SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Symmetriska polynom

av

Johanna Falkenback

2017 - No 1

Symmetriska polynom

Johanna Falkenback

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Christian Gottlieb

2017

Sammanfattning

Symmetriska polynom är polynom som inte förändras om man byter plats på variablerna. En viktig huvudsats inom teorin för symmetriska polynom är att de alltid går att skriva om i de så kallade elementära symmetriska polynomen. Vi kommer att presentera metoder för hur det kan gå till. Vi skall mer ingående studera symmetriska polynom som är potenssummor och hur dessa kan uttryckas i de elementära symmetriska polynomen med Newtons identiteter. Uppsatsen leder till användbara allmänna metoder.

Innehåll

1 Inledning

Den här uppsatsen handlar om *symmetriska polynom* och hur dessa kan uttryckas i de *elementära symmetriska polynomen.* Ett symmetriskt polynom är ett polynom som inte förändras om man byter plats på variablerna. Detta är fundamentalt när vi vidare studerar hur symmetriska potenssummor kan uttryckas i de *elementära symmetriska polynomen*, alias *Newtons identiteter.*

Uppsatsen kommer att behandla polynom i flera variabler. Först ett kapitel om två variabler följt av ett kapitel i tre variabler och därefter i ett avslutande kapitel kommer vi redogöra för n variabler. Varje kapitel kommer att presentera avsnitt om elementära symmetriska polynom och Newtons identiteter. Utöver detta kommer vi i kapitel två och tre även att beräkna summor av negativa potenser av variablerna, rubricerat Omvänt polynom

Mer ingående kommer avsnitten om elementära symmetriska polynom presentera metoder för hur man givet ett symmetriskt polynom skriver om det i de elementära. Avsnitten om Newtons identiteter kommer att presentera hur summan s_n kan beräknas med rekursionsformler och mer detaljerat, i kapitlet om två variabler, utreda utfallens mönster. I avsnitten om omvända polynom visar vi att rötterna till de omvända polynomet är inverterade värden av ursprungspolynomet. Vi tillämpar det på summor av potenser med negativa exponenter.

Utformningen av uppsatsen har till viss del influerats av boken *"Uncommon mathematical excursions: Polynomia and related realms"* av Dan Kalman (2009). Därifrån är begreppen och resultaten om *Newtons identiteter* hämtade. I övrigt har jag tillsammans med min handledare till stora delar utformat resonemangen själv i synnerhet avsnitt 3.1 och 4.1 där vi bevisar den välkända satsen att alla symmetriska polynom kan skrivas som polynom i de elementära symmetriska polynomen samt utredningen om summan s_n i två variabler.

Jag skulle vilja rikta ett stort tack till min handledare Christian Gottlieb, inte minst för hans expertis utan även för hans stöd och entusiasm som sammantaget fått mig motiverad till denna utmaning.

Trevlig läsning!

2 Kapitel 2

Vi kommer i detta kapitel att presentera symmetriska polynom i två variabler. Kapitlet kommer att behandla *de elementära symmetriska polynomen*, *Newtons identiteter* och *omvänt polynom*. Låt oss först undersöka sambandet mellan rötter och koefficienter.

Polynomet $f(t) = t^2 - at + b$ med rötterna x och y kan enligt faktorsatsen faktoriseras enligt

$$f(t) = (t - x)(t - y)$$

Vid en utveckling av $f(t)$ ser vi att det finns ett samband mellan rötterna och koefficienterna till polynomet.

$$f(t) = t^2 - (x + y)t + xy$$

Det vi ser är att

$$\begin{cases} x + y & = a \\ \quad xy & = b \end{cases}$$

Koefficienterna är bestämda av rötterna. Det här sambandet mellan rötter och koefficienter till ett polynom uttrycks enklast med *elementära symmetriska polynom.*Vi kommer att använda beteckningarna σ_1 och σ_2 där

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y \\ \quad \sigma_2 = xy \end{cases}$$

Nu kan vi skriva polynomet $f(t)$ uttryckt med σ_1 och σ_2

$$f(x) = x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2$$

Att det här fungerar beror på att $f(t)$ är *symmetriskt* i x och y. Innan vi går vidare med de elementära symmetriska polynomen behöver vi veta vad vi menar med ett symmetriskt polynom. Vi gör följande definition.

Definition 2.1
Ett symmetriskt polynom i två variabler x, y är ett polynom som inte förändras om man byter plats på x och y. Exempelvis är polynomet $x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y$ symmetriskt men $x^3 - y^3$ inte symmetriskt.

2.1 Elementära symmetriska polynom

Symmetriska polynom med heltalskoefficienter av två variabler, x och y kan skrivas om som polynom i de elementära symmetriska polynomen. Vi ska i några exempel visa hur det går till. Vi börjar med homogena polynom.

Definition 2.1.1
Polynomet $p(x, y)$ är homogent om alla termer har samma totala grad.

Definition 2.1.2

$$\begin{cases} \sigma_1 &= x + y \\ \sigma_2 &= xy \end{cases} \quad \textit{är elementära symmetriska polynom i } x \textit{ och } y.$$

Exempel 2.1.1

1. $x^3y^2 + x^2y^3 = (xy)^2 \cdot (x + y) = \sigma_2^2 \cdot \sigma_1$

2. $xy^3+x^3y = xy(y^2+x^2) = \sigma_2(y^2+x^2) = \sigma_2((y+x)^2-2xy) = \sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2) = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2$

3. $x^4y^5 + x^5y^4 = (xy)^4(x + y) = \sigma_2^4 \cdot \sigma_1$

4. $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = \sigma_1^3 - 3x^2y - 3xy^2 = \sigma_1^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1$

Att exemplen ovan stämmer kan vi kontrollera genom att sätta in $\sigma_1 = (x+y)$ och $\sigma_2 = xy$ i högerledet och utveckla men hur man givet vänsterledet kommer fram till högerledet kan förklaras enligt följande:

(1) om polynomet enbart innehåller ”blandade termer”, alltså termer innehållandes både x och y är första steget att bryta ut xy eller så långt det är möjligt en potens av xy. Exempelvis

$$xy^4 + x^4y = (xy)(x^3 + y^3) = \sigma_2(x^3 + y^3)$$

(2) Polynomet är nu reducerat till en lägre grad och det som återstår är potenser av grad k. Vidare kan man jämföra med termen $(x + y)^k$. Det vill vi göra eftersom $\sigma_1 = x + y$.

För att fortsätta med samma exempel jämför vi de återstående potenserna x^3 och y^3 med $(x+y)^3$ vilken vi utvecklar med *binomialsatsen*.

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Omskrivning ger att

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

(2a) Vi kan alltså uttryck de återstående potenserna av grad k med $(x+y)^k$ om vi subtraherar de blandade termerna.

