



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Sannolikheter inom Texas Hold'em

av

Larry Li

2016 - No 23

Sannolikheter inom Texas Hold'em

Larry Li

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Shiva Samieinia

2016

Sammanfattning

Texas Hold'em är ett av världens mest populära pokerspel och spelas både i kasinon och på nätet. Eftersom spelet spelas med en vanlig kortlek bestående av 52 kort utan jokrar kan vi studera sannolikheter att dra specifika kort. I detta arbete går vi igenom sannolikheter för olika händelser i Texas Hold'em. Först presenteras permutationer och kombinationer. En kort genomgång av beroende och oberoende händelser samt hypergeometrisk fördelning följer innan vi börjar gå igenom möjliga starthänder i Texas Hold'em. Genomgången av sannolikheter mynnar ut i en analys av vinstchanser i två stycken pokerpartier för att visa på rollen matematik har för pokerspelare.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Vad är poker?	1
1.2	Vad har matematik med poker att göra?	1
1.3	Uppsatsens upplägg	2
2	Permutationer och kombinationer	3
3	Lite Sannolikhetslära	6
3.1	Händelser, beroende och oberoende	6
3.2	Hypergeometrisk fördelning	8
4	Texas Hold'em	9
4.1	Spelgenomförande	9
4.2	Startgiv	9
4.2.1	Par	9
4.2.2	Kort i samma färg	10
4.2.3	Ess-kung	10
4.2.4	Skräp	11
4.3	Floppen	11
4.3.1	Starthand: par	11
4.3.2	Kort i samma färg	13
4.3.3	Ess-kung	13
4.4	Efter floppen	16
5	Analys Texas Hold'em	18
5.1	Öppet parti	18
5.1.1	Utgångsläge	18

5.1.2	Floppen visas	19
5.1.3	Turn kortet visas	21
5.1.4	River kortet visas	21
5.2	Stängt parti	22
6	Slutsatser	24
7	Referenser	25
8	Bilagor	26

1 Inledning

1.1 Vad är poker?

Poker är en term för flera olika typer av populära kortspel. I spelet ingår vadslagning vilket gör att det är en av de vanligaste aktiviteterna på kasino. Eftersom det egentligen är flera olika spel är det kanske fel att bara säga "jag kan spela poker". Med internets framväxt växte även nätpoker fram som en populär aktivitet för många människor [4].

Grundgenomförandet av spelet går till att korten delas ut enligt det aktuella spelets regler i en giv. Sedan har spelarna möjlighet att syna eller höja insatsen alternativt lägga sig om de tycker den giv de fått är dålig och inte värd att satsa pengar på. De spelarna som synat insatsen och därmed är med i potten får då möjlighet att få nya kort. Sedan följer ny runda av synande/höjande/lägga sig. Så fortsätter det tills inga fler kort kommer bytas/visas. Efter en avslutande bettingrunda får de återstående spelarna visa sina kort och den med bäst hand vinner potten. En giv kan ta slut tidigare än så beroende på om en spelare höjer insatsen och ingen annan är villig att syna, då tar den spelaren potten. Eftersom pokerspelet har olika regler går vissa till genom att spelaren får byta kort till exempel femkortspoker och andra spel visar dealern nya kort som samtliga spelare får se och nyttja för sin pokerhand till exempel Texas Hold'em.

1.2 Vad har matematik med poker att göra?

I stort sett alla pokerspel spelas med en vanlig kortlek bestående av 52 kort utan jokrar. Det finns några enstaka varianter där färre kort används men dessa är inte bland de populäraste spelen. I och med att det är givet antalet samt vilka kort som finns, kan skickliga pokerspelare utnyttja sannolikhetslära för att ta rätt beslut under spelets gång. Binomialkoefficienter är väldigt användbart för att räkna ut sannolikhet då man kan utgå från vetskapen att det är 52 kort för att beräkna sannolikheten att få just de två kort man vill ha. Likaså kan man utgå från en hypergeometrisk fördelning för att beräkna sannolikheter. Dock är matematiken bara ett hjälpmedel. Det som tas upp i denna uppsats kommer ofta behandla ideala fall. I riktigt pokerspel är informationen begränsad och inte fullständig vilket gör att man inte kan förlita sig hundra procentigt enbart på det matematiska idealfallet när man tar beslut i pokerspel.

För mig personligen som blivande lärare inom matematik finns en extra baktanke. En väldigt viktig egenskap för lärare är att ha förmåga att fånga elevers intresse. Det blir oftast lättare för elever att ta sig igenom krångliga beräkningar när de själv känner intresse för beräkningarna. Poker och andra kortspel eller casinospel handlar mycket om sannolikhet. De kan därför bli effektiva hjälpmedel eller morötter i undervisningen när tema sannolikhet kommer i matematikundervisningen.

1.3 Uppsatsens upplägg

Uppsatsen kommer rikta in sig mot Texas Hold'em. Först introduceras permutationer och kombinationer. Sedan kommer ett avsnitt om sannolikhetslära. Delen om Texas Hold'em inleds sedan med sannolikheter för olika startgivar. Från en början kommer analysen ske genom idealfallet att endast en spelare undersöker sannolikheten att dra vissa händer eller träffa rätt kort. Uppsatsen avslutas med en analys av vinstchanser i två separata partier poker utifrån de sannolikheter som behandlas tidigare i uppsatsen.

2 Permutationer och kombinationer

Det pokerspelet som uppsatsen behandlar spelas alltid med en kortlek med 52 kort utan jokrar. Förutsättningarna är kända för alla spelare. En pokerspelare funderar förmodligen på sannolikheten att få exempelvis ett par i sin starthand. För oss matematiker kan vi gå vidare och fundera kring frågan: på hur många sätt kan vi få ett par ur en 52-kortslek?"

Denna typ av problem ingår i den del av matematiken som kallas kombinatorik [6]. I kombinatoriken finns det två viktiga faktorer, tar vi hänsyn till ordningen och gör vi dragning med eller utan återläggning. Pokerspel hamnar i fallet utan återläggning och utan hänsyn till ordning. Det är inte så att korten läggs tillbaka i kortleken under ett parti och därmed kan komma ännu en gång. Samtidigt är det för pokerspelaren ointressant om första eller andra kortet är hjärter respektive spader ess. Pokerspelaren är intresserad av att få ihop ett par i sin starthand.

Torbjörn Tambour visar i sitt kompendium [6] en tabell med de olika faktorerna, ordning samt återläggning, och poker ingår i kombinationer $C(n,k)$. För att ta ett pokerexempel kan vi se på handen triss i ess. Säg att vi har fått hjärter, klöver och spader ess i hand.

