

Kvaternioner och rotationer

Fredrik Olin

12 mars 2017

Sammanfattning

Kvaternionerna är en fyrdimensionell algebra som introducerades av Sir William Hamilton på 1800-talet. Det var sedan tidigare känt att de komplexa talen, som är en tvådimensionell algebra, kan rotera vektorer i två dimensioner och Hamilton ville hitta tal som kunde rotera vektorer i tre dimensioner. Detta gjorde han i kvaternionerna.

Innehåll

1	Inledning	2
1.1	Bakgrund och arbetets innehåll	2
1.2	Räknelagar	3
1.3	Vad är en algebra?	4
1.4	Algebror med nya element	5
2	Utvidgning av de reella talen	6
2.1	Två dimensioner	6
2.2	De komplexa talen	7
2.3	Vilka räknelagar uppfyller de komplexa talen?	8
2.4	Komplexa tal och rotationer	9
3	Utvidgning av de komplexa talen	11
3.1	Tre dimensioner	11
3.2	Fyra dimensioner	13
4	Kvaternioner	14
4.1	Addition för kvaternioner	15
4.2	Multiplikation för kvaternioner	15
4.3	Räknelagar och egenskaper	17
4.4	Kvaternioner som divisionsalgebra	20
4.5	Skalärdel och vektordel	22
5	Rotation med kvaternioner	23
5.1	Rodrigues rotationsformel	23
5.2	Kvaternionrotation	27
5.3	Flera rotationer i en beräkning	30
6	Användningsområden och fördjupning	32
6.1	Varför är kvaternioner bra och vad används de till?	32
6.2	Finns det mer om kvaternioner?	33

1 Inledning

1.1 Bakgrund och arbetets innehåll

Inom matematik på grundläggande nivå, som i grundskolan och vid gymnasieutbildningar, räknar man i stort sett alltid bara med de reella talen. Men inom matematiken kan man stöta på problem som är olösliga. Eller åtminstone olösliga så vida man inte använder sig av andra tal än de reella. Därför har sedan några hundra år de komplexa talen varit en del av matematiken. De komplexa talen introduceras i svenska gymnasieskolans senare kurser och återkommer frekvent inom högskolematematik, vilket vittnar om hur pass användbart verktyg de utgör. De komplexa talen består av två komponenter. De skrivs vanligen på formen $a + bi$ där a och b är vanliga reella tal. Talet i kallas den imaginära enheten och uppfyller villkoret $i^2 = -1$ och det är det som ger de komplexa talen deras unika egenskaper. Det går att utveckla det här än mer. Man kan dels ge talet i andra villkor, t.ex. att villkoret $i^2 = 1$ gäller istället. Man kan även lägga till fler nya komponenter. En känd utvidgning av de komplexa talen är kvaternionerna som består av fyra komponenter och skrivs vanligen på formen $a + bi + cj + dk$. Kvaternionerna har sin historia ända från 1800-talet och spåddes då bli ett mycket användbart verktyg. Det är dock först på senare år, i samband med datortekniken, som de användas till någonting praktiskt.

Arbetet är baserat på de referenser som nämns i slutet. Jag har läst in mig på det området som arbetet behandlar och hämtat direkt information från dessa referenser. Innehåll från referens [3], [5] och [6] har använts för att beskriva algebraiska system i allmänhet men även komplexa tal och kvaternioner i synnerhet. Övriga referenser har givit detaljkunskap om kvaternioner.

Arbetet kommer inledningsvis att gå igenom de grundläggande räknelagarna som gäller för de reella talen. Dessa är för de flesta så självklara att man inte alltid tänker på dem. Det kommer visa sig att alla de räknelagarna inte alltid gäller när man räknar med annat än de reella talen. Vi definierar även vad som menas med en algebra. Andra kapitlet kommer sedan att behandla de komplexa talen och tredje kapitlet om hur de komplexa talen kan utvidgas. Det fjärde kapitlet handlar om kvaternionerna och hur de matematiskt är uppbyggda. I det femte kapitlet visas hur kvaternioner kan användas rent matematiskt med rotationer. I det avslutande kapitlet redogörs det för hur kvaternioner i praktiken appliceras och förslag på vidareläsning om ämnet. Arbetet förutsätter att läsaren i viss mån är bekant med de komplexa talen samt känner till hur vektorrum är uppbyggda och fungerar.

1.2 Räknelagar

När man räknar med reella tal brukar man ibland ta vissa räknelagar för givet. Det finns några grundläggande räknelagar som alla gäller för de reella talen $\mathbf{R}$. Dessa är som följer:

1. Distributivitet:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

och

$$(x + y)z = xz + yz$$

för alla x, y, z .

Detta är en lag för sambandet mellan addition och multiplikation.

2. Associativitet:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

$$(xy)z = x(yz)$$

för alla x, y, z .

Detta är en lag som innebär att det inte spelar någon roll hur man grupperar tal vid addition respektive multiplikation.

3. Kommutativitet:

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

för alla x, y .

Detta är en lag som innebär att det inte spelar någon roll vilken ordning två tal står om varandra.

4. Identitetsselement:

Låt x utgöra alla möjliga tal. Om det då finns element a och b sådana att $x + a = x$ och $xb = bx = x$, så är a det additiva identitetsselementet och b det multiplikativa identitetsselementet. Detta innebär alltså att det finns ett tal a som kan adderas till samt ett annat tal b som multipliceras med ett annat tal utan att x förändras. För $\mathbf{R}$ är gäller att $a = 0$ och $b = 1$ och vi låter i nästa punkt dessa identitetsselement benämnas som just 0 och 1.

5. Invers:

För att överhuvudtaget kunna tala om invers krävs att det finns ovan nämnda identitetsselement. Om det för alla tal x finns ett tal $-x$ som uppfyller $x + (-x) = 0$ så är $-x$ den additiva inversen, alltså tal som adderat med varandra ger det additiva identitetsselementet. Om det finns ett tal x^{-1} om $x \neq 0$ som uppfyller $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ så är x^{-1} den multiplikativa inversen, alltså tal som multiplicerat med varandra ger det multiplikativa identitetsselementet. För de reella talen är $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Vi kommer återkomma till dessa lagar i nästa avsnitt samt senare när vi behandlar andra algebraiska system än $\mathbf{R}$.

1.3 Vad är en algebra?

Allmänt används ordet algebra för att beskriva matematik när man låter symboler och bokstäver representera reella tal med reella tals egenskaper. När ordet används i sådana syften talar man om elementär algebra. Men vad är en algebra? De reella talen utgör en algebra men faktum är att $\mathbf{R}$ bara är en av oändligt många varianter av hur en algebra kan se ut. Beroende på vilka strukturer man ger en algebra får den vissa egenskaper. Oavsett hur en algebra konstrueras måste den uppfylla vissa krav.

