# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Kedjebråk

av

**Joel Carlgren**

2016 - No 7

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

# Kedjebråk

Joel Carlgren

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Qimh Xantcha

2016

**Sammanfattning**

Kedjebråken har en flera tusen år gammal historia och har därmed utvecklats under lång tid. Det skulle dock dröja fram till slutet av 1500-talet innan de fick sitt riktiga genombrott. Många av historiens stora matematiker har varit inblandade i utvecklingen, namn som Euklides, Euler och Lagrange känner de flesta ämneskunniga till. Arbetet kommer att bevisa några satser för kedjebråk gällande rationella och irrationella tal och kulminerar i en metod att lösa Pells ekvation.

**Abstract**

Continued fractions has a several thousand year history and has been developing for a long time. The breakthrough in the subject would not come until late 16th century. Many of history's great mathematicians has been involved in the development of continued fractions. Euclid, Euler and Lagrange are names that most mathematicians have heard. This paper will prove some of the theorems of continued fractions regarding real and irrational numbers. The final part will show a method to solve Pell's equation.

# Innehåll

# 1 Inledning

## 1.1 Varför kedjebråk?

Euler [3, § 356, s. 303] trodde att kedjebråken skulle komma till användning inom flera områden av matematiken. Framförallt nämner han aritmetik och algebra där han tror att ämnet kommer vara till stor hjälp. Han visade själv exempelvis på hur kedjebråk kan användas för att räkna ut hur ofta ett skottår verkligen behövs för att kompensera vårt kalenderårs 365 dagar. [2, § 17, s. 306-307] Vi kommer nedan att få se hur kedjebråk kan användas för att till exempel uppskatta värdet av ett irrationellt tal, eller ge en approximation av en kvadratrot. Det kommer även visa sig att kedjebråk har kopplingar till Euklides algoritm för att hitta största gemensamma delare och på så sätt till diofantiska ekvationer. Idag används kedjebråk exempelvis inom numerisk analys, datalogi och elektronik men de dyker även upp på många andra ställen, väntade som oväntade. Ett exempel är i samband med trassel eller knutar.[1]

## 1.2 Vad är kedjebråk?

Leonard Euler [3, § 356] beskriver kedjebråk som upprepade bråk där nämnarna är summan av ett heltal och ett bråk i vilket nämnaren också består av ett heltal och ett bråk av samma ty och så vidare.

Euler beskriver två typer av kedjebråk:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}}} \tag{1.2.1}$$

$$y = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \ddots}}}}}. \tag{1.2.2}$$

I den första typen, som ibland kallas *enkla kedjebråk*(se ekvation 1.2.1), är täljaren i bråken alltid en 1:a, $a_0 \in \mathbb{Z}$ och $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}^+$. I den andra (ekvation 1.2.2) typen tillåts täljaren vara vilket heltal som helst. En ännu mer generell typ av kedjebråk fås om vi i ekvation 1.2.1 och 1.2.2 låter $a_0, a_1, a_2, \ldots$ samt $b_1, b_2, b_3, \ldots$, vara vilka reella eller komplexa tal som helst och kallas då generaliserade kedjebråk.

Uppsatsen kommer fokusera på de mindre generella *enkla kedjebråken*. Termen kedjebråk kommer därmed hänvisa till kedjebråken av den typ som ses i ekvationerna 1.2.1 ovan. Termerna $a_0, a_1, a_2, ...$, kallas på engelska för *partial quotients* [8, kap. 1.2] och kommer här att översättas till *partiella kvoter*, är heltal och $a_1, a_2, ...$ är dessutom positiva. Eftersom kedjebråken tar stor plats och är omständliga att skriva ut kommer även en förenklad form att förekomma. Den förenklade formen av ekvation 1.2.1 ser ut som följer:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots].$$

Kedjebråk kan också delas in i två andra grupper, nämligen de som fortsätter i oändlighet och de

[1]För mer ingående kunskaper kring knutar och trassel se exempelvis *Classifying and Applying Rational Knots and Rational Tangles* [4].

som är ändliga. Ändliga kedjebråk beskriver rationella tal[2]

$$z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1.2.3}$$

som i ekvation (1.2.3) där $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ och $n \in \mathbb{N}$. Ekvation 1.2.3:s förenkling får den här formen:

$$z = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n].$$

Värdet av varje oändligt kedjebråk är ett irrationellt tal[3] som ekvation 1.2.1 ovan. En slutsats, som kommer bevisas senare, är att varje kedjebråk beskriver ett reellt tal och omvänt kommer det också att bevisas att varje reellt tal kan skrivas som ett kedjebråk.

## 1.3 Kort om kedjebråkens historia

I stora drag är den historiska delen hämtad från *History of Continued Fractions and Padé Approximants* [1], som jag starkt kan rekommendera för den intresserade.

Kedjebråk liksom de flesta andra områden inom matematiken har vuxit fram och utvecklats genom århundradena. Exempelvis använde den indiska matematikern Aryabhata kedjebråk runt 550 före vår tideräkning. Det finns också spår av kedjebråk från exempelvis det antika Grekland men även från arabiska matematiker. Som vi ska se senare så finns starka kopplingar mellan Euklides algoritm och kedjebråk; dock finns inga bevis för att Euklides själv räknade med dem. Under andra hälften av 1500-talet började europeiska matematiker intressera sig för kedjebråk. Två italienare vid namn Rafael Bombelli respektive Pietro Antonio Cataldi utvecklade då tekniker för att hitta approximationer till kvadratrötter genom kedjebråk.

Utvecklingen fortsatte så först med engelsmannen John Wallis som visade flertalet grundläggande egenskaper hos kedjebråken och som dessutom var först med att använda termen *continued fraction*. [8, § 1.7, s. 30] Det går att argumentera för att nästa steg i den processen togs av framförallt Leonard Euler men också av Joseph Louis Lagrange vilka tog fram bevis för rationella och irrationella tals kopplingar till kedjebråken.

Det gyllene århundradet för kedjebråken får ändå anses vara 1800-talet. Varje matematiker visste då vad kedjebråk var och många av dem bidrog därmed till ämnets utveckling. En hel del fokus lades nu också på kedjebråkens användningsområden. Några exempel är transcendenta tal, ortogonala polynom och Padé-approximationer. [1, kap. 5, s.141]

## 1.4 Uppsatsens upplägg

Uppsatsen kommer alltså behandla kedjebråk. Fokus ligger på en del grundläggande definitioner och satser som kommer att bevisas. Exempel för att göra metoder eller räkningar tydligare kommer att finnas i varje kapitel.

Utgångspunkten blir en sats som gäller de rationella talen och hur dessa kan skrivas som ändliga och, nästan, unika kedjebråk. Följande avsnitt behandlar konvergens och att ett kedjebråk kan definieras som ett gränsvärde vilket leder in på approximationer av irrationella tal. I nästa kapitel bevisas att varje irrationellt tal kan skrivas som ett oändligt kedjebråk, men också att det omvända gäller, det vill säga, varje oändligt kedjebråk representerar ett irrationellt tal. Här kommer vi bland annat att överskådligt behandla talet $\pi$ och några approximationer av det.

Den avslutande delen kommer behandlar vi de lite mer intrikata satserna om kedjebråk och vi kommer nu att gå in på de kvadratiska irrationella talen, på engelska ofta kallade *quadratic surds*. Det kommer bevisas att dessa tal har periodiska kedjebråk vilket mynnar ut i en metod för att approximera

[2] Rationella tal $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ och } q \neq 0 \right\}$. [9, s. 4]

[3] Irrationella tal är de reella tal som inte kan skrivas som en kvot av heltal. [9, s. 5].

kvadratrötter. Slutligen kommer än mer specifika irrationella tal, de reducerade kvadratiska irrationella talen, undersökas och vi kommer då kunna använda dessa bevis för att lösa Pells ekvation.

## 2 Kedjebråk och rationella tal

Vi börjar med att visa på ändliga kedjebråks koppling till rationella tal. Det finns flera olika vägar att visa kopplingen men satserna och bevisen är här i stort byggda på C.D. Olds [8, kap. 1.4] variant eftersom jag tycker att de är lättöverskådliga. Leonard Euler [3, § 362-363, s. 306-308] bevisade dock att varje rationellt tal kan skrivas som ett ändligt kedjebråk men använder då inte 1:or i täljarna.

Nedan gäller om inget annat uppges att $a_0 \in \mathbb{Z}$ och $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}^+$.

**Sats 2.1.** *Varje rationellt tal kan skrivas som ett ändligt kedjebråk och omvänt representerar varje ändligt kedjebråk ett rationellt tal. Borträknat undantaget* $[a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$ *är dessutom kedjebråket unikt. De partiella kvoterna* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *är de successiva kvoterna i Euklides algoritm.*

*Bevis.* För att bevisa detta utgår vi från ett rationellt tal, $x = \frac{p}{q}$ där $p, q \in \mathbb{Z}$ och $q > 0$. Vi får då

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}, \qquad 0 \leqslant r_1 < q$$

där $a_0 \in \mathbb{Z}$ är valt så att $q > r_1 \geqslant 0$, det vill säga $a_0$ är det minsta heltal som är mindre än $\frac{p}{q}$. Om $r_1 = 0$ är vi klara, annars fortsätter vi processen och skriver ekvationen enligt

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}, \qquad 0 < r_1 < q.$$

Vi fortsätter för $\frac{q}{r_1}$ och får

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1, \quad a_1 > 0.$$

Om $r_2 = 0$ är vi klara, annars kan vi på samma sätt som ovan skriva

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}, \qquad 0 < r_2 < r_1.$$

Vi kan då alltså skriva in $\frac{q}{r_1}$ i det ursprungliga uttrycket $\frac{p}{q}$ och får

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}, \qquad 0 < r_2 < r_1 < q$$

Samma uträkningar iterativt leder slutligen, eftersom $r_1 > r_2 > \ldots > r_n = 0$, till att kedjebråket är avslutat. Vi får alltså

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Vi har ovan visat att rationella tal kan skrivas som kedjebråk på formen $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ där $a_0 \in \mathbb{Z}$ och $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$. Eftersom vi här utgår från att $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i ett kedjebråk är heltal (och $a_1, \ldots, a_n$ dessutom positiva) består kedjebråket endast av rationella tal. Då de operationer som utförs är division och addition så kommer inga irrationella tal kunna uppstå och alltså måste $x$ vara rationellt. Detta går också att visa induktivt genom att använda formeln

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}.$$

Vi visar nu att kedjebråket för det rationella talet $x$ är unikt, med undantaget som visas nedan. Låt

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

där $a_0$ enligt vår definition av kedjebråk är det största heltalet mindre än eller lika med talet självt. Eftersom

$$a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}} > 1, \quad \text{och} \quad 0 < \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} < 1$$

och

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x - a_0} = a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}.$$

Alltså är $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Låt $R_1 = a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}$, vi vet då att $R_1$ också är ett rationellt tal enligt beviset ovan och vi kan då använda samma resonemang som för $x$. Det vill säga $a_1$ är ett heltalsdelen av $R_1$ och vi vet att $0 < \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}} < 1$. Den här processen görs iterativt och vi ser att $a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}^+$. När vi sedan kommer fram till $a_n$, vilket är det sista heltalet i kedjebråket, har vi nu inget bråk att lägga till. Eftersom varje rationellt tal kan skrivas som en summa av ett heltal och en kvot så leder detta $a_n$ oss till undantaget i unikheten.