Ordning 1	$A♥A♣A♠$
Ordning 2	$A♣A♥A♠$
Ordning 3	$A♠A♣A♥$

Som tabellen visar har vi hela tiden samma kombination. Detta är det väsentliga för pokerspelaren, en triss i ess. En matematiker kan också påpeka att det är tre permutationer eftersom ordningen vänster till höger är olika. Dock är det inte samtliga permutationer av de tre korten. Fullständiga antalet permutationer är sex stycken. Eftersom vi har tre ess kan vi välja det första på tre sätt, nästa kort i ordningen på två sätt och sen ett sätt. Så $3 \times 2 \times 1 = 6$. Det går förstås också att generalisera enligt multiplikationsprincipen. Hade vi haft n st ess kunde vi valt det första esset i ordningen på n sätt, nästa $(n-1)$ sedan $(n-2)$ och så vidare. Detta leder till att när vi väljer det näst sista esset i ordningen har vi två ess att välja emellan och det sista bara ett val. Eftersom essen bara får förekomma en gång i ordningen kommer vi inte fortsätta i oändlighet. Talet

$$n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 2 \times 1$$

kallas *n-fakultet* och betecknas $n!$. Antalet permutationer betecknas $p(n)$. Ett viktigt samband för permutationer är att

$$p(n) = n \times p(n-1)$$

vilket vi också ser i vårt fall med tre ess. Om vi börjar med $A♥$ och $A♠$ så kan vi placera dessa på två sätt, $A♥$ först eller $A♠$ först. Så $p(2) = 2!$. Vi har alltså två stycken permutationer. Sen kan vi placera $A♣$ först, mittemellan båda de andra essen eller sist i ordningen. Därav följer

$$p(2) \times 3 = 6 = 3! = p(3).$$

Från detta samband följer varför matematiker valt att $0!$ definieras enligt $0! = 1$. Eftersom

$$1! = 1 \text{ men även } 1! = 1 \times 0!$$

så skulle det fallera om $0!$ definierats som $0! = 0$. Hur hör nu det vi bestämt $p(n) = n!$ ihop med stora $P(n, k)$ som tolkas som på hur många sätt kan vi välja k objekt ur en mängd n med hänsyn till ordning? I fallet med lilla $p(n)$ kan vi se det som att vi valde samtliga föremål i mängden eller $p(n) = P(n, n)$. Vad gäller då för $P(n, k)$? Första objektet kan vi förstås även här välja på n sätt, nästa på $(n-1)$ och så vidare. Men vi ska välja k objekt. Om vi väljer 5 objekt ur en mängd på 10 så har vi 6 möjligheter för femte objektet (10, 9, 8, 7, 6). I det allmänna fallet gäller [6] att val nummer k kan göras på $n - (k-1)$ eller $n - k + 1$ sätt. Valen beror inte på varandra så

$$P(n, k) = n \times (n-1) \times \dots \times (n - (k-1)) \quad (2.1)$$

och om $k=n$, är sista termen 1, näst sista termen $(n - (k-2))$ blir 2 och så vidare. Vi skriver om (2.1) genom att förlänga med $(n-k) \times (n - (k+1)) \times \dots \times 2 \times 1$ under förutsättning att $k < n$.

$$\begin{aligned} P(n, k) &= n \times (n-1) \times \dots \times (n - (k-1)) \\ &= \frac{n \times n(-1) \times \dots \times (n - (k-1)) \times (n-k) \times (n - (k+1)) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n - (k+1)) \times \dots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vid en första blick av (2.2) verkar det nödvändigt att vi förutsatte $k < n$. Men eftersom $0! = 1$ gäller (2.2) även för $k = n$.

Men eftersom poker inte tar hänsyn till ordning är det kombinationer som är det väsentliga och talet $\binom{n}{k}$ som kallas binomialkoefficient. Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ läser vi "n över k" och kan ses som, ur en mängd med n element välj k element utan hänsyn till ordning och utan återläggning [6]. Det beräknas på följande sätt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.3)$$

Varför beräknas koefficienten såhär? Vi ser att det är ganska likt hur vi beräknar permutationer (se (2.2)). Låt oss studera exemplet med triss i ess.

Ordning 1	$A \heartsuit A \clubsuit A \spadesuit$
Ordning 2	$A \clubsuit A \heartsuit A \spadesuit$
Ordning 3	$A \spadesuit A \clubsuit A \heartsuit$

Vi har hela tiden samma kombination av $A \heartsuit, A \clubsuit, A \spadesuit$. Men detta motsvarar som vi tidigare visat $3! = 6$ permutationer av $A \heartsuit, A \clubsuit, A \spadesuit$. I det allmänna fallet motsvarar varje dragning av k föremål utan hänsyn till ordning $k!$ dragningar med hänsyn till ordning. Detta gäller då k

stycken föremål kan permuteras på $p(k) = k!$ olika sätt. Därmed följer att $k!C(n, k) = P(n, k)$ där $C(n, k)$ är kombinationen då vi drar k föremål ur en mängd n [6]. Så vi får:

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Vill vi veta hur många kombinationer vi kan få ihop en triss av ess så är det bara att använda binomialkoefficienten (2.3). Ur en mängd fyra (fyra ess i en kortlek) vill vi dra tre

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4.$$

Det finns alltså fyra kombinationer som ger triss i ess ur en vanlig kortlek.

3 Lite Sannolikhetslära

Det finns flera delar ur sannolikhetslära som dyker upp i pokerspel. I följande del studerar vi lite om beroende och oberoende händelser. Sedan följer ett litet avsnitt om hypergeometrisk fördelning

3.1 Händelser, beroende och oberoende

I sannolikhetsläran studeras händelser $A, B, C, \dots$ till exempel händelse A att få krona vid slantsingling. Vid flera olika händelser dyker även termerna union och snitt upp. Om A är krona och B klave så finns unionen $A \cup B$ och snittet $A \cap B$. Unionen innebär att antingen A eller B inträffar och snittet innebär att både A och B inträffar. I sannolikheter blir beteckningarna följande:

$$p(A \cup B) = \text{sannolikheten att } A \text{ eller } B \text{ inträffar}$$

$$p(A \cap B) = \text{sannolikheten att } A \text{ och } B \text{ inträffar}$$

$$p(A|B) = \text{sannolikheten att } A \text{ inträffar givet att } B \text{ redan inträffat.}$$

I exemplet med slantsingling gäller förstås att $p(A \cup B) = 1$ eftersom något av krona eller klave inträffar, $p(A \cap B) = 0$ då de inte kan inträffa samtidigt. Sedan är $p(A|B) = p(A) = 0.5$ eftersom händelserna är oberoende av varandra. Om första kastet resulterade i klave har vi fortfarande samma chans att få krona på nästa kast. Om två händelser kan vara oberoende finns det förstås motsatsen att två händelser är beroende.

De flesta av oss har en intuition om begreppet beroende och om två händelser är beroende eller oberoende. Händelserna att det regnar ute idag och att jag slår knäet i bordet är oberoende. Vi tittar sen istället på två nya händelser A och B . A är händelsen att första kortet vi drar ur en kortlek är ett ess. B definierar vi som att dra två kort varav det andra kortet vi drar är ett ess. Eftersom vi har fyra ess i en vanlig kortlek bestående av 52 kort gäller:

$$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$p(B) = \frac{4}{51} \text{ under förutsättning att } A \text{ inte inträffar.}$$

Men dessa händelser är beroende, om A inträffar förändras sannolikheten för att B ska inträffa. Det följer därmed att $p(B|A) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$ eftersom det återstår 51 kort i kortleken då vi inte lägger tillbaka kort i poker. En viktig räkneregel följer för beroende händelser [2]

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A). \quad (3.1)$$

Motsvarande räkneregel för oberoende händelser är

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad (3.2)$$

eftersom det gäller att $p(B|A) = p(B)$ om A och B är oberoende. Sannolikheten att B ska inträffa förändras inte oavsett om A inträffar eller inte. Vi kan nu använda (3.1) för att beräkna sannolikheten att dra ett par i ess. Eftersom A var händelsen att första kortet är ett ess, B andra kortet gäller förstås att $A \cap B$ resulterar i ett par i ess. Så beräkningen blir:

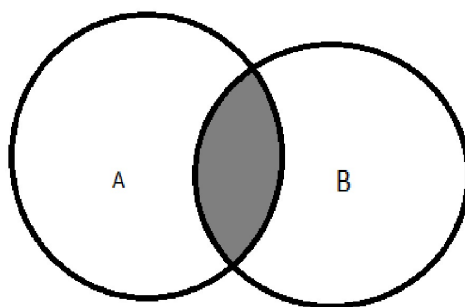
$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221} \approx 0,0045.$$

Så vi har ca 0,45% chans att dra ett par i ess.