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = \sigma_1^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

Nu återstår det att behandla $-3x^2y - 3xy^2$ vilket kan göras enligt (1), det vill säga att bryta ut xy.

$$-3x^2y - 3xy^2 = -3xy(x+y) = -3\sigma_2 \cdot \sigma_1$$

För att sluföra exemplet är alltså

$$xy^4 + x^4y = \sigma_2\sigma_1^3 - 3\sigma_2 \cdot \sigma_1$$

Genom att använda sig av steg (1) och (2) växelvis kan man skriva om homogena symmetriska polynom i de elementära symmetriska polynomen.

Vi har hittills enbart behandlat homogena polynom. Metoden för inhomogena polynom skiljer sig i den utsträckning att man får behandla en homogen del i taget och då enligt steg (1) & (2).

Exempel 2.1.2

$$\begin{gathered}
x^3 + x^4y^5 + y^3 + x^5y^4 = \\
x^3 + y^3 + x^4y^5 + x^5y^4 = \\
(x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + (xy)^4(x+y) = \\
\sigma_1^3 - 3x^2y - 3xy^2 + \sigma_2^4\sigma_1 = \\
\sigma_1^3 - 3xy(x+y) + \sigma_2^4\sigma_1 = \\
\sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + \sigma_2^4\sigma_1
\end{gathered}$$

2.2 Newtons identiteter

Newtons identiteter visar ett samband mellan summan av potenser och de elementära symmetriska polynomen vilka vi tidigare visat har ett samband med rötterna och koefficienterna till ett polynom. För två variabler utgår vi ifrån att summan

$$s_n = x^n + y^n$$

Då är

$s_0 = x^0 + y^0 = 2$

$s_1 = x + y = \sigma_1$

Vi har tidigare i exempel (2.1.1) beräknat $x^2 + y^2$. Vi kommer nu att göra det på ett annat sätt . Ett sätt som är användbart när vi ska generalisera.

För att beräkna $s_2 = x^2+y^2$ behöver vi betrakta polynomet $p(t) = t^2-\sigma_1 t+\sigma_2$ med nollställena x och y. Då är

$$p(x) = x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = 0 \tag{2.2.1}$$

$$p(y) = y^2 - \sigma_1 y + \sigma_2 = 0 \tag{2.2.2}$$

Om vi adderar (2.1.1) & (2.2.2) får vi

$$x^2 + y^2 - \sigma_1(x + y) + 2\sigma_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 = \sigma_1(x + y) - 2\sigma_2$$
$$x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Alltså är $s_2 = x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

För s_3 Multiplicerar vi (2.2.1) med x och (2.2.2) med y

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x = 0$$

$$y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y = 0$$

Vi adderar ekvationerna

$$x^3 + y^3 - \sigma_1(x^2 + y^2) + \sigma_2(x + y) = 0$$

$$x^3 + y^3 = \sigma_1(x^2 + y^2) - \sigma_2(x + y)$$

Nu använder vi att $x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ och $x + y = \sigma_1$

$$x^3 + y^3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1)$$

$$x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2$$

$$x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

Beräkningarna av s_2 och s_3 följer ett visst mönster. Utifrån det mönstret kan s_n generellt beräknas med en rekursionsformel.

Sats 2.2.1
För varje heltal $n \geq 2$, kan summan av potenser för två variabler uttryckas i de elementära symmetriska polynomen och det beräknas med rekursionsformeln

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}$$

som kallas Newtons identitet

Bevis
Vi multiplicerar polynomen (2.1.1) och (2.1.2) med x^{n-2} och respektive y^{n-2}

$$p(x) = (x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2) \cdot x^{n-2} = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2}$$

$$p(y) = (y^2 - \sigma_1 y + \sigma_2) \cdot y^{n-2} = y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2}$$

Därefter adderar vi och får

$$p(x) + p(y) = x^n + y^n - \sigma_1(x^{n-1} + y^{n-1}) + \sigma_2(x^{n-2} + y^{n-2}) = 0$$

Alltså är

$$x^n + y^n = \sigma_1(x^{n-1} + y^{n-1}) - \sigma_2(x^{n-2} + y^{n-2})$$

vi vet att $s_n = x^n + y^n$, $s_{n-1} = x^{n-1} + y^{n-1}$ och att $s_{n-2} = x^{n-2} + y^{n-2}$. Insättning ger

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}$$

$\square$

Nu kan vi med rekursionsformeln enkelt beräkna

$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 =$$

$$\sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) =$$
$$\sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 =$$
$$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 =$$
$$\sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) =$$
$$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$s_6 = \sigma_1 s_5 - \sigma_2 s_4 =$$
$$\sigma_1(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) =$$
$$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$$

$$s_7 = \sigma_1 s_6 - \sigma_2 s_5 =$$
$$\sigma_1(\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3) - \sigma_2(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) =$$
$$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$$

Om vi studerar utfallen ser vi ett mönster som går att bevisa med induktion.

Sats 2.2.2

$$s_n = \sigma_1^n - a_{n,1}\sigma_1^{n-2}\sigma_2 + a_{n,2}\sigma_1^{n-4}\sigma_2^2 - a_{n,3}\sigma_1^{n-6}\sigma_2^3 +$$

$$a_{n,4}\sigma_1^{n-8}\sigma_2^4 - a_{n,5}\sigma_1^{n-10}\sigma_2^5 + a_{n,6}\sigma_1^{n-12}\sigma_2^6 \cdots$$

där $a_{n,k}$ är positiva heltal som beror av n.

Anmärkning
Polynomets allmänna term är $\pm a_{n,k}\sigma_1^{n-2k}\sigma_2^k$. Senare kommer ett bevis om att $a_{n,k} = 0$ när $2k > n$. Detta bestämmer polynomets längd och visar att s_n inte innehåller några negativa exponenter. Detta eftersom vi vill ha ett polynom och inte en rationell funktion.

Vi har följande

Basfall
För $n = 1$ får vi att, $s_1 = \sigma_1^1 = \sigma_1$

Vi vet från tidigare exempel att $s_1 = \sigma_1$ alltså är påståendet sant för $n = 1$.

För $n = 2$ får vi, $s_2 = \sigma_1^2 - a_{n,1}\sigma_2$

Om $a_{n,1} = 2$ är påståendet sant för $n = 2$

Då vet vi att påståendet är sant för s_1 & s_2

Vi antar sant för s_{n-1} och s_{n-2}

$s_{n-1} = \sigma_1^{n-1} - a_{n-1,1}\sigma_1^{n-3}\sigma_2 + a_{n-1,2}\sigma_1^{n-5}\sigma_2^2 - a_{n-1,3}\sigma_1^{n-7}\sigma_2^3 + a_{n-1,4}\sigma_1^{n-9}\sigma_2^4 - a_{n-1,5}\sigma_1^{n-11}\sigma_2^5 + a_{n-1,6}\sigma_1^{n-13}\sigma_2^6 \cdots$

$s_{n-2} = \sigma_1^{n-2} - a_{n-2,1}\sigma_1^{n-4}\sigma_2 + a_{n-2,2}\sigma_1^{n-6}\sigma_2^2 - a_{n-2,3}\sigma_1^{n-8}\sigma_2^3 + a_{n-2,4}\sigma_1^{n-10}\sigma_2^4 - a_{n-2,5}\sigma_1^{n-12}\sigma_2^5 \cdots$