Ett kedjebråk på formen $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ där $a_n \neq 1$ kan också skrivas $[a_0; a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$ eftersom

$$\frac{1}{a_n} = \cfrac{1}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{1}}.$$

Ett kedjebråk på formen $[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1]$ kan å sin sida skrivas $[a_0; a_1, \ldots, a_n + 1]$ av samma anledning som ovan. □

**Exempel 2.1.1.** Vi har exempelvis för talet $\frac{29}{5}$

$$\frac{29}{5} = \frac{25}{5} + \frac{4}{5} = 5 + \frac{4}{5} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{4}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}} = [5; 1, 4]$$

men vi kan också skriva

$$\frac{29}{5} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}} = [5; 1, 3, 1].$$

Eftersom vi söker heltalsdelen av ett rationellt tal för att bilda $a_i$ så ses en tydlig koppling till Euklides algoritm[4] och här bevisas därför samma sak igen på ett nytt sätt:

*Bevis med Euklides algoritm.* Vi låter $x = \frac{p}{q}$ där $p, q \in \mathbb{Z}$ och $q > 0$. Sätt $r_0 = p$ och $r_1 = q$. Det ger oss med hjälp av Euklides algoritm följande

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1 a_0 + r_2 \\
r_1 &= r_2 a_1 + r_3 \\
r_2 &= r_3 a_2 + r_4 \\
&\vdots \\
r_{n-1} &= r_n a_{n-1} + r_{n+1} \\
r_n &= r_{n+1}\ a_n, & 0 < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1, \\
& & a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

Vi ser att $a_i$ är det heltal som multiplicerat med $r_{i+1}$ ger det största heltalet mindre än $r_i$ och $r_{i+2}$ är då resttermen. Dessa kan vi sedan skriva i form av kedjebråk genom att först skriva om ekvationerna ovan på formen

$$\begin{aligned}
r_0 = r_1 a_0 + r_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_0}{r_1} = a_0 + \frac{r_2}{r_1} = a_0 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\
r_1 = r_2 a_1 + r_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = a_1 + \frac{r_3}{r_2} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\
r_2 = r_3 a_2 + r_4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_2}{r_3} = a_2 + \frac{r_4}{r_3} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}} \\
&\vdots \\
r_{n-1} = r_n a_{n-1} + r_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_{n-1}}{r_n} = a_{n-1} + \frac{r_{n+1}}{r_n} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_n}{r_{n+1}}} \\
r_n = r_{n+1}\ a_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_n}{r_{n+1}} = a_n.
\end{aligned}$$

Om vi sätter in dessa i ekvationen för $x$ ovan där $x = \frac{p}{q} = \frac{r_0}{r_1}$ så får vi

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

$\square$

**Exempel 2.1.2.** Exempelvis för det rationella talet $x = \frac{1071}{462}$ får vi

$$1071 = 2 \cdot 462 + 147$$

[4]Euklides algoritm är en algoritm för att hitta största gemensamma delare för två heltal $p$ och $q$.

$$462 = 3 \cdot 147 + 21$$

$$147 = 7 \cdot 21 + 0$$

Om vi istället skriver $x$ som ett kedjebråk får vi enligt beviset med Euklides algoritm

$$\frac{1071}{462} = 2 + \frac{147}{462} = 2 + \frac{1}{\frac{462}{147}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{21}{147}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{147}{21}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{7}}$$

och alltså har vi

$$x = \frac{1071}{462} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{7}} = [2; 3, 7].$$

Genom att använda Euklides algoritm ser vi snabbt vilka de partiella kvoterna i ett ändligt kedjebråk är, i det här exemplet alltså 2, 3 och 7.

Vi ska nu i nästa avsnitt gå in lite djupare i en kedjebråkens beståndsdelar.

# 3 Konvergenter

Låt $k_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Vi kan då dela upp kedjebråket i exempelvis $k_1 = [a_0, a_1]$, $k_2 = [a_0; a_1, a_2]$ eller $k_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3]$ och så vidare. Dessa kallas på engelska *convergents* och kommer här kallas konvergenter. Varje konvergent ger en uppskattning av det tal som kedjebråket representerar. Uppskattningen blir dessutom bättre och bättre ju högre värde på $n = 0, 1, 2, \ldots$ i konvergenten. Om vi undersöker talet $x$ så kommer, intressant nog, vartannat värde på $k$ ligga under $x$ och vartannat ligga över $x$ men alltså närma sig $x$ för varje steg på $n$. Härifrån kommer också namnet *convergent*, då kedjebråkets för talet $x$:s konvergenter alltså konvergerar mot $x$. [3, § 362]

Ovan nämnda egenskap hos kedjebråken visar sig ha en viktig roll när det kommer till exempelvis uppskattning av irrationella tal som $\pi$ eller $e$. Det finns flera olika sätt att räkna ut dessa och jag kommer här visa ett par. Det första sättet hämtar jag från C.D. Olds [8, kap. 1.5]. Jag vill dock reservera mig för vem som tog fram denna metod först då till exempel Euler [3, § 6-8, s. 299-300] visar hur formeln kan tas fram men utan själv ge någon referens eller källa.

Vi börjar med att definiera några värden och en formel som senare används i satsen.

**Definition 3.1.**

$$p_{-1} = 1, \quad p_{-2} = 0, \quad q_{-1} = 0, \quad q_{-2} = 1 \tag{3.0.1}$$

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

Notera att eftersom $q_0 = 1$ och $a_n > 0$ för $n \geqslant 1$ så får vi $q_1 = a_1 q_0 > q_0$ och $q_2 = a_2 q_1 + q_0 > q_1$ och så vidare så $q_n \geqslant 1$ och alltså har vi:

$$1 = q_0 \leqslant q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < q_n < \ldots \tag{3.0.3}$$

Vi ska nu visa att

$$k_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} \ .$$

Här är några motiverande ekvationer för att visa tankesättet och för att formeln håller för några givna värden på $n$ där vi hämtar värdena för $p_{-1}, p_{-2}, q_{-1}$ och $q_{-2}$ från definition 3.0.1

$$k_0 = \frac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}} = \frac{a_0 \cdot 1 + 0}{a_0 \cdot 0 + 1} = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \tag{3.0.4}$$

$$k_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1 \cdot 1 + 0} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{p_1}{q_1} \tag{3.0.5}$$

$$k_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \tag{3.0.6}$$

$$= \frac{a_2(\overbrace{a_0 a_1 + 1}^{p_1}) + (\overbrace{a_0}^{p_0})}{a_2(\underbrace{a_1}_{q_1}) + (\underbrace{1}_{q_0})} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$k_3 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} = \tag{3.0.7}$$

$$= \frac{a_3(\overbrace{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}^{p_2}) + (\overbrace{a_0 a_1 + 1}^{p_1})}{a_3(\underbrace{a_1 a_2 + 1}_{q_2}) + (\underbrace{a_1}_{q_1})} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}$$

och så vidare.

Vi använder oss nu av ovanstående räkningar samt definition 3.0.1 till följande lemma.

Tabell 1: Konvergenter

| $n$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\dots$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | $a_0$ | $a_1$ | $\dots$ | $a_i$ |
| $p_n$ | $0$ | $1$ | $p_0$ | $p_1$ | $\dots$ | $p_i$ |
| $q_n$ | $1$ | $0$ | $q_0$ | $q_1$ | $\dots$ | $q_i$ |
| $k_n = \frac{p_n}{q_n}$ | | | $\frac{p_0}{q_0}$ | $\frac{p_0}{q_0}$ | $\dots$ | $\frac{p_i}{q_i}$ |

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad n = 0, 1, \dots, i$$

**Lemma 3.2.** *För varje $x \in \mathbb{R}^+$ håller*

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x] = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}} . \tag{3.0.8}$$

*Bevis.* Vi visar likheten för $n = 0$ och $n = 1$ genom att stoppa in dessa värden i ekvationen (3.0.8)

$$n = 0: \quad \frac{x p_{-1} + p_{-2}}{x q_{-1} + q_{-2}} = \frac{x \cdot 1 + 0}{x \cdot 0 + 1} = x$$

$$n = 1: \quad \frac{x p_0 + p_{-1}}{x q_0 + q_{-1}} = \frac{x a_0 + 1}{x \cdot 1 + 0} = a_0 + \frac{1}{x} = [a_0; x].$$

Om vi nu gör antagandet att ekvation 3.0.8 håller för varje $x$ så kan vi se att

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, \dots, a_n, x] &= \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x}\right] = \\
&= \frac{(a_n + \frac{1}{x}) p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x}) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + \frac{1}{x} p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + \frac{1}{x} q_{n-1} + q_{n-2}} = \\
&= \frac{x(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}} .
\end{aligned}$$

Induktivt kan vi då dra slutsatsen att formeln då håller för alla reella tal. □

**Sats 3.3.** *Om $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ är ett kedjebråk och $k_n$ är den n:te konvergenten så gäller*

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = k_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad n \geqslant 0. \tag{3.0.9}$$

*Bevis.* Vi använder nu lemma 3.2 men byter ut det reella talet $x$ till heltalet $a_n$ och sätter sedan in detta i ekvationen så får vi

$$k_n = [a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n} .$$

□

Användningen av denna formel blir smidig och överskådlig om vi sätter in värdena i en tabell (se tabell 1). Att sätta in värdena som i tabell 1 ovan gör också de faktiska räkningarna mycket lättare vilket vi ser i följande exempel.

**Exempel 3.3.1.** Låt talet $x$ ges av kedjebråket $[1; 2, 3, 4, 5, 6]$. Nu använder vi formeln och sätter sedan upp resultaten i en tabell.

$$\begin{aligned}
p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
p_0 = a_0 p_{-1} + p_{-2} &= 1 \cdot 1 + 0 = 1 \\
p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} &= 2 \cdot 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

Tabell 2: Exempel 3.3.1

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 10 | 43 | 225 | 1393 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 2 | 7 | 30 | 157 | 972 |
| $k_n = \frac{p_n}{q_n}$ | | | $\frac{1}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{10}{7}$ | $\frac{43}{30}$ | $\frac{225}{157}$ | $\frac{1393}{972}$ |

$$\begin{aligned}
p_2 = a_2p_1 + p_0 &= 3 \cdot 3 + 1 = 10 \\
p_3 = a_3p_2 + p_1 &= 4 \cdot 10 + 3 = 43 \\
p_4 = a_4p_3 + p_2 &= 5 \cdot 43 + 10 = 225 \\
p_5 = a_5p_4 + p_3 &= 6 \cdot 225 + 43 = 1393.
\end{aligned}$$

Motsvarande räkningar för $q_i$ ger

$$\begin{aligned}
q_0 &= 1 \cdot 0 + 1 = 1 \\
q_1 &= 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\
q_2 &= 3 \cdot 2 + 1 = 7 \\
q_3 &= 4 \cdot 7 + 2 = 30 \\
q_4 &= 5 \cdot 30 + 7 = 157 \\
q_5 &= 6 \cdot 157 + 30 = 972.
\end{aligned}$$

Sedan sätter vi in våra värden för $a_i$, $p_i$ och $q_1$ som vi fick fram ovan i tabell 2. Tabellen visar att $x = \frac{1393}{972}$.

Konvergenterna går naturligtvis också att finna genom att ställa upp kedjebråket i sin uppställda form och därifrån helt enkelt räkna ut dem. Nedan visas hur det går till, notera dock att detta blir mer och mer omständligt ju längre kedjebråket är.

**Exempel 3.3.2.** Samma exempel som ovan skulle ge

$$k_0 = [1] = \frac{1}{1}$$

$$k_1 = [1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$k_2 = [1; 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{6}{3} + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{7}{7} + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

$$k_3 = [1; 2, 3, 4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}$$

$$k_4 = [1; 2, 3, 4, 5] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{21}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{68}{21}}} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} =$$

$$= \frac{157}{157} + \frac{68}{157} = \frac{225}{157}$$

$$k_5 = [1;2,3,4,5,6] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{\frac{31}{6}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{\frac{130}{31}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{421}{130}}} = 1 + \frac{1}{\frac{972}{421}} = \frac{972}{972} + \frac{421}{972} = \frac{1393}{972} .$$

**Sats 3.4.** *Talen $p_n$ och $q_n$ är relativt prima det vill säga största gemensamma delare för $p_n$ och $q_n$ är 1.*

*Bevis.* Satsen kommer att bevisas genom att använda våra värden från definition 3.1 och visa att denna formel håller:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.0.10}$$

Kom ihåg värdena

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0.$$

Vi börjar nu med att visa att formeln håller för några värden på $n$ och använder att vi i ekvation 3.0.4 definierat

$$\frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0},$$

samt definitionen 3.0.1

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}. \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Då får vi:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1)1 - a_0 a_1 = 1 \\ n = 2: \quad & p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2) a_1 - (a_0 a_1 + 1)(a_1 a_2 + 1) = \\ & = a_0 a_1^2 a_2 + a_0 a_1 + a_1 a_2 - a_0 a_1^2 a_2 - a_0 a_1 - a_1 a_2 - 1 = -1. \end{aligned} \tag{3.0.11}$$

Vi ser alltså i ekvationerna ovan att formeln från ekvation 3.0.10 håller för $n = 1$ och $n = 2$ och vill därför visa att den håller för alla $n$. Vi gör induktionsantagandet att formeln faktiskt håller för $n = i$ och vill visa att om den gör det så håller den även för $n = i + 1$. Från definition 3.0.1 vet vi att

$$p_{i+1} = a_{i+1}\, p_i + p_{i-1}, \quad q_{i+1} = a_{i+1}\, q_i + q_{i-1}.$$

Om vi sätter in detta i vår formel får vi

$$\begin{aligned} p_{i+1}\, q_i - p_i q_{i+1} &= (a_{i+1}\, p_i + p_{i-1}) q_i - p_i (a_{i+1}\, q_i + q_{i-1}) = \\ &= a_{i+1}\, p_i q_i + p_{i-1}\, q_i - p_i a_{i+1}\, q_i - p_i q_{i-1} = \\ &= p_{i-1}\, q_i - p_i q_{i-1} = (-1)( \underbrace{p_i q_{i-1} - p_{i-1}\, q_i}_{=(-1)^{i-1},\text{ enligt antagande}} ). \end{aligned}$$