Senare i genomgången av sannolikheter i Texas Hold'em dyker en annan viktig räkneregel kring mängder upp. Denna gäller sannolikheter för en union av två händelser $A \cup B$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B). \quad (3.3)$$

Varför det måste vara så här blir tydligt när vi studerar mängderna A och B i ett Venn-diagram.



Vi beräknar sannolikheten för att A eller B inträffar genom att addera sannolikheterna för att A respektive B inträffar. Men då har vi räknat det gemensamma gråa området, snittet $A \cap B$ två gånger så då måste vi subtrahera bort snittet en gång och därmed följer (3.3). Från (3.3) följer också att om händelserna A, B är oförenliga, det vill säga $A \cap B = \emptyset$, då gäller

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

som är till stor nytta när vi beräknar sannolikheter i Texas Hold'em. Detta eftersom det kan finnas gynnsamma utfall på flera olika sätt för att få en bra hand men det kommer bara en "flop, turn och river" (de tre faserna i Texas Hold'em då gemensamma kort visas). Det kommer inte två floppar samtidigt, därför är de olika utfallen oförenliga. Därmed kan vi addera sannolikheter utan att behöva subtrahera andra sannolikheter.

3.2 Hypergeometrisk fördelning

Hypergeometrisk fördelning beskriver dragning utan återläggning med två sorters föremål [1]. Till exempel kan vi ha en urna med vita kulor och röda kulor där de vita är av intresse. För poker kan vi se det som att kortleken innehåller två kategorier, eftertraktade kort för vår pokerhand samt kort som inte hjälper vår pokerhand. För att beräkna sannolikheten för hypergeometrisk fördelning ska vi först identifiera de vanliga beteckningarna. Vi sätter N som antal element i den hela mängden vi betraktar (antal kort i en kortlek). Antal element i den delmängd vi är intresserade av brukar betecknas m (antal knektar till exempel). Vi får då att sannolikheten att få k st knektar när vi drar n st kort ur en kortlek bestående av N kort som:

$$P(k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \quad (3.4)$$

Det kan vara knepigt att förstå (3.4) men egentligen fungerar den precis som enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen

$$\frac{\text{lyckade utfall}}{\text{totalt antal utfall}}.$$

Vi visar med ett exempel: vi drar tre kort ur en kortlek och hoppas att vi får två knektar. När vi sätter in våra siffror i (3.4) får vi:

$$p(JJx) = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{1}}{\binom{52}{3}}$$

där nämnaren i detta fall är alla möjliga kombinationer vi kan få när vi drar tre kort ur 52. Täljaren är antal lyckade utfall. Det finns fyra knektar i kortleken och vi vill dra två. Samtidigt ska vi då dra ett kort ur den mängd (48 kort) som inte är knektar.

4 Texas Hold'em

4.1 Spelgenomförande

Det populäraste pokerspelet i världen är Texas Hold'em[5]. Det spelas på kasinon, internet och visas ofta på tv. En runda går till så att samtliga spelare först får två egna kort. Sedan delas det ut fem kort på bordet som alla spelare får använda. Målet är att ur de sju korten (två egna och fem gemensamma) använda fem för att bilda den bästa pokerhanden. För att se rangordning av pokerhänder hänvisas läsaren till Bilaga 1. En spelrunda består av fyra satsningsrundor. En runda efter att samtliga spelare fått sina två kort. Nästa runda kommer efter att första tre korten på bordet visas ("the flop"). En runda efter fjärde ("the turn") och en efter femte kortet ("the river") visas. Under en satsningsrunda har första spelaren möjlighet att

1. Lägga sig, kasta sina kort och strunta i potten
2. Passa, behålla korten men inte höja insatsen
3. Satsa, höja insatsen i potten.

Efterföljande spelare har då val att antingen lägga sig, syna vilket innebär att spelaren matchar tidigare spelares insats eller satsa mer och höja insatsen ytterligare. Har föregående spelare passat finns även den möjligheten för efterföljande spelare. Om det efter den sista satsningsrundan efter att river-kortet visats fortfarande är minst två spelare med i spelet visar spelarna sina kort och den spelaren med bästa pokerhanden vinner potten [5]. Detta är grundläggande regler för Texas Hold'em, den intresserade läsaren får gärna själv läsa vidare mer noggrant på Pokerstars [5] eller annan källa för fullständiga regler.

4.2 Startgiv

Vad har vi då för sannolikheter för att få en bra starthand? I och med att en kortlek består av 52 kort och vi drar två kort är antalet möjliga händer talet $\binom{52}{2}$. Av alla dessa möjliga händer är förstås vissa bättre än andra, de ger bättre möjlighet att vinna potten. Två kort i samma färg som hänger ihop till exempel $6\heartsuit$ och $7\heartsuit$ har större chans att bli en bra hand än kombinationen $2\spadesuit$ och $7\diamondsuit$. I följande beräkningar utgår vi från vår egen situation som spelare och tänker endast på de två kort vi drar. Men viktigt att ha i bakhuvudet är att dessa sannolikheter gäller även för de andra motståndarna vid bordet.

4.2.1 Par

Den första eftertraktade starthanden vi beräknar är par, alltså två kort av samma valör, till exempel två 5:or. Eftersom det finns fyra kort med samma valör i kortleken finns det $\binom{4}{2} = 6$ möjliga kombinationer som ger ett par. Vi har 13 olika valörer, (2-A) så därför finns det $6 \times 13 = 78$ möjliga par.

Vad är då vår chans att få ett par från början? Genom klassisk sannolikhetsdefinition, antal lyckade utfall/alla möjliga utfall får vi

$$\frac{78}{\binom{52}{2}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}.$$

Sannolikheten för ett specifikt par kan vi beräkna på ett annat sätt nämligen chansen att från 52 kort dra just två ess t.ex. Detta motsvarar $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221}$ då det finns fyra ess i kortleken. Så vi har:

$$p(\text{Något Par}) = \frac{1}{17} = 0,0588235 \approx 5,9\%$$

$$p(\text{Specifikt Par}) = \frac{1}{221} = 0,0045249 \approx 0,45\%.$$

4.2.2 Kort i samma färg

En annan eftertraktad starthand med bra chans att utvecklas är när vi får två kort i samma färg [3]. Vad är då sannolikheten att vi kan få denna starthand? Egentligen tar vi inte hänsyn till ordning eftersom pokerspelet går under kombinationer istället för permutationer. Men för att enkelt förstå beräkningarna tittar vi nu på första respektive andra kortet. För att ha två kort i samma färg är färgen på första kortet oväsentligt eftersom det kan vara vilken av de fyra färgerna som helst. Andra kortet vill vi ha i samma färg. Då det återstår 51 kort i kortleken varav 12 i samma färg ger den klassiska sannolikhetsdefinitionen $\frac{\text{lyckade utfall}}{\text{totalt antal utfall}}$ att:

$$p(\text{Samma Färg}) = \frac{12}{51} = 0,2352941 \approx 23,5\%.$$

4.2.3 Ess-kung

Den kanske mest eftertraktade starthanden (utöver par i ess eller kung) är förmodligen ess-kung kombinationen. Eftersom det finns fyra ess och fyra kungar kan vi kombinera fram $4 \times 4 = 16$ olika kombinationer av ess-kung. Då det finns totalt $\binom{52}{2} = 1326$ olika möjligheter till startgiven gäller:

$$p(\text{Ess} - \text{Kung}) = \frac{16}{1326} = 0,0120664 \approx 1,2\%.$$

Sannolikheten att få ess-kung i samma färg är $\frac{4}{1326}$ eftersom det finns fyra färger och därför bara fyra kombinationer av ess-kung i samma färg.

$$p(\text{Ess-Kung samma färg}) = \frac{4}{1326} = 0,0030166 \approx 0,3\%.$$

4.2.4 Skräp

Pat Dittmar tar upp i sin bok [3] händer som han kallar "rags" fritt översatt trasor eller skräp. Det är händer som inte består av höga kort eller kort som har chans att bli en bra pokerhand. Den intresserade kan själv läsa mer men Dittmars beräkningar visar att dessa händer fås 4 av 5 gånger [3]. Det är alltså intressant att notera att det är sällan bra händer kommer och ännu mer sällsynt att flera spelare samtidigt får bra starthänder.

