $h = 1/N$, då

$$y_N(1) = (1 - A/N)^N \quad (3.7)$$

Vi får som approximativ lösning i stället för den exakta lösningen

$$\tilde{y}(1) = e^{-A} \quad (3.8)$$

Emellertid, är det väl känt inom matematisk analys att för tillräckligt små h eller för tillräckligt stort N skiljer sig värdet $(1 - A/N)^N$ mycket lite från e^{-A} . Detta visar att den approximativa lösningen som erhålls genom denna differens schema och som är beroende av steget h för små h konvergerar till denna exakta lösning av differentialekvationen.

3.2 Feltermen.

Fel begreppet är centralt för alla numeriska metoder. De ger bara approximativa svar. För enkla problemet, som kan lösas analytiskt, finns det en exakt lösning. Vi kan bestämma feltermen, men i praktiken, där det inte finns någon exakt lösning av ett komplicerat problem är det ett intrikat fråga [1].

Vid en numerisk lösning använder man även någon avrundningsmetod. "Avrundningsfel är ännu ett viktigt fenomen som vi måste undersöka" [1]. Ett sätt att undersöka detta problem är att använda först vanliga precision. Först avrunda till åtta decimaler och efteråt använda dubbel precision, som ger noggrannhet till 16 decimaler. Om svaret ändras för mycket, betyder det att beräkningar kommer ha något avrundningsfel. Om vi har nästan samma lösning för båda två fallen, då avrundningsfel är försumbara.

I teorin är det viktigaste diskretiseringsfel i det k :te steget, som definieras av differensen mellan exakta lösningen och approximativa lösning $y(t_k) - y_k$. Man kan använda Taylors formel för att uppskatta diskretiseringsfel. I praktiken använder man många olika numeriska metoder och måste ta hänsyn till det totala diskretiseringsfelet, som summera alla fel som införs i alla steg under approximerings. En grov uppskattning av det totala felet kan man ha under undersökningen av konvergens. Man gör beräkningen för första gång med små steg h , sedan för $h/2$, sedan för $h/4$, och så vidare. För man lösningar som avviker för försumbara små storheter, som minskar, då är det sannolikt att bägge beräkningarna befinner sig inom den eftersträvande totala diskretiseringsfelet från den exakta lösningen.

3.3 Runge-Kuttas metod för första ordningens differentialekvationer.

Runge-Kuttas metod är ett viktigt hjälpmedel för att approximera lösningar till ordinära differentialekvationer. Betrakta den enkla differentialekvationen med begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) - f(t, y) = 0 \quad (3.9)$$

$$y(0) = y_0 \quad (3.10)$$

Vi antar att $t_0 = 0 \leq t \leq t_s$. Vi kan välja N punkter för det intervallet, så att $h = t_s/N$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_s$, $t_i = ih$. Vi kan ersätta derivatorna med differenser enligt (3.4) och har enkelt första ordning schema eller Eulers schema

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.11)$$

$$y(0) = y_0. \quad (3.12)$$

Om vi beräknar y_i , då kan vi beräkna

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i). \quad (3.13)$$

Vi har inte utrymme att visa alla detaljer i härledningen av Runge-Kuttas metod. Vi resonerar i stället intuitivt. Vi approximerar derivatorna i formel (3.13) med en rät linjes. Om vi approximerar derivatorna med funktion ger det bättre noggrannhet. Vi kan skapa bättre approximation om vi har mer punkter för tidsintervallen $[t_i, t_{i+1}]$. Låt oss säga att vi hittar en approximativ lösning y_i i punkten t_i och vi behöver räkna ut y_{i+1} i punkten $t_{i+1} = t_i + h$. Vi kan skriva uttrycken för ett förvägbestämt heltal l .

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_i, y_i) \\ m_2 &= f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h m_1) \\ m_3 &= f(t_i + \beta h, y_i + \beta h m_2) \\ &\dots \\ m_l &= f(t_i + \gamma h, y_i + \gamma h m_{l-1}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Och sen kan vi beräkna

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (p_1 m_1 + \dots + p_l m_l) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.15)$$

$$y(0) = y_0. \quad (3.16)$$

Koefficienter $\alpha, \beta, \dots, \gamma, p_1, p_2, \dots, p_l$ sammanställs med syftet att ha högre approximation för angivna l . Om $l = 1$, då har vi Eulers schema (3.13).

Om $l = 2$, då

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_i, y_i) \\ m_2 &= f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h m_1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

och

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha} m_1 + \frac{1}{2\alpha} m_2 \right) = 0, i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.18)$$

$$y(0) = y_0. \quad (3.19)$$

Om vi beräknar y_i , då kan vi beräkna

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha} m_1 + \frac{1}{2\alpha} m_2 \right). \quad (3.20)$$

Runge-Kuttas metod har totala trunckeringsfelet med storleksordningen h^2 för godtycklig α . Vi bevisar det med Taylors formel. Om $y(t)$ är lösning av ekvation (3.9), då

$$\frac{dy}{dt} \equiv f(t, y(t)) \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt} (f(t, y(t))) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t)). \quad (3.22)$$

Enligt Taylors formel

$$\frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} = \frac{dy(t_i)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{d^2y(t_i)}{dt^2} + O(h^2) \quad (3.23)$$

för lösning $y(t)$ har vi

$$\begin{aligned} \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} &= \\ &= f(t_i, y(t_i)) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} f(t_i, y(t_i)) \right) + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Från (3.18) kan vi få

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} m_1 + \frac{1}{2\alpha} m_2 \quad (3.25)$$

eller om vi sätter (3.17) i (3.25)

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} f(t_i, y_i) + \frac{1}{2\alpha} f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h m_1). \quad (3.26)$$

Enligt Taylors formel

$$f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h m_1) = \quad (3.27)$$

$$= f(t_i, y_i(t_i)) + \frac{\partial f(t_i, y_i(t_i))}{\partial t} \alpha h + \frac{\partial f(t_i, y_i(t_i))}{\partial y} \alpha h f(t_i, y_i(t_i)) + O(h^2).$$

Vi får, om vi sätter (3.27) i (3.26)

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= \\ &= f(t_i, y(t_i)) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} f(t_i, y(t_i)) \right) + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Enligt (3.28), (3.24) och $y(0) = y_0$ är kända, då lokala trunkeringsfelet har sålunda storleksordningen h^3 (vi multiplicerar (3.28) och (3.24) med h). Det totala trunkeringsfelet är $O(h^2)$.