Eftersom vi antagit att formeln håller för $n = i$ så ser vi att

$$p_{i+1}\, q_i - p_i q_{i+1} = (-1)(-1)^{i-1} = (-1)^i$$

och alltså drar vi slutsatsen att om formeln håller för $n = i$ så håller den även för $n = i + 1$. Vi har i ekvation 3.0.11 visat att formeln håller för $n = 2$ och vi kan då dra slutsatsen att den håller för $n = 3$ och så vidare. □

Från den här egenskapen kan vi också få fram några andra formler. Genom att helt enkelt dividera formel 3.0.10 med $q_n q_{n-1}$ får vi först

$$\frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1}\ q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1}}{q_n q_{n-1}} - \frac{p_{n-1}\ q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = k_n - k_{n-1}. \tag{3.0.12}$$

Vi vet sedan ekvation 3.0.3 att $q_n > 0$ när $n \geqslant 0$. Om vi då sätter in några värden för $n$ i ekvation 3.0.12 får vi

$$\begin{aligned}
n = 1 : k_1 - k_0 &= \frac{(-1)^0}{q_1 q_0} = \frac{1}{q_1 q_0} > 0\\
n = 2 : k_2 - k_1 &= \frac{(-1)^1}{q_2 q_1} = \frac{-1}{q_2 q_1} < 0\\
n = 3 : k_3 - k_2 &= \frac{(-1)^2}{q_3 q_2} = \frac{1}{q_3 q_2} > 0\\
n = 4 : k_4 - k_3 &= \frac{(-1)^3}{q_4 q_3} = \frac{-1}{q_4 q_3} < 0.
\end{aligned}$$

Från dessa ekvationer kan vi läsa ut att $k_0 < k_1$, $k_2 < k_1$, $k_2 < k_3$ och $k_4 < k_3$. Vi kan också se att ett jämnt värde på $n$ ger en udda exponent i $(-1)^{n-1}$ vilket ger oss ett negativt värde på kvoten $\frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$. Motsatt förhållande följer också naturligt för udda värden på $n$ där kvoten blir positiv. Därför kan vi generellt säga att $k_{2i} < k_{2i+1}$.

Vi kan också använda att

$$p_0 q_{-2} - p_{-2} q_0 = a_0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = a_0$$

och då generellt

$$\begin{aligned}
p_n q_{n-2} - p_{n-2}\ q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\ q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = \\
&= a_n p_{n-1}\ q_{n-2} + p_{n-2}\ q_{n-2} - a_n p_{n-2}\ q_{n-1} - p_{n-2}\ q_{n-2}\\
&= a_n(p_{n-1}\ q_{n-2} - p_{n-2}\ q_{n-1}) = (-1)^n a_n.
\end{aligned} \tag{3.0.13}$$

Ekvation 3.0.13 kan sedan delas på samma sätt som ekvation 3.0.12 och vi får då

$$\frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2}\ q_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = k_n - k_{n-2}. \tag{3.0.14}$$

Här kan vi liksom i ekvation 3.0.12 använda egenskapen hos $q_n$ och sätta in några värden på $n$ så får vi

$$\begin{aligned}
n = 2 : k_2 - k_0 &= \frac{(-1)^2 a_2}{q_2 q_1} = \frac{a_2}{q_2 q_0} > 0\\
n = 3 : k_3 - k_1 &= \frac{(-1)^3 a_3}{q_3 q_1} = \frac{-a_3}{q_3 q_1} < 0\\
n = 4 : k_4 - k_2 &= \frac{(-1)^4 a_4}{q_4 q_2} = \frac{a_4}{q_4 q_2} > 0.
\end{aligned} \tag{3.0.15}$$

Ur dessa ekvationer kan vi då läsa ut att $k_0 < k_2$, $k_3 < k_1$ och $k_2 < k_4$. Om vi nu sätter ihop dessa samband med $k_0 < k_1$, $k_2 < k_1$, $k_2 < k_3$ och $k_4 < k_3$ så får vi

$$k_0 < k_2 < k_4 < k_3 < k_1.$$

Generellt kan vi då för jämna värden på $n$ visa att

$$k_{2i} > k_{2i-2}, \quad i \geqslant 0.$$

Vi visar det genom att använda ekvation 3.0.14. Hur ser det då ut för $k_{2(i+1)} > k_{2(i+1)-2}$? Vi använder formeln från ekvation 3.0.14

$$\begin{aligned} k_n - k_{n-2} &= \frac{(-1)^n a_n}{q_n\ q_{n-2}} \\ k_{2(i+1)} - k_{2(i+1)-2} = k_{2i+2} - k_{2i} &= \frac{(-1)^{2i+2}\ a_{2i+2}}{q_{2i+2}\ q_{2i}} > 0. \end{aligned} \tag{3.0.16}$$

Eftersom exponenten $2(i+1)$ är jämn och alla $a_n, n \geqslant 1$ är positiva så får vi en positiv term i täljaren. Vi har ovan i ekvation 3.0.3 visat att $q_n \geqslant 1, n \geqslant 0$ vilket ger en positiv nämnare och alltså är kvoten positiv. Samma resonemang för udda värden på $n$ ger

$$k_{2i+1} < k_{2i-1}, \quad i \geqslant 0,$$

ty

$$k_{2i+3} - k_{2i+1} = \frac{(-1)^{2i+3}\ a_{2i+3}}{q_{2i+3}\ q_{2i+1}} < 0. \tag{3.0.17}$$

Eftersom exponenten $2i+3$ denna gång är udda, vilket ger en negativ etta, och resten av termerna är positiva så får vi en kvot som är negativ.

Så från ekvation 3.0.12 får vi ut att varje konvergent med jämnt värde på $n$ är mindre än konvergenten med det udda värdet $n+1$ men också mindre än konvergenten med det udda värdet $n-1$. Samtidigt får vi enligt ovan att konvergenter med jämna värden på $n$ bildar en monotont växande följd $k_0 < k_2 < k_4 < \ldots$, till skillnad från konvergenterna med udda värde på $n$ som bildar en monotont avtagande följd $k_1 > k_3 > k_5 > \ldots$.

Vi ser här ovan att vi har två stycken följder, den första bestående av konvergenterna med jämnt värde på $n \in \mathbb{Z}^+$, det vill säga $k_{2n}$. Och den andra där konvergenterna med udda värde på $n \in \mathbb{Z}^+$ återfinns, $k_{2n+1}$. Vi ser också att följden $k_{2n}$ har en övre gräns i $k_1$ vilket innebär att $k_{2n}$ är en monotont växande följd med en övre gräns. Det innebär att $k_{2n}$ växer mot ett gränsvärde. På motsvarande sätt kan vi konstatera att $k_{2n+1}$ avtar mot ett gränsvärde.

**Sats 3.5.** *Konvergenterna med jämnt respektive udda index av ett kedjebråk bildar två följder, den ena växer monotont och den andra avtar monotont. När dessa följder är oändliga har de gränsvärden och gränsvärdena är lika.*

*Bevis.* Att följderna är monotont växande respektive avtagande bevisades ovan i ekvationerna 3.0.16 respektive 3.0.17. Eftersom $a_n$ är positiva för $n \geqslant 1$ och $q_n$ är positiva för $n \geqslant 0$ så kan vi från ekvationerna 3.0.12 och 3.0.14 konstatera att $k_{2n} < k_{2n+2}$, $k_{2n-1} > k_{2n+1}$ och $k_{2n} < k_{2n-1}$. Vi kan alltså ställa upp konvergenterna enligt

$$k_0 < k_2 < k_4 < \ldots < k_{2n} < \ldots < k_{2n-1} < \ldots < k_5 < k_3 < k_1.$$

Vi kan direkt läsa ut att $k_0$ är en undre gräns när $i \geqslant 0$ för $k_{2n+1}$ och på samma sätt är $k_1$ en övre gräns för $k_{2n}$. Vi vet från tidigare att $k_n - k_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ (ekv. 3.0.12), och ser också att $k_n - k_{n-1}$ går mot noll när $i$ går mot oändligheten eftersom $q_n$ växer med $n$ enligt ekvation 3.0.3. Alltså är gränsvärdena samma värde, vi kan kalla det $x$, och vi får

$$k_0 < k_2 < \ldots < k_{2n} < \ldots \leqslant x \leqslant \ldots < k_{2n-1} < \ldots < k_3 < k_1.$$

□

Beviset ovan ger oss följande definition.

**Definition 3.6.** *Värdet av ett kedjebråk definieras som:*

$$x = \lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Tabell 3: Exempel 3.6.1

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 4 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 9 | 14 | 37 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 8 |
| $\frac{p_n}{q_n}$ | | | $\frac{4}{1}$ | $\frac{5}{1}$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{14}{3}$ | $\frac{37}{8}$ |
| $k_n$ numeriskt | | | 4 | 5 | $4,5$ | $4,667$ | $4,625$ |

När det gäller rationella tal blir gränsvärdet det samma som den sista konvergenten alltså $k_n$ för maximalt värde på $n$, vilket kanske lättast visas med ett exemplel.

**Exempel 3.6.1.** För det rationella talet $\frac{37}{8}$ får vi

$$\frac{37}{8} = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{5}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [4; 1, 1, 1, 2].$$

Och vi ser i tabell 3 att $k_0 = 4 < k_2 = 4,5 < k_4 = 4,625 < k_3 \approx 4,667 < k_1 = 5$.

Konvergenter och gränsvärden blir också viktiga i nästa avsnitt som rör de irrationella talens relation till kedjebråk.

# 4 Kedjebråk och irrationella tal

Ovan i avsnitt 2 har kopplingen mellan rationella tal och kedjebråk visats. Här kommer vi gå in på kopplingen mellan irrationella tal och kedjebråk vilket görs genom att använda konvergenter som beskrivs i avsnitt 3.

**Lemma 4.1.** *Om $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ så är $a_0 = \lfloor x \rfloor$ och om vi låter $x_1$ beteckna $[a_1; a_2, \ldots]$ så kan vi skriva $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$.*

*Bevis.* Enligt sats 3.5 så vet vi att $k_0 < x < k_1$. Vi vet också från avsnittet om konvergenter (3) att formeln $k_n = \frac{a_n}{a_n} \frac{p_{n-1}+p_{n-2}}{q_{n-1}+q_{n-2}}$ håller och enligt den är $k_0 = a_0$ och $k_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$. Därför kan vi skriva $a_0 < x < a_0 + \frac{1}{a_1}$. Vi vet också sedan tidigare att $a_1 \geqslant 1$ och kan då härleda olikheten

$$a_0 < x < a_0 + 1 \Leftrightarrow 0 < x - a_0 < 1 \tag{4.0.18}$$

vilket ger oss

$$\lfloor x \rfloor = a_0.$$

□

**Sats 4.2.** *Varje irrationellt tal kan skrivas som ett unikt oändligt kedjebråk.*

*Bevis.* För att specificera sats 4.2 till att gälla irrationella tal så visar vi att kedjebråket aldrig slutar vilket innebär att resten i den partiella kvoten aldrig blir 0. Låt nu $x_0$ vara ett givet irrationellt tal och skriver det i form av ett kedjebråk

$$\begin{aligned} x_0 = [a_0; x_1] = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad x_1 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}. \end{aligned}$$

Från detta kan vi dra slutsatserna att $0 < \frac{1}{x_1} < 1$ enligt ekvation 4.0.18 och $x_1$ är irrationellt eftersom att subtrahera ett rationellt tal från ett irrationellt tal ger ett irrationellt tal.[5] Eftersom $x_1$ är ett irrationellt tal så kan det uttryckas i form av ett kedjebråk precis på samma sätt som $x_0$. Vi får

$$\begin{aligned} x_1 = [a_1; x_2] = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad a_1 \in \mathbb{Z}, \quad x_2 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}. \end{aligned}$$