4.3 Floppen

"The flop" eller floppen på svenska är när de första tre gemensamma korten på bordet visas. Denna del tar upp sannolikheterna att förbättra de tre eftertraktade startgivarna (par, samma färg och ess-kung). Först beräknar vi antalet möjliga floppar, alltså av de 50 återstående korten, vilka möjliga kort kan komma när vi drar 3. Då $\binom{50}{3} = 19600$ finns alltså 19600 olika kombinationer.

4.3.1 Starthand: par

Låt oss betrakta denna starthand med TT (två kort av samma valör). Denna starthand kan förbättras till triss, kåk, fyrtal eller två par genom floppen.

Triss

Vi börjar med att beräkna möjligheten att få bara en triss. Då ska floppen innehålla ytterligare ett av de två kvarvarande kort av samma valör som det par vi sitter på innan floppen. Så vi ska räkna på hur många sätt vi kan få TT till $TTTxy$ ($x, y \neq T, x \neq y$) genom floppen.

Vi börjar med att beräkna möjligheterna av de andra två korten (dvs x, y) i floppen. Detta beräknas genom $\binom{48}{2} = 1128$. Vi subtraherade bort 2 från 50 eftersom det är 50 kort kvar i kortleken men 2 kort är av samma valör som det par vi startade med. Samtidigt vill vi inte ha ett till par av dessa 1128 möjliga händer för det i kombination med en triss blir en kåk vilket vi ska beräkna senare. Tidigare visade vi att det finns 78 möjliga parkombinationer av vilket vi nu drar bort 6 då vi redan sitter på en parkombination. Därför finns det $1128 - 72 = 1056$ möjliga kombinationer som tillsammans med ett av de två eftertraktade korten ger endast en triss. Men eftersom det är två kort kvar (av vår eftertraktade valör) finns det $2 \times 1056 = 2112$ möjliga floppkombinationer som ger endast en triss. Sannolikheten för att starthanden par blir en triss är därför

$$p(TTTxy) = \frac{2112}{19600} = \frac{132}{1225} = 0,1077551 \approx 10,8\%.$$

Kåk

För att få en kåk (består av en triss och ett par) från starthanden par TT , finns två möjligheter:

1. Att floppen ger ett annat par plus ett kort som fullbordar trissen tillsammans med startparet $TTTFF$

2. Eller att floppen ger en triss $TTFFF$.

För det första fallet, finns det 72 möjliga par kvar i kortleken och två kort som fullbordar trissen. Därför finns det $72 \times 2 = 144$ möjligheter att få en kåk genom första alternativet.

Samtidigt för det andra fallet, finns det totalt 48 möjliga trisskombinationer kvar. Eftersom vi har 12 valörer kvar utöver den valör vi själva sitter på hand med. För en triss på flopp gäller då att $\binom{4}{3} = 4$. Eftersom det är 12 valörer kvar $4 \times 12 = 48$. Därför är sannolikheten att starthanden par blir till en kåk

$$p(TTTFF) = \frac{(144+48)}{19600} = \frac{12}{1225} = 0,00979592. \approx 0,98\%.$$

Fyrtal

Att få till ett fyrtal innebär att de två kvarvarande kort av samma valör som startparet dyker upp i floppen i kombination med vilket annat kort som helst $TTTTx$ där $x \neq T$. Eftersom det finns 48 kort kvar ($52 - 2 - 2$) finns det alltså 48 möjliga kombinationer för kortet x , och därför finns det 48 olika möjligheter som ger ett fyrtal. Därför är sannolikheten att starthanden par blir till ett fyrtal

$$p(TTTTx) = \frac{48}{19600} = \frac{3}{1225} = 0,00244898 \approx 0,2\%.$$

Två par

Sista förbättringen innebär att få ihop två par. Då ska floppen innehålla ett annat par än den valör vårt startpar är samt ytterligare ett valfritt kort som inte heller är i samma valör som startparet $TTFFx$. Som vi tidigare visat finns det 72 möjligheter för att få paret FF . För kortet x finns det 48 möjligheter att välja mellan, av dessa subtraherar vi korten som matchar startparet som är 2 stycken, och korten som matchar de paret som dyker upp i floppen som är också 2 stycken. Det är alltså $48 - 2 - 2 = 44$ möjliga "tredjekort" i floppen som ger två par som pokerhand. Därför är antalet möjliga två pars händer $72 \times 44 = 3168$ och sannolikheten för att få två par från starthanden TT är

$$p(TTFFx) = \frac{3168}{19600} = \frac{198}{1225} = 0,16163265 \approx 16,2\%.$$

Startgiv	Genom floppen	Exempel	Sannolikhet	Procent
$7\heartsuit 7\spadesuit$	Triss	$7\heartsuit 7\spadesuit 7\diamondsuit 5\clubsuit 2\spadesuit$	0,1077551	10,7%
$7\heartsuit 7\spadesuit$	Kåk	$7\heartsuit 7\spadesuit K\heartsuit K\spadesuit K\diamondsuit$	0,0097959	1%
$7\heartsuit 7\spadesuit$	Fyrtal	$7\heartsuit 7\spadesuit 7\diamondsuit 7\clubsuit 3\spadesuit$	0,002449	0,2%
$7\heartsuit 7\spadesuit$	Två par	$7\heartsuit 7\spadesuit 4\diamondsuit 4\clubsuit 2\spadesuit$	0,1616327	16%

4.3.2 Kort i samma färg

För kort i samma färg är färg den bästa hand vi kan få efter floppen. Vi beräknar detta fall med räkneregler för beroende händelser (3.1). Om vi ser de tre korten i floppen som tre separata händelser är förstås dessa händelser beroende av varandra. Sannolikheten förändras för varje kort som läggs upp på bordet. För att få ihop en färg måste alla tre kort i floppen vara av samma färg som de två kort vi har på hand. Om vi låter A vara händelsen att första kortet är i samma färg, B andra kortet och C tredje kortet har vi följande

$$p(A) = \frac{11}{50}$$

$$p(B|A) = \frac{10}{49}$$

$$p(C|(A \cap B)) = \frac{9}{48}.$$

50 kort återstår i leken varav 11 i samma färg som korten på hand för $p(A)$ och sen följer de andra sannolikheterna. Med den tidigare givna räkneregeln för beroende händelser (3.1) kan vi beräkna sannolikheten för $p(A \cap B)$

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A)$$

$$p(A \cap B) = \left(\frac{11}{50}\right)\left(\frac{10}{49}\right)$$

$$p(A \cap B) = \frac{11}{245}.$$

Om vi låter $D = (A \cap B)$ kan vi använda (3.1) igen

$$p(D \cap C) = p(D)p(C|D)$$

$$p(A \cap B \cap C) = p(A \cap B)p(C|A \cap B)$$

$$p(A \cap B \cap C) = \left(\frac{11}{245}\right)\left(\frac{9}{48}\right)$$

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{33}{3920} = 0,0084184 \approx 0,8\%.$$

Vi hade förstås kunnat använda binomialkoefficienten istället. Det återstår 11 kort i kortleken av samma färg

$$\frac{\binom{11}{3}}{\binom{50}{3}} = 0,0084184 \approx 0,8\%.$$

Startgiv	Genom floppen	Exempel	Sannolikhet	Procent
7♥2♥	Färg	7♥2♥8♥5♥A♥	0,0084184	0,8%

4.3.3 Ess-kung

För den mest eftertraktade starthanden finns möjlighet att floppa fram stege, höga par/triss/kåk och om vi har ess-kung i samma färg även färg eller till och med färgstege. Vi har nyss be-

handlat färg så vi tar inte upp den möjligheten här. Vi börjar med stege.