Nu ska vi visa sant för s_n

Vi påminner oss om rekursionsformeln

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}$$

Insättning av s_{n-1} & s_{n-2} i rekursionsformlen

$$s_n =$$

$$\sigma_1(\sigma_1^{n-1} - a_{n-1,1}\sigma_1^{n-3}\sigma_2 + a_{n-1,2}\sigma_1^{n-5}\sigma_2^2 - a_{n-1,3}\sigma_1^{n-7}\sigma_2^3 + a_{n-1,4}\sigma_1^{n-9}\sigma_2^4 - a_{n-1,5}\sigma_1^{n-11}\sigma_2^5 + a_{n-1,6}\sigma_1^{n-13}\sigma_2^6) \cdots - \sigma_2(\sigma_1^{n-2} - a_{n-2,1}\sigma_1^{n-4}\sigma_2 + a_{n-2,2}\sigma_1^{n-6}\sigma_2^2 - a_{n-2,3}\sigma_1^{n-8}\sigma_2^3 + a_{n-2,4}\sigma_1^{n-10}\sigma_2^4 - a_{n-2,5}\sigma_1^{n-12}\sigma_2^5 \cdots)$$

utveckling av parenteserna ger

$$s_n =$$

$$\sigma_1^n - a_{n-1,1}\sigma_1^{n-2}\sigma_2 + a_{n-1,2}\sigma_1^{n-4}\sigma_2^2 - a_{n-1,3}\sigma_1^{n-6}\sigma_2^3 + a_{n-1,4}\sigma_1^{n-8}\sigma_2^4$$
$$-a_{n-1,5}\sigma_1^{n-10}\sigma_2^5 + a_{n-1,6}\sigma_1^{n-12}\sigma_2^6 \cdots - \sigma_1^{n-2}\sigma_2 + a_{n-2,1}\sigma_1^{n-4}\sigma_2^2$$
$$-a_{n-2,2}\sigma_1^{n-6}\sigma_2^3 + a_{n-2,3}\sigma_1^{n-8}\sigma_2^4 - a_{n-2,4}\sigma_1^{n-10}\sigma_2^5 + a_{n-2,5}\sigma_1^{n-12}\sigma_2^6 \cdots$$

Förenkling

$$s_n =$$

$$\sigma_1 - (a_{n-1,1} + 1)\sigma_1^{n-2}\sigma_2 + (a_{n-1,2} + a_{n-2,1})\sigma_1^{n-4}\sigma_2^2 -$$
$$(a_{n-1,3} + a_{n-2,2})\sigma_1^{n-6}\sigma_2^3 + (a_{n-1,4} + a_{n-2,3})\sigma_1^{n-8}\sigma_2^4 -$$
$$(a_{n-1,5} + a_{n-2,4})\sigma_1^{n-10}\sigma_2^5 + (a_{n-1,6} + a_{n-2,5})\sigma_1^{n-12}\sigma_2^6 \cdots$$

Som vi kan se är $a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3} \cdots$ positiva heltal som beror av n där

$$\begin{aligned}
a_{n,1} &= a_{n-1,1} + 1 \\
a_{n,2} &= a_{n-1,2} + a_{n-2,1} \\
a_{n,3} &= a_{n-1,3} + a_{n-2,2} \\
a_{n,4} &= a_{n-1,4} + a_{n-2,3} \\
a_{n,5} &= a_{n-1,5} + a_{n-2,4} \\
a_{n,6} &= a_{n-1,6} + a_{n-2,5} \\
\vdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Induktionssteget klart och satsen är bevisad. □

Vi har tidigare nämnt att $a_{n,k} = 0$ då $2k > n$. Det som följer kommer att redogöra för koefficienternas mönster och vi kommer på så sätt att få påståendet bevisat. Vi har tidigare beräknat $s_1 - s_7$ och om vi ordnar koefficienterna för dessa radvis under varandra får vi uppställningen.

$$\begin{array}{llllll} s_1 = & 1 & & & \\ s_2 = & 1 & 2 & & \\ s_3 = & 1 & 3 & & \\ s_4 = & 1 & 4 & 2 & \\ s_5 = & 1 & 5 & 5 & \\ s_6 = & 1 & 6 & 9 & 2 \\ s_7 = & 1 & 7 & 14 & 7 \end{array}$$

Om mönstret för koefficienterna inte framträder direkt kan vi med hjälp av förenklingen i induktionssteget utläsa hur de hänger ihop. Det följer av sats att koefficienten framför σ_1^n alltid är 1, den kallar vi för $a_{n,0} = 1$, därefter måste vi titta på koefficienterna till s_{n-1} & s_{n-2} för att bestämma koefficienterna till s_n. Vilket vi tydligt kan se hos $a_{n,3}$

$$a_{n,3} = a_{n-1,3} + a_{n-2,2}$$

För att bestämma den $k : te$ koefficienten till s_n, den efter σ_1^n, adderar vi koefficient k hos s_{n-1} med koefficient $k - 1$ hos s_{n-2}. Där k är den plats koefficienten har i en följd från vänster. $k - 1$ ligger till vänster om k. Vi påminner oss om att $a_{n,0} = 1$ och generellt kan koefficient $a_{n,k}$ beräknas med rekursionsformeln.

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-2,k-1}$$

då $k \geq 1$

Sats 2.2.3
Koefficienten $a_{n,k}$ kan beräknas med rekursionsformeln $a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-2,k-1}$. Dessutom gäller det att $a_{n,k} = 0$ om $2k > n$

Bevis
Rekursionsformeln är redan bevisad och det återstår att bevisa påståendet $a_{n,k} = 0$ om $2k > n$.

Vi får följande basfall
$n = 2$
Här kan vi konstatera att $2k > n$ gäller för $k = 2, 3, 4 \ldots$
Alltså är $a_{2,2} = a_{2,3} = a_{2,4} = \ldots = 0$
Detta stämmer ty, $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ där enbart koefficient $a_{2,1}$ existerar

$n = 3$
Här kan vi konstatera att $2k > n$ gäller för $k = 2, 3, 4 \ldots$
Alltså är $a_{3,2} = a_{3,3} = a_{3,4} = \ldots = 0$
Detta stämmer ty, $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2$ där enbart koefficient $a_{3,1}$ existerar

Nu till induktionssteget där vi antar sant för $n - 1$ och $n - 2$. Vi väljer k sådana att

$$\begin{cases} 2k > n - 1 \Rightarrow a_{n-1,k} = 0 \\ 2(k-1) > n - 2 \Rightarrow a_{n-2,k-1} = 0 \end{cases}$$

För $2k > n$ ser vi att olikheten $2k > n - 1$ är fortsatt sann och samma gäller för $2(k - 1) > n - 2$. vilket betyder att $a_{n-1,k} = 0$ och att $a_{n-2,k-1} = 0$

Nu ska vi visa sant för n. Vi vet från rekursionsformeln att $a_{n,k}$ kan beräknas enligt
$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-2,k-1} = 0 + 0 = 0$ □

Korollarium
Uttrycket för s_n i sats 2.2.2 är ett polynom i σ_1 och σ_2.