Definition 1. En reell algebra A utgörs av ett n -dimensionellt reellt vektorrum. Alltså

$$\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbf{R}\},$$

försett med en multiplikation. För att kalla det en algebra måste multiplikationen åtminstone måste uppfylla följande:

1. Distributivitet:

$$x(y + z) = xy + xz$$

och

$$(y + z)x = yx + zx$$

för alla $x, y, z \in \mathbf{A}$.

2. Att reella tal är skalärer:

$$a \cdot kb = k \cdot ab = ka \cdot b$$

$$a(kb) = k(ab) = (ka)b$$

för alla $k \in \mathbf{R}$ och alla $a, b \in \mathbf{A}$.

Vad innebär då detta? Distributiviteten kräver vi för att det ska finnas ett vettigt samband mellan multiplikation och addition. Sedan vill vi att de reella talen kan förflyttas utan restriktioner vid multiplikation. De beter sig precis som reella tal gör i vanliga fall även om de ingår i en annan algebra. $\mathbf{R}$ är som vi nämnt ett exempel på en algebra. Ett annat exempel är $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, som är kvadratiske matriser.

Exempel 1. För två godtyckliga matriser i $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ gäller vid multiplikation att

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + cf & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix}.$$

Vi kan se på svaren att matriserna skiljer sig åt. Det betyder att detta är en icke-kommutativ algebra. Associativitet är inte heller nödvändigt för en algebra men varje räknelag en algebra inte uppfyller gör den mer vag och svårhanterlig. Man talar ibland om algebra med etta som är en algebra som innefattar ett identitetselement vid multiplikation. Finns detta identitetselement samt att algebran har multiplikativa inverser till alla tal $\neq 0$ så kallas det för en divisionsalgebra. Det innebär helt enkelt att det är möjligt att räkna med division.

Att det endast finns en additiv invers till varje tal i en algebra kan ses som självklart med tanke på att man helt enkelt bara placerar ett minustecken framför talet för att få dess additiva invers. Om x är ett unikt tal är även $-x$ unikt. Men kanske kan det finnas flera multiplikativa inverser till varje tal?

Sats 1. *I en associativ algebra finns det som mest en multiplikativ invers till varje element.*

Bevis. Låt x^{-1} vara en multiplikativ invers till x . Antag att z är en annan multiplikativ invers. Då gäller att

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

och

$$xz = zx = 1.$$

Eftersom associativitet råder gäller att

$$(x^{-1}x)z = x^{-1}(xz).$$

Sedan är det givet att

$$x^{-1}x = xz = 1$$

och vi kan därför sätta att

$$(x^{-1}x)z = x^{-1}(xz) \iff 1 \cdot z = x^{-1} \cdot 1 \iff z = x^{-1}$$

och därmed är inte z någon annan invers. □

Är algebran associativ finns således som mest en multiplikativ invers för varje tal. Om associativitet inte råder kan man däremot inte utesluta att det finns flera multiplikativa inverser.

1.4 Algebror med nya element

Bland alla algebror finns sådana som utöver de reella talen innehåller ett eller flera element ξ . Dessa element är då alltså skilda från $\mathbf{R}$. Elementen adderas komponentvis men kan ges olika egenskaper under multiplikation. En algebra som innehåller komponenter ξ kräver samma lagar som alla algebror och skrivs vid n dimensioner som

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + \dots + a_n\xi_n, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

För samtliga algebror i detta arbete kommer $\xi_1 = 1$. Det gör att n-dimensionella algebrorna i praktiken skrivs som

$$a_1 + a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + \dots + a_n\xi_{n-1} \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

Det är nödvändigt att multiplikation mellan alla komponenter ξ_i är definierad vid en sådan algebra.

Talet 1 tillsammans med de nya komponenterna utgör en bas för det n-dimensionella rummet enligt följande vis

$$1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\xi_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\xi_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

2 Utvidgning av de reella talen

2.1 Två dimensioner

När man utvidgar $\mathbf{R}$ till två dimensioner $\mathbf{R}^2$ består algebran av talpar med två komponenter (a, b) . De två komponenterna motsvarar varsin dimension i den nya algebran. Om man utvidgar algebran till två dimensioner med ett nytt element ξ blir det på formen $a + b\xi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Addition för dessa sker komponentvis enligt

$$(a + b\xi) + (c + d\xi) = (a + c) + (b + d)\xi.$$

Multiplikation däremot kan bete sig olika beroende på vilka egenskaper vi vill att algebran ska ha. Oavsett hur så är det några egenskaper vi vill att multiplikationen ska uppfylla för att det ska uppfylla får definition av vad som är en algebra. Den första punkten är för att få ett konsekvent beteende för de reella talen och de två resterande punkterna ingår i definitionen för det som vi kallar en algebra.

1. Multiplikation av reella tal ska ge samma resultat som multiplikation av tal i $\mathbf{R}$, d.v.s. att

$$(a + 0\xi)(b + 0\xi) = ab + 0\xi.$$

2. Algebran måste uppfylla de distributiva lagarna, alltså i detta fall

$$(a + b\xi)((c + d\xi) + (e + f\xi)) = (a + b\xi)(c + d\xi) + (a + b\xi)(e + f\xi)$$

och

$$((a + b\xi) + (c + d\xi))(e + f\xi) = (a + b\xi)(e + f\xi) + (c + d\xi)(e + f\xi).$$

3. Vi kräver även att likheten

$$x(a + b\xi) \cdot y(c + d\xi) = xy \cdot (a + b\xi)(c + d\xi)$$

gäller för alla $x, y \in \mathbf{R}$, alltså att de reella talen kan kastas om utan att det påverkar produkten vid multiplikation.

Ska vi efterfölja detta kommer multiplikationen av tal i två dimensioner se ut enligt

$$(a + b\xi)(c + d\xi) = a(c + d\xi) + (b\xi)(c + d\xi) = ac + ad\xi + bc\xi + bd\xi^2.$$

Det som nu kan variera är värdet av ξ^2 . Det enda som är givet är att talet ξ^2 är av formen $a + b\xi$. Om man går in mer på djupet med detta visar det sig att en algebra på formen $\{a + b\xi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ är isomorf med någon utav följande:

1. Komplexa talen

$$a + bi \text{ där } i^2 = -1.$$

2. Dubbla talen

$$a + bD \text{ där } D^2 = 1.$$

3. Duala talen

$$a + b\epsilon \text{ där } \epsilon^2 = 0.$$

Att en algebra är isomorf med en annan innebär inte nödvändigtvis att de är identiskt lika men att de har samma struktur. För bevis till detta hänvisar jag läsaren till referens [5] s. 11. Alla de tre ovan är associativa, kommutativa och algebror med etta (multiplikativt identitetsselement). Det är dock bara de komplexa talen som är en divisionsalgebra.