Stege

För denna hand vill vi ha en dam, en knekt och en tia som ger femkortshanden $AKQJ10$ inte i samma färg (Ess-Kung på hand behöver inte vara i samma färg). Det är enklast att se detta som hypergeometrisk fördelning. Vi vill ur 4 kvarvarande damer dra en. På samma sätt vill vi dra fram endast en av knektarna respektive en av tiorna

$$p(AKQJ10) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{50}{3}}$$

$$p(AKQJ10) = \frac{64}{19600} = 0,0032653 \approx 0,3\%.$$

För färgstege finns endast en flopp av alla $\binom{50}{3}$ möjliga som ger färgstege eftersom damen, knekten och tian dessutom måste vara i rätt färg $A\heartsuit K\heartsuit Q\heartsuit J\heartsuit 10\heartsuit$. Därför följer att sannolikheten att floppen resulterar i en färgstege, en "Royal Flush" är:

$$p(Royal) = \frac{1}{\binom{50}{3}}$$

$$p(Royal) = \frac{1}{19600} = 0,000051 \approx 0,005\%.$$

Kåk

För att få en kåk finns det möjlighet att floppen ger:

1. Ett ess och två kungar
2. Två ess och en kung.

Sannolikheten är lika för de två fallen. Det återstår 3 A och 3 K i kortleken. Vi vill dra 1 från ena gruppen och 2 från andra. Beräkningen är

$$p(AAAKK) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{50}{3}} = \frac{9}{19600} = 0,0004591 \approx 0,04\%.$$

Vi får en kåk alltså om floppen ger händelse AAK eller händelsen AKK . Dessa händelser är oförenliga, de kan inte inträffa samtidigt. Därför är $p(AAK \cap AKK) = 0$. Vi får en kåk om en av händelserna inträffar. Vi använder därför räkneregeln (3.3) att $p(AAK \cup AKK) = p(AAK) + p(AKK) - p(AAK \cap AKK)$. Därför är sannolikheten för att få kåk lika med

$$p(AAKKK) = \frac{9+9}{19600} = 0,0009184 \approx 0,09\%.$$

Fyrtal

Med startgiven Ess-kung finns chans till fyrtal om floppen ger bara ess eller bara kungar. Då det återstår 3 ess och 3 kungar i kortleken måste samtliga komma i floppen. Vi har två floppar av 19600 möjliga som ger ett fyrtal. Därför är sannolikheten

$$p(AAAAK) = \frac{2}{19600} = 0,000102 \approx 0,01\%.$$

Triss

För att floppen ska resultera i en triss vill vi få två A eller två K samt ett tredje kort som inte är A eller K . Så vi får $AAAKx$ eller $AKKKx$. Vi behandlar fallet $AAAKx$ först. Det återstår 3 ess i kortleken varav vi vill dra två. Samtidigt kan inte floppen innehålla det sista esset eller någon kung för då får vi fyrtalet eller kåk, så $x \neq K, A$. Därför vill vi dra ett kort av de 44 återstående korten som inte innehåller ess eller kung. Vi drar ett kort från 44 då det är 48 kort kvar totalt, men vi vill inte dra någon av de tre kungarna eller det återstående esset ($48 - 3 - 1$)

$$p(AAAKx) = \frac{\binom{3}{2} \binom{44}{1}}{\binom{50}{3}}.$$

En triss kan förstas vara antingen i ess eller kung. Vi kan återigen använda (3.3) och addera sannolikheterna. Eftersom vi inte kan få triss i ess och kungar samtidigt (två av tre kort i floppen måste vara ess/kungar för att bilda en triss) gäller att $p(AAA \cap KKK) = 0$. Så

$$p(AAAKx \cup AKKKx) = 2 \times \frac{\binom{3}{2} \binom{44}{1}}{\binom{50}{3}} = 0,0134694 \approx 1,3\%$$

Två par och par

Då vi tidigare sett en del om chanserna till par och två par tar denna del endast upp sannolikheten att få två par i Ess-Kung samt sannolikheten att få par i A eller K . För två par vill vi floppa fram ett ess, en kung samt ett kort som inte är ess eller kung, dvs $x \neq K, A$. Därför gäller att sannolikheten för två par är

$$p(AAKKx) = \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{44}{1}}{\binom{50}{3}} = 0,0202041 \approx 2\%.$$

För ett par i ess eller kung vill vi dra ett kort ur de tre+tre=sex kvarvarande essen och kungarna i kortleken. Sedan drar vi två kort ur de 44 kort som är kvar som inte är ess eller kung. Men vi vill inte ha något par. Då det finns 6 par per kvarvarande valör får vi subtrahera 6×11 (11 då 2-Q är 11 stycken valörer)

$$p(AA \cup KK) = \frac{\binom{6}{1} \binom{44}{2} - 66}{19600} = 0,2862755 \approx 28,6\%.$$

Startgiv	Genom Floppen	Exempel	Sannolikhet	Procent
$A\clubsuit K\heartsuit$	Stege	$A\clubsuit K\heartsuit Q\diamondsuit J\spadesuit 10\spadesuit$	0,0032653	0,3%
$A\heartsuit K\heartsuit$	Färgstege	$A\heartsuit K\heartsuit Q\heartsuit J\heartsuit 10\heartsuit$	0,000051	0,005%
$A\clubsuit K\heartsuit$	Fyrtalet	$A\clubsuit A\heartsuit A\spadesuit A\diamondsuit K\heartsuit$	0,000102	0,01%
$A\clubsuit K\heartsuit$	Kåk	$A\clubsuit A\diamondsuit K\heartsuit K\clubsuit K\spadesuit$	0,0009184	0,09%
$A\clubsuit K\heartsuit$	Triss	$A\clubsuit 3\diamondsuit K\heartsuit K\clubsuit K\spadesuit$	0,0134694	1,3%
$A\clubsuit K\heartsuit$	Två par	$A\clubsuit A\diamondsuit K\heartsuit K\clubsuit 8\spadesuit$	0,0202041	2%
$A\clubsuit K\heartsuit$	Par	$A\clubsuit A\diamondsuit K\heartsuit 3\clubsuit 5\spadesuit$	0,2862755	28,6%

4.4 Efter floppen

I detta läget av en spelomgång återstår två kort som fortfarande inte kommit upp på bordet. Eftersom det är 47 kort kvar i kortleken och vi väljer två finns det $\binom{47}{2} = 1081$ olika kombinationer som kan komma genom turn och rivern. Både turn och rivern är ett kort i taget som kommer till skillnad från floppen där tre kort visas på en gång. Därmed är det lite enklare att beräkna sannolikheten att förbättra sin hand efter turn exempelvis. I och med att vi vet hur många kort som är kvar och hur många lyckade utfall så blir det enkelt att ställa upp enligt klassiska sannolikhetsdefinitionen:

$$\frac{\text{lyckade utfall}}{\text{totalt antal utfall}}.$$

Som exempel kan vi ta att få en färg på rivern. Vi sitter med en hjärter på hand och tre av fyra kort på bordet är hjärter. Därmed finns det 9 stycken hjärter kvar i kortleken och $52-2-4=46$. Så sannolikheten att träffa en färg är $p(\text{Färg}) = \frac{9}{46} = 0,1956521 \approx 19,5\%$.