Nu kan vi utöka uppställningen av koefficienter.

		$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$a_{n,4}$	$a_{n,5}$	$\cdots$
$s_1 =$	1	0	0	0	0	0	0
$s_2 =$	1	2	0	0	0	0	0
$s_3 =$	1	3	0	0	0	0	0
$s_4 =$	1	4	2	0	0	0	0
$s_5 =$	1	5	5	0	0	0	0
$s_6 =$	1	6	9	2	0	0	0
$s_7 =$	1	7	14	7	0	0	0
$s_8 =$	1	8	20	16	2	0	0
$s_9 =$	1	9	27	30	9	0	0
$s_{10} =$	1	10	34	50	25	2	0
$s_{11} =$	1	11	43	77	55	11	0

Skulle det kunna vara så att koefficient $a_{n,k}$ kan beräknas med binomialkoefficienter? Ja, vi ska bevisa med induktion att

$$a_{n,1} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{0}$$
$$a_{n,2} = \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{1}$$
$$a_{n,3} = \binom{n-3}{3} + \binom{n-4}{2}$$
$$\vdots$$
$$a_{n,k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

Först måste vi definiera talet *binomialkoefficient* som utläses "n över k" och betecknas $\binom{n}{k}$. Talet används för att välja k objekt från n och definieras vanligtvis som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ med förutsättningen att $k \leq n$. Vi kommer däremot att använda oss av en allmänn algebraisk definition som är tillskillnad från den mer kända definitionen även användbar för $k > n$.

Definition 2.2.1

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

n och k är heltal ≥ 0 och skall tolkas som 1 då $k = 0$

Anmärkning Det följer av definition att $\binom{n}{k} = 0$, för $k > n$. Detta för att sista termen $(n - k + 1)$ blir 0 om $k = n + 1$ och för ännu större k blir sista termen negativ vilket betyder att en tidigare term är lika med 0.

Vår sats kräver också ett lemma som förknippas med Pascals triangel.

Lemma

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, n \geq 2$$

Bevis Lemma

Vi behöver behandla fallet $k = 1$ separat eftersom definitionen av $\binom{n}{k}$ är speciell då k=0. För $k = 1$ ser vi direkt att $\binom{n}{1} = n$ och $\binom{n-1}{1} = n - 1$ samt att $\binom{n-1}{1-1} = 1$. Högerledet ser då ut enligt följande

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} = n - 1 + 1 = n$$

Lemmat stämmer för $k = 1$ och det följer att $a_{n,1} = n$.

Nu antar vi att $k > 1$.

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots((n-1)-k+1)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot k}{(k-1)!\cdot k} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k) + (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(k)}{k!} =$$

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{n-k+k}{k!} =$$

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{n}{k!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

□

Nu kan vi gå vidare med induktionsbeviset för koefficienten $a_{n,k}$

Sats 2.2.4

$$a_{n,k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \quad \text{om } k \geq 1$$

Vi använder induktion över n.

Basfall

$n = 2, k = 1$

$$\binom{2-1}{1} + \binom{2-1-1}{1-1} = \binom{1}{1} + \binom{0}{0} = 2 = a_{2,1}$$

stämmer ty $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$n = 2, k > 1$

$$\binom{2-k}{k} + \binom{2-k-1}{k-1} = 0 + 0 = 0 = a_{2,k}$$

för $k > 1$
stämmer ty $2k > n = 0$

$n = 3, k = 1$

$$\binom{3-1}{1} + \binom{3-1-1}{1-1} = \binom{2}{1} + \binom{1}{0} = 3 = a_{3,1}$$

Stämmer ty $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2$

$n = 3, k > 1$

$$\binom{3-k}{k} + \binom{3-k-1}{k-1} = 0 + 0 = 0 = a_{3,k}$$

för $k > 1$

Antar sant för $n-1$ och $n-2$ oberoende av k.

$$a_{n-1,k} = \binom{n-1-k}{k} + \binom{n-1-k-1}{k-1}$$

$$a_{n-2,k-1} = \begin{cases} \binom{n-2-(k-1)}{k-1} + \binom{n-2-(k-1)-1}{k-1-1} & ,k \geq 2 \\ 1 & ,k = 1 \end{cases}$$

Nu ska vi **visa sant** för $a_{n,k}$

Vi har **rekursionsformeln**

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-2,k-1}$$

Även här måste vi specialbehandla $k = 1$.

Vi får genom rekursionsformeln att $a_{n,1} = a_{n-1,1} + a_{n-2,0}$ och antagandet för s_{n-1} och s_{n-2} ger oss att

$$a_{n,1} = \binom{n-1-1}{1} + \binom{n-1-1-1}{1-1} + 1 = n-2+1+1 = n$$

Men

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1-1}{1-1} = n-1+1 = n$$

så att

$$a_{n,k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

Satsen stämmer då $k = 1$.

Nu antar vi att $k > 1$ Vi får att $a_{n,k} =$

$$\binom{n-1-k}{k}+\binom{n-1-k-1}{k-1}+\binom{n-2-(k-1)}{k-1}+\binom{n-2-(k-1)-1}{k-1-1} =$$

$$\binom{n-1-k}{k} + \binom{n-2-k}{k-1} + \binom{n-1-k}{k-1} + \binom{n-2-k}{k-2} =$$

$$\binom{n-1-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1} + \binom{n-2-k}{k-1} + \binom{n-2-k}{k-2}$$

med avseende på lemmat är

$$a_{n,k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

□

Induktionssteg klart och satsen är bevisad.

Korrolarium
Om n är udda, är sista koefficienten lika med n, ty
$n = 2k + 1$

$$a_{n,k} = \binom{2k+1-k}{k} + \binom{2k+1-k-1}{k-1} = \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k-1} =$$

$$\frac{(k+1)!}{k!(k+1-k)!} + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!} = k+1+k = 2k+1 = n$$

Om n är jämn, är sista koefficienten 2, ty
$n = 2k$

$$a_{n,k} = \binom{2k-k}{k} + \binom{2k-k-1}{k-1} = \binom{k}{k} + \binom{k-1}{k-1} = 1+1 = 2$$