2.2 De komplexa talen

Den mest använda av ovanstående algebror är de komplexa talen, som betecknas $\mathbf{C}$. Dessa är alltså på formen $a + bi$ med villkoret $i^2 = -1$. Man brukar då kalla a för det komplexa talets reella del och b för den imaginära delen. Talet i framkom först under 1500-talet med Girolamo Cardano och Rafael Bombelli som förgrundsfigurer. Primärt hade de komplexa talen syftet att lösa ekvationer som ger kvadratrötter av negativa tal. De komplexa talen har dock givits andra användningsområden med tiden. Ett sådant är att de fungerar för att rotera en punkt eller vektor i planet. Jean-Robert Argand kom i början på 1800-talet till insikten att eftersom $i = \sqrt{-1}$ så genererar ju $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ och motsvarar alltså en rotation ett halvt varv eller 180 grader om man så vill. Det var grunden till att se på talet i som en möjlighet att rotera i planet. Kända matematiska namn som Leonhard Euler och Carl Friedrich Gauss har också påverkat och utvecklat användningen för de komplexa talen, inte minst hur man kan använda dem på polär form.

Den reella tallinjen och den imaginära tallinjen är vinkelräta axlar och spänner upp det komplexa talplanet. Detta kan ses som det tvådimensionella planet $\mathbf{R}^2$ i och med att $1 = (1, 0)$ och $i = (0, 1)$ utgör basvektorer. Talen i det komplexa talsystemet utgörs alltså av talpar som anger koordinater, en koordinat längs med respektive axel. Exempelvis ligger det komplexa talet eller vektorn $2 + 3i$ två enheter längs med den reella axeln och tre enheter längs med den imaginära axeln, i punkten $(2, 3)$. Om en vektor multipliceras med ett tal

$x \in \mathbf{R}$ innebär det att dess längd förändras. Multiplikation med 2 fördubblar vektorns längd och multiplikation med -1 gör att den riktas åt motsatt håll. Multiplikation med den imaginära enheten i gör istället att vektorn roteras runt origo. Exempelvis gör multiplikation med i att vektorn roteras 90 grader moturs och multiplikation med i^2 ger rotation med 180 grader, vilket är logiskt eftersom $i^2 = -1$ och rotation med 180 grader motsvarar samma operation som att rikta en vektor åt motsatt håll.

2.3 Vilka räknelagar uppfyller de komplexa talen?

Additionen sker komponentvis och multiplikationen för två godtyckliga tal $a+bi$ och $c+di$ sker enligt

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Då detta arbete inte har de komplexa talen som främsta fokus kommer det inte göras bevis för alla räknelagar som $\mathbf{C}$ uppfyller. Men faktum är att den uppfyller samtliga av de lagar som nämndes i första kapitlet.

1. $\mathbf{C}$ uppfyller distributivitet.
2. $\mathbf{C}$ uppfyller associativitet.
3. $\mathbf{C}$ uppfyller kommutativitet.
4. $\mathbf{C}$ har det additiva enhetselementet 0 och det multiplikativa enhetselementet 1.
5. Tal $a+bi \in \mathbf{C}$ har den additiva inversen $-a-bi$ och den multiplikativa inversen $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$ om $a+bi \neq 0$. Inversen är unik då $\mathbf{C}$ är associativ (se sats 1).

Vi kan även konstatera att $\mathbf{C}$ är en divisionsalgebra. När man räknar med division för komplexa tal brukar man lösa det genom att förlänga med nämnarens konjugat. Konjugatet till $c+di$ är $c-di$. Tag en godtycklig division

$$\frac{a+bi}{c+di}.$$

Förlängning med nämnarens konjugat ger

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}.$$

Nämnaren är nu helt reell och divisionen går att räkna ut.

2.4 Komplexa tal och rotationer

Det nämndes tidigare exempel på hur man kan rotera en vektor i det komplexa talplanet. Men för att rotera mer kalibrerat behövs såklart en hållbar metod.

Sats 2. Om vektorn $v = (a, b)$ i $\mathbf{R}^2$ ska roteras moturs runt origo med vinkeln θ ges den roterade vektorn $v' = (a', b')$ av

$$v' = (\cos \theta + i \sin \theta)v.$$

Bevis. För de komplexa talen $\mathbf{C}$ utgör de reella talen x-axeln och de imaginära talen y-axeln. Vektorn $v = (a, b)$ motsvarar $a + bi$ i $\mathbf{C}$. Man kan dela upp v till

$$v = v_x + v_y$$

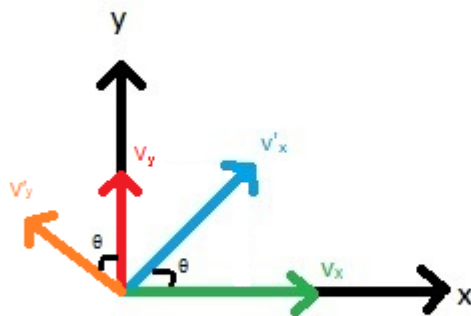
där

$$v_x = (a, 0) \text{ och } v_y = (0, b)$$

samt v' till

$$v' = v'_x + v'_y$$

Det innebär med andra ord att v_x ligger längs med x-axeln v_y ligger längs med y-axeln. Vektorerna v'_x och v'_y har roterats med vinkeln θ från v_x respektive v_y . Se nedan bild.



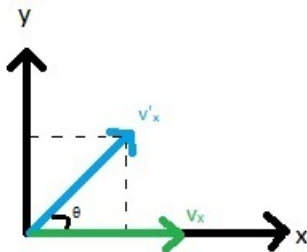
Eftersom de nu uppdelade vektorerna v_x och v_y ligger längs med varsin axel har vi att

$$v'_x = (a, 0)'$$

och

$$v'_y = (0, b)'.$$

Betrakta nu nästa figur nedan. Den visar bara rotationen från v_x till v'_x .



De streckade linjerna bildar räta vinklar med koordinataxlarna och vi kan då konstatera att

$$v'_x = (a, 0)' = (a \cos \theta, a \sin \theta).$$

På ett liknande sätt (ingen bild bifogas) kan man sedan konstatera att

$$v'_y = (0, b)' = (-b \sin \theta, b \cos \theta).$$

Vi har nu att

$$\begin{aligned} v' &= (a, 0)' + (0, b)' = (a \cos \theta, a \sin \theta) + (-b \sin \theta, b \cos \theta) \\ &= (a \cos \theta - b \sin \theta, a \sin \theta + b \cos \theta). \end{aligned}$$

Sätt sedan att $\cos \theta = c$ och $\sin \theta = d$. Vi får då istället

$$v' = (ac - bd, ad + bc).$$

Skriver vi nu om denna tvådimensionella vektor som ett komplext tal får vi

$$(ac - bd) + (ad + bc)i$$

vilket är precis definitionen för multiplikation av två komplexa tal $(a+bi)(c+di)$. Om vi rör oss i det komplexa talplanet ges alltså rotation av $v = a + bi$ av

$$v' = (a + bi)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

eller, eftersom de komplexa talen kommuterar,

$$v' = (\cos \theta + i \sin \theta)(a + bi).$$

Sedan är ju $a + bi$ helt enkelt vektorn $v = (a, b)$ och vi har då slutligen att

$$v' = (\cos \theta + i \sin \theta)v$$

och beviset står klart. □

Det är värt att nämna att denna formel ibland skrivs

$$v' = e^{i\theta}v.$$

Detta är för att Eulers formel säger att

$$e^{i\theta} = \cos \theta + \sin \theta i.$$

Denna formel visar alltså på hur man kan rotera en vektor i $\mathbf{R}^2$ med hjälp av det imaginära talet i . Nedan visas ett exempel.