Precis samma slutsatser kan dras från $x_2$ som vi gjorde ovan för $x_1$ det vill säga $x_2$ är irrationellt och $0 < \frac{1}{x_2} < 1 \Leftrightarrow x_2 > 1$. Till detta lägger vi att $a_1 \geqslant 1$ eftersom $a_1$ enligt vår definition är det största positiva heltal som är mindre än $x_1$. Dessa uträkningar kan vi fortsätta med så länge resttermen inte blir 0, vilket alltså aldrig inträffar då $\frac{1}{x_n} \neq 0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + \frac{1}{x_1}, & x_1 > 1, \\ x_1 &= a_1 + \frac{1}{x_2}, & x_2 > 1, \quad a_1 \geqslant 1, \\ x_2 &= a_2 + \frac{1}{x_3}, & x_3 > 1, \quad a_2 \geqslant 1, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.0.19}$$

[5] Vi använder oss av regeln att användning av de fyra räknesätten på med rationella tal alltid ger ett rationellt resultat. Exempelvis måste $\zeta$ vara rationellt om $\alpha$ och $\beta$ är rationella i: $\alpha + \beta = \zeta$. I vårt fall har vi att $\zeta$ är irrationellt och $\alpha$ rationellt vilket ger $\zeta - \alpha = \beta \Leftrightarrow \zeta = \beta + \alpha$ om då $\beta$ också vore rationellt så måste $\zeta$ vara rationellt vilket är en motsägelse, alltså är $\beta$ irrationellt. [7, kap. 4.1]

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad\qquad x_{n+1} > 1, \quad a_n \geqslant 1$$

$$\vdots\,.$$

Här är alltså $x_n$ irrationella tal och $a_n$ heltal. Det enda sättet som processen kan ta slut är om något $x_i = a_i$ vilket ju alltså är en omöjlighet. Substituerar vi då in de *partiella kvoterna* av $x_1, x_2, ...$ i ekvation 4.0.19 så får vi därför ett oändligt kedjebråk

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = \dots\,.$$

Vidare kan vi visa entydigheten genom att först låta $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$. Då vet vi enligt lemma 4.1 att $\lfloor x \rfloor = a_0 = b_0$ och eftersom $x = a_0 + \frac{1}{[a_1;a_2,\ldots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1;b_2,\ldots]}$ så är ju även $[a_1; a_2, \ldots] = [b_1; b_2, \ldots]$. Iterativt kan vi då fortsätta med samma uträkning och induktivt dra slutsatsen att $a_n = b_n$ för alla $n$. □

Vi har nu ovan visat att varje irrationellt tal kan skrivas som ett unikt oändligt kedjebråk. Nästa steg blir att visa att även det omvända gäller. Detta gör Niven [6, Avsnitt 7.3] på ett smidigt sätt och beviset nedan är därför baserat på det.

**Sats 4.3.** *Det tal som ett oändligt kedjebråk representerar är irrationellt.*

*Bevis.* Varje tal $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, ligger enligt sats 3.5 mellan sina jämna och udda konvergenter, det vill säga

$$k_{2n} < x < k_{2n+1}.$$

Vi kan skriva om denna olikhet till

$$0 < |x - k_{2n}| < |k_{2n+1} - k_{2n}|. \tag{4.0.20}$$

Nu använder vi oss av ekvationen $k_i - k_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{q_i\ q_{i-1}}$ (ekv. 3.0.12) och får

$$|k_{2n+1} - k_{2n}| = \left| \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1}\ q_{2n}} \right| = \frac{1}{q_{2n+1}\ q_{2n}}.$$

Om vi nu lägger in detta i olikheten från ekvation 4.0.20, multiplicerar med $q_{2n}$ och kommer ihåg att $k_i = \frac{p_i}{q_i}$ så får vi

$$0 < |x\ q_{2n} - k_{2n}\ q_{2n}| < \frac{q_{2n}}{q_{2n+1}\ q_{2n}}$$
$$\Leftrightarrow 0 < |x\ q_{2n} - p_{2n}| < \frac{1}{q_{2n+1}}.$$

Om då $x$ vore rationellt så skulle vi kunna skriva $x = \frac{a}{b}$ där $a, b \in \mathbb{Z}$ och $b > 0$:

$$0 < |\frac{a}{b}\ q_{2n} - p_{2n}| < \frac{1}{q_{2n+1}},$$

vilket om vi multiplicerar med $b$ ger

$$0 < |a\ q_{2n} - b\ p_{2n}| < \frac{b}{q_{2n+1}}.$$

Vi vet från tidigare (ekv. 3.0.3) att $q_{2n+1}$ växer med $n$ vilket ger oss möjligheten att välja ett $n$ tillräckligt stort så att $q_{2n+1} > b$. Nu har vi dock hamnat i ett problem: $a$ och $b$ är heltal, $q_{2n}$ och $p_{2n}$ är också heltal. Om vi subtraherar ett heltal från ett heltal så får vi ett heltal men för tillräckligt stora $n$ så är alltså $\frac{b}{q_{2n+1}} < 1$ och olikheten blir då en motsägelse. Alltså måste $x$ vara irrationellt.

□

Ett intressant exempel på ett irrationellt tal[6] är $\pi$. Här exemplifieras några uträkningar av dess kedjebråksform genom att använda konvergenter.

**Exempel 4.3.1.** Det irrationella talet $\pi$ kan, som ovan beskrivits i sats 4.2, skrivas som ett oändligt kedjebråk. Att få fram kedjebråket i sin helhet är lika omöjligt som det är att numeriskt skriva ut $\pi$ med alla sina alla decimaler. Jag ska här därför visa och i tabeller åskådliggöra först hur ett kedjebråk gjort från en vanlig approximation av $\pi$.

$$\pi \approx 3,14159 \tag{4.0.21}$$

kan hittas. Sedan jämföra den med en approximation som bildas genom att använda de partiella kvoter som Euler [3, s. 326] skriver ut i kedjebråksutvecklingen för talet $\pi$, nedan kallad ”Eulers $\pi$”

$$[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1] \tag{4.0.22}$$

som ger en bättre approximation av $\pi$.

$$\begin{aligned}
\pi \approx 3,14159 &= \frac{314159}{100000} = 3 + \frac{14159}{100000} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{100000}{14159}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{887}{14159}} = \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{14159}{887}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{854}{887}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\cfrac{887}{854}}}} = \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{33}{854}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{854}{33}}}}} = \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{\cfrac{33}{29}}}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{29}}}}}} = \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}}}}} = [3; 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4].
\end{aligned} \tag{4.0.23}$$

[6]Euler [3, s. 101] skriver att om man låter radien till en cirkel vara 1 så går det inte att exakt bestämma omkretsen men att en approximation till halva cirkelns omkrets är 3.1415926535897 . . ., men för korthets skull så kommer han att använda $\pi$. Detta är förmodligen första gången som Euler använder bokstaven $\pi$ för ändamålet. Enligt David Eugene Smith [11, s. 346-347] ska den grekiska bokstaven $\pi$ först ha använts av William Jones (1675-1749), en självlärd matematiker, som i ett samlingsverk skrivet 1706 använder $\pi$. Verket sägs vara skrivet till intresserade vänner som inte förväntas orka läsa alla böcker om matematik.

Tabell 4: Approximation av pi

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 3 | 7 | 15 | 1 | 25 | 1 | 7 | 4 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 3 | 22 | 333 | 355 | 9208 | 9563 | 76149 | 314159 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 7 | 106 | 113 | 2931 | 3044 | 24239 | 100000 |
| $k_n = \frac{p_n}{q_n}$ | | | $\frac{3}{1}$ | $\frac{22}{7}$ | $\frac{333}{106}$ | $\frac{355}{113}$ | $\frac{9208}{2931}$ | $\frac{9563}{3044}$ | $\frac{76149}{24239}$ | $\frac{314159}{100000}$ |

Tabell 5: ”Eulers $\pi$”

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 3 | 7 | 15 | 1 | 292 | 1 | 1 | ... |
| $p_n$ | 0 | 1 | 3 | 22 | 333 | 355 | 103993 | 104348 | 208341 | ... |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 7 | 106 | 113 | 33102 | 33215 | 66317 | ... |
| $k_n = \frac{p_n}{q_n}$ | | | $\frac{3}{1}$ | $\frac{22}{7}$ | $\frac{333}{106}$ | $\frac{355}{113}$ | $\frac{103993}{33102}$ | $\frac{104348}{33215}$ | $\frac{208341}{66317}$ | ... |

Vi använder mu formeln från ekvation 3.0.9 $\left(k_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right)$ och sätter in respektive värde i tabell 4. Här har vi alltså i uträkningen avrundat $\pi$ till $3,14159$ och utifrån dessa decimaler räknat ut kedjebråket och dess konvergenter. Konvergenterna ger oss i sin tur bättre och bättre uppskattningar av talet som vi utgår från och vi ser att den sista konvergenten helt överensstämmer med talet. Tabell 5 visar motsvarande värden för ”Eulers $\pi$”, en bättre approximation av $\pi \approx [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1]$. Vi ser i tabellerna att konvergenterna överensstämmer till och med $i = 3$ och vid jämförelse av de numeriska värdena som fås från konvergenterna så går det att avgöra från vilken decimal som talen skiljer sig åt. Detta åskådliggörs i tabell 6.

Talet $\pi = 3,1415926535897\ldots = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots]$ kan jämföras med några av konvergenterna från $3,14159$: $\frac{3}{1} = 3,0$ har rätt heltal men fel från första decimalen, $\frac{22}{7} = 3,14286$ rätt heltal och två rätta decimaler och $\frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$. Redan vid $i = 3$ får vi alltså ett värde som är rätt till sjunde decimalen. Det bör dock noteras att efter $i = 3$ så skiljer sig kedjebråken och konvergenterna av $3,14159$ från $\pi$'s. I tabell 6 ser vi att $3,14159$'s konvergenter just konvergerar mot $3,14159$ och efter $i = 4$ ser vi att konvergenterna och de numeriska värdet för ”Eulers $\pi$”, istället konvergerar mot ett tal närmre $\pi$ än $3,14159$.

En intressant detalj kring just $\pi$ är att dess partiella kvoter inte heller senare verkar visa upp någon regelbundenhet till skillnad mot en annan känd utveckling nämligen den som ges av $e$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}}.$$

Om vi manipulerar kedjebråket för $e$ genom att subtrahera 1 så ser vi att regelbundenheten blir än

Tabell 6: Konvergenter och numeriska värden

| $n$ | Konvergenten till $3,14159$, $\frac{p_n}{q_n}$ | Konvergenten till ”Eulers $\pi$”, $\frac{p_n}{q_n}$ | Numeriskt värde $3,14159$ | Numeriskt värde ”Eulers $\pi$” |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $3,0$ | $3,0$ |
| 1 | $\frac{22}{7}$ | $\frac{22}{7}$ | $3,14285\ldots$ | $3,14285\ldots$ |
| 2 | $\frac{333}{106}$ | $\frac{333}{106}$ | $3,14150\ldots$ | $3,14150\ldots$ |
| 3 | $\frac{355}{113}$ | $\frac{355}{113}$ | $3,1415929\ldots$ | $3,1415929\ldots$ |
| 4 | $\frac{9208}{2931}$ | $\frac{103993}{33102}$ | $3,141589\ldots$ | $3,1415926530\ldots$ |
| 5 | $\frac{9563}{3044}$ | $\frac{104348}{33215}$ | $3,14159001\ldots$ | $3,1415926539\ldots$ |
| 6 | $\frac{31459}{100000}$ | $\frac{208341}{66317}$ | $3,14159$ | $3,141592653467\ldots$ |

mer tydlig

$$e - 1 = [1; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots].$$

Det går även att manipulera kedjebråket av $\pi$ för att få regelbundenhet men då måste vi frångå den *enkla* form som här har använts. Euler [3, § 368, s. 310-312] visar exempelvis att

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}}.$$

Vi ska nu gå in på mer specifika typer av irrationella tal.

# 5 Periodiska kedjebråk

I det här avsnittet ska bland annat visas att periodiska kedjebråk representerar det som på engelska heter *quadratic surd* och här översätts till kvadratiskt irrationellt tal.

**Definition 5.1.** *Ett kvadratiskt irrationellt tal är ett tal som kan skrivas på formen*

$$\frac{a+b\sqrt{d}}{c}, \quad a,b,c \in \mathbb{Z},\ c>0 \text{ och där } d \text{ inte är en perfekt kvadrat.}$$

Ett ekvivalent villkor till definitionen är följande lemma.