Exempel 2.2.1
Vi kan nu beräkna $s_{15} =$

$$\sigma_1^{15} - \left[\binom{15-1}{1} + \binom{15-1-1}{1-1}\right]\sigma_1^{13}\sigma_2 + \left[\binom{15-2}{2} + \binom{15-2-1}{2-1}\right]\sigma_1^{11}\sigma_2^2 -$$

$$\left[\binom{15-3}{3}+\binom{15-3-1}{3-1}\right]\sigma_1^9\sigma_2^3+\left[\binom{15-4}{4}+\binom{15-4-1}{4-1}\right]\sigma_1^7\sigma_2^4-$$
$$\left[\binom{15-5}{5}+\binom{15-5-1}{5-1}\right]\sigma_1^5\sigma_2^5+\left[\binom{15-6}{6}+\binom{15-6-1}{6-1}\right]\sigma_1^3\sigma_2^6-$$
$$\left[\binom{15-7}{7}+\binom{15-7-1}{7-1}\right]\sigma_1\sigma_2^7=$$

$$\sigma_1^{15}-\left[\binom{14}{1}+\binom{13}{0}\right]\sigma_1^{13}\sigma_2+\left[\binom{13}{2}+\binom{12}{1}\right]\sigma_1^{11}\sigma_2^2-$$
$$\left[\binom{12}{3}+\binom{11}{2}\right]\sigma_1^9\sigma_2^3+\left[\binom{11}{4}+\binom{10}{3}\right]\sigma_1^7\sigma_2^4-$$
$$\left[\binom{10}{5}+\binom{9}{4}\right]\sigma_1^5\sigma_2^5+\left[\binom{9}{6}+\binom{8}{5}\right]\sigma_1^3\sigma_2^6-$$
$$\left[\binom{8}{7}+\binom{7}{6}\right]\sigma_1\sigma_2^7$$

Vi beräknar binomialkoefficienterna och får $s_{15}=$

$\sigma_1^{15}-15\sigma_1^{13}\sigma_2+90\sigma_1^{11}\sigma_2^2-275\sigma_1^9\sigma_2^3+450\sigma_1^7\sigma_2^4-378\sigma_1^5\sigma_2^5+140\sigma_1^3\sigma_2^6-15\sigma_1\sigma_2^7$

2.3 Omvänt polynom

Är ett polynom där koefficienterna förekommer i omvänd ordning utifrån ursprungspolynomet $p(t)$ och kommer att betecknas som *rev* $p(t)$. Hur konstruerar man *rev* $p(t)$? Vi börjar med att iaktta polynomet $p(t)$. Vi antar att $\sigma_2 \neq 0$

$$p(t) = t^2 - \sigma_1 t + \sigma_2$$

med rötterna x och y.

Därefter beräknar vi $p\left(\frac{1}{t}\right)$

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} - \frac{\sigma_1}{t} + \sigma_2$$

multiplicerar med t^2

$$t^2 \cdot p\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \sigma_1 t + \sigma_2 t^2$$

Nu ser vi att koefficienterna är i omvänd ordning och polynomet $1 - \sigma_1 t + \sigma_2 t^2$ kallas för *rev* $p(t)$.

Rötterna till de omvända polynomet är inverterade värden av ursprungspolynomet. *rev* $p(t)$ har alltså rötterna $\frac{1}{x}$ och $\frac{1}{y}$

Vilka även är rötter till polynomet

$$q(t) = t^2 - \alpha_1 t + \alpha_2$$

där

$$\alpha_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{xy} = \frac{1}{\sigma_2}$$

Vi tillämpar detta på summor av potenser med negativa exponenter och vi kan beräkna summan av de inverterade potenserna s_{-n} med hjälp av Newtons identiteter

Definition 2.3.1

$$s_{-n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n}$$

Nu kan vi beräkna några exempel

Exempel 2.3.1

$$s_{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$s_{-2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \alpha_1^2 - 2\alpha_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{2}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{\sigma_2^2}$$

$$s_{-3} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\right) = \frac{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^3}$$

$$s_{-4} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_2^2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^4 - 4\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 \frac{1}{\sigma_2} + 2\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2 = \frac{\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2}{\sigma_2^4}$$

Vi ser att
$s_{-n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n}$ beräknas på liknande sätt som s_n fast man använder sig av α_1 & α_2 för att därefter utveckla i termer av σ_1 & σ_2.

Det verkar som s_{-n} kan beräknas med formeln

$$s_{-n} = \frac{s_n}{\sigma_2^n}$$

Att formeln är sann för alla n ser vi om vi gör s_{-n} liknämnig.

$$s_{-n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} = \frac{1 \cdot y^n}{x^n \cdot y^n} + \frac{1 \cdot x^n}{y^n \cdot x^n}$$

$$\frac{x^n + y^n}{x^n y^n} = \frac{s_n}{\sigma_2^n}$$

□

3 Kapitel 3

I det här kapitlet kommer vi att presentera symmetriska polynom i tre variabler. Kapitlet kommer att behandla *elementära symmetriska polynom*, *Newtons identiteter* och *omvänt polynom*. Först behöver vi veta vad ett symmetriskt polynom i tre variabler är. Vi gör följande definition.

Definition 3.1
Ett symmetriskt polynom i tre variabler x, y, z är ett polynom som inte förändras vid en permutation av variablerna x, y och z. Exempelvis är $x+y+z$ symetriskt men $x+y-z$ är det inte.

3.1 Elementära symmetriska polynom

För tre variabler x, y och z definierar vi de elementära symmetriska polynomen på följande sätt

Definition 3.1.1

$$\begin{cases} \sigma_1 &= x+y+z \\ \sigma_2 &= xy+xz+yz \\ \sigma_3 &= xyz \end{cases}$$

Detta framgår vid en utveckling av faktorsatsen för polynomet $p(t)$ med rötterna x, y, z.

$$p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz \quad (3.1.1)$$

Liksom för två variabler vill vi i tre variabler uttrycka de symmetriska polynomen i de elementära symmetriska polynomen. Vi ska med ett exempel visa hur det går till.

Exempel 3.1.1
Vi kommer att uttrycka polynomet

$$f = xy^2+x^2y+xz^2+x^2z+yz^2+y^2z \quad (3.1.2)$$

Låt oss börja med att betrakta variablerna x och y och använda oss av de elementära symmetriska ploynomen för två variabler. Vi inför σ_1' och σ_2'

$$\begin{cases} \sigma_1' & = x + y = \sigma_1 - z \\ \sigma_2' & = xy = \frac{\sigma_3}{z} \end{cases}$$

Vi skriver om polynom (3.1.2) på föjande sätt

$$f = xy(x+y) + z(x^2+y^2) + z^2(x+y)$$

Vi behandlar till en början en term i taget

$$xy(x+y) = \sigma_2'\sigma_1' = \frac{\sigma_3}{z} \cdot (\sigma_1 - z) = \frac{\sigma_1\sigma_3}{z} - \sigma_3$$

$$z(x^2+y^2) = z(\sigma_1'^2 - 2\sigma_2') = z\left((\sigma_1 - z)^2 - \frac{2\sigma_3}{z}\right) = z\sigma_1^2 - 2\sigma_1 z^2 + z^3 - 2\sigma_3$$

$$z^2(x+y) = z^2\sigma_1' = z^2(\sigma_1 - z) = z^2\sigma_1 - z^3$$

Om vi lägger ihop termerna får vi

$$\begin{aligned} f = \frac{\sigma_1\sigma_3}{z} - \sigma_3 + z\sigma_1^2 - 2\sigma_1 z^2 + z^3 - 2\sigma_3 + z^2\sigma_1 - z^3 = \\ -\sigma_1 z^2 + \sigma_1^2 z - 3\sigma_3 + \frac{\sigma_1\sigma_3}{z} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

vi vet från ekvation (3.1.1) att

$$z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3 = 0 \tag{3.1.4}$$

Om vi multiplicerar (3.1.4) med $\frac{\sigma_1}{z}$ får vi

$$\sigma_1 z^2 - \sigma_1^2 z + \sigma_1\sigma_2 - \frac{\sigma_1\sigma_3}{z} = 0 \tag{3.1.5}$$

$f = f + 0$ vilket medför att vi kan addera (3.1.5) med (3.1.3).

$$f = -\sigma_1 z^2 + \sigma_1^2 z - 3\sigma_3 + \frac{\sigma_1\sigma_3}{z} + \sigma_1 z^2 - \sigma_1^2 z + \sigma_1\sigma_2 - \frac{\sigma_1\sigma_3}{z} =$$
$$-3\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 \qquad (3.1.6)$$

Nu har vi ett polynom som är uttryckt i de elementära symmetriska polynomen. Som kontrollräkning utvecklar vi högerledet.