Exempel 2. Uppgiften är att rotera vektorn $v = (1, 1)$ med vinkeln $\theta = \frac{3\pi}{4}$. I $\mathbf{C}$ skrivs v som $1 + i$ och rotationen av v ges då av

$$\begin{aligned} v' &= \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) (1 + i) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) (1 + i) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}i^2 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Sedan gäller att $v' = -\sqrt{2}$ i $\mathbf{C}$ motsvarar vektorn $(-\sqrt{2}, 0)$ i $\mathbf{R}^2$.

3 Utvidgning av de komplexa talen

3.1 Tre dimensioner

Vi har nu visat hur de komplexa talen är uppbyggda och hur de kan användas. En sak som nämdes är hur de kan ses som vektorer i planet $\mathbf{R}^2$. Skulle i sådana fall en algebra med ytterligare en komponent ξ kunna generera vektorer i rummet $\mathbf{R}^3$?

Sats 3. *Det är omöjligt att utvidga de komplexa talen till en tredimensionell algebra med tal är på formen $\{a + bi + c\xi \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$ där $i^2 = -1$ om vi förutsätter att algebran är associativ.*

Bevis. All multiplikation måste generera tal i som också tillhör algebran. Därför antar vi att multiplikationen $i\xi$ ger ett godtyckligt tal på formen $a + bi + c\xi$ där $a, b, c \in \mathbf{R}$, alltså att

$$i\xi = a + bi + c\xi.$$

Multiplikation med i från vänster ger

$$ii\xi = ai + bi^2 + ci\xi.$$

Eftersom $ii = i^2$ har vi därmed

$$i^2\xi = ai - b + ci\xi.$$

Den imaginära enheten i har egenskapen att $i^2 = -1$ och då får vi i stället

$$-\xi = ai - b + ci\xi.$$

Multiplikation med både vänsterled och högerled med (-1) ger

$$\xi = b - ai - ci\xi.$$

Om vi ersätter $i\xi$ med det ursprungliga antagandet att $i\xi = a + bi + c\xi$ får vi

$$\xi = b - ai - c(a + bi + c\xi)$$

vilket utskrivet blir

$$\xi = b - ai - ca - cbi - c^2\xi$$

som kan skrivas om till

$$\xi = (b - ac) + (-a - bc)i - c^2\xi.$$

Sedan samlar vi alla termer med ξ på ena sidan

$$\xi + c^2\xi = (b - ac) + (-a - bc)i$$

och förenklar till

$$(1 + c^2)\xi = (b - ac) + (-a - bc)i,$$

där $1, a, b, c \in \mathbf{R}$. Alltså är talet ξ av formen $\xi = \alpha + \beta i$, där $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ och därmed är det fortfarande bara en algebra i två dimensioner. Algebran är inte utvidgad. $\square$

Eftersom det inte är genomförbart att utvidga de komplexa talen till tre dimensioner på ett användbart sätt går vi i stället in på hur det kan se ut med ytterligare en dimension. Det kommer att visa sig att de komplexa talen faktiskt går att utvidga till en algebra med fyra dimensioner. I en sats från år 1877 visar matematikern Ferdinand Georg Frobenius att varje ändligt dimensionell, associativ divisionsalgebra är isomorf med nämnda $\mathbf{R}$ eller $\mathbf{C}$ eller den fyrdimensionella algebran $\mathbf{H}$ som vi återkommer till i nästa kapitel. För bevis till denna sats av Frobenius hänvisar jag läsaren till referens [3] s. 229.

3.2 Fyra dimensioner

Precis som när man konstruerar en algebra i två dimensioner vill vi att en algebra i fyra dimensioner, med nya element ξ , ska uppfylla vissa räknelagar. Den kommer att bestå av fyra komponenter (a, b, c, d) och addition fungerar precis som för tal i två dimensioner där man adderar de respektive komponenterna med varandra.

Addition sker alltså enligt

$$(a+b\xi_1+c\xi_2+d\xi_3)+(e+f\xi_1+g\xi_2+h\xi_3) = (a+e)+(b+f)\xi_1+(c+g)\xi_2+(d+h)\xi_3.$$

Multiplikationen önskar vi sedan att den ska bete sig på vissa sätt. Den första punkten är åter för att få ett konsekvent beteende för reella tal och de två resterande punkterna ingår i definitionen av vad vi kallar en algebra.

1. Multiplikation av reella tal ska ge samma resultat som multiplikation av tal i $\mathbf{R}$, d.v.s. att

$$(a + 0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3)(e + 0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3) = ae + 0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3.$$

2. Multiplikationen ska naturligtvis uppfylla de distributiva lagarna. Om alla δ står för godtyckliga tal i den fyrdimensionella algebran ska det gälla att

$$\delta_1(\delta_2 + \delta_3) = \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3$$

och

$$(\delta_1 + \delta_2)\delta_3 = \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3.$$

3. Vi kräver även här att likheten

$$x\delta_1 \cdot y\delta_2 = xy \cdot \delta_1\delta_2$$

gäller för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

Som en konsekvens av dessa lagar som man vill att de fyrdimensionella algebrorna ska uppfylla kommer en multiplikation se ut som nedan. Vi har två godtyckliga tal från en sådan algebra

$$\delta_1 = a + b\xi_1 + c\xi_2 + d\xi_3 \text{ och } \delta_2 = e + 0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3.$$

Om dessa två multipliceras med varandra kommer vi att få ut en produkt bestående av 16 termer. Produkten blir

$$\begin{aligned} \delta_1\delta_2 &= (a + b\xi_1 + c\xi_2 + d\xi_3)(e + f\xi_1 + g\xi_2 + h\xi_3) \\ &= ae + af\xi_1 + ag\xi_2 + ah\xi_3 + be\xi_1 + bf\xi_1^2 + bg\xi_1\xi_2 + bh\xi_1\xi_3 + ce\xi_2 \\ &\quad + cf\xi_2\xi_1 + cg\xi_2^2 + ch\xi_2\xi_3 + de\xi_3 + df\xi_3\xi_1 + dg\xi_3\xi_2 + dh\xi_3^2. \end{aligned}$$