Om $l = 4$, då

$$\begin{aligned} m_1 &= h \cdot f(t_i, y_i) \\ m_2 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_1}{2}\right) \\ m_3 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_2}{2}\right) \\ m_4 &= h \cdot f(t_i + h, y_i + m_3). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Om vi beräknar y_i , så kan vi beräkna

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (3.30)$$

”Denna nya analytiska teknik, Runge-Kuttas metod, kan ge extremt noggranna resultat utan att man behöver använda mycket små värden på h (vilket skulle göra jobbet beräkningstekniskt kostsamt). Det lokala trunkeringsfelet är $\varepsilon_i = -\frac{y^{(5)}(\varphi) \cdot h^5}{180}$, där φ är en punkt mellan t_i och t_{i+1} . Det totala trunkeringsfelet har sålunda storleksordningen h^4 ” [1].

3.4 Runge-Kuttas metod för andra ordningens differentialekvationer.

Varje ordinär differentialekvation av andra eller högre ordning motsvarar ett system av första ordningens ekvationer. Om systemet skrivet i matrisform, är det möjligt att numeriskt integrera hela systemet. Ekvation (2.9) kan betraktas som följande system av ekvationer

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= Q(t) - A_1 z - A_2 y \end{aligned} \quad (3.31)$$

med ett begynnelsevärdesproblem

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ z(t_0) &= z_0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Systemet av ekvationen (3.31) med begynnelsevärdesproblemet (3.32) kan lösas med hjälp av Runge-Kuttas metod enligt formeln nedan

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (3.33)$$

där

$$\begin{aligned} m_1 &= h \cdot z_i \\ k_1 &= h \cdot (Q(t_i) - A_1 z_i - A_2 y_i) \\ m_2 &= h \cdot \left(z_i + \frac{k_1}{2} \right) \\ k_2 &= h \cdot \left(Q \left(t_i + \frac{h}{2} \right) - A_1 \left(z_i + \frac{k_1}{2} \right) - A_2 \left(y_i + \frac{m_1}{2} \right) \right) \\ m_3 &= h \cdot \left(z_i + \frac{k_2}{2} \right) \\ k_3 &= h \cdot \left(Q \left(t_i + \frac{h}{2} \right) - A_1 \left(z_i + \frac{k_2}{2} \right) - A_2 \left(y_i + \frac{m_2}{2} \right) \right) \\ m_4 &= h \cdot (z_i + k_3) \\ k_4 &= h \cdot (Q(t_i + h) - A_1(z_i + k_3) - A_2(y_i + m_3)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

4 Halv-analytisk metod för att lösa inhomogena differentialekvationer för svängningar.

Halv-analytisk metoden är utvecklad för att lösa differentialekvationer av andra ordningen, som beskriver påtvingad elastiska vibrationer av ett mekaniskt system. Metoden byggs på vind drivkrafts approximation med polynom av grad en, två, tre eller fyra. Detta ger möjlighet att erhålla en analytisk lösning av differentialekvationer för varje tidsintervall. Denna nya halv-analytiska metod i stället för Runge-Kuttas metod kan ge extremt noggranna resultat, öka tids steg och minska beräkningstiden tiden för problem om aeroelastiska vibrationer av cylindern.

4.1 Aeroelastik oscillation av cylinder i flödet.

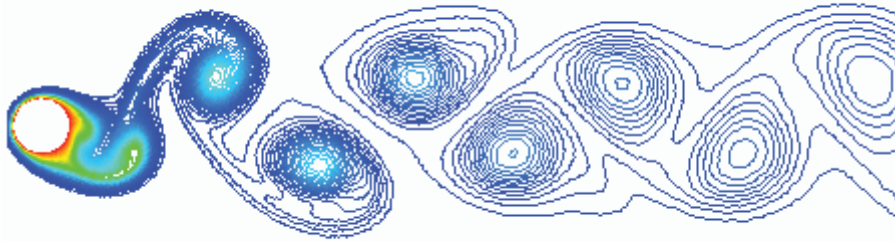


Fig.4.1. Aeroelastisk oscillation av cylinder i flödet

Flöde runt cirkulär cylinder är ett "klassiskt" problem för fluidmekaniken. När aeroelastik oscillation betraktas, beskrivs problemet med Navier-Stokes ekvationer för inkompressibla fluidflöde och ekvationer av dynamik för cylinder som vibrerar [5,2]. I båda två systemen av ekvationer ingår driftkraften eller aerodynamisk kraft $Q(t)$ och y – förskjutning från sina jämviktslägen.

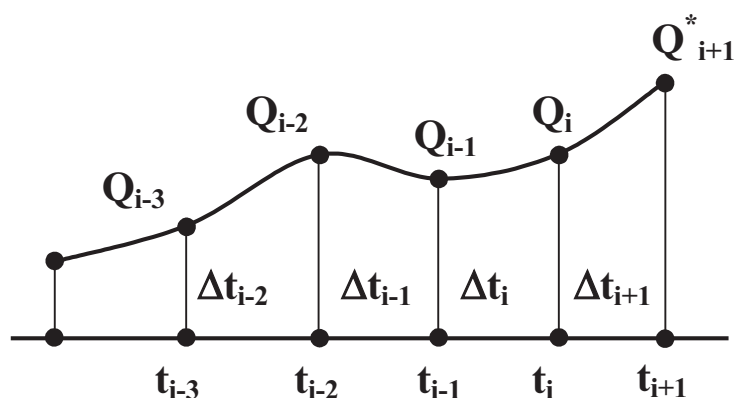


Fig.4.2. Schablon för interpolering av drivkraften för fortlöpande $i + 1$ tidssteg.

Varje system har samma koordinat system och samma tid steget. Skillnader är att man använder olika numeriska metoder för hitta lösningen för systemet. Det är lättare för varje tid steget att hitta lösning för det två systemet oberoende. Kopplad problemet av aeroelastik kan lösas med hjälp av nästa algoritm. Vi antar att kunna värdena för driftkraften och förskjutning

i tidpunkterna $t_{i-3}, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i$ (Fig. 4.2). För beräkningar i de nya tidpunkter kommer vi använda bara 4 värdena från sista tidpunkter.

1. Driftkraft Q_{i+1}^* för tidpunkt t_{i+1} beräknas med hjälp av extrapolering polynom grad 3.
2. Dynamiks karakteristik av cylinder $y_{i+1}, (y_{i+1})', (y_{i+1})''$ för tidpunkt t_{i+1} beräknas från ekvationer av dynamik för driftkraften värdena $Q_{i+1}^*, Q_i, Q_{i-1}, Q_{i-2}, Q_{i-3}$.
3. Driftkraft Q_{i+1} beräknas från Navier-Stokes ekvationer för tidpunkt t_{i+1} med kända värdena $y_{i+1}, (y_{i+1})', (y_{i+1})''$.
4. Om $|Q_{i+1}^* - Q_{i+1}| < \varepsilon$, där ε är något litet värde, så kommer vi att ta nästa steg. Annars $Q_{i+1}^* = Q_{i+1}$ och vi är tillbaka till punkt 2.

Enligt den algoritmen användas driftkraftens kända värdena bara i 5 tidpunkter: $t_{i-3}, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}$.