Vi utvecklar (3.1.6)

$$-3\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 = -3(xyz) + (x + y + z)(xy + xz + yz) =$$

$$-3xyz + x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 =$$
$$xy^2 + x^2y + xz^2 + x^2z + yz^2 + y^2z$$

vilket är polynom (3.1.2)

Vi kommer nu att uttrycka ett nytt exempel i de elementära symmetriska polynomen där vi kommer att använda oss av en mer generell metod.

Exempel 3.1.2
Vi har följande polynom

$$f = x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y \qquad (3.1.7)$$

Vi skriver om (3.1.7) på nedanstående sätt

$$f = xy(x^2 + y^2) + z(x^3 + y^3) + z^3(x + y)$$

Vi kommer återigen att fokusera på två variabler till en början. Vi kommer att arbeta med σ_1 och σ_2 i en annan form.

$\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_1' = x + y$ så att $\sigma_1 = \sigma_1' + z$
$\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_2' = xy$ så att $\sigma_2 = \sigma_2' + \sigma_1' z$

Således är

$$\begin{cases} \sigma_1' &= \sigma_1 - z \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - \sigma_1 z + z^2 \end{cases}$$

Nu kan vi uttrycka f i σ'_1 och σ'_2. Vi arbetar med en term i taget.

$$xy(x^2+y^2) = \sigma'_2({\sigma'_1}^2 - 2\sigma'_2) = (\sigma_2 - \sigma_1 z + z^2)((\sigma_1 - z)^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_1 z + z^2) =$$
$$(\sigma_2 - \sigma_1 z + z^2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_1 z + z^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_1 z - 2z^2) =$$
$$(\sigma_2 - \sigma_1 z + z^2)(\sigma_1^2 - z^2 - 2\sigma_2) =$$
$$-z^4 + \sigma_1 z^3 + z^2(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) + z(-\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2) - 2\sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_1^2$$

$$z(x^3+y^3) = z({\sigma'_1}^3 - 3\sigma'_1\sigma'_2) = z((\sigma_1 - z)^3 - 3(\sigma_1 - z)(\sigma_2 - \sigma_1 z + z^2)) =$$
$$2z^4 - 3\sigma_1 z^3 + 3\sigma_2 z^2 + z(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)$$

$$z^3(x+y) = z^3\sigma'_1 = z^3(\sigma_1 - z) = z^3\sigma_1 - z^4$$

Om vi lägger ihop alla termer är

$$f = -\sigma_1 z^3 + \sigma_1^2 z^2 - \sigma_1\sigma_2 z + \sigma_2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 \tag{3.1.8}$$

f är symmetriskt och förändras inte om z byts mot x eller y. Likaså blir σ_1 och σ_2 oförändrade. Vi kan därför sätta

$$F(t) = -\sigma_1 t^3 + \sigma_1^2 t^2 - \sigma_1\sigma_2 t + \sigma_2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 \tag{3.1.9}$$

där $F(z) = F(x) = F(y) = f$

Vi inför ett nytt polynom som vi kommer att dela $F(t)$ med.

$$P(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$$

Då är $P(z) = 0$

Innan vi utför polynomdivision av $F(t)$ med $p(t)$ vet vi att resultatet blir på formen

$$F(t) = q(t)p(t) + r(t)$$

där $r(t)$ har grad < 3

Men $f = F(z) = q(z)p(z) + r(z) = r(z)$, ty $p(z) = 0$

$r(t)$ har samma värde för x, y, z så $r(t)$ saknar alltså t-term.

Nu kan vi utföra polynomdivision med $F(t)$ och $P(t)$. Vi får att

$$F(t) = -\sigma_1 \cdot p(t) + \sigma_2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$$

$r(z) = \sigma_2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$ och vi är klara.

Polynom f (3.1.7) uttryckt i de elementära symmetriska polynomen är

$$f = \sigma_2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$$

Det är ingen lycklig slump att variabel t försvinner i polynomdivisionen. I kapitel 4 som handlar om flera variabler skall detta få sin förklaring.

3.2 Newtons identiteter

Vi kommer nu att visa sambandet mellan summan av potenser och de elementära symmetriska polynomen för tre variabler. Vi utgår från att summan

$$s_n = x^n + y^n + z^n$$

Vi kan enkelt beräkna

$s_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$

$s_1 = x + y + z = \sigma_1$

$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

För att beräkna $s_3 = x^3 + y^3 + z^3$ använder vi

$$p(x) = x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$$

$$p(y) = y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y - \sigma_3 = 0$$
$$p(z) = z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3 = 0$$

Vi adderar $p(x)$ med $p(y)$ och $p(z)$.

$p(x) + p(y) + p(z) = x^3 + y^3 + z^3 - \sigma_1(x^2 + y^2 + z^3) + \sigma_2(x + y + z) - 3\sigma_3 = 0$

som efter omskrivning ger

$$x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1(x^2 + y^2 + z^3) - \sigma_2(x + y + z) + 3\sigma_3 \qquad (3.2.1)$$

Vi ser i ekvation (3.2.1) att

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + \sigma_3 s_0 \qquad (3.2.2)$$

Vilket ger oss att

$$s_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 =$$

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

Om vi tittar på (3.2.2) anar vi att s_n kan beräknas med rekursionsformeln

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$$

Sats 3.2.1
För varje heltal $n \geq 3$ kan summan av potenser s_n beräknas med rekursionsformeln

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$$

som kallas Newtons identitet

Bevis

Låt oss multiplicera $p(x)$ med x^{n-3}, $p(y)$ med y^{n-3} och $p(z)$ med z^{n-3}

$$p(x) \cdot x^{n-3} = (x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3) \cdot x^{n-3}$$

$$p(y) \cdot y^{n-3} = (y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y - \sigma_3) \cdot y^{n-3}$$
$$p(z) \cdot z^{n-3} = (z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3) \cdot z^{n-3}$$

Då får vi

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \sigma_3 x^{n-3} = 0$$
$$y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2} - \sigma_3 y^{n-3} = 0$$
$$z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \sigma_3 z^{n-3} = 0$$