**Sats 5.2.** *Ett tal är kvadratiskt irrationellt om och endast om det är en lösning på en kvadratisk ekvation*

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \quad \text{där } d = \beta^2 - 4\alpha\gamma \text{ inte är en perfekt kvadrat.} \tag{5.0.24}$$

*Bevis.* Ett kvadratiskt irrationellt tal, $x$, kan enligt definition 5.1 skrivas som $x = \frac{a+b\sqrt{d}}{c}$ där $a, b$ och $c$ är heltal $c \neq 0$ och $d$ är inte en perfekt kvadrat.

$$\begin{aligned} x = \frac{a+b\sqrt{d}}{c} &\quad \Leftrightarrow \quad cx - a = b\sqrt{d} \\ \Leftrightarrow (cx-a)^2 = b^2 d &\quad \Leftrightarrow \quad c^2x^2 - 2cxa + a^2 - b^2 d = 0 \\ \Leftrightarrow (c^2)x^2 - (2ca)x + (a^2 - b^2 d) = 0, &\quad \text{där } a, b, c \text{ och } d \text{ är konstanter.} \end{aligned}$$

Så vi ser att $x$ ges av en kvadratisk ekvation. Men om vi använder oss av ekvation 5.0.24 så ser vi att vi kan skriva varje lösning för ekvationen på formen $\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$

$$\begin{aligned} &\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta x}{\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}} - \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} - \beta}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Nu ser vi att ekvationen är på rätt form om $P = -\beta$, $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ och $Q = 2\alpha$. Nu kan vi skriva det kvadratiska irrationella talet $x = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}$ där $P, Q$ och $D$ är heltal $Q \neq 0$ och $D > 0$ är inte en perfekt kvadrat.

□

Dessutom kan vi se att $Q$ delar $D - P^2$

$$\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma - (-\beta)^2}{2\alpha} = \frac{-4\alpha\gamma}{2\alpha} = 2\gamma. \tag{5.0.25}$$

Det finns egentligen två olika typer av periodiska kedjebråk som, för den här uppsatsen, är av intresse. Den första typen är de kedjebråk som är fullständigt periodiska, på engelska *purely periodic continued fractions*, det vill säga att samma partiella kvoter upprepas om och om igen ett oändligt antal gånger. Den andra typen är de kedjebråk som efter en viss punkt blir periodiska, det vill säga efter en viss partiell kvot blir periodiskt och de resterande partiella kvoterna därmed upprepas oändligt, i en bestämd ordning. I bevisen och exemplen nedan kommer vi använda $R_n$ som resten av kedjebråket.

**Definition 5.3.** *Om* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *så kallar vi* $R_0$ *resten eller den kompletta kvoten från* $a_n$*. Vi definierar så* $R_n$ *enligt:*

$$\begin{aligned} R_0 &= [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = x \\ R_1 &= [a_1; a_2, a_3, \ldots] \\ R_2 &= [a_2; a_3, \ldots] \\ &\vdots \\ R_n &= [a_n, a_{n+1}, \ldots]. \end{aligned}$$

Det innebär också att vi kan skriva

$$x = a_0 + \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow R_1 = \frac{1}{x - a_0}\ . \tag{5.0.26}$$

Ett exempel på den första typen av kedjebråk som nämnts ovan, alltså ett fullständigt periodiskt, är kedjebråket som ges av det gyllene snittet

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = [1; 1, 1, 1, \ldots].$$

Vi ser här då att om $x$ ges av kedjebråket $[1; 1, 1, \ldots]$ så gäller $x = R_0 = R_1 = R_2 = \ldots$, enligt definition 5.3. Om vi då använder ekvation 5.0.26 så får vi

$$x = 1 + \frac{1}{R_1} = 1 + \frac{1}{x}\ .$$

Alltså får vi $x = 1 + \frac{1}{x}$ och vi får då den kvadratiska ekvationen

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - 1 - \frac{1}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ & \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Vi ser att det gyllene snittet är en av lösningarna på ekvationen medan den andra lösningen är negativ och faller således bort eftersom kedjebråket uppenbarligen är positivt.

Ett par exempel på den andra typen, de som blir periodiska efter en viss partiell kvot, är $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$. Dessa förklaras också nedan i förtydligande exempel. På sidan 24 visas hur vi går från kedjebråket till talet $\sqrt{3}$ och det omvända, hur vi går från $\sqrt{2}$ till dess kedjebråk, visas senare på sidan 27.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots].$$

Periodiska kedjebråk brukar i sin förkortade form skrivas med ett streck över de partiella kvoter som upprepas fallen ovan blir det då alltså

$$\begin{aligned} [1; 1, 1, 1, \ldots] &= [\overline{1}] \\ [1; 2, 2, 2, \ldots] &= [1; \overline{2}] \\ [1; 1, 2, 1, 2, \ldots] &= [1; \overline{1, 2}]. \end{aligned}$$

Exemplen ovan ger oss de generella fallen nedan där vi i båda fallen förutsätter att det inte finns någon kortare upprepande form av partiella kvoter. Nedan är talet $\alpha$ ett fullständigt periodiskt kedjebråk och talet $\beta$ ett kedjebråk som blir periodiskt efter en viss partiell kvot. I fall två, $\beta$, förutsätter vi dessutom att den icke upprepande delen av partiella kvoter inte innehåller en kopia av de partiella kvoter som sedan upprepas

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n}]$$
$$\beta = [b_0; b_1, \ldots, b_n, \overline{b_{n+1}, \ldots, b_m}], \quad m \geqslant n+1.$$

I avsnittet 4 bevisades sats 4.3 som säger att varje oändligt kedjebråk representerar ett irrationellt tal och därför kan slutsatsen dras att de periodiska kedjebråken representerar irrationella tal. Det går dock att specificera denna slutsats till en ny sats som bevisas av Euler [2, § 20, s. 309-311]. Beviset nedan är dock i stora delar baserat på Rockett och Szüsz [10, kap. 3, Theorem 1, s. 40-41] som använder konvergenter och annan liknande terminologi från tidigare avsnitt.

**Sats 5.1.** *Om talet $x$ har ett periodiskt kedjebråk så är $x$ ett kvadratiskt irrationellt tal.*

*Bevis.* Låt $x = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}]$. Vi kan då skriva $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, x]$ och enligt lemma 3.2 så kan vi då skriva

$$\begin{aligned} x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, x] &= \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}} \\ &\Leftrightarrow x(xq_n + q_{n-1}) - xp_n - p_{n-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{5.0.27}$$

Eftersom kedjebråket är oändligt vet vi att $x$ är irrationellt. Vi vet också sedan tidigare att $q_n, q_{n-1}$ och $p_{n-1}$ är heltal och dessutom att $q_n > 0$. Det betyder att det bara finns irrationella lösningar till ekvationen 5.0.27 och alltså är $x$ ett kvadratiskt irrationellt tal.

Låt nu $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+i}}]$. Vi kan då sätta $m = n + i$ och låter $R_{n+1} = [\overline{a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots, a_m}]$ och vi ser nu att $R_{n+1}$ är ett periodiskt kedjebråk av längd $i$. Sedan använder vi beviset ovan för att få $R_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots, a_m, R_{n+1}]$. Vi har nu alltså två ekvivalenta ekvationer för $x$

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, R_{n+1}] = \frac{R_{n+1}\ p_n + p_{n-1}}{R_{n+1}\ q_n + q_{n-1}} \tag{5.0.28}$$

och

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m, R_{n+1}] = \frac{R_{n+1}\ p_{m-1} + p_{m-2}}{R_{n+1}\ q_{m-1} + q_{m-2}}. \tag{5.0.29}$$

Vi kan då lösa ut $R_{n+1}$ ur ekvationerna enligt

$$\begin{aligned} x = \frac{R_{n+1}\ p_n + p_{n-1}}{R_{n+1}\ q_n + q_{n-1}} &\Leftrightarrow x(yq_n + q_{n-1}) - p_{n-1} = R_{n+1}\ p_n \\ &\Leftrightarrow xq_{n-1} - p_{n-1} = R_{n+1}\ p_n - xR_{n+1}\ q_n \\ &\Leftrightarrow R_{n+1} = \frac{xq_{n-1} - p_{n-1}}{p_n - xq_n} \end{aligned}$$

och på samma sätt fås

$$x = \frac{R_{n+1}\ p_{m-1} + p_{m-2}}{R_{n+1}\ q_{m-1} + q_{m-2}} \Leftrightarrow R_{n+1} = \frac{xq_{m-2} - p_{m-2}}{p_{m-1} - xq_{m-1}}\ . \tag{5.0.30}$$

Dessa ekvationer ställs sedan mot varandra och vi får en kvadratisk ekvation i $x$:

$$\begin{aligned} &\frac{xq_{n-1} - p_{n-1}}{p_n - xq_n} = \frac{xq_{m-2} - p_{m-2}}{p_{m-1} - xq_{m-1}} \\ &\Leftrightarrow (xq_{n-1} - p_{n-1})(p_{m-1} - xq_{m-1}) = (xq_{m-2} - p_{m-2})(p_n - xq_n) \end{aligned}$$

Tabell 7: Exempel 5.1.1

| $n$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 1 | 1 | 2 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 5 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 3. |

$$\Leftrightarrow (q_{m-2}\, q_n - q_{n-1}\, q_{m-1})x^2 + (q_{n-1}\, p_{m-1} + p_{n-1}\, q_{m-1} - q_{m-2}\, p_n - q_n p_{m-2})x + \\ + (p_{m-2}\, p_n - p_{n-1}\, p_{m-1}) = 0.$$

Vi kan dra slutsatsen direkt från ett oändligt kedjebråk att $x$ är irrationellt och eftersom det är en lösning på en kvadratisk ekvation så är det kvadratiskt irrationellt. Men det följer även av resonemanget att enligt ovan är $x$ ett kvadratiskt irrationellt tal såvida inte $q_{m-2}\, q_n = q_{n-1}\, q_{m-1}$, vilket skulle innebära att $q_{m-1}$ delar $q_{m-2}\, q_n$. Men vi ser från ekvation 3.0.10 att $q_{m-1}$ och $q_{m-2}$ är relativt prima vilket innebär att $q_{m-1}$ måste dela $q_n$ vilket ju är omöjligt eftersom $q_{m-1} > q_n$. Vilket innebär att $x$ är ett kvadratiskt irrationellt tal. □

Ett förtydligande exempel:

**Exempel 5.1.1.** Vi kan utgå från exempelvis det periodiska kedjebråket $x = [1; \overline{1, 2}]$ och räkna ut vilket tal detta representerar. Vi har alltså

$$[1; \overline{1, 2}] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

om vi sätter $R_1 = [\overline{1; 2}]$ så kan vi enligt 5.1 skriva

$$x = [1; \overline{1, 2}] = [1, R_1] = [1; 1, 2, R_1].$$

Vi kan då skapa en tabell utifrån konvergenterna (se kap. 3) till $x$: Vi kan sedan använda ekvationerna 5.0.28 och 5.0.29 för att få fram två ekvationer för $x$ i $R_1$

$$x = \frac{R_1 \cdot 1 + 1}{R_1 \cdot 1} = \frac{R_1 + 1}{R_1}$$

$$x = \frac{R_1 \cdot 5}{R_1 \cdot 3 + 1} = \frac{5R_1 + 2}{3R_1 + 1}\,.$$

I nästa steg löser vi ut $R_1$ i båda ekvationerna

$$x = \frac{R_1 + 1}{R_1} \Leftrightarrow xR_1 = R_1 + 1 \Leftrightarrow R_1(x-1) = 1 \Leftrightarrow R_1 = \frac{1}{x-1}$$

$$x = \frac{5R_1 + 2}{3R_1 + 1} \Leftrightarrow (3R_1 + 1)x = 5R_1 + 2 \Leftrightarrow 3xR_1 - 5R_1 = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow (3x - 5)R_1 = 2 - x \Leftrightarrow R_1 = \frac{2 - x}{3x - 5}\,.$$

Vi kan nu fortsätta med

$$\frac{1}{x-1} = \frac{2-x}{3x-5} \Leftrightarrow 3x - 5 = (2 - x)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = 2x - x^2 - 2 + x \Leftrightarrow x^2 = 3$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{3}, \quad \text{eftersom } x \text{ uppenbarligen är positivt.}$$

**Sats 5.2.** *Om $x$ är ett kvadratiskt irrationellt tal så är $x$ ett periodiskt kedjebråk.*

Beviset är baserat på Rockett och Szüsz [10, Second proof, Theorem 2, Chapter III] och är en version av Lagranges [5, § 34-35, ss. 606-609] bevis vilket anses vara det första beviset för satsen.