4.2 Påtvingade elastiska vibrationer av cylindern.

Ordinära differentialekvationen (2.9) beskriver fysikaliskt system som vibrerar eller oscillerar. Vi hänvisar läsaren till [1], där dessa frågor behandlas mer ingående. För olika typer av oscillation skiljas differentialekvationen (2.9) med konstanta koefficienter. Betrakta Lagranges ekvation, som beskriver den påtvingade elastiska vibrationen av cylindern

$$y'' + 2\gamma Ky' + K^2y = Q(t) \quad (4.1)$$

där är y – förskjutning från sina jämviktslägen, γ – elastiska dämpningskoefficient, K – fjäderkonstanten, $Q(t)$ – drivkraften. Begynnelsevillkoren för (4.1) är $y(0) = y_0$ och $y'(0) = y_1$.

Differentialekvationen (2.9) är den viktigaste ekvation, när oscillation av ett dynamiskt system beskrivs. Om drivkraften är en känd funktion, då kan ekvation lösas analytiskt eller numeriskt. Om drivkraften är periodisk funktion med kända värden i enstaka punkten, då Fourierserier kan användas för att representera driftkraften. Lösningsteori är också välkänd för olika typer av oscillation.

För aeroelastisk oscillations kan vi använda bara fem eller mindre kända värdena för driftkraften för varje tidssteg. Då behöver vi först interpolera driftkraften med polynom och sen lösa ekvation med hjälp av någon numerisk eller analytisk metod. I nästa avsnitt betraktas problemet av driftkraften interpolerings med hjälp av polynom.

4.3 Interpolering av driftkraften.

Låt oss sig att vi vet värdena av driftkraften i tidpunkterna $t_{i-3}, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i$. Tidsteget kan varieras med tiden (Fig. 4.2). I allmänna fall bestäms driftkraften i tidpunkten t_{i+1} med hjälp av extrapolering och sen lösas kopplad aeroelastiks problem. I resultatens beräkning fick vi värden av driftkraften i tidpunkten t_{i+1} med föreskrivna noggrannhet. För att testa bara en del med beräkningar av påtvingad oscillations antar vi att driftkraften är en känd funktion, men i beräkningar kan vi använda max fem värden i tidpunkterna $t_{i-3}, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i$ och t_{i+1} (Fig. 4.2).

Driftkraften $Q(t)$ interpoleras av fjärde graden polynom för tidsintervallen $[t_{i-3}, t_{i+1}]$

$$Q(t) = a_0^i + a_1^i(t - t_i) + a_2^i(t - t_i)^2 + a_3^i(t - t_i)^3 + a_4^i(t - t_i)^4 \quad (4.2)$$

Koefficienten för interpolerings polynom bestämmas med hjälp av Lagranges polynom. Funktion $Q(t)$ skrivs som

$$\begin{aligned} Q(t) = & Q_{i+1} \frac{(t - t_i)(t - t_{i-1})(t - t_{i-2})(t - t_{i-3})}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-2})(t_{i+1} - t_{i-3})} + \\ & + Q_i \frac{(t - t_{i+1})(t - t_{i-1})(t - t_{i-2})(t - t_{i-3})}{(t_i - t_{i+1})(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-2})(t_i - t_{i-3})} + \\ & + Q_{i-1} \frac{(t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{i-2})(t - t_{i-3})}{(t_{i-1} - t_{i+1})(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i-2})(t_{i-1} - t_{i-3})} + \\ & + Q_{i-2} \frac{(t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{i-1})(t - t_{i-3})}{(t_{i-2} - t_{i+1})(t_{i-2} - t_i)(t_{i-2} - t_{i-1})(t_{i-2} - t_{i-3})} + \\ & + Q_{i-3} \frac{(t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{i-1})(t - t_{i-2})}{(t_{i-3} - t_{i+1})(t_{i-3} - t_i)(t_{i-3} - t_{i-1})(t_{i-3} - t_{i-2})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

där $Q_{i+1}, Q_i, Q_{i-1}, Q_{i-2}, Q_{i-3}$ är kända värdet för drift kraften för $i + 1, i, i - 1, i - 2, i - 3$ tidspunkten. Låt $\Delta t_{i-2} = t_{i-2} - t_{i-3}, \Delta t_{i-1} = t_{i-1} - t_{i-2}, \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$. Formel (4.3) kan skrivas också

$$\begin{aligned} Q(t) = & Q_{i+1} \frac{(t - t_i)(t - t_i + \Delta t_i)(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1})(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})}{\Delta t_{i+1}(\Delta t_{i+1} + \Delta t_i)(\Delta t_{i+1} + \Delta t_i + \Delta t_{i-1})(\Delta t_{i+1} + \Delta t_i + \Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})} + \\ & + Q_i \frac{(t - t_i - \Delta t_{i+1})(t - t_i + \Delta t_i)(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1})(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})}{-\Delta t_{i+1}\Delta t_i(\Delta t_i + \Delta t_{i-1})(\Delta t_i + \Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})} + \\ & + Q_{i-1} \frac{(t - t_i - \Delta t_{i+1})(t - t_i)(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1})(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})}{\Delta t_i(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})\Delta t_{i-1}(\Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})} + \\ & + Q_{i-2} \frac{(t - t_i - \Delta t_{i+1})(t - t_i)(t - t_i + \Delta t_i)(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1} + \Delta t_{i-2})}{-\Delta t_{i-1}(\Delta t_{i-1} + \Delta t_i + \Delta t_{i+1})(\Delta t_{i-1} + \Delta t_i)\Delta t_{i-2}} + \\ & + Q_{i-3} \frac{(t - t_i - \Delta t_{i+1})(t - t_i)(t - t_i + \Delta t_i)(t - t_i + \Delta t_i + \Delta t_{i-1})}{\Delta t_{i-2}(\Delta t_{i-2} + \Delta t_{i-1} + \Delta t_i + \Delta t_{i+1})(\Delta t_{i-2} + \Delta t_{i-1} + \Delta t_i)(\Delta t_{i-2} + \Delta t_{i-1})}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Om tidssteg är konstant, då $t_{i+1} = t_i + \Delta t, t_{i-1} = t_i - \Delta t, t_{i-2} = t_i - 2\Delta t, t_{i-3} = t_i - 3\Delta t$. Det ger oss att driftkraften $Q(t)$ är

$$\begin{aligned} Q(t) = & Q_{i+1} \frac{(t - t_i)(t - t_i + \Delta t)(t - t_i + 2\Delta t)(t - t_i + 3\Delta t)}{24(\Delta t)^4} + \\ & + Q_i \frac{(t - t_i - \Delta t)(t - t_i + \Delta t)(t - t_i + 2\Delta t)(t - t_i + 3\Delta t)}{-6(\Delta t)^4} + \\ & + Q_{i-1} \frac{(t - t_i)(t - t_i - \Delta t)(t - t_i + 2\Delta t)(t - t_i + 3\Delta t)}{4(\Delta t)^4} + \\ & + Q_{i-2} \frac{(t - t_i)(t - t_i - \Delta t)(t - t_i + \Delta t)(t - t_i + 3\Delta t)}{-6(\Delta t)^4} + \\ & + Q_{i-3} \frac{(t - t_i)(t - t_i - \Delta t)(t - t_i + \Delta t)(t - t_i + 2\Delta t)}{24(\Delta t)^4}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Om vi grupperar termer med $(t - t_i)$, får vi