Vi adderar polynomen och får

$$x^n+y^n+z^n-\sigma_1(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})+\sigma_2(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})-\sigma_3(x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}) = 0$$

vilket vi kan skriva om som

$$x^n+y^n+z^n = \sigma_1(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})-\sigma_2(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})+\sigma_3(x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3})$$

$$x^n + y^n + z^n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3} = s_n$$

$\square$

Nu kan vi enkelt beräkna

$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 =$$
$$\sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 =$$
$$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2$$

3.3 Omvänt polynom

Liksom för två variabler är ett omvänt polynom i tre variabler ett polynom vars koefficienterna förkommer i omvänd ordning utifrån ursprungspolynomet $p(t)$ och kommer att betecknas som *rev* $p(t)$. Hur konstruerar vi *rev* $p(t)$ i tre variabler? Vi antar att $\sigma_3 \neq 0$ och inför polynomet

$$p(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$$

med rötterna x, y och z

Vi beräknar $p\left(\frac{1}{t}\right)$

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^3} - \frac{\sigma_1}{t^2} + \frac{\sigma_2}{t} - \sigma_3$$

Multiplicerar med t^3

$$t^3 \cdot \left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^3}{t^3} - \frac{\sigma_1 t^3}{t^2} + \frac{\sigma_2 t^3}{t} - \sigma_3 t^3$$

Efter en förenkling ser vi att koefficienterna är i omvänd ordning och vi har polynomet *rev* $p(t)$

$$1 - \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 - \sigma_3 t^3 = rev\ p(t)$$

Rötterna till de omvända polynomet är inverterade värden av ursprungspolynomet.

rev $p(t)$ har alltså rötterna $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$

Vilka även är rötter till polynomet

$$q(t) = t^3 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3} t^2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} t - \frac{1}{\sigma_3}$$

Vi inför α_1, α_2 och α_3

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} =$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{\sigma_3} = \frac{1}{xyz}$$

Vi tillämpar detta på summor av potenser med negativa exponenter och vi kan beräkna summan av de inverterade potenserna s_{-n} med hjälp av Newtons identiteter

Definition 3.3.1

$$s_{-n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n}$$

Exempel 3.3.1

$$s_{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$
$$s_{-2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \alpha_1^2 - 2\alpha_2 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)^2 - 2\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}$$
$$s_{-3} = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{zs} = \alpha_1^3-3\alpha_1\alpha_2+\alpha_3 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)^3-3\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2}{\sigma_3^3}$$

4 Kapitel 4

Kaptilet kommer att presentera symmetriska polynom i flera variabler och behandla *elementära symmetriska polynom* och *Newtons identiteter*.

Definition 4.1
Ett symmetriskt polynom är ett polynom som inte förändras om man permuterar variablerna.

4.1 Elementära symmetriska polynom

Vi inleder med att göra följande definitioner.

Definition 4.1.1
En k-ledad produkt är en produkt av k stycken variabler. Exempelvis är $x_2 x_3 x_{17}$ en 3-ledad produkt.

Defintion 4.1.2
De elementära symmetriska polynomen för n stycken skilda variabler är

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + \ldots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n \\
&= \text{summan av alla } 2 - \text{ledade produkter} \\
\sigma_3 &= \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = \text{summan av alla } 3 - \text{ledade produkter} \\
&\vdots \\
\sigma_k &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} x_{i1} x_{i2} \cdot \ldots \cdot x_{ik} \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_n
\end{aligned}$$

Varför kan symmetriska polynom alltid skrivas om som polynom i de elementära symmetriska polynomen?

Vi vet att det går för $n = 2, 3$ men hur vi vet att det alltid går kan vi bevisa med induktion.

Vi antar att det alltid går för $n - 1$ variabler och vi har n variabler alltså $x_1, x_2, \ldots, x_n$ och ett symmetriskt polynom av grad k, som vi kallar f. Vi börjar med att sortera termerna så att polynomet f ser ut så här

$$f = a_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + a_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n^2 + \\ \cdots + a_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n^k$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är symmetriska polynom i $n - 1$ variabler det vill säga $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. De elementära symmetriska polynomen kallar vi som känt för $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ men vi behöver också de elementära symmetriska polynomen i $n-1$ variabler $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Låt oss kalla dem för $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}$. Dessa vill vi uttrycka i $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ vilket vi kan göra på följande sätt, där $\sigma_k =$ summan av alla k-ledade produkter i $x_1 \ldots x_n =$ summan av alla k-ledade produkter i $x_1 \ldots x_{n-1} + x_n$ multiplicerat med summan av alla $k - 1$-ledade produkter i $x_1 \ldots x_{n-1}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_n + \sigma'_1 \\
\sigma_2 &= x_n\sigma'_1 + \sigma'_2 \\
\sigma_3 &= x_n\sigma'_2 + \sigma'_3 \\
&\vdots \\
\sigma_k &= x_n\sigma'_k + \sigma'_{k-1} \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1} &= x_n\sigma'_{n-2} + \sigma'_{n-1} \\
\sigma_n &= x_n\sigma'_{n-1}
\end{aligned}$$

Enligt induktionsantagandet kan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ skrivas om som polynom i $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}$. Dessa polynom kallar vi för b_i och f kan skrivas som

$$f = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \cdots + b_kx_n^k$$

där $b_0, \ldots, b_k$ är polynom i $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}$. Men vi vill ha polynom uttryckta i $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ vilket vi med hjälp av sambanden ovan kan göra. Exempelvis är $\sigma'_1 = \sigma_1 - x_n$ och $\sigma'_2 = \sigma_2 - x_n(\sigma_1 - x_n)$. Vi kan skriva polynom f som

$$f = c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \cdots + c_kx_n^k$$

där $c_o, \ldots, c_k$ är polynom i $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Vi tydliggör hur vi kommer från polynomet i b_i till c_i genom att dra paralleller till exemplet (3.1.2) i 3 variabler. Vi skriver polynomet

$$f = xy(x^2 + y^2) + z(x^3 + y^3) + z^3(x + y)$$

uttryckt i $\sigma_1' = x + y$ och $\sigma_2' = xy$.

$$f = \sigma_2'(\sigma_1^{2'} - 2\sigma_2') + z(\sigma_1^{3'} - 3\sigma_1'\sigma_2') + z^3\sigma_1'$$

Detta polynomet kallar vi för ett polynom i b_i. Därefter löser vi enkelt ut σ_1' och σ_2' i tabellen ovan och substituerar dessa termer med σ_1 och σ_2 på följande sätt.

$$\begin{cases} \sigma_1' & = \sigma_1 - z \\ \sigma_2' & = \sigma_2 - \sigma_1 z + z^2 \end{cases}$$

Vi får då efter en förenkling att

$$f = -\sigma_1 z^3 + \sigma_1^2 z^2 - \sigma_1\sigma_2 z + \sigma_2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2$$

Som vi i det allmänna fallet kallar för ett polynom i c_i.