I denna del kommer det presenteras några intressanta händer utifrån sannolikheten att träffa rätt på antingen turn eller river. Vi har fyra kort och behöver ett eftertraktat kort till för att fullborda pokerhanden. Det finns förstås även partier då man som spelare behöver två kort efter floppen för att få ihop sin hand. På engelska kallas dessa situationer för "runner-runner" att man behöver rätt kort både på turn och rivern [3].

Fyra kort i samma färg

I detta läge har vi fått ihop fyra kort i samma färg efter floppen och saknar därför ett kort i samma färg. Vi ser först på situationen att ett av turn-och riverkortet kommer vara i samma färg och ett inte i samma färg. Det återstår nio kort i kortleken som är i samma färg. Av dessa vill vi dra ett. Sen drar vi ett kort från de 38 som inte är i samma färg. Alltså är sannolikheten $\frac{\binom{9}{1}\binom{38}{1}}{\binom{47}{2}}$. Till denna adderar vi sannolikheten att båda korten är i samma färg nämligen $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{47}{2}}$. Så total sannolikhet är:

$$p(\text{Färg}) = \frac{\binom{9}{1}\binom{38}{1} + \binom{9}{2}}{\binom{47}{2}} = 0,3496762 \approx 35\%.$$

Så det är mer än en tredjedels chans att få ihop en färg efter floppen om vi har fyra kort i samma färg.

Open Ended Straight draw

Det finns inte någon riktigt bra översättning för denna hand men vad som menas är när vi har fyra kort i en följd och saknar ett kort i någon riktning för att få ihop en stegen. Till exempel att vi har följden 6789 och kan få en stegen både genom en 10:a eller en 5:a. Eftersom vi har två kort per färg som fullbordar stegen och fyra färger finns därmed åtta kort totalt i kortleken som vi söker för vår stegen. Precis som fallet med färg tittar vi först på när ett av dessa åtta kort kommer på turn eller rivern $\frac{\binom{8}{1}\binom{39}{1}}{\binom{47}{2}}$. Sen adderar vi sannolikheten att både

turn och river är något av de åtta korten som är $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{47}{2}}$. Så total sannolikhet är:

$$p(\text{Stege}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{39}{1} + \binom{8}{2}}{\binom{47}{2}} = 0,3145236 \approx 31,5\%.$$

Att tänka på

Denna del som tagit upp sannolikheter är i hög grad idealiserad. Vi har behandlat situationen som om vi är ensamma vid pokerbordet och drar kort från kortleken. Vid ett riktigt spelparti finns förstås minst en spelare till. Detta påverkar sannolikheterna eftersom vi inte vet vilka kort motståndaren/na har. Det kan vara att de har kort på sin hand som skulle hjälpa oss. Detta minskar sannolikheten att vi träffar vår sökta hand. Skulle de inte ha de sökta korten på hand ökar sannolikheterna lite grann eftersom det är färre kort kvar i kortleken än vad beräkningarna ovan använt.

5 Analys Texas Hold'em

Vi kommer nu använda informationen för att beräkna vinstchanser i pokerpartier. Denna del består av två analyser. Ett "öppet" parti där vi känner till samtliga tre spelares kort på hand. Sedan följer ett parti med två spelare men där vi endast känner till vår egen hand.

5.1 Öppet parti

Vi studerar nedan fallet med de tre spelarna Johanna, Jakob och Larry. Samtliga spelares kort är kända för oss så vi kan beräkna sannolikheterna för alla tre spelarna.

5.1.1 Utgångsläge

Spelarna startar med följande kort på hand.

Spelare Johanna: $A\clubsuit K\clubsuit$

Spelare Jakob: $A\spadesuit 2\spadesuit$

Spelare Larry: $10\heartsuit 8\heartsuit$

Av dessa starthänder vet vi sedan tidigare att Johanna som sitter på ess-kung och dessutom i samma färg har det mest gynnsamma utgångsläget då hon har höga kort och i samma färg. Spelarna Jakob och Larry spelar med händer som John Vorhaus nämner som nybörjarfällor i sin bok om poker [7]. Detta eftersom den vanligaste förbättringen genom flopp, turn och river är att få ett par. Larry skulle isåfall som bäst få par i 10 med 8 som sidokort ("kicker"). Spelaren Jakob har förvisso ett ess men samtidigt en väldigt svag kicker vilket vana pokerspelare alltid undviker.

Vi vet nu sedan tidigare (del 4.3.2 kort i samma färg) att samtliga spelare har chans att träffa en färg direkt på floppen. Sannolikheten är lite förändrad då det är färre kort kvar i kortleken. Sannolikheten att träffa färg är

$$p(\text{färg}) = \frac{\binom{11}{3}}{\binom{46}{3}} = 1,1\%$$

eftersom alla tre spelarna har olika färger men två kort i samma färg. Vi har dessutom gått igenom några sannolikheter för Johannas starthand. Här kan vi notera att vi redan kan beräkna en något förändrad sannolikhet för att vi vet att Jakob också har ett ess. Nedan beräknar vi sannolikheten att Johanna i floppen förbättrar sin hand genom att ess- eller kungskort dyker upp

$$p(\text{förbättring } A \cup K) = \frac{\binom{5}{1}\binom{41}{2} + \binom{5}{2}\binom{41}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{46}{3}} = 29,8\%.$$

Eftersom det återstår totalt 46 kort i kortleken varav 5 eftertraktade kort (3 kungar och 2 ess) har vi tre gynnsamma fall för Johanna. Att det dras ett kort från de 5, två eller att alla tre kort i floppen är ess eller kungar. Vi ser att det finns en bra chans (29,8%) att Johanna förbättrar sin hand med hjälp av kungar eller ess.

Samma chans gäller för Jakob med skillnaden att han förbättrar sin hand med hjälp av ess och tvåor. Eftersom kungar rankas högre än tvåor är det fördel Johanna.

För Larry ändras sannolikheten lite grann eftersom det finns 6 gynnsamma kort i kortleken (3 tior och 3 åttor)

$$p(\text{förbättring } 10 \cup 8) = \frac{\binom{6}{1}\binom{40}{2} + \binom{6}{2}\binom{40}{1} + \binom{6}{3}}{\binom{46}{3}} = 34,9\%.$$

Så det är lite större chans att Larry kan förbättra sin hand men samtidigt ska vi ha i åtanke att par i tior är svagare än par i ess eller kung. Vi betraktar nu utfallet av ett slumpförsök med dessa händer och en blandad kortlek.

5.1.2 Floppen visas

Johanna: A♣K♣

Jakob: A♠2♠

Larry: 10♥8♥

På Bordet: 4♦J♦10♠

Efter denna flopp kan vi först notera att chanserna till färg försvunnit för Johanna och Larry. Det återstår en liten chans att Jakob kan få ihop en färg om både turn och river skulle vara kort i spader. Som korten på bordet ligger just nu skulle Larry vinna partiet med par i tior. Vi studerar vad som krävs för att Johanna eller Jakob skulle vinna.

För Jakob är situationen knepig, det räcker inte med att ess skulle dyka upp på turn eller river för Johanna har ett bättre sidokort med sin kung. Skulle en 2:a dyka upp räcker inte det heller då par i 10:or är bättre än par i 2:or. Jakob är beroende av rätt kort på både turn och river, en såkallad "runner-runner" situation [3]. Möjliga händer Jakob kan få för att vinna partiet är två par, triss, stege och färg under förutsättning att de andra spelarna inte förbättrar sina händer. Vi kan i tabellen på nästa sida utläsa de sannolikheter för Jakob att träffa sina respektive händer genom turn- och riverkortet.