$$\begin{aligned}
 Q(t) = & Q_i + \frac{3Q_{i+1} + 10Q_i - 18Q_{i-1} + 6Q_{i-2} - Q_{i-3}}{12\Delta t} (t - t_i) + \\
 & + \frac{11Q_{i+1} - 20Q_i + 6Q_{i-1} + 4Q_{i-2} - Q_{i-3}}{24\Delta t^2} (t - t_i)^2 + \\
 & + \frac{3Q_{i+1} - 10Q_i + 12Q_{i-1} - 12Q_{i-2} + Q_{i-3}}{12\Delta t^3} (t - t_i)^3 + \\
 & + \frac{Q_{i+1} - 4Q_i + 6Q_{i-1} - 2Q_{i-2} + Q_{i-3}}{24\Delta t^4} (t - t_i)^4.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Koefficienterna för ekvation (4.2) bestämmas enligt ekvation nedan

$$\begin{aligned}
 a_0^i &= Q_i \\
 a_1^i &= \frac{3Q_{i+1} + 10Q_i - 18Q_{i-1} + 6Q_{i-2} - Q_{i-3}}{12\Delta t} \\
 a_2^i &= \frac{11Q_{i+1} - 20Q_i + 6Q_{i-1} + 4Q_{i-2} - Q_{i-3}}{24\Delta t^2} \\
 a_3^i &= \frac{3Q_{i+1} - 10Q_i + 12Q_{i-1} - 12Q_{i-2} + Q_{i-3}}{12\Delta t^3} \\
 a_4^i &= \frac{Q_{i+1} - 4Q_i + 6Q_{i-1} - 2Q_{i-2} + Q_{i-3}}{24\Delta t^4}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Om drifkraften $Q(t)$ interpoleras av tredje graden Lagranges polynom för tidsintervalen $[t_{i-2}, t_{i+1}]$ då kan vi göra samma förvandlingar och koefficients av polynom bestäms som

$$\begin{aligned}
 a_0^i &= Q_i \\
 a_1^i &= \frac{Q_{i+1} + 1.5Q_i - 3Q_{i-1} + 0.5Q_{i-2}}{3\Delta t} \\
 a_2^i &= \frac{0.5Q_{i+1} - Q_i + 0.5Q_{i-1}}{\Delta t^2} \\
 a_3^i &= \frac{Q_{i+1} - 3Q_i + 3Q_{i-1} - Q_{i-2}}{6\Delta t^3} \\
 a_4^i &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Om drifkraften $Q(t)$ interpoleras av andra graden Lagranges polynom för tidsintervalen $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ då koefficients av polynom är

$$\begin{aligned}
 a_0^i &= Q_i \\
 a_1^i &= \frac{0.5Q_{i+1} - 0.5Q_{i-1}}{\Delta t} \\
 a_2^i &= \frac{0.5Q_{i+1} - Q_i + 0.5Q_{i-1}}{\Delta t^2} \\
 a_3^i &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Om drifkraften $Q(t)$ är linjär funktion för tidsintervalen $[t_i, t_{i+1}]$ då koefficients av interpolation blir

$$\begin{aligned}
 a_0^i &= Q_i \\
 a_1^i &= \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{\Delta t} \\
 a_2^i &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Driftkraften i ekvationen (4.1) bestämmas enligt (4.2) och (4.7) om interpolering av polynom grad fyra används. Om interpolering av mindre grad används, då (4.8), (4.9), eller (4.10) nyttjas istället av (4.7).

4.4 Halv-analytisk metod.

Lösning av ekvationen (4.1), där driftkraften är polynom med kända koefficienter som beräknas enligt (4.2), bestämmas enligt (2.10), (2.14)-(2.17), (2.19), (2.21). Om $\gamma > 1$, då lösningen av ekvation (4.1) ges av

$$\begin{aligned}
 y &= C_1 e^{-K(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})(t - t_i)} + C_2 e^{-K(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})(t - t_i)} + \\
 &+ b_0^i + b_1^i(t - t_i) + b_2^i(t - t_i)^2 + b_3^i(t - t_i)^3 + b_4^i(t - t_i)^4
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

där

$$\begin{aligned}
 C_1 &= y0_i - C_2 - b_0^i \\
 C_2 &= \frac{y0_i - b_0^i}{2K\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{(y0_i' - b_1^i)(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})K}{2K\sqrt{\gamma^2 - 1}} \\
 b_0^i &= \frac{a_0^i}{K^2} - \frac{2\gamma b_1^i}{K} - \frac{2b_2^i}{K^2} \\
 b_1^i &= \frac{a_1^i}{K^2} - \frac{4\gamma b_2^i}{K} - \frac{6b_3^i}{K^2} \\
 b_2^i &= \frac{a_2^i}{K^2} - \frac{6\gamma b_3^i}{K} - \frac{12b_4^i}{K^2} \\
 b_3^i &= \frac{a_3^i}{K^2} - \frac{8\gamma b_4^i}{K} \\
 b_4^i &= \frac{a_4^i}{K^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Om $\gamma < 1$, då lösningen av ekvation (4.1) ges av

$$\begin{aligned}
 y &= e^{-\gamma K(t - t_i)} \left(C_1 \cos \left(K\sqrt{\gamma^2 - 1}(t - t_i) \right) + C_2 \sin \left(K\sqrt{\gamma^2 - 1}(t - t_i) \right) \right) + \\
 &+ b_0^i + b_1^i(t - t_i) + b_2^i(t - t_i)^2 + b_3^i(t - t_i)^3 + b_4^i(t - t_i)^4
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

där

$$\begin{aligned}
 C_1 &= y0_i - b_0^i \\
 C_2 &= \frac{\gamma(y0_i - b_0^i)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} + \frac{y0_i' - b_1^i}{K\sqrt{1 - \gamma^2}} \\
 b_0^i &= \frac{a_0^i}{K^2} - \frac{2\gamma b_1^i}{K} - \frac{2b_2^i}{K^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 b_1^i &= \frac{a_1^i}{K^2} - \frac{4\gamma b_2^i}{K} - \frac{6b_3^i}{K^2} \\
 b_2^i &= \frac{a_2^i}{K^2} - \frac{6\gamma b_3^i}{K} - \frac{12b_4^i}{K^2} \\
 b_3^i &= \frac{a_3^i}{K^2} - \frac{8\gamma b_4^i}{K} \\
 b_4^i &= \frac{a_4^i}{K^2}.
 \end{aligned}$$