Vi går vidare och observerar följande, vi vet att f är symmetriskt och ändras inte om vi byter ut x_n mot vilket x_i som helst, $c_0, \ldots, c_k$ är också oförändrad så vi har faktiskt

$$f = c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \cdots + c_k x_i^k, \forall i$$

För att förtydliga
Polynomet $F(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k$ har samma värde för $t = x_1, \ldots, x_n$

Vi vet också att

$$p(t) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} t + (-1)^n \sigma_n = 0$$

för $t = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nu utför vi en polynomdivision av F med p och vi vet att resultatet kommer att bli på formen $F(t) = q(t)p(t) + r(t)$ där resten $r(t)$ har grad mindre än n.

Låt oss säga att

$$r(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots + d_s t^s$$

där vi nu vet att $s < n$. Eftersom $p(x_i) = 0$ för alla i gäller nu att

$$f = F(x_i) = r(x_i), \forall i$$

Polynomet $r(t)$ har alltså samma värde R för $t = x_1, \ldots, x_n$. Alla x_i är rötter till $r(t) - R$. Men $r(t) - R$ har grad högst $s < n$ och ett sådant polynom kan inte ha n nollställen om det inte är nollpolynomet. Alltså är $r(t) = R$ för alla t, vilket betyder att $d_1 = d_2 = \cdots = d_m = 0$ och alltså är $r = d_0$ som är ett polynom i de elementära symmetriska polynomen.

4.2 Newtons identiteter

Vi kommer med ett exempel att illustrera hur man allmännt kan beräkna *Newtons identiteter*.

Exempel 4.2.1
Vi kommer att beräkna summan av potenser av fem variabler. Vi utgår från att summan
$s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n$

Variablerna x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 är rötter till ekvationen

$$t^5 - \sigma_1 t^4 + \sigma_2 t^3 - \sigma_3 t^2 + \sigma_4 t - \sigma_5 = 0$$

För $n \geq 5$ multiplicerar vi t med en lämplig potens, t^{n-5}.

$$t^{n-5}(t^5 - \sigma_1 t^4 + \sigma_2 t^3 - \sigma_3 t^2 + \sigma_4 t - \sigma_5) = 0$$
$$t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \sigma_3 t^{n-3} + \sigma_4 t^{n-4} - \sigma_5 t^{n-5} = 0$$

Därefter stoppar vi in variablerna x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i ekvationen och adderar ihop värdena. Vi får att

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n - \sigma_1(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + x_4^{n-1} + x_5^{n-1}) +$$

$$\sigma_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2} + x_3^{n-2} + x_4^{n-2} + x_5^{n-2}) - \sigma_3(x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + x_3^{n-3} + x_4^{n-3} + x_5^{n-3}) +$$
$$\sigma_4(x_1^{n-4} + x_2^{n-4} + x_3^{n-4} + x_4^{n-4} + x_5^{n-4}) - \sigma_5(x_1^{n-5} + x_2^{n-5} + x_3^{n-5} + x_4^{n-5} + x_5^{n-5}) = 0$$

En omskrivning ger oss rekursionsformeln

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3} - \sigma_4 s_{n-4} + \sigma_5 s_{n-5}$$

Rekursionsformeln lämpar sig inte för $n < 5$ även fast den duger för lägre n. Detta är för att s_n inte är 0 för negativa n vilket vi visat i kapitlet omvänt polynom. Vi måste hitta ett annat sätt att beräkna s_n när $n = 4, 3$ och 2 och vi skall visa följande rekursionsformler

$$
\begin{aligned}
s_4 &= \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4 \\
s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 \\
s_2 &= \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2
\end{aligned}
$$

För att vi skall förstå dessa rekursionsformler skriver vi ut explicit vad formeln för s_4 betyder.

$$
\begin{gathered}
x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 = \\
(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3) - \\
(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_4 + \cdots + x_4x_5)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + \\
(x_1x_2x_3 + \cdots + x_2x_3x_5 + \cdots + x_3x_4x_5)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - \\
4(x_1x_2x_3x_4 + \cdots + x_1x_2x_4x_5 + \cdots + x_2x_3x_4x_5)
\end{gathered}
$$

Låt oss säga att en produkt är av typ k om en variabeln är i potens k och övriga i potens 1. Till exempel är $x_3^2x_4x_5$ av typ 2 och $x_1x_3^3$ av typ 3. Vi lägger märke till att alla produkter ovan har samma grad, nämligen 4.

Vi gör en djupare analys av produkterna och börjar med första produkten $\sigma_1 s_3$. Produkten innehåller alla termer av typ 4 som vi vill ha men den innehåller också termer av typ 3 som vi inte vill ha. Därför måste vi i nästa rad subtrahera bort dessa termer som vi får av produkten $\sigma_2 s_2$. Denna produkt innehåller som sagt termer av typ 3, som försvinner i subtraktionen, men också termer av typ 2. Dessa termer måste vi lägga till vilket vi gör när vi adderar produkten $\sigma_3 s_1$. Vi är fortfarande inte helt klara. Produkten $\sigma_3 s_1$ innehåller även termer av 4-ledade produkter som förekommer 4 gånger och vi måste subtrahera dessa vilket vi gör med produkten $4\sigma_4$.

Övriga rekursionsformler motiveras analogt

Kan vi med detta exempel presentera en mer allmänn metod som gäller för större n? Ja, det kan vi för att rekursionsformlerna fås analogt.

Vi har m variabler och utgår från att summan

$$s_n = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n$$

Variablerna $x_1 \ldots x_m$ är rötter till polynomet.

$$t^m - \sigma_1 t^{m-1} + \sigma_2 t^{m-2} + \cdots \pm \sigma_k t^{m-k} \pm \cdots \pm \sigma_m = 0$$

Vi multiplicerar polynomet med t^{n-m} och stoppar in $x_1 \ldots x_m$. Vi adderar ihop värdena. En omskrivning ger oss rekursionsformeln

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \cdots \pm \sigma_m s_{n-m}$$

Rekursionsformeln lämpar sig då $n \geq m$ och vi behöver liksom för 5 variabler andra rekursionsformler för $n < m$. Dessa rekursionsformler är på formen

$$s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3} - \cdots (-1)^n \sigma_{n-1} s_1 - (-1)^n n \sigma_n$$

Som ter sig analogt med exemplet av 5 variabler.

$$\begin{gathered}
s_n = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n = \\
(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_m^{n-1}) - \\
(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_3 + \cdots + x_{m-1} x_m)(x_1^{n-2} + x_2^{n-2} + \cdots + x_m^{n-2}) + \\
(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{m-2} x_{m-1} x_m)(x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + \cdots + x_m^{n-3}) \pm \\
\vdots \\
\pm n \sigma_n
\end{gathered}$$

Exempel 4.2.2
Vi ska beräkna s_4 i 10 variabler. Vi ser direkt att $4 < 10$ och vi måste arbeta med rekursionsformlerna

$$\begin{aligned}
s_4 &= \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4 \\
s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 \\
s_2 &= \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2
\end{aligned}$$

Vi ersätter s_1 med σ_1 och beräknar ekvationerna. Slutligen får vi

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 4\sigma_1 \sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$$