Vinstgivande hand Jakob	Exempel kort på turn och river	Sannolikhet
Två Par	$2\heartsuit A\spadesuit$	$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{43}{2}} \approx 0,7\%$
Triss	$2\heartsuit 2\spadesuit$	$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{43}{2}} \approx 0,3\%$
Stege	$3\clubsuit 5\spadesuit$	$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{43}{2}} \approx 1,8\%$
Färg	$J\spadesuit 6\clubsuit$	$p = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{43}{2}} \approx 5\%$

Täljarna i kolonnen längst till höger består av binomialkoefficienter som är det antal av de eftertraktade korten som är kvar i kortleken. Till exempel vet vi att det bara finns kvar två A (högst upp) eller (längst ner) 10 stycken spader. Tabellen innehåller nu bara de händer som Jakob vinner med. Det skulle till exempel även kunna komma två A så Jakob har en triss i A. Men då får även Johanna en triss i A med ett bättre sidokort i K och Johanna vinner. Möjlighet till stege AKQJ10 finns också om KQ kommer på turn och river. Men då får även Johanna stege, i det fallet skulle potten splittas mellan Jakob och Johanna.

Eftersom händelserna är oförenliga (de kan inte inträffa samtidigt) beräknar vi total vinstchans för Jakob som summan av sannolikheterna för de respektive händerna. Därmed är Jakobs totala vinstchans

$$0,7\% + 0,3\% + 1,8\% + 5\% = 7,8\%$$

vilken är ganska liten chans.

För Johanna är situationen mer gynnsam då hon fortfarande kan slå Larrys par i 10:or om det kommer ett A eller en K på turn eller river. Vi ser först på hennes sannolikheter och kommenterar sedan.

Vinstgivande hand Johanna	Exempel kort på turn och river	Sannolikhet
Par	$K\heartsuit 2\spadesuit$	$p = \frac{\binom{5}{1}\binom{36}{1}-9}{\binom{43}{2}} \approx 19\%$
Två par	$K\heartsuit 4\clubsuit$	$p = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\binom{6}{1}-2}{\binom{43}{2}} \approx 3,8\%$
Triss	$K\spadesuit K\heartsuit$	$p = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{43}{2}} \approx 0,4\%$
Stege	$Q\heartsuit 6\spadesuit$	$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{1}+\binom{4}{1}-9}{\binom{43}{2}} \approx 15,6\%$

Johanna kan vinna med ett par i A eller K. Om vi drar ett av de fem återstående A och K i kombination med de 36 återstående korten som inte är 10:or (då får Larry en triss). Men vi subtraherar också en term 9 eftersom det finns en spader K kvar bland de eftertraktade korten samt 9 stycken spader i de 36 andra korten. Skulle vi hamna i något av de 9 fallen skulle Jakob vinna med en färg.

För två par kan Johanna vinna antingen med två par i A och K eller ett par i A eller K samt ett par i J eller 4. Återigen får vi subtrahera fallet med två spader. För triss är sannolikheten utan krångligheter, antingen dra de två återstående A eller två av tre återstående K i kortleken. För stege räcker det med minst en Q (vi adderar även fallet att både turn- och riverkortet är Q därav $\binom{4}{2}$) och dra ett kort från de återstående 39 som inte är K för då får

även Jakob en stege och vinsten delas så vi får dra ett kort från $39-3=36$ återstående kort. Men vi får återigen subtrahera bort fallen som ger två spader på turn och river. Med två återstående kort har Johanna den totala vinstchansen

$$19\% + 3,8\% + 0,4\% + 15,6\% = 38,8\%$$

vilket är ett bättre läge än Jakobs.

5.1.3 Turn kortet visas

Johanna: $A\clubsuit K\clubsuit$

Jakob: $A\spadesuit 2\spadesuit$

Larry: $10\heartsuit 8\heartsuit$

På Bordet: $4\diamondsuit J\diamondsuit 10\clubsuit 2\heartsuit$

I detta läge har Larry fortfarande bäst hand. Jakob kan inte längre träffa färg men har fått en 2:a på bordet och har par men lägre än Larrys.

Jakob har alltså att hoppas på att ytterligare en 2:a kommer på river eller ett A. Då vinner han antingen med en triss eller Två par. Jakob har följande sannolikheter:

$$p(222AJ) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{42}{1}} \approx 4,8\%$$

$$p(22AAJ) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{42}{1}} \approx 4,8\%$$

$$\text{Total chans Jakob} = 4,8 + 4,8 = 9,6\%.$$

För Johanna måste det komma K eller Q på river. Med K vinner hon genom högsta paret, med Q en stege. Därför gäller:

$$p(AKKJ10) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{42}{1}} \approx 7,1\%$$

$$p(AKQJ10) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{42}{2}} \approx 9,5\%$$

$$\text{Total chans Johanna} = 7,1 + 9,5 = 16,6\%.$$

5.1.4 River kortet visas

Johanna: $A\clubsuit K\clubsuit$

Jakob: $A\spadesuit 2\spadesuit$

Larry: $10\heartsuit 8\heartsuit$

På Bordet: $4\diamond J\diamond 10\clubsuit 2\heartsuit 6\clubsuit$

Resultatet av detta parti är alltså att Larry vinner. Larry hade redan bäst chans efter floppen och även turnkortet. Eftersom någon av de tre spelarna kommer vinna kan vi beräkna sannolikheten för att Larry vinner genom att ta och subtrahera de andra spelarnas chanser från 1

Efter floppen: $p(W - Larry) = 1 - 0,078 - 0,388 = 0,534 = 53,4\%$

Efter Turn: $p(W - Larry) = 1 - 0,096 - 0,166 = 0,738 = 73,8\%$.

5.2 Stängt parti

Vi studerar den här gången spelarna Johanna och Jakob . Denna gång känner vi endast till Jakobs kort. Detta är förutsättningarna:

Johanna: XY , där X, Y är godtyckliga kort i en kortlek

Jakob: $4\heartsuit 5\clubsuit$

Denna starthand Jakob börjar med är något som skulle klassificeras som "skräp" enligt Pat Dittmar [3]. Eftersom vi inte känner till Johannas kort går vi direkt till läget att alla fem kort på bordet visats och analyserar därifrån.

Johanna: XY

Jakob: $4\heartsuit 5\clubsuit$

På Bordet: $Q\diamond J\spadesuit 5\spadesuit 7\heartsuit K\clubsuit$

Vi ser att Jakob har ett par i 5:or. Men detta är det svagaste paret av de möjliga par som kan kombineras med korten på bordet. Vi visar i tabellen på nästa sida de möjliga kort Johanna kan ha på hand som ger henne en bättre pokerhand än Jakobs par i 5:or.