Om $|\gamma| = 1$, då lösningen av ekvation (4.1) ges

$$\begin{aligned}
 y &= (C_1 + C_2(t - t_i))e^{-K(t-t_i)} + \\
 &+ b_0^i + b_1^i(t - t_i) + b_2^i(t - t_i)^2 + b_3^i(t - t_i)^3 + b_4^i(t - t_i)^4
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

där

$$\begin{aligned}
 C_1 &= y0_i - b_0^i \\
 C_2 &= y0'_i - b_1^i - K(y0_i - b_0^i) \\
 b_0^i &= \frac{a_0^i}{K^2} - \frac{2\gamma b_1^i}{K} - \frac{2b_2^i}{K^2} \\
 b_1^i &= \frac{a_1^i}{K^2} - \frac{4\gamma b_2^i}{K} - \frac{6b_3^i}{K^2} \\
 b_2^i &= \frac{a_2^i}{K^2} - \frac{6\gamma b_3^i}{K} - \frac{12b_4^i}{K^2} \\
 b_3^i &= \frac{a_3^i}{K^2} - \frac{8\gamma b_4^i}{K} \\
 b_4^i &= \frac{a_4^i}{K^2}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Vi använder analytiskt metod för att lösa ekvationen (4.1). Det lokala trunkeringsfelet för varje tid steg är felet som kopplad med interpolering och extrapolering. Den beror på noggrannhet med vilken vi bestämmer driftkraften i tidpunkten t_{i+1} för kopplad aeroelastiska oscillationen, som inte kan göras nu.

5 Jämförelse halv-analytisk metod med Runge-Kuttas metod.

Utvecklad halv-analytisk metoden och Runge-Kuttas metoden testas i detta avsnitt. Vi antar att drivkraften är en känd funktion. För beräkningen användas bara fem kända värdena för varje tidsteget. Tidsintervallen och steget är samma för båda två metoder. Totalfelet för halv-analytisk metoden är felet vid interpolering. Totalfelet för Runge-Kuttas metod utgörs av interpolerings fel och trunkeringsfelet. Påtvungade vibrationer med och utan dämpning, svängning och resonans betraktas. Sammanfattning görs.

5.1 Numeriska beräkningar av påtvungad oscillation.

Låt oss nu använda den halv-analytiska metoden och Runge-Kuttas metod till vår ekvation (4.1) med begynnelsevillkoren $y(0) = y_0$ och $y'(0) = y_1$ och jämföra resultaten. Vi antar att $Q(t)$ är en känd funktion för att beräkna test ekvation, där

$$Q(t) = q \sin \omega t. \tag{5.1}$$

q är oscillationsamplitud av drivkraften, ω är oscillationsfrekvens av drivkraften. Förskjutning beräknas med hjälp av båda metoder i samma tidspunkt med hjälp av samma tidsintervall.

Då är det lätt att få en analytisk lösning av ekvation (4.1) enligt formell och (2.10), (2.14)-(2.17), (2.23) och (2.25), om $\omega \neq k$. Om $\omega \neq k$ och $\gamma = 0$ använder vi (2.26) och (2.28) istället (2.23) och (2.25). För att räkna ut $Q(t)$ i varje iterationssteg när vi löser ekvation (4.1) med hjälp av halv-analytiska metoden eller Runge-Kuttas metod använder vi (4.7)-(4.16). Beräkningens resultat för detta problemet med hjälp av semi-analytisk metoden och dess exakta lösning för $\gamma = 5$, $K = 4$, $q = 10$, $\omega = 2$ för intervalllängden 3π för 50 punkter visas i Fig.5.1. Begynnelsevillkoren är $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ i detta och andra problemen som anses.

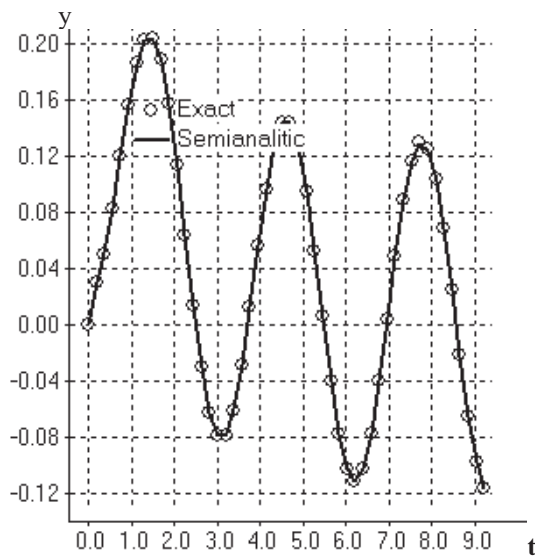


Fig.5.1. Lösning av ekvationen (4.1) för intervalllängden 3π .

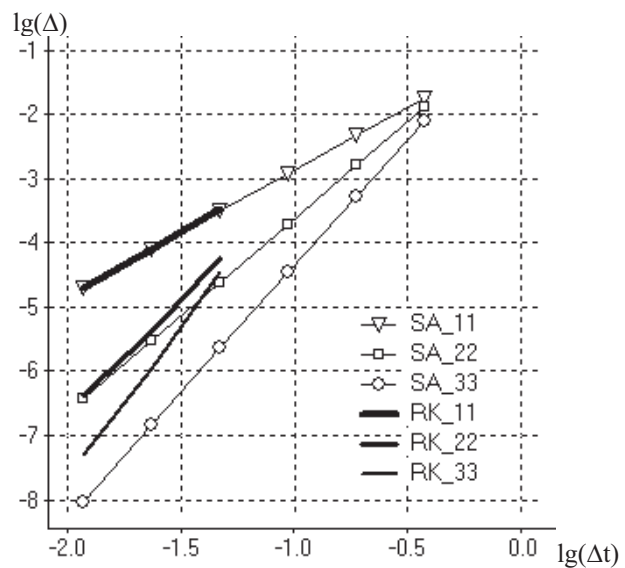


Fig.5.2. Medelvärdes fel för lösning av ekvationen (4.1) för intervalllängden 3π .

Jämförelse av medelvärds fel i lösningen för detta problemet med hjälp av Runge-Kuttas metod och semi-analytisk metod visas i Fig.5.2. För det och alla andra bilder är $\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\Delta y_i|$ – medelvärds fel för lösning för norm C , där N är antalet av tids steg, SA_{ij} , RK_{ij} är halv-analytiska metoden, Runge-Kuttas metod, i är ordning av extrapolerings polynom, j är ordning av interpolerings polynom för driftkraften. Vi använder inte nu extrapolerings. Vi använder bara interpolerings polynom, då $i = j$. Om antalet punkter är mindre än 200 för intervalllängden 3π , då medelvärds fel är mycket stor, när vi använder Runge-Kuttas metod (Fig.5.2). Med hjälp av semi-analytisk metoden hittas lösningen även för 50 punkten på samma interval och medelvärds fel överstiger inte 0.01 (Fig.5.2). Medelvärdes fel för lösningen av ekvation (4.1), när antalet punkter överstiger 200, är nästan identisk för båda metoderna när approximations och interpolations polynom för drivande kraften har första graden. Om drivkraften approximeras genom att interpolations polynom av andra eller tredje graden, då den semi-analytisk metod ger en mer exakt lösning (Fig.5.2).