4 Kvaternioner

Sir William Rowan Hamilton var en irländsk matematiker och astronom. Han föddes 1805 i Dublin och ansågs var något utav ett underbarn då han redan vid ung ålder behärskade många olika språk och även var framstående inom matematik. År 1835 visade han att räkning med komplexa tal var likvärdigt med att räkna med ordnade talpar av reella tal. Därifrån fick han ett intresse för hur addition och framför allt multiplikation av komplexa tal betedde sig i planet $\mathbf{R}^2$. Med detta i åtanke försökte han i många år ta fram ett utvidgat system av de komplexa talen för att kunna göra liknande operationer i rummet $\mathbf{R}^3$. Det låg närmast att utvidga till en algebra med tal på formen $a + bi + cj$ där $i^2 = j^2 = -1$. Han försökte med detta i många år och i ett brev berättade Hamilton om hur en av hans söner undrat om han kunde multiplicera tripplar ännu varpå han då svarat ”Nej, jag kan bara addera och subtrahera dem.” Han hittade aldrig något bra sätt att multiplicera tal i detta system. Vi har visat tidigare i sats 3 att det mycket riktigt inte är genomförbart.

Det gick alltså flera år utan att Hamilton hittade någon lösning på problemet. Sedan en dag, närmare bestämt den 16 oktober år 1843, ska han ha promenerat med sin fru på gatorna i Dublin. Då slog det honom att det han behövde göra var att utvidga till en algebra med fyra dimensioner. Han fortsatte på sin tankegång med tre dimensioner och lade till den imaginära enheten k . Talen i hans algebra fick då formen $a + bi + cj + dk$ med villkoret $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Historien säger att Hamilton i sin iver ska vid tillfället ha ristat in detta villkor på en stenbro i Dublin. Själva ristningen syns inte nu (om den nu någonsin funnits) men det finns än idag en skylt vid denna bro som uppmärksammar detta tillfälle. Framställningen av historien om Hamilton baseras främst på text från referens [3] s. 189.



Skylten som sitter på Broom Bridge i Dublin. Bild: Wikipedia.

Det han hade gjort var att han hade skapat tal med fyra dimensioner i syftet att räkna med tal av tre dimensioner. Dessa tal med fyra dimensioner kallas kvaternioner, eller Hamiltons kvaternioner, och själva algebran benämns oftast som $\mathbf{H}$ efter upphovsmakarens efternamn. Hamilton avled år 1865 och året därpå publicerades hans tjocka bok *Elements of Quaternions*. Den behandlar det han kom fram till om kvaternioner.

Definition 2. *Kvaternionerna är en fyrdimensionell algebra där elementen 1, i , j och k utgör en bas. En kvaternion skrivs $q = a + bi + cj + dk$ där talen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Mängden av alla kvaternioner betecknas $\mathbf{H}$.*

Algebran $\mathbf{H}$ kan ses som $\mathbf{R}^4$ genom att sätta

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1)$$

som basvektorer.

4.1 Addition för kvaternioner

Addition för $\mathbf{H}$ sker precis som alla andra algebror komponentvis, alltså

$$(a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk) = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k.$$

Exempel 3. *De två kvaternionerna $q_1 = 1 + 2i + 2k$ och $q_2 = 3 + j + k$ adderas på följande vis*

$$q_1 + q_2 = (1 + 2i + 2k) + (3 + j + k) = 4 + 2i + j + 3k.$$

4.2 Multiplikation för kvaternioner

Hamilton gav kvaternionerna villkoret $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Det här är alltså givet samt att multiplikation av reella tal beter sig som alltid. Men hur blir det vid multiplikation av i , j och k med varandra? Eftersom det inte är några parenteser utsatta för villkoret $ijk = -1$ kräver det associativitet. Som nämnt är det givet att

$$ijk = -1.$$

Multiplikation med i från vänster ger

$$iijk = -i.$$

Eftersom $ii = i^2$ får vi

$$i^2jk = -i$$

och eftersom $i^2 = -1$ får vi

$$-jk = -i.$$

Multiplikation av både vänsterled och högerled med (-1) ger

$$jk = i.$$

Genom att använda oss av detta kan vi visa en till multiplikation, om vi multiplikerar med j från vänster får vi

$$j^2k = ji.$$

Villkoret $j^2 = -1$ samt att byta på plats på vänsterled och högerled ger

$$\mathbf{j} \mathbf{i} = -\mathbf{k}.$$

Om vi nu återvänder till

$$ijk = -1.$$

Multiplikation med k från höger ger

$$ijk^2 = -k.$$

Villkoret $k^2 = -1$ ger,

$$-ij = -k$$

och multiplikation med (-1) på båda sidor ger

$$\mathbf{i} \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Med liknande uträkningar kan man även räkna ut att

$$\mathbf{k} \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{k} \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Multiplikation för kvaternioner kan alltså sammanfattas enligt nedanstående tabell.

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Med hjälp av tabellen och hur vi vill att en algebra i fyra dimensioner ska bete sig vid multiplikation kan vi uttrycka multiplikation av kvaternioner enligt

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\
&= ae + a fi + agj + ahk + bei + b fi^2 + bgij + bhik + cej \\
&\quad + cfji + cgj^2 + chjk + dek + dfki + dgkj + dhk^2. \\
&= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + (ag - bh + ce + df)j + (ah + bg - cf + de)k.
\end{aligned}$$

Definition 3. Multiplikation för kvaternioner definieras enligt

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i \\ &\quad + (ag - bh + ce + df)j + (ah + bg - cf + de)k. \end{aligned}$$

Exempel 4. Låt $q_1 = 1 + 2i + 2k$ och $q_2 = 3 + j + k$. Multiplikation $q_1 q_2$ beräknas då på följande vis

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (1 + 2i + 2k)(3 + j + k) \\ &= 3 + j + k + 6i + 2ij + 2ik + 6k + 2kj + 2k^2 \\ &= 3 + j + k + 6i + 2k - 2j + 6k - 2i - 2 \\ &= 1 + 4i - j + 9k. \end{aligned}$$

4.3 Räknelagar och egenskaper

Vi ska nu titta närmare på vilka av de räknelagar som nämns i arbetets början som kvaternioner uppfyller.

Den distributiva lagen är som nämnt innan vital, ett måste, för att klassa något som en algebra. Kvaternioner uppfyller denna.

Sats 4. Kvaternioner uppfyller distributivitet.