*Bevis.* Vi vet sedan tidigare att om $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ så är $\lfloor x \rfloor = a_0$ och om $R_1 = [a_1; a_2, \ldots]$ så är $x = a_0 + \frac{1}{R_1}$ vilket ger $R_1 = \frac{1}{x - a_0}$. Vi vet att $x$ är ett kvadratiskt irrationellt tal, alltså på formen $x = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$. Vi vill visa att $R_1$ är ett kvadratiskt irrationellt tal som kan skrivas på formen $\frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1}$. Vi söker en formel för $R_1$ och vill således ha ett allmänt uttryck för $P_1$ samt $Q_1$. Vi samlar ihop detta och får

$$\begin{aligned}
x = R_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\
R_1 &= \frac{1}{x - a_0} = \frac{1}{\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} - a_0} = \frac{Q_0}{P_0 - a_0 Q_0 + \sqrt{D}} \\
&\left(\text{förlänger med konjugatet av } (P_0 - a_0 Q_0) + \sqrt{D}\right) \\
&= \frac{Q_0 \left(P_0 - a_0 Q_0 - \sqrt{D}\right)}{\left(P_0 - a_0 Q_0 + \sqrt{D}\right)\left(P_0 - a_0 Q_0 - \sqrt{D}\right)} = \frac{Q_0 \left(P_0 - a_0 Q_0 - \sqrt{D}\right)}{P_0^2 - 2P_0 a_0 Q_0 + (a_0 Q_0)^2 - D} \\
&\left(\text{multiplicerar täljare och nämnare med } \left(\frac{-1}{Q_0}\right)\right) \\
&= \frac{a_0 Q_0 - P_0 + \sqrt{D}}{\left(\frac{D + 2P_0 a_0 Q_0 - (a_0 Q_0)^2 - P_0^2}{Q_0}\right)} .
\end{aligned}$$

Här kan vi nu plocka ut $P_1$ och $Q_1$, nämligen

$$\begin{aligned}
P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\
Q_1 &= \frac{D + 2P_0 a_0 Q_0 - (a_0 Q_0)^2 - P_0^2}{Q_0} .
\end{aligned}$$

Notera att $P_1$ är ett heltal då $a_0, Q_0$ och $P_0$ alla är heltal och $Q_1$ är ett heltal, ty

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{D + 2P_0 a_0 Q_0 - (a_0 Q_0)^2 - P_0^2}{Q_0} = \frac{D - (P_0 - a_0 Q_0)^2}{Q_0} = \\
&= \frac{D - P_1^2}{Q_0} \in \mathbb{Z}, \text{ enligt ekvation 5.0.25.}
\end{aligned}$$

Här ser vi också att $Q_1$ är skilt från 0 eftersom $D$ inte är en perfekt kvadrat. Vi kan fortsätta på samma sätt för att få

$$\begin{aligned}
P_2 &= a_1 Q_1 - P_1 \\
Q_2 &= \frac{D + 2P_1 a_1 Q_1 - (a_1 Q_1)^2 - P_1^2}{Q_1} = \frac{D - P_2^2}{Q_1}.
\end{aligned}$$

Nu har vi sett att även $R_1$ kan skrivas på formen $\frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1}$ och på samma sätt kan vi bestämma $R_2, R_3, \ldots$ och alltså allmänt

$$P_{n+1} = a_n \, Q_n - P_n \tag{5.0.31}$$
$$Q_{n+1} = \frac{D + 2P_n a_n Q_n - (a_n Q_n)^2 - P_n^2}{Q_n} = \frac{D - P_{n+1}^2}{Q_n} \tag{5.0.32}$$

vilket ger

$$R_{n+1} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}} . \tag{5.0.33}$$

Detta kan vi använda tillsammans med sats 5.1 och får då

$$x = R_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots, R_n] = \frac{R_n p_{n-1} + p_{n-2}}{R_n q_{n-1} + q_{n-2}} .$$

Vi har ovan också visat att $R_n = \frac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n}$. Vi kan då införa den konjugerade formen av $R_n$, $\overline{R}_n = c_n$ som

$$c_n = \frac{P_n - \sqrt{D}}{Q_n} .$$

Observera att $\overline{R}_n$ alltså inte är det komplexa konjugatet.Vi får då

$$\begin{aligned}
c_0 = \frac{c_n p_{n-1} + p_{n-2}}{c_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad &\Leftrightarrow \quad c_0(c_n q_{n-1} + q_{n-2}) = c_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
\Leftrightarrow \quad & c_0 c_n q_{n-1} + c_0 q_{n-2} - c_n p_{n-1} = p_{n-2} \\
\Leftrightarrow \quad & c_n(c_0 q_{n-1} - p_{n-1}) = p_{n-2} - c_0 q_{n-2} \\
\Leftrightarrow \quad & c_n = \frac{p_{n-2} - c_0 q_{n-2}}{c_0 q_{n-1} - p_{n-1}} = -\frac{c_0 q_{n-2} - p_{n-2}}{c_0 q_{n-1} - p_{n-1}} = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \cdot \frac{c_0 - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{c_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} .
\end{aligned}$$

Nu använder vi att $q_n > q_{n-1} > q_{n-2} > \ldots$ och ser att kvoten

$$\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} < 1. \tag{5.0.34}$$

Vi kan också använda att $\frac{p_n}{q_n} \to x$ när $n \to \infty$ (definition 3.6) vilket gör att vi kan skriva

$$\frac{c_0 - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{c_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = 1 + \epsilon_n, \quad \text{där } \epsilon_n \to 0, \text{när } n \to \infty. \tag{5.0.35}$$

Tillsammans ger då ekvationerna 5.0.34 och 5.0.35 att $-1 < c_n < 0$ för stora värden på $n$. Detta resultat tillsammans med att vi redan vet att $R_n > 1$ medför att vi för stora värden på $n$ kan dra flera slutsatser:

1. $R_n - c_n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{D}}{Q_n} > 0 \quad \Rightarrow \quad Q_n > 0$

$$\begin{aligned}
\text{ty} \quad 0 < R_n - c_n &= \frac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n} - \frac{P_n - \sqrt{D}}{Q_n} = \frac{P_n + \sqrt{D} - (P_n - \sqrt{D})}{Q_n} = \\
&= \frac{2\sqrt{D}}{Q_n} \quad \Rightarrow \quad Q_n > 0.
\end{aligned}$$

2. $R_n + c_n > 0 \quad \Rightarrow \frac{2P_n}{Q_n} > 0 \quad \Rightarrow \quad P_n > 0$

$$\begin{aligned}
\text{ty} \quad 0 < R_n + c_n &= \frac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n} + \frac{P_n - \sqrt{D}}{Q_n} = \frac{P_n + \sqrt{D} + (P_n - \sqrt{D})}{Q_n} = \\
&= \frac{2P_n}{Q_n} \quad \Rightarrow \quad P_n > 0.
\end{aligned}$$

3. $c_n < 0 \quad \Rightarrow \quad P_n - \sqrt{D} < 0 \quad \Rightarrow \quad P_n < \sqrt{D}.$

4. $c_n > -1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{P_n - \sqrt{D}}{Q_n} > -1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D} - P_n < Q_n.$

5. $R_n > 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad P_n + \sqrt{D} > Q_n.$

Nu har vi alltså att $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}^+$, $0 < P_n < \sqrt{D}$ och $0 < \sqrt{D} - P_n < Q_n < \sqrt{D} + P_n$ vilket innebär att det finns ett ändligt antal möjliga värden på på $P_n$ och $Q_n$ och eftersom kedjebråket är oändligt så måste de upprepas. Vi ser också i ekvationerna 5.0.31, 5.0.32 och 5.0.33 att $R_{n+1}$ bara är beroende av termerna från $R_n$. Det innebär att när en partiell kvot $a_i$ upprepas, det vill säga när $a_i = a_j$ för $i < j$ och när samtidigt $P_i = P_j$ och $Q_i = Q_j$ så kommer sekvensen av partiella kvoter efter $a_i$ och fram till $a_j$ att upprepas i samma ordning.

$$[a_0; a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots] = [a_0; a_1, \ldots, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}}], \quad a_i = a_j.$$

Alltså är kedjebråket periodiskt efter en viss partiell kvot. □

Ett exempel för att förtydliga hur räkningarna går till i praktiken:

**Exempel 5.2.1.** För att hitta kedjebråket till $\sqrt{2}$ använder vi alltså formlerna

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}} \\ P_{n+1} &= Q_n a_n - P_n \\ Q_{n+1} &= \frac{D - P_{n+1}^2}{Q_n} \ . \end{aligned}$$

Vi har sedan tidigare också att

$$\begin{aligned} x &= [R_0] = R_0 \\ x &= [a_0; R_1] = a_0 + \frac{1}{R_1} \\ x &= [a_0; a_1, R_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{R_2}} \end{aligned}$$

och så vidare. Vi börjar nu med att ta fram $a_0, P_0$ och $Q_0$ till $\sqrt{2}$. För att finna $a_0$ utnyttjar vi att $a_0 = \lfloor x \rfloor$ och eftersom $1 < \sqrt{2} < 2$ så är $a_0 = 1$. Nästa steg blir att på ett enkelt vis skriva om $\sqrt{2}$ så att vi får talet på formen $\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$:

$$\sqrt{2} = \frac{0 + \sqrt{2}}{1}$$

och vi ser att $D = 2$, $P_0 = 0$ och $Q_0 = 1$. Nu använder vi formlerna från ovan:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_0 a_0 - P_0 = 1 \cdot 1 - 0 = 1 \\ \Rightarrow Q_1 &= \frac{D - P_1^2}{Q_0} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1 \\ \Rightarrow R_1 &= \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

och vi kan nu skriva $\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{R_1} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ vilket leder till nästa steg i processen, att hitta $a_1$. Precis som ovan använder vi att $a_1 = \lfloor R_1 \rfloor$ och eftersom $2 < 1 + \sqrt{2} < 3$ så får vi att $a_1 = 2$ och vi kan nu använda formeln igen:

$$P_2 = Q_1 a_1 - P_1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{D - P_2^2}{Q_1} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{P_2 + \sqrt{D}}{Q_2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} = 1 + \sqrt{2} = R_1.$$

Vi ser redan nu att processen kommer upprepas i all oändlighet och alltså får vi

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = [1; \overline{2}] \ .$$

Ett exempel med lite mer räkning är $\sqrt{29}$.

**Exempel 5.2.2.** Vi använder som tidigare formlerna

$$P_{n+1} = Q_n a_n - P_n, \quad Q_{n+1} = \frac{D - P_{n+1}^2}{Q_n}, \quad R_{n+1} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}} \ .$$

Nästa steg är att skriva om $\sqrt{29}$ på formen $\frac{P+\sqrt{D}}{Q}$ och sedan ta fram $Q_0, a_0$ och $P_0$:

$$\sqrt{29} = R_0 = \frac{0 + \sqrt{29}}{1}$$

$$P_0 = 0, \quad Q_0 = 1, \quad 5 < \sqrt{29} < 6 \Rightarrow \lfloor \sqrt{29} \rfloor = a_0 = 5.$$

Vi fortsätter med $R_1, R_2, \ldots$:

$$P_1 = 1 \cdot 5 - 0 = 5, \quad Q_1 = \frac{29 - 5^2}{1} = 4$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{4}$$

$$\sqrt{29} = a_0 + \frac{1}{R_1} = 5 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{29}}{4}}$$

$$a_1 = \lfloor R_1 \rfloor = 2, \quad P_2 = 4 \cdot 2 - 5 = 3, \quad Q_2 = \frac{29 - 9}{4} = 5$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{3 + \sqrt{29}}{5}$$

$$\sqrt{29} = [5; 2, R_2] = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{3+\sqrt{29}}{5}}}$$

$$a_2 = \lfloor R_2 \rfloor = 1, \quad P_3 = 5 \cdot 1 - 3 = 2, \quad Q_3 = \frac{29 - 4}{5} = 5$$

$$\Rightarrow R_3 = \frac{2 + \sqrt{29}}{5}$$

$$\sqrt{29} = [5; 2, 1, R_3] = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{2+\sqrt{29}}{5}}}}$$

$$a_3 = \lfloor R_3 \rfloor = 1, \quad P_4 = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad Q_4 = \frac{29 - 9}{5} = 4$$

$$\Rightarrow R_4 = \frac{3 + \sqrt{29}}{4}$$

$$\sqrt{29} = [5; 2, 1, 1, R_4] = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3+\sqrt{29}}{4}}}}}$$

$$a_4 = \lfloor R_4 \rfloor = 2, \quad P_5 = 4 \cdot 2 - 3 = 5, \quad Q_5 = \frac{29 - 25}{4} = 1$$

$$\Rightarrow R_5 = \frac{5 + \sqrt{29}}{1} = 5 + \sqrt{29}$$

$$\sqrt{29} = [5; 2, 1, 1, 2, R_5] = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \sqrt{29}}}}}}$$

$$a_5 = \lfloor R_5 \rfloor = 10, \quad P_6 = 1 \cdot 10 - 5 = 5, \quad Q_6 = \frac{29 - 25}{1} = 4$$

$$\Rightarrow R_6 = \frac{5 + \sqrt{29}}{4}.$$

Nu ser vi att $R_6 = R_1$ eftersom $P_6 = P_1, Q_6 = Q_1$ och $D$ är alltid 29. Det innebär att från och med $R_6$ så kommer kedjebråket att upprepa de partiella kvoterna $2, 1, 1, 2$ och 10 vilket alltså innebär att kedjebråket ges av

$$\sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}].$$

I de båda exemplen ovan så kan vi notera ett intressant mönster. Vi har $\sqrt{2} = [a_0; \overline{a_1}]$ där $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$. Vi har också $\sqrt{29} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}]$ där $a_0 = 5,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2$ och $a_5 = 10$. Vi ser då mönstret att den sista partiella kvoten i perioden är $2 \cdot a_0$ i båda fallen och det ska visa sig att detta inte är någon slump.