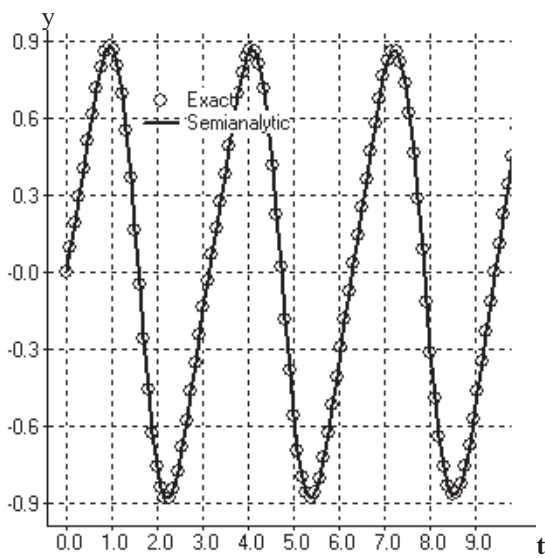


Fig.5.3. Lösning av ekvationen (4.1) för intervalllängden 30π .

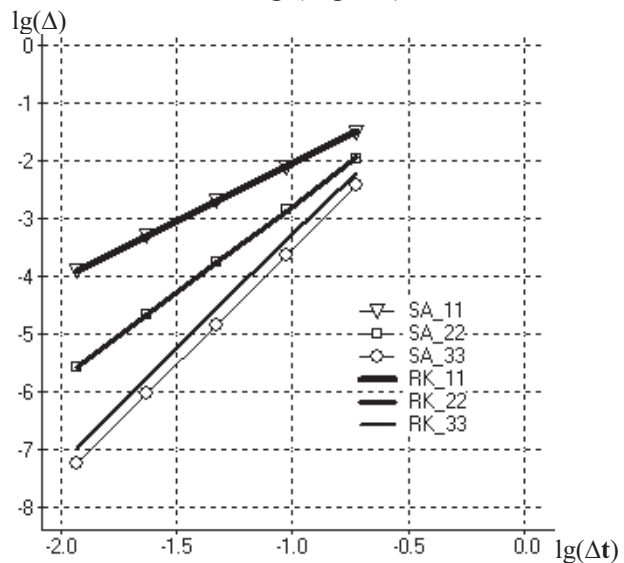
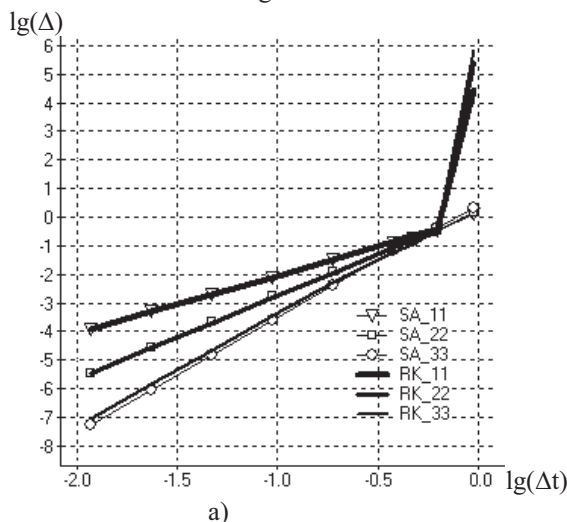
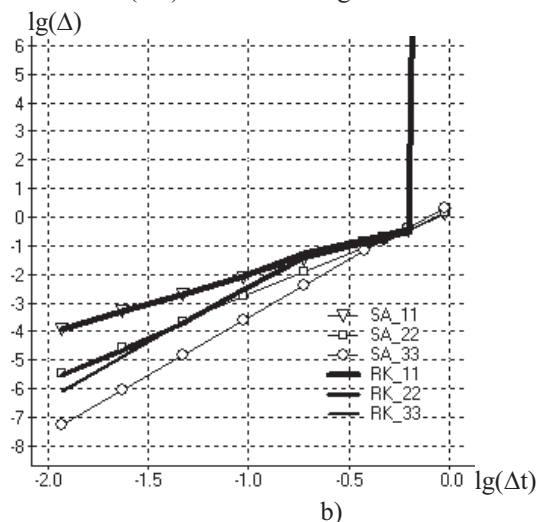


Fig.5.4. Medelvärdes fel för lösning av ekvationen (4.1) för intervalllängden 30π .



a)



b)

Fig5.5. Medelvärdes fel för lösning av ekvationen (4.1) för intervalllängden: a) 3π , b) 30π .

Lösningen av ekvation (4.1) i test 2 erhållas för $\gamma = 0.01$, $K = 4$, $q = 10$, $\omega = 2$ för intervalllängden 30π . Antalet av punkter varieras från 250 till 8000 punkter. En del av lösningen visas i Fig. 5.3. Jämförelse av medelvärds fel i lösningen för detta problemet med hjälp av Runge-Kuttas metod och semi-analytisk metod visas i Fig.5.4. Numeriska lösningar

avviker inte, medelvärdes fel för båda metoderna är nästan identiska för extrapolering och interpolering av polynom grad en eller två. Noggrannhet är mycket högre för halv-analytisk metoden vid användning av tredje ordnings polynom.