Bevis. Låt $a, b, c \in \mathbf{H}$. Vi skriver då dessa som

$$\begin{aligned} a &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k), \\ b &= (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k), \\ c &= (c_1 + c_2i + c_3j + c_4k) \end{aligned}$$

där $a_1, a_2, \dots, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

Det vi vill visa är att $(a + b)c = ac + bc$ samt att $a(b + c) = ab + ac$. Beviset kommer emellertid bara att göras för det första fallet då bevisen är snarlika. Vi beräknar först

$$\begin{aligned} (a + b)c &= ((a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k))(c_1 + c_2i + c_3j + c_4k) \\ &= ((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k)(c_1 + c_2i + c_3j + c_4k) \\ &= ((a_1c_1 + b_1c_1) + (a_1c_2 + b_1c_2)i + (a_1c_3 + b_1c_3)j + (a_1c_4 + b_1c_4)k \\ &\quad + (a_2c_1 + b_2c_1)i + (a_2c_2 + b_2c_2)i^2 + (a_2c_3 + b_2c_3)ij + (a_2c_4 + b_2c_4)ik \\ &\quad + (a_3c_1 + b_3c_1)j + (a_3c_2 + b_3c_2)ji + (a_3c_3 + b_3c_3)j^2 + (a_3c_4 + b_3c_4)jk \\ &\quad + (a_4c_1 + b_4c_1)k + (a_4c_2 + b_4c_2)ki + (a_4c_3 + b_4c_3)kj + (a_4c_4 + b_4c_4)k^2 \\ &= (a_1c_1 + b_1c_1 - a_2c_2 - b_2c_2 - a_3c_3 - b_3c_3 - a_4c_4 - b_4c_4) \\ &\quad + (a_2c_2 + b_2c_2 + a_2c_1 + b_2c_1 + a_3c_4 + b_3c_4 - a_4c_4 - b_4c_4)i \\ &\quad + (a_1c_3 + b_1c_3 + a_3c_1 + b_3c_1 + a_4c_2 + b_4c_2 - a_2c_4 - b_2c_4)j \\ &\quad + (a_1c_4 + b_1c_4 + a_2c_3 + b_2c_3 + a_4c_1 + b_4c_1 - a_3c_2 - b_3c_2)k. \end{aligned}$$

Nu beräknar vi i stället

$$\begin{aligned}
ac + bc &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)(c_1 + c_2i + c_3j + c_4k) \\
&\quad + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)(c_1 + c_2i + c_3j + c_4k) \\
&= a_1c_1 + a_1c_2i + a_1c_3j + a_1c_4k + a_2c_1i + a_2c_2i^2 + a_2c_3ij + a_2c_4ik \\
&\quad + a_3c_1j + a_3c_2ji + a_3c_3j^2 + a_3c_4jk + a_4c_1k + a_4c_2ki + a_4c_3kj + a_4c_4k^2 \\
&\quad + b_1c_1 + b_1c_2i + b_1c_3j + b_1c_4k + b_2c_1i + b_2c_2i^2 + b_2c_3ij + b_2c_4ik \\
&\quad + b_3c_1j + b_3c_2ji + b_3c_3j^2 + b_3c_4jk + b_4c_1k + b_4c_2ki + b_4c_3kj + b_4c_4k^2 \\
&= (a_1c_1 + b_1c_1 - a_2c_2 - b_2c_2 - a_3c_3 - b_3c_3 - a_4c_4 - b_4c_4) \\
&\quad + (a_2c_2 + b_2c_2 + a_2c_1 + b_2c_1 + a_3c_4 + b_3c_4 - a_4c_4 - b_4c_4)i \\
&\quad + (a_1c_3 + b_1c_3 + a_3c_1 + b_3c_1 + a_4c_2 + b_4c_2 - a_2c_4 - b_2c_4)j \\
&\quad + (a_1c_4 + b_1c_4 + a_2c_3 + b_2c_3 + a_4c_1 + b_4c_1 - a_3c_2 - b_3c_2)k.
\end{aligned}$$

De två uttrycken med 32 termer vardera är identiska och man kan konstatera att den distributiva lagen håller för kvaternioner. $\square$

Lagen om associativitet kräver att $(xy)z = x(yz)$, alltså att det inte gör någon skillnad i vilken turordning faktorerna multipliceras (så länge de står på samma sida om varandra). Detta uppfyller kvaternionerna.

Sats 5. *Kvaternioner uppfyller associativitet.*

Bevis. Antag att $q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{H}$. Multiplikationerna $(q_1q_2)q_3$ samt $q_1(q_2q_3)$ ger båda nya kvaternioner på formen $a + bi + cj + dk$. De multiplicerade termerna kommer att få utseendet $(u_1u_2)u_3$ respektive $u_1(u_2u_3)$ där u_1 är en komponent a, bi, cj eller dk från q_1 , u_2 en komponent från q_2 och u_3 en komponent från q_3 . Det vi vill kontrollera är att likheten $(u_1u_2)u_3 = u_1(u_2u_3)$ alltid gäller. Om det går att visa står beviset klart.

Det räcker alltså att kontrollera det för det speciella fall när q_1, q_2, q_3 är några utav kvaternionerna a, bi, cj, dk . Då a, b, c, d bara är godtyckliga reella tal som vi vet kommuterar med allt och kan justeras räcker det att visa för de "rena" kvaternionerna $1, i, j, k$.

Om någon av kvaternionerna är 1 gäller associativitet eftersom

$$(1 \cdot q_1)q_2 = 1(q_1q_2) = (q_1 \cdot 1)q_2 = q_1(1 \cdot q_2) = q_1(q_2 \cdot 1) = (q_1q_2)1 = q_1q_2.$$

Det som återstår är att kontrollera när kvaternionerna q_1, q_2, q_3 är någon utav kvaternionerna i, j, k . Det finns då alltså $3^3 = 27$ möjligheter. Det visar sig att associativitet gäller för samtliga. Exempelvis

$$\begin{aligned}
(ii)i &= i(ii) = -i, \\
(ij)k &= i(jk) = -1, \\
(kj)j &= k(jj) = -k.
\end{aligned}$$

$\square$

Kvaternioner uppfyller dock inte kommutativitet. Det finns flera motexempel för att kvaternioner inte uppfyller det. Vi ser i tabellen tidigare att t.ex. $ij \neq ji$.

En egenskap som kvaternioner delar med $\mathbf{R}$ är att de har precis samma identitetselement.

Sats 6. *Kvaternioner har 0 som identitetselement under addition och 1 som identitetselement under multiplikation.*

Bevis. Tag den godtyckliga kvaternionen $q = a + bi + cj + dk$. Vi kan då enkelt se att

$$a + bi + cj + dk + 0 = a + bi + cj + dk$$

och att

$$(a + bi + cj + dk)1 = 1(a + bi + cj + dk) = a + bi + cj + dk.$$

Kvaternionerna är desamma som innan operationerna och beviset står klart. $\square$

Vi behöver nu definiera två begrepp för att visa ytterligare räknelagar.

Definition 4. *Längden av en kvaternion q betecknas $|q|$. En godtycklig kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ har längden $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.*

Definition 5. *För varje kvaternion q finns ett konjugat (som också är en kvaternion). Konjugatet betecknas $\bar{q}$. En godtycklig kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ har konjugatet $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.*

Sats 7. *För alla kvaternioner $q_1 = a + bi + cj + dk$ och $q_2 = e + fi + gj + hk$ gäller att*

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

Bevis. Enligt definition 3 gäller att

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + (ag + ce + df - bh)j + (ah + de + bg - cf)k. \end{aligned}$$

Enligt definition 5 får vi att konjugatet är

$$\overline{q_1 q_2} = (ae - bf - cg - dh) + (dg - af - be - ch)i + (bh - ag - ce - df)j + (cf - ah - de - bg)k.$$

Sedan beräknar vi

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 \bar{q}_1 &= (a - bi - cj - dk)(e - fi - gj - hk) \\ &= ae - a fi - agj - ahk - bei + bfi^2 + bgij + bhik - cej \\ &\quad + cfji + cgj^2 + chjk - dek + dfki + dgkj + dhk^2 \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (dg - af - be - ch)i + (bh - ag - ce - df)j + (cf - ah - de - bg)k. \end{aligned}$$

Vi kan se att uttrycken är identiska och satsen är bevisad. $\square$

Sats 8. Varje kvaternion har en additiv invers och en om den är nollskild även en multiplikativ invers. För varje kvaternion q är den additiva inversen $-q$ och för den godtyckliga kvaternionen $q = a + bi + cj + dk$ ges den multiplikativa inversen q^{-1} av

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Bevis. Att den additiva inversen stämmer är uppenbart då $q + (-q) = 0$. Vi kontrollerar sedan att $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

$$qq^{-1} = \frac{(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Om vi först genomför multiplikationen i täljaren blir den

$$\begin{aligned} a^2 - abi - acj - adk + abi - b^2i^2 - bcij - bdik + acj \\ - bcji - c^2j^2 - cdjk + adk - bdkj - cdkj - d^2k^2 \end{aligned}$$

och sedan genomför den typiska kvaternionmultiplikationen för elementen i, j, k

$$a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck + bdj + acj + bck + c^2 - cdi + adk - bdj + cdi + d^2.$$

Adderar vi sedan termerna i täljaren med varandra har vi kvar

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

och vi kan då enkelt se när vi sätter ihop täljare och nämnare igen att

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1.$$

Satsen är bevisad för multiplikation från höger och ett snarlikt bevis, som ej kommer redogöras här, kommer att visa att den håller även vid multiplikation från vänster, d.v.s. att $q^{-1}q = 1$. $\square$

4.4 Kvaternioner som divisionsalgebra

I och med att det finns en multiplikativ invers för alla $q \in \mathbf{H}$ kan kvaternionerna kallas för en divisionsalgebra. Men innebär det att man kan lösa kvaternioner som skrivs med bråkstreck? För komplexa tal löser man ju bråk genom att förlänga med nämnarens konjugat. I nedan exempel prövar vi att använda samma metod om vi ska utföra division mellan två kvaternioner för att få fram kvoten.

Exempel 5. Vi vill beräkna

$$q = \frac{1 + 2i + 2j}{1 + k}.$$

Förlängning med konjugatet till nämnaren ger

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{(1+2i+2j)(1-k)}{(1+k)(1-k)} \\
 &= \frac{1-k+2i-2ik+2j-2jk}{1-k+k-k^2} \\
 &= \frac{1-k+2i+2j+2j-2i}{1+1} \\
 &= \frac{1+4j-k}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{4j}{2} - \frac{k}{2}.
 \end{aligned}$$

Detta verkar ju vara en lösning. Men eftersom kvaternioner inte är kommutativa måste vi även se vad förlängning med konjugatet från vänster ger.

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{(1-k)(1+2i+2j)}{(1-k)(1+k)} \\
 &= \frac{1+2i+2j-k-2ki-2kj}{1+k-k-k^2} \\
 &= \frac{1+2i+2j-k-2j+2i}{1+1} \\
 &= \frac{1+4i-k}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{4i}{2} - \frac{k}{2}.
 \end{aligned}$$

Som man kan se skiljer sig svaren åt. Med det i åtanke är det inte helt lämpligt att räkna division för kvaternioner med bråkstreck. Men kvaternioner är likväl en divisionsalgebra. Vad som kan vara mer lämpligt är att tala om höger- och vänsterkvot. Om q_1 ska "divideras" med q_2 har vi

$$q = \frac{q_1}{q_2}$$

Förlängning med inversen till q_2 från höger ger

$$q = \frac{q_1 q_2^{-1}}{q_2 q_2^{-1}} = \frac{q_1 q_2^{-1}}{1} = q_1 q_2^{-1}.$$

Förlängning med inversen till q_2 från vänster ger i stället

$$q = \frac{q_2^{-1} q_1}{q_2^{-1} q_2} = \frac{q_2^{-1} q_1}{1} = q_2^{-1} q_1.$$

Därför är det mer lämpligt att ställa upp det som

$$q = q_1 q_2^{-1}$$

samt

$$q = q_2^{-1}q_1$$

som då är höger- respektive vänsterkvot. Det råder då inget tvivel om vad man vill beräkna.

4.5 Skälärdel och vektordel

En kvaternion kan med fördel delas upp i två delar. På samma sätt som de komplexa talen har kvaternioner en reell del och en imaginär del. För en kvaternion $a + bi + cj + dk$ utgör a realdelen och $bi + cj + dk$ den imaginära delen. Följaktligen är en kvaternion enbart reell om den har utseendet $a + 0i + 0j + 0k$ och enbart imaginär om den har utseendet $0 + bi + cj + dk$. Mängden av alla skalärer för de imaginära elementen i , j och k kan tänkas motsvara de tre axlarna i ett kartesiskt koordinatsystem. I och med det kan man se det som att kvaternionerna $bi + cj + dk$ utgör rummet $\mathbf{R}^3$. Därifrån kommer kopplingen mellan kvaternioner och att räkna med vektorer i tre dimensioner. Det är därför praktiskt när man använder kvaternioner för att räkna i tre dimensioner att dela upp kvaternionerna i två delar, en skalär och en vektor.

Definition 6. En kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ kan delas upp i $(a, \vec{v})$, där den reella delen a är en skalär och den imaginära delen en vektor, $bi + cj + dk = (b, c, d) = \vec{v}$.

Exempel 6. Låt $q = 1 + 2i + 3j + 4k$. Skriven med skälärdel och vektordel får den då utseendet

$$(1, \overrightarrow{(2, 3, 4)}).$$

Sats 9. Vid uppdelning av en kvaternion i skalär- och vektordel är reglerna för beräkning vid addition och multiplikation

$$(a, \vec{v}_1) + (e, \vec{v}_2) = (a + e, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

respektive

$$(a, \vec{v}_1)(e, \vec{v}_2) = (ae - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, a\vec{v}_2 + e\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2).$$

Bevis. Uppdelning av q_1 och q_2 i varsin skälärdel och vektordel ger $q_1 = (a, \vec{v}_1)$ där $\vec{v}_1 = (b, c, d)$ och $q_2 = (e, \vec{v}_2)$ där $\vec{v}_2 = (f, g, h)$. Eftersom addition av skalärer och vektorer följer samma räknelagar som addition av kvaternioner, d.v.s. komponentvis, är det uppenbart att additionsregeln håller.

Den givna multiplikationen ger skälärdelen

$$\begin{aligned} ae - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= ae - (bf + cg + dh) \\ &= ae - bf - cg - dh, \end{aligned}$$

och vektordelen

$$\begin{aligned} a\vec{v}_2 + e\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= (af, ag, ah) + (be, ce, de) + (ch - dg, df - bh, bg - cf) \\ &= (af + be + ch - dg, ag + ce + df - bh, ah + de + bg - cf). \end{aligned}$$

Sätter man nu samman skalärdelen och vektordelen kan man konstatera att det blir samma godtyckliga kvaternion som om vi multiplicerat enligt den ursprungliga definitionen för multiplikation av kvaternioner (definition 3) och beviset står klart. $\square$

Exempel 7. Låt $q_1 = 1 + 2i + 2k$ och $q_2 = 3 + j + k$ bli uppdelade i skalär- och vektordel (samma kvaternioner som i exempel 4). De skrivs då som

$$q_1 = (1, (2, 0, 2)) \text{ och } q_2 = (3, (0, 1, 1)).$$

Multiplikationen $q_1 q_2$ blir då

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (1 \cdot 3 - ((2, 0, 2) \cdot (0, 1, 1)), 1(0, 1, 1) + 3(2, 0, 2) + (2, 0, 2) \times (0, 1, 1)) \\ &= (3 - 2, (0, 1, 1) + (6, 0, 6) + (-2, -2, 2)) \\ &= (1, (4, -1, 9)). \end{aligned}$$

Om man gör om $q_1 q_2$ till ursprunglig form för kvaternioner blir

$$q_1 q_2 = 1 + 4i - j + 9k$$

vilket är precis samma resultat som i exempel 4.

Innan vi går vidare till nästa kapitel är värt att poängtera att en kvaternion skriven i skalärdel och vektordel, $q = (a, \vec{v})$, får konjugatet

$$\bar{q} = (a, -\vec{v})$$

samt längden

$$|q| = \sqrt{a^2 + |\vec{v}|^2}.$$

5 Rotation med kvaternioner

Vi har tidigare visat att de komplexa talen kan ses som att de spänner upp planet $\mathbf{R}^2$ och att kvaternionernas imaginära del kan ses som att de spänner upp rummet $\mathbf{R}^3$. Vi har i kapitel 2 även visat hur de komplexa talen bl.a. kan användas för att rotera en vektor moturs i just planet $\mathbf{R}^2$. Med hjälp av kvaternioner kan man i stället rotera en vektor i rummet $\mathbf{R}^3$.

5.1 Rodrigues rotationsformel

Inom linjär vektoralgebra används vanligen rotationsmatriser för att rotera vektorer i rummet $\mathbf{R}^3$. Men det finns även en algoritm känd som Rodrigues rotationsformel, se referens [1] s. 12, som också roterar vektorer i $\mathbf{R}^3$. Vi kommer att göra en sats för Rodrigues formel men först gör vi ett lemma som hör till den satsen.

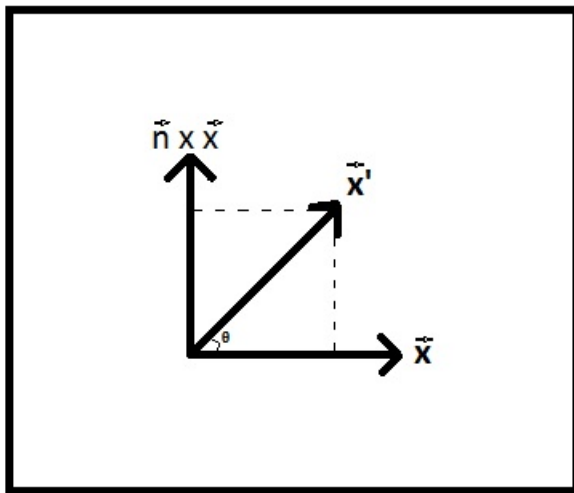
Lemma 1. Låt vektorn $\vec{n}$ ha längden 1 och utgå från origo. Låt vektorn $\vec{x}$ ligga i planet som är vinkelrätt mot $\vec{n}$ i origo och roteras moturs runt $\vec{n}$ med vinkeln θ . Om $\vec{x}'$ är den roterade versionen av $\vec{x}$ ges den av formeln

$$\vec{x}' = (\cos \theta) \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}).$$

Bevis. Vi konstaterar först att

$$\vec{n} \times \vec{x}$$

är en vektor som också ligger i detta plan och är vinkelrät mot både $\vec{n}$ och $\vec{x}$. I och med att $\vec{n} \times \vec{x}$ och $\vec{x}$ båda ligger i planet och är vinkelräta mot varandra så utgör de en bas för planet. Vi kan därför skriva $\vec{x}'$ som en linjärkombination av dessa eftersom den också ligger i samma plan. Det vi nu måste göra är att ta reda på vilken skalär vi ska multiplicera med dem båda för att få fram $\vec{x}'$. Betrakta nu bilden nedan. Det vi ser är planet som är vinkelrätt mot $\vec{n}$ och den vektorn kan alltså ses som att den pekar rakt ut ur bilden i punkten där $\vec{n} \times \vec{x}$ och $\vec{x}$ möts. De streckade linjerna är komposantuppdelade vektorer och det vi vill göra är att räkna ut dem då dessa kombinerade utgör $\vec{x}'$. Vi kallar vektorn som är parallell med $\vec{x}$ för $x'_{\vec{x}}$ och vektorn parallell med $\vec{n} \times \vec{x}$ för $x'_{\vec{n} \times \vec{x}}$.



Vi kan se att $x'_{\vec{x}}$, $x'_{\vec{n} \times \vec{x}}$ och $\vec{x}'$ utgör två rätvinkliga trianglar tillsammans med basvektorerna. Vi kan därför nu sätta att

$$\cos \theta = \frac{|x'_{\vec{x}}|}{|\vec{x}'|}$$

och

$$\sin \theta = \frac{|x'_{\vec{n} \times \vec{x}}|}{|\vec{x}'|}.$$

Eftersom det är ett längdförhållande vi är ute efter och $\vec{x}'$ har precis samma längd som $\vec{x}$ kan vi i stället skriva

$$\cos \theta = \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|}$$

och

$$\sin \theta = \frac{|\