## 5.1 Reducerade kvadratiskt irrationella tal

Vi har ovan visat att om $x$ är ett kvadratiskt irrationellt tal så ges $x$ av ett periodiskt kedjebråk. Vi ska nu visa att alla reducerade kvadratiska irrationella tal, från engelskans *reduced quadratic irrational* [10, stycke 4.4, s. 100], ges av fullständigt periodiska kedjebråk. Dessutom ska vi visa att de irrationella tal som är kvadratrötter av icke-kvadratiska tal ges av kedjebråk på formen $[a_0; \overline{a_1, \ldots, 2a_0}]$. Definitionen av ett kvadratiskt irrationellt tal återfinns på sidan 21. Vi kan nu lägga till vad som gäller för att ett kvadratiskt irrationellt tal också ska vara reducerat.

Vi definierar ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal som ett specialfall av kvadratiskt irrationella tal enligt följande:

**Definition 5.1.1.** *Om $x_1 = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} > 1$ och $-1 < x_2 = \frac{P-\sqrt{D}}{Q} < 0$ är två rötter till en kvadratisk ekvation $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, där $P = -\beta,\ Q = 2\alpha > 0$ och $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ och $D$ är inte en jämn kvadrat, så säges $x_1$ vara ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal.*

Lägg märke till att $x_2$ ges av det konjugerade värdet av $x_1$. Utöver att $P,\ Q$ och $D$ är heltal kan vi från definitionen dra flera slutsatser:

1. $P > 0$
   ty

$$x_1 + x_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P + \sqrt{D}}{Q} + \frac{P - \sqrt{D}}{Q} = \frac{2P}{Q} > 0$$

2. $\sqrt{D} > P$
   ty
$$x_2 = \frac{P - \sqrt{D}}{Q} < 0$$

3. $\sqrt{D} - P < Q$
   ty
$$-1 < \frac{P - \sqrt{D}}{Q} \quad \Leftrightarrow \quad -Q < P - \sqrt{D}$$

4. $Q < \sqrt{D} + P$
   ty
$$1 < \frac{P + \sqrt{D}}{Q} \quad \Leftrightarrow \quad Q < P + \sqrt{D}$$

Så vi har alltså $0 < P < \sqrt{D}$, $\sqrt{D} - P < Q < \sqrt{D} + P < 2\sqrt{D}$ och $1 < D$. Dessa olikheter gör att vi för varje fixt värde på $D$ endast kan ha ett ändligt antal $P$:n och $Q$:n, vilket i sin tur innebär att det finns ett ändligt antal kvadratiska irrationella tal för varje fixt värde på $D$. Observera också att det alltid finns minst ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal för varje värde på D. Låt $x_1 = b + \sqrt{D}$ där $b = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$. Då får vi trivialt att $x_1 > 1$. Låt också $x_2 = b - \sqrt{D}$ så får vi lika trivialt att $-1 < x_2 < 0$. Nu ser vi att $x_1$ och $x_2$ är rötter till den kvadratiska ekvationen $x^2 - 2bx + b^2 - D = 0$.

Vi har ovan i sats 5.2 visat att om
$$x = R_0 = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}$$
så kan vi skriva
$$R_0 = a_0 + \frac{1}{R_1}$$
där $R_1 = \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1}$. Vi använder oss fortsättningsvis precis som tidigare att:
$$c_n = \overline{R}_n = \bar{x}_n = \frac{P - \sqrt{D}}{Q} < 0.$$

Låt $x$ vara ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal. Nu ska vi visa att $R_1$ också är ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal genom att visa att $R_1 > 0$ och det konjugerade värdet, $\overline{R}_1 = c_1$, ligger mellan $-1$ och $0$. Vi har tidigare visat att $R_1 = a_1 + \frac{1}{R_2} > 1$ och kan således fokusera på att visa att $-1 < c_1 < 0$. Vi har att
$$R_0 = a_0 + \frac{1}{R_1} \quad \Leftrightarrow \quad R_1 = \frac{1}{R_0 - a_0}$$
och om vi då tar det konjugerade värdet av $R_1$ så får vi
$$c_1 = \frac{1}{c_0 - a_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_1} = c_0 - a_0.$$
Vi vet enligt förutsättningarna att $c_0 < 0$ och $1 \leqslant a_0$ vilket ger oss $c_0 - a_0 < -1$ och alltså
$$-1 < c_1 < 0.$$
Iterativt kan vi nu visa $R_n$ är ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal, för varje $n$, och således är $-1 < c_n < 0$.

**Sats 5.1.2.** *Låt $x$ vara ett kvadratiskt irrationellt tal. Kedjebråksutvecklingen för $x$ är då fullständigt periodisk om och endast om $x$ är reducerat.*

*Bevis.* Om vi har ett fullständigt periodiskt kedjebråk $[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}}]$ så innebär det att $a_0 = a_n$. Vi vet att $a_0 \geqslant 1$ eftersom $a_n > 1$ och alltså är $x > 1$. Vi kan på samma sätt som i sats 5.1 använda att

$$x = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}} \quad \Leftrightarrow \quad q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0.$$

Låt

$$f(y) = q_n y^2 + (q_{n-1} - p_n)y - p_{n-1}.$$

Eftersom att för positiva $a_0$ har vi $a_0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots p_n < \ldots$ så vet vi att

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(0) &= -p_{n-1} < 0 \\ f(-1) &= (q_n - q_{n-1}) + (p_n - p_{n-1}) > 0, \end{aligned}$$

vilket innebär att vi måste ha ett till nollställe för $f(x)$ mellan $-1$ och 0. Vi vet enligt förutsättningarna för kvadratiskt irrationella tal att denna rot är det konjugerade värdet av $x$ och alltså är $x$ reducerat.

Om vi nu förutsätter att $x$ är ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal så vet vi enligt definition 5.1.1 att $x = R_0$, $R_n > 1$ och $-1 < c_n < 0$. Anta nu att $x$ inte är fullständigt periodiskt utan istället har formen $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, \ldots, a_m}]$. Vi har då att

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= a_{n+1} + \frac{1}{R_{n+2}} \\ R_{m+1} &= a_{m+1} + \frac{1}{R_{m+2}}. \end{aligned}$$

Då vet vi också att $a_n \neq a_m$ eftersom det skulle innebära att periodiciteten skulle börja med $a_n$ istället. Men eftersom vi har $R_{n+1} = R_{m+1}$ så får vi

$$R_n - R_m = \left(a_n + \frac{1}{R_{n+1}}\right) - \left(a_m + \frac{1}{R_{m+1}}\right) = a_n - a_m = \lambda \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Precis på samma sätt har vi att $c_n - c_m$ är ett nollskilt heltal men samtidigt vet vi att $-1 < c_n - c_m < 1$ vilket ger en motsägelse. Alltså måste $a_n = a_m$ och det innebär att $x$ ges av ett fullständigt periodiskt kedjebråk. $\square$

Nu kan vi bevisa följande sats:

**Sats 5.1.3.** *Om $D > 0$ är ett heltal som inte är en perfekt kvadrat så skrivs kedjebråket av $\sqrt{D}$ på formen*

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, 2a_0}].$$

*Bevis.* Låt $x = \sqrt{D}$. Vi ser direkt att vi kan skriva $\sqrt{D}$ på formen $\frac{P+\sqrt{D}}{Q}$ genom att sätta $P = 0$ och $Q = 1$

$$\sqrt{D} = \frac{0 + \sqrt{D}}{1}.$$

Alltså är $x$ ett kvadratiskt irrationellt tal. Vi har också att $\sqrt{D} > 1$ men däremot ligger inte $-\sqrt{D}$ mellan $-1$ och 0 och alltså är $x$ inte reducerat enligt definition 5.1.1. Vi vet sedan tidigare att vi kan skriva

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, \ldots, a_m}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} \cfrac{1}{\ddots\, a_m + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ddots}}}}}.$$

När $x = \sqrt{D}$ så är då $a_0 = \lfloor\sqrt{D}\rfloor$. Det innebär att vi kan skriva $\alpha = x + a_0 = \sqrt{D} + \lfloor\sqrt{D}\rfloor$ och detta tal är reducerat eftersom de två kraven som ställs på rötterna är uppfyllda. Vi har

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{D} + \lfloor\sqrt{D}\rfloor > 0 \\ -1 < \bar{\alpha} &= -\sqrt{D} + \lfloor\sqrt{D}\rfloor < 0 \end{aligned}$$

Vi kan då skriva det nya talet $\alpha$ enligt:

$$\alpha = x + a_0 = [2a_0; a_1, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots] = 2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}},$$

det vill säga, vi har ett fullständigt periodiskt kedjebråk. Men då är

$$\begin{aligned} \alpha - a_0 = x + a_0 - a_0 &= 2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}} - a_0 = \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}} = [a_0; a_1, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots]. \end{aligned}$$

Vi ser nu att $x$ är fullständigt periodiskt efter $a_0$:

$$x = [a_0; \overline{a_1, \ldots, 2a_0}].$$

Vi har alltså kommit fram till den eftersökta formen av kedjebråk. □

I nästa del kommer vi få användning av den här typen av räkningar när vi visar en metod att lösa diofantiska ekvationer av grad 2.

# 6 Pells ekvation

Den ekvation som vanligtvis kallas Pells ekvation ser som bekant ut som följer, om $D$ och $N$ är givna heltal och $D > 0$ inte är en perfekt kvadrat

$$x^2 - Dy^2 = N.$$

Det går att med hjälp av kedjebråk och dess konvergenter lösa denna typ av ekvationer. Men vi ska här göra det lite enkelt för oss genom att begränsa Pells ekvation till att innefatta $N = \pm 1$. Metoden framgår nämligen med önskad tydlighet även då.[7] Vi kommer också se att metoden alltid hittar lösningar till ekvationer av typen $x^2 - Dy^2 = 1$ medan ekvationer som $x^2 - Dy^2 = -1$ ibland saknar en lösning med metoden. Det kan också visas att alla lösningar faktiskt hittas med metoden, men beviset visas inte här. De verktyg vi behöver för att lösa en ekvation av den här typen återfinns i avsnitten om konvergenter sidan 9 och periodiska kedjebråk sidan 21.