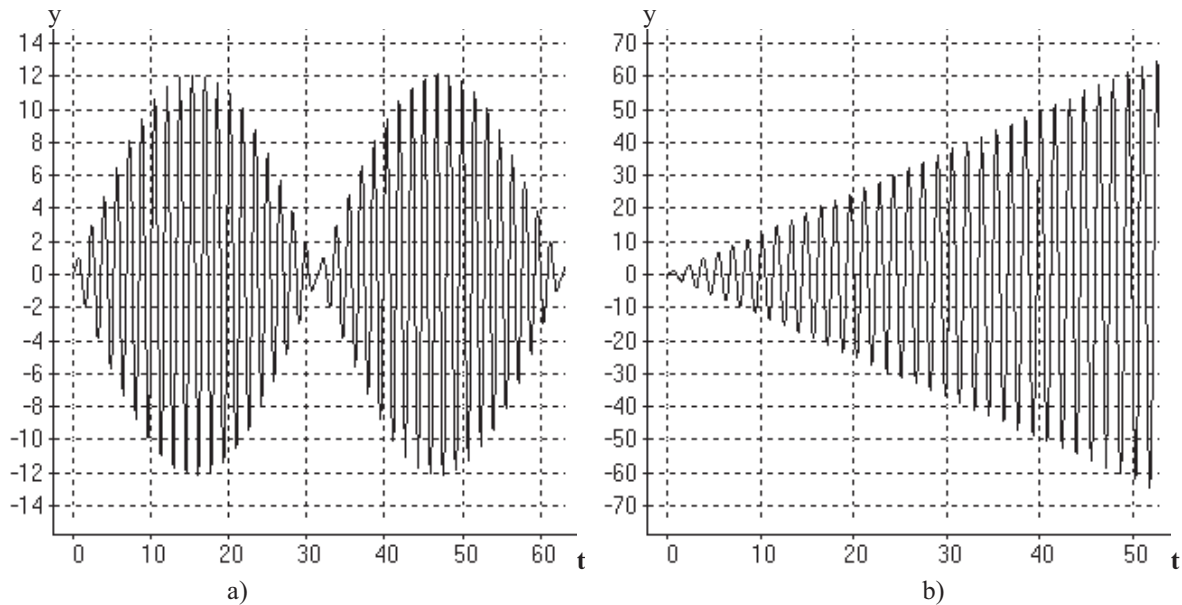


Fig.5.6. Lösning av ekvationen (4.1) för $\gamma = 0, K = 4, q = 1$: a) $\omega = 3.8$ (svängning), b) $\omega = 3.999$ (resonans).

Lösningen av ekvation (4.1) i test 3 erhållas för $\gamma = 0$ (oscillations utan dämpning) $K = 4, q = 1$, när driftkraften frekvens är $\omega = 3.5$ och skiljer sig betydligt från oscillationseigenfrekvens $\omega_0 = 4$. Medelvärdes fel i lösningen för detta problem visas i Fig.5.5 för intervalllängden 3π och 30π . Det är tydligen att medelvärdes fel för beräkningar med hjälp av Runge-Kuttas metod är store än för den föreslagna metoden. Medelvärdes fel skiljer sig för en order när approximations och interpolations polynom för drivande kraften har tredje graden (Fig. 5.5b). Om antalet punkter minskar på ett samma intervallslängd finns gränsvärde för tidssteg, när lösningen som hittas med hjälp av Runge-Kuttas metod avvikas. Den föreslagna metoden ger en stabil lösning. En ackumulering av felen inträffas under lösning av problemet, vilket är viktig för stora tidsperioder. Därför finns stora skillnaden mellan medelvärdes fel (Fig. 5.5a och Fig. 5.5b).

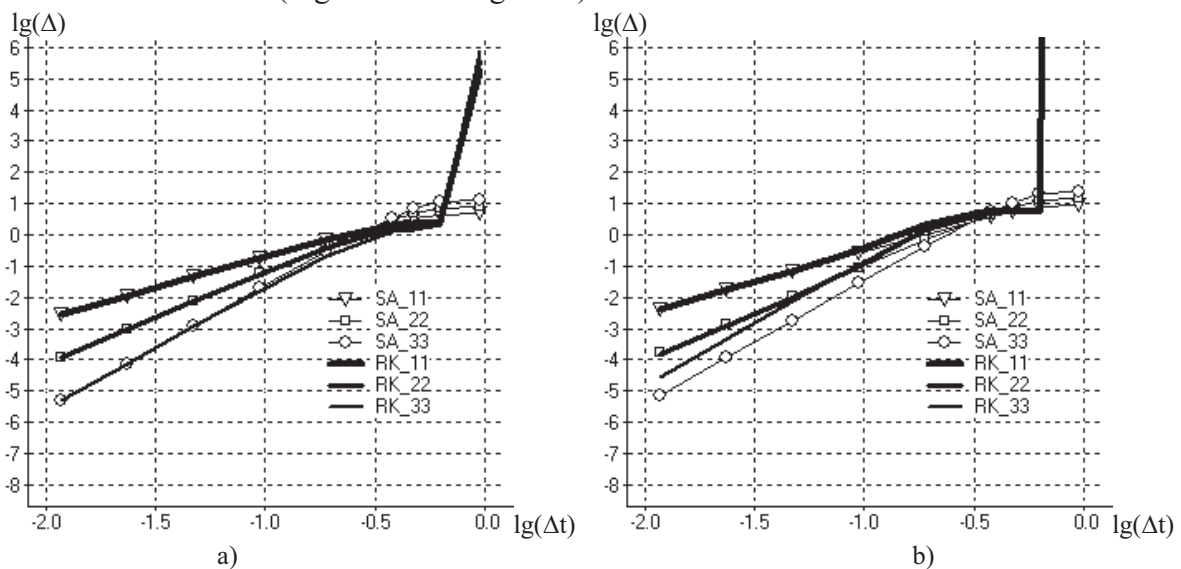


Fig.5.7. Medelvärdes fel för lösning av ekvationen (4.1) med hjälp av halv-analytisk och Runge-Kuttas metod för svängning för intervalllängden: a) 3π , b) 30π .

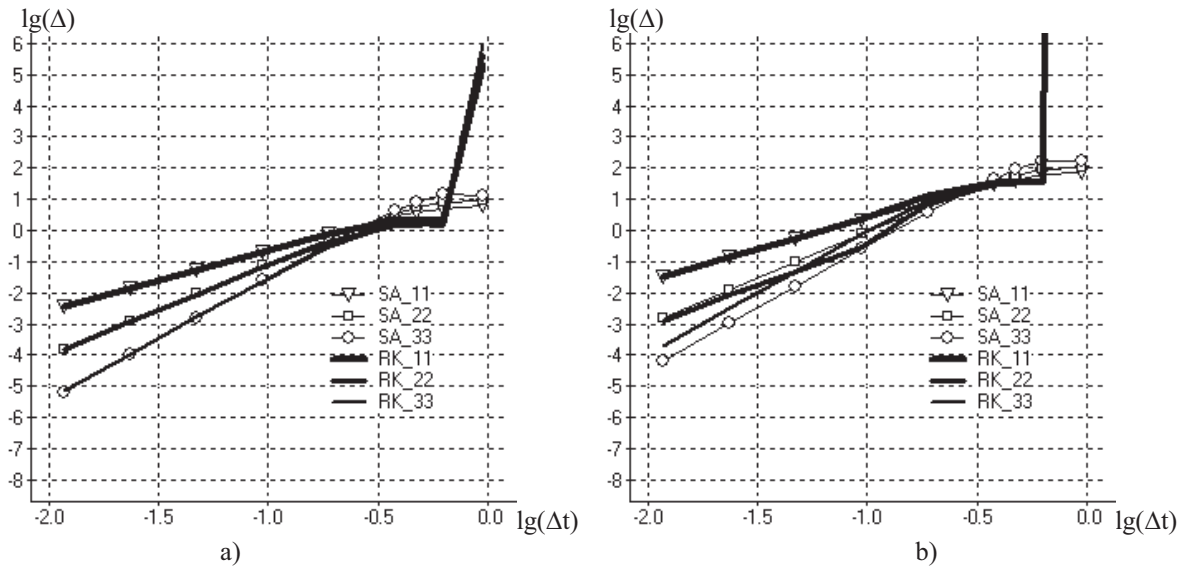


Fig.5.8. Medelvärdes fel för lösning av ekvationen (4.1) med hjälp av halv-analytisk och Runge-Kuttas metod för resonans för intervalllängden: a) 3π , b) 30π .