Vinst Johanna	Ex kort på hand	Tillsammans med kort på bord	Sannolikhet
Stege	$A\heartsuit 10\diamonds$ alt $10\heartsuit 9\clubsuit$	$A\heartsuit 10\diamonds Q\diamonds J\spadesuit K\clubsuit$	$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} \times 2}{\binom{45}{2}} \approx 3,2\%$
Triss	$Q\spadesuit Q\clubsuit$	$Q\spadesuit Q\clubsuit Q\diamonds$	$p = \frac{\binom{3}{2} \times 4 + \binom{2}{2}}{\binom{45}{2}} \approx 1,3\%$
Två par	$K\spadesuit 7\diamonds$	$K\spadesuit K\clubsuit 7\diamonds 7\heartsuit$	$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1} \times 6 + \binom{2}{1}\binom{3}{1} \times 4}{\binom{45}{2}} \approx 7,9\%$
Pocket par	$8\diamonds 8\spadesuit$	Inga	$p = \frac{6 \times 5}{\binom{45}{2}} \approx 3,0\%$
Par (7,J,Q,K)	$Q\spadesuit 2\clubsuit$	$Q\spadesuit Q\diamonds$	$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{31}{1} \times 4}{\binom{45}{2}} \approx 37,6\%$
Par 5:or kicker A	$5\heartsuit A\spadesuit$	$A\spadesuit 5\heartsuit 5\spadesuit$	$p = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{45}{2}} \approx 0,8\%$

Vi går igenom sannolikheterna i tur och ordning. Det återstår 45 kort som inte är kända ty $52 - 2 - 5 = 45$. För *stege* ser vi att det finns möjligheter genom $A, 10$ alternativt $10, 9$. Därför gäller det att Johanna från de 45 kvarvarande korten dragit en av fyra A respektive en av fyra 10 . Samma sannolikhet gäller för fallet med $10, 9$ varför täljaren innehåller faktor 2. För *triss* finns möjligheten att Johanna har två av en valör på hand t.ex. två Q . För valören 5 vet vi att det gäller $\binom{2}{2}$, alla de andra valörerna på bordet gäller $\binom{3}{2}$ och därför finns en faktor 4 i täljaren. Handen *två par* kan kombineras antingen med par i 5:or och något par av de andra fyra valörerna ($Q, J, 7, K$) på bordet. Det är därför andra termen i täljaren innehåller en faktor fyra eftersom vi kan kombinera på fyra sätt. Första termen innehåller faktor sex eftersom vi vill kombinera ihop två par från fyra möjliga ($\binom{4}{2} = 6$).

”Pocket par” är det uttryck som används om ett par en spelare har på hand utan att kombinera med de gemensamma korten på bordet. I detta fall skulle Johanna vinna om det är någon av de fem valörer ($6, 8, 9, 10, A$) som är större än 5 men inte ligger på bordet (då hade Johanna haft en triss). Vi vet att det finns sex kombinationer av samtliga par (se del 4.2 par) samt 5 valörer så täljaren är 5×6 . För ett par ($7, J, Q, K$) gäller att dra en av tre återstående i valören samt ett av 31 kort bland de återstående 45 som inte är $7, J, Q, K$. Det är 31 kort då vi först tar $45 - 3$ (om vi ska dra tex. en Q .) Då vill vi inte heller ha någon av de 9 återstående $7, J, K$ eller de 2 återstående 5:orna, så $45 - 3 - 9 - 2 = 31$. Eftersom det är 4 valörer multipliceras faktorn 4 i täljaren. Slutligen kan Johanna vinna om hon har en 5:a samt ett bättre sidokort än Jakobs K (som är på bordet) nämligen A . Då ska hon ha en av två återstående 5:or samt ett av fyra A .

Om vi summerar sannolikheterna får vi

$$3,2 + 1,3 + 7,9 + 3,0 + 37,6 + 0,8 = 53,8\%$$

så Johanna har större chans att vinna än Jakob. I den aktuella given visade det sig att Johans X, Y var $Q\spadesuit 7\diamonds$. Alltså hade Johanna två par som skulle vunnit över Jakobs par i 5:or.

6 Slutsatser

Från den andra analysen kan vi dra slutsatsen att även om vi inte känner till motståndarens kort kan vi ändå beräkna sannolikheter för hur ”stark” vår pokerhand är jämfört med möjliga händer motståndaren sitter på. Utan att känna till Johannas hand ger matematik och sannolikhet svaret att Jakob borde förlora fler gånger än han vinner i den aktuella given. Den öppna analysen visar hur vi hela tiden kan anpassa sannolikhetsfördelningen efter den nya informationen (nya kort på bordet). Men den är inte speciellt verklighetstrogen i den meningen att en pokerspelare aldrig har information om de andra spelarnas kort. Om vi känner till alla kort förlorar vi karaktären på pokerspelet, att spelet handlar om beslutstagande med ofullständig information [7].

Så till vilken nytta är detta arbete som utgått mycket från att informationen är känd? Jo som Chen och Ankenman [2] påpekar att matematiken alltid finns där. Det kan vara lätt och frestande ibland att tycka att siffror ljuger. Vi tar det öppna partiet som exempel. Jakob hade bara 7,8% chans till vinst efter floppen vilket omvänt innebar över 90% chans till förlust. Hade han ändå vunnit skulle det i mångas ögon betraktats som ett mindre mirakel eftersom många människor idag tar över 90% sannolikt som för givet, som 100%. Därför är det viktigt att se matematik som ett hjälpmedel i pokerspelandet men beslutstagandet påverkas av mer än matematik.

En viktig del av poker som inte tagits upp i detta arbete är vadslagning. Detta påverkar spelaren förmodligen mer än sannolikhetsläran då flera pokerparti aldrig kommer till situationen att alla fem kort ligger på bordet och att spelarna visar sina kort. Väldigt mycket psykologiska aspekter kommer in i detta som är svårt för en matematiker att analysera matematiskt. Vadslagning eller förväntad vinst i Texas Hold'em eller andra pokerspel är något som skulle kunna studeras i framtida arbeten.

7 Referenser

- [1] Britton, Tom & Garmo, Hans (2002). *Sannolikhetslära och statistik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- [2] Chen, Bill & Ankenman, Jerrod (2006). *The mathematics of poker*. 1. ed. Pittsburgh, Pa.: ConJelCo LLC.
- [3] Dittmar, P. (2008). *Practical Poker Math: Basic Odds and Probabilities for Hold 'em and Omaha*. ECW Press, Canada.
- [4] Nationalencyklopedin, *Poker*. <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/poker> (hämtad 2016-08-29).
- [5] Pokerstars, (2016). *Texas Hold'em* <https://www.pokerstars.eu/se/poker/games/texas-holdem/> (hämtad 2016-09-05).
- [6] Tambour, T. (2005). *Kombinatorik*. Matematiska institutionen, Stockholms universitet.
- [7] Vorhaus, John & Duke, Annie (2011). *Decide to Play Great Poker: A Strategy Guide to No-Limit Texas Hold'em*. Huntington Press. USA.

8 Bilagor

Bilaga 1 rangordning av pokerhänder

Färgstege	3♥ 4♥ 5♥ 6♥ 7♥	Består av fem kort i följd och i samma färg. Har två spelare färgstegar vinner den med högst stege (ess högst)
Fyrtal	3♥ 3♦ 3♣ 3♠ A♥	Fyra kort av samma valör. Om två spelare har samma fyrtal vinner den med högst sidokort ("kicker")
Kåk	3♥ 3♦ 3♣ 7♥ 7♠	Består av en triss och ett par. Har två spelare kåk vinner den med högst triss och är trissen samma är det högst rankade paret.
Färg	3♥ 5♥ 8♥ J♥ A♥	Fem kort i samma färg. Har två spelare färg vinner den med högst kort i färgen, är detta lika gäller näst högst kort osv.
Stege	3♥ 4♠ 5♥ 6♦ 7♣	Fem kort i en följd. Har två spelare stege vinner den med högst kort i stegen.
Triss	3♥ 3♠ 3♣ 2♥ 8♦	Tre kort i samma valör. Har två spelare samma triss vinner den med högst sidokort. Har två spelare triss vinner annars den högre trissen
Två par	8♥ 8♣ 3♦ 3♠ A♥	Som namnet antyder, handen består av två par. Har två spelare två par jämför man först det högre paret, den med högre par vinner. Är detta lika jämför man de lägre paren. Är det fortfarande lika vinner den med högst sidokort
Par	3♥ 3♠ 2♥ 7♣ 5♠	Består av ett par. Har två spelare par vinner det högre paret. Är det samma par kollar man på högst sidokort