Vi har i avsnitt 5.1 visat att om

$$x = \sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}}] \tag{6.0.1}$$

så är $a_{n+1} = 2a_0$. Vi har också visat att

$$\sqrt{D} + a_0 = [\overline{2a_0; a_1, \ldots, a_n}]$$

och vi kan därför skriva $\sqrt{D} + a_0 = R_{n+1}$. Nu kan vi kombinera dessa och ser att

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, \ldots, a_n, R_{n+1}].$$

I nästa steg använder vi lemma 3.2 och kan då skriva om ekvation 6.0.1 som

$$\sqrt{D} = \frac{R_{n+1}\; p_n + p_{n-1}}{R_{n+1}\; q_n + q_{n-1}} \; .$$

Vi vet ju att $R_{n+1} = \sqrt{D} + a_0$ och vi kan då skriva om ekvationen igen enligt

$$\begin{aligned}
&\sqrt{D} = \frac{\left(\sqrt{D} + a_0\right) p_n + p_{n-1}}{\left(\sqrt{D} + a_0\right) q_n + q_{n-1}} \\
\Leftrightarrow\quad &\sqrt{D}\left(\sqrt{D} q_n + a_0 q_n\right) + \sqrt{D} q_{n-1} = a_0 p_n + p_{n-1} + \sqrt{D} p_n \\
\Leftrightarrow\quad &D q_n + (a_0 q_n + q_{n-1})\sqrt{D} = (a_0 p_n + p_{n-1}) + p_n \sqrt{D}.
\end{aligned}$$

Nu ser vi att $Dq_n$, $(a_0 q_n + q_{n-1})$, $(a_0 p_n + p_{n-1})$ och $p_n$ alla är heltal vilket innebär att ekvationen kan skrivas på formen $a + b\sqrt{D} = c + d\sqrt{D}$. Den enda möjliga lösningen är då $a = c$ och $b = d$ vilket innebär

$$\begin{cases} Dq_n = a_0 p_n + p_{n-1} \\ a_0 q_n + q_{n-1} = p_n \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} p_{n-1} = Dq_n - a_0 p_n \\ q_{n-1} = p_n - a_0 q_n \end{cases}$$

För att komma vidare använder vi sats 3.4 där vi visat att för $n \geqslant 0$ gäller

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Vi sätter då in de värden vi har för $q_{n-1}$ och $p_{n-1}$ och får

$$\begin{aligned}
&p_n(p_n - a_0 q_n) - q_n(Dq_n - a_0 p_n) = (-1)^{n-1} \\
\Leftrightarrow\quad &p_n^2 - p_n a_0 q_n - Dq_n^2 + q_n a_0 p_n = (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

[7] För lösning av den mer generella typen se exempelvis Rockett och Szüsz *Continued Fractions* [10, kap. 4, § 1, ss. 64-69].

$$\Leftrightarrow \quad p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n-1}.$$

En snabb jämförelse med Pells ekvation ger att

$$x = p_n, \quad y = q_n$$

är en lösning.

Eftersom $k_n = \frac{p_n}{q_n}$ så kan vi genom att räkna ut de partiella kvoterna för $\sqrt{D}$ och sedan ställa upp en tabell med konvergenterna snabbt läsa av $x$ och $y$ från respektive $p_n$ och $q_n$. Vi ser också att de ekvationer där indexet $n$ är jämnt ger oss $-1$ och de ekvationer där $n$ är udda ger 1. Den konvergent vi söker är alltså alltid den näst sista i perioden. Värdet på den partiella kvoten kommer då alltid att vara samma men värdet på den konvergenten kommer att förändras. För varje period växer värdena på det sökta $p$- och $q$-värdet. Detta är anledningen till att vi alltid kan finna heltalslösning till ekvationer av typen $x^2 - Dy^2 = 1$. Eftersom att om ekvationen, med värdena på $p_n$ respektive $q_n$, i första perioden ger värdet $-1$ och det sökta värdet är 1 så innebär det att vi har ett jämnt värde på indexet $n$. Vi kan då helt enkelt gå till nästa period där indexet då kommer vara udda. Ty

$$[a_0; \overline{a_1, \ldots, a_{2n-1}}] = [a_0; a_1, \ldots, a_{2n-1}, \overline{a_{2n}, \ldots, a_{2(2n-1)}}],$$
$$a_1 = a_{2n}, a_2 = a_{2n+1}, \ldots, a_{2n-1} = a_{2(2n-1)}$$

Och vi ser då att $2(2n-1)$ naturligtvis måste vara jämnt vilket innebär att indexet före, alltså det näst sista i perioden och sökta, är udda.

Däremot går det inte alltid att hitta en heltidslösning till ekvationen $x^2 - Dy^2 = -1$; vilket följer direkt från ekvationen $p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n-1}$. Detta eftersom att om vi lägger ett jämnt antal partiella kvoter till ett udda å kommer det totala antalet fortfarande vara udda.

$$\sqrt{D_1} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_{2n-1}}], \quad a_{2n-1} = 2a_0$$
$$\sqrt{D_2} = [b_0; \overline{b_1, \ldots, b_{2n}}], \quad b_{2n} = 2b_0.$$

Här följer två förtydligande exempel.

**Exempel 6.1.** Vi börjar med att räkna ut $x$ och $y$ från ekvationen $x^2 - 14y^2 = 1$. För att hitta de partiella kvoterna till $\sqrt{14}$ använder vi metoden från sats 5.2. Kom ihåg att $a_n = \lfloor R_n \rfloor$ samt formlerna:

$$P_{n+1} = a_n Q_n - P_n$$
$$Q_{n+1} = \frac{D - P_{n+1}}{Q_n}$$
$$R_{n+1} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}}.$$

Vi skriver då om $\sqrt{14}$ på formen $\frac{P+\sqrt{D}}{Q}$ och sedan använde vi formlerna.

$$\sqrt{14} = R_0 = \frac{0 + \sqrt{14}}{1}, \quad a_0 = 3, \quad P_0 = 0, \quad Q_0 = 1.$$
$$P_1 = 3 \cdot 1 - 0 = 3, \quad Q_1 = \frac{14 - 3^2}{1} = 5$$
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{3 + \sqrt{14}}{5}, \quad a_1 = 1.$$
$$P_2 = 1 \cdot 5 - 3 = 2, \quad Q_2 = \frac{14 - 2^2}{5} = 2$$
$$\Rightarrow \quad R_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}, \quad a_2 = 2.$$
$$P_3 = 2 \cdot 2 - 2 = 2, \quad Q_3 = \frac{14 - 2^2}{2} = 5$$

Tabell 8: Exempel 6.1

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 3 | 1 | 2 | 1 | 6 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 11 | 15 | 101 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 27 |

$$\Rightarrow \quad R_3 = \frac{2+\sqrt{14}}{5}, \quad a_3 = 1.$$
$$P_4 = 1 \cdot 5 - 2 = 3, \quad Q_4 = \frac{14-3^2}{5} = 1$$
$$\Rightarrow \quad R_4 = \frac{3+\sqrt{14}}{5}, \quad a_4 = 6.$$
$$P_5 = 6 \cdot 1 - 3 = 3, \quad Q_6 = \frac{14-3^2}{1} = 5$$
$$\Rightarrow \quad R_5 = \frac{3+\sqrt{14}}{5} = R_1.$$

Nu ser vi att vi är klara eftersom $R_5 = R_1$ och vi får $\sqrt{14} = [3; \overline{1, 2, 1, 6}]$. Nästa steg blir att använda metoden för konvergenter och med våra värden på de partiella kvoterna och skapa en tabell (tabell 8) efter samma mönster som tabell 1 på sidan 10. Enligt metoden från avsnitt 6 ovan så letar vi efter de värden på $p_n$ respektive $q_n$ som ges av den partiella kvoten som återfinns på positionen innan $2a_0$. I detta exempel alltså $n = 3$, vilket ger oss värdena $p_n = p_3 = 15$ och $q_n = q_3 = 4$ och eftersom $n$ är udda så får vi att $p_n^2 - Dq_n^2 = 1$ direkt. Vi kan också enkelt kontrollera detta genom att sätta in värdena i ekvationen:

$$p_3^2 - 14q_3^2 = 15^2 - 14 \cdot 4^2 = 225 - 224 = 1$$

Vi kan vidare se att även om vi lägger till en period och tar den näst sista partiella kvoten och motsvarande värde på konvergenten så kommer även dess index vara udda.

$$\sqrt{14} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \overline{a_5, a_6, a_7, a_8}],$$
$$a_0 = 3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 2, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 2a_0 = 6.$$

Vi kommer då få en annan lösning på ekvationen. Detta exemplifieras inte i en tabell här men visas nedan då det blir mer intressant i nästa exempel.

**Exempel 6.2.** I det här exemplet ser vi hur löser ekvationen $x^2 - 13y^2 = 1$. Vi kommer också att få se att vi på vägen får en lösning till ekvationen $x^2 - 13y^2 = -1$. På samma sätt som ovan får vi:

$$\sqrt{13} = R_0 = \frac{0+\sqrt{13}}{1}, \quad a_0 = 3, \quad P_0 = 0, \quad Q_0 = 1.$$
$$P_1 = 3 \cdot 1 - 0 = 3, \quad Q_1 = \frac{13-3^2}{1} = 4$$
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{4}, \quad a_1 = 1.$$
$$P_2 = 1 \cdot 4 - 3 = 1, \quad Q_2 = \frac{13-1^2}{4} = 3$$
$$\Rightarrow \quad R_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{3}, \quad a_2 = 1.$$
$$P_3 = 1 \cdot 3 - 1 = 2, \quad Q_3 = \frac{13-2^2}{3} = 3$$
$$\Rightarrow \quad R_3 = \frac{2+\sqrt{13}}{3}, \quad a_3 = 1.$$

Tabell 9: Exempel 6.2

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 119 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 33 |

Tabell 10: Exempel 6.2

| $n$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| $p_n$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 119 | 137 | 256 | 393 | 649 | 4287 |
| $q_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 33 | 38 | 71 | 109 | 180 | 1189 |

$$\begin{aligned}
P_4 = 1 \cdot 3 - 2 = 1, \quad Q_4 = \frac{13 - 1^2}{3} = 4 \\
\Rightarrow \quad R_4 = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}, \quad a_4 = 1. \\
P_5 = 1 \cdot 4 - 1 = 3, \quad Q_5 = \frac{13 - 3^2}{4} = 1 \\
\Rightarrow \quad R_5 = \frac{3 + \sqrt{13}}{1}, \quad a_5 = 6. \\
P_6 = 6 \cdot 1 - 3 = 3, \quad Q_6 = \frac{13 - 3^2}{1} = 4 \\
\Rightarrow \quad R_6 = \frac{3 + \sqrt{13}}{4} = R_1
\end{aligned}$$

Här ser vi att vi är klara eftersom $R_6 = R_1$. Vi går vidare till att skapa en tabell (tabell 9) med hjälp av de partiella kvoterna. Här är det sökta värdet på $n = 4$ och alltså jämn, vilket innebär att lösningen som nu återfinns är den till ekvationen $x^2 - 13y^2 = -1$. Vi kontrollerar igen:

$$p_4^2 - 13q_4^2 = 18^2 - 13 \cdot 5^2 = 324 - 325 = -1.$$

För att hitta lösningen till den sökta ekvationen måste vi alltså gå till nästa period och vi får alltså göra en till tabell (tabell 10). Vi ser från tabell 10 att det eftersökta konvergenten, alltså den näst sista i perioden, återfinns vid index 9 och alltså ett udda tal. Vi ska nu enligt metoden få att med $x = p_9$ och $y = q_9$ få en lösning på den eftersökta ekvationen. Vi får vid kontrollräkningen:

$$p_9^2 - 14q_9^2 = 649^2 - 13 \cdot 180^2 = 421201 - 421200 = 1$$

och vi är därmed klara.

## Referenser

[1] Brezinski, Claude, *History of Continued Fractions and Padé Approximants* (Berlin: Springer-Verlag, 1991).

[2] Euler, Leonard, De fractionibus continuis dissertatio. I: *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* . Vol. 9, E71 (1744) = Wyman, Myra F. & Wyman Bostwick F., An Essay on Continued Fractions. I: *Mathematical Systems Theory*, no. 18, vol. 4, ss. 295-328 (New York: Springer-Verlag, 1985).

[3] Euler, Leonard, *Introductio in Analysin Infinitorium* (1748). Translated: *Introduction to Analysis of the Infinite Book I*, Translator John D. Blanton (New York: Springer-Verlag, 1988).

[4] Kauffman Louise H. & Lambropoulou, Sofia, *Classifying and Applying Rational Knots and Rational Tangles* [Elektronisk resurs] (2002). http://homepages.math.uic.edu/ kauffman/VegasAMS.pdf

[5] Lagrange, Joseph Louis, Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. I: *Mémoires de l'Academie royales des sciences et Belles-Lettres de Berlin.* Tome XXIV (1770) = Serret, M. J-A. *Œuvers de Lagrange.* Tome II (1868), ss. 581-652.

[6] Niven, Ivan & Zuckerman, Herbert S., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4 uppl. (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1980).

[7] Niven, Ivan, *Numbers: Rational and Irrational* (Anneli Lax New Mathematical Library) [Elektronisk resurs] (Mathematical Association of America, 2012).

[8] Olds, C.D. *Continued fractions* (Washington: Random House, 1963).

[9] Persson, Arne & Böiers, Lars-Christer. *Analys i en variabel*, 3. [rev.] uppl. (Lund: Studentlitteratur, 2010).

[10] Rockett, M Andrew & Szüsz, Peter. *Continued Fractions* (Singapore: World Scientific Publishing, 1992).

[11] Smith, David Eugene, (red.) *A source book in mathematics: [125 selections from the classic writings of Pascal, Leibniz, Euler, Fermat, Gauss, Descartes, Newton, Riemann and many others]* (New York: Dover, 1984[1929]).