Om drivkraftens frekvens ligger nära oscillationseigenfrekvens, först observerade svängningsmod (Fig. 5.6a) $\omega = 3.8$ och sen resonans (Fig. 4.6b) $\omega = 3.999$. Medelvärdes fel i lösningen för detta problem visas i Fig.5.7 och Fig.5.8 för intervalllängden 3π och 30π . Det är inte så stor skillnaden mellan halv-analytiskt och Runge-Kuttas metoden, men noggrannhet för båda två metoder är mindre när i vanliga fall. För beräkningar av resonans och svängning behöver man mindre tidsteget än vanligt.

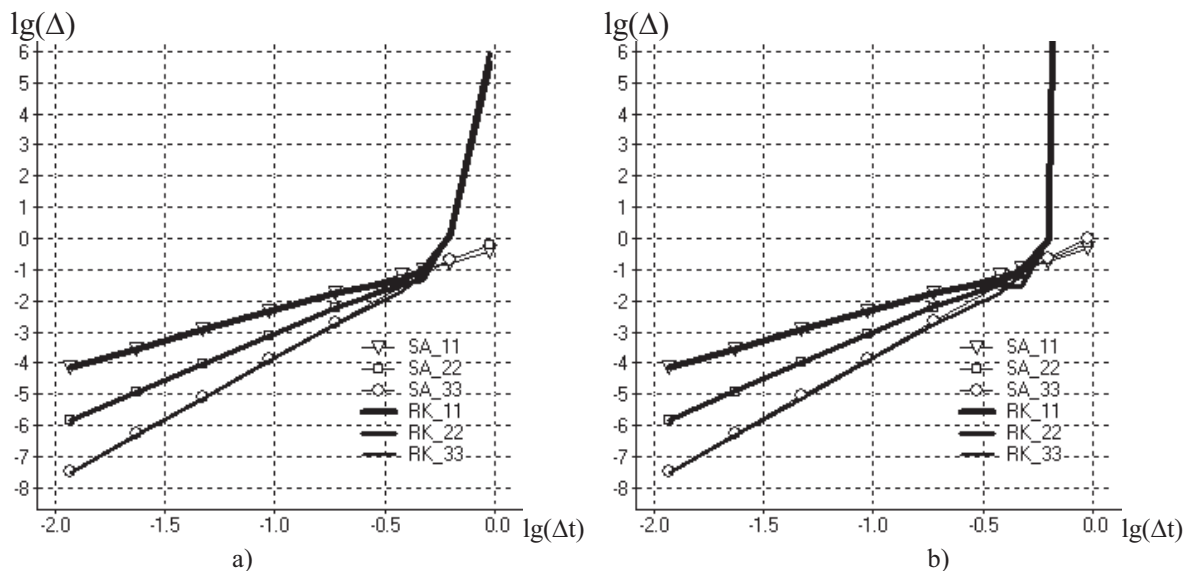


Fig.5.9. Medelvärdes fel för lösning av ekvationen (4.1) för $\gamma = 1$ med hjälp av halv-analytisk och Runge-Kuttas metod för intervalllängden: a) 3π , b) 30π .

Jämförelse av medelvärdes fel i lösningen för ekvationen (4.1) med hjälp av Runge-Kuttas metod och semi-analytisk metod visas i Fig.5.9 för $\gamma = 1$, $K = 4$, $q = 10$, $\omega = 2$ för intervalllängden 3π och 30π . Båda två metoder ger samma noggrannhet.

5.2 Sammanfattning.

Olika feltermmer förekommer under beräkningar av komplicerad problemet av aeroelastic oscillationen. Det är svårt att gissa vilken term ska bidra mest till den totala diskretiseringsfelet. I första beräkningars används Runge-Kuttas metod. När konvergens av problemet undersöks, då visades svårigheter i slutet av resonans perioden, när frekvenserna av oscillation blir instabilt. En halv-analytisk metod utvecklas för att lösa linjära andra ordnings differentialekvationer, som beskriver påtvingad elastiska vibrationer av ett mekaniskt system. Metoden byggs på vind drivkrafts approximation av polynom av grad en, två, tre eller fyra. Detta ger möjligheten att erhålla en analytisk lösning av differentialekvationer vid varje tidsintervall.

Den föreslagna metoden testas. Totala diskretiseringsfelet är felet i interpolering för halv-analytisk metoden. Runge-Kuttas metoden har felet i interpolering och lokala trunkeringsfelet. Vi kan inte kollad extrapoleringsfel alls eftersom vi studerade ekvationen (4.1) med kända driftkraften $Q(t)$ istället för det aeroelastiskt problemet. Man betraktas fyra fallen som beskriver alla möjliga fallet oscillations: påtvingad vibrationer med och utan dämpning, svängning och resonans.

För samtliga undersökta fall, ger halv-analytiska metoden en stabil lösning med ett större tidssteg jämfört med Runge-Kuttas metod. Dessutom har vi mindre fel över stora tidsintervaller med den föreslagna halv-analytiska metoden, vilket är mycket viktigt för aeroelastiskt problem.

Användning av linjär interpolering för driftkraften $Q(t)$ ger ett betydande fel för alla undersökta fall, eftersom de problem som behandlas har non linjära lösningar. De mest exakta resultat erhöles med hjälp av interpolering och extrapolering med polynom av grad tre och den föreslagna halv-analytiska metoden.

6 Litteraturförteckning.

1. Simmons, G.F., Krantz S.G., Differentialekvationer med historik, Liber, 2011.
2. **Kudinova V.** and Kudinov P., Vortex-induced Oscillations and Heat Transfer on a Cylinder in Accelerated Flow, 2006 59th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics, Tampa Bay, Florida USA. (APS-DFD-06).
3. Godunov S.K., Rjabenkij V.S., Differensmetoden, Nauka, 1977 (på ryska).
4. **Yericheva V.A.**, The semi-analytic method for simulation the equations of dynamics of aeroelastic oscillations, Mechanics Bulletin, Dnepropetrovsk university, Vol.1, Issue 8 (2004), P.18-26. (in Russian).
5. Kudinov P.I., **Yericheva V.A.**, Numerical investigation of resonant regimes of aeroelastic oscillations of circular cylinder, Mechanics Bulletin, Dnepropetrovsk university. Vol.1, Issue 8 (2004). (in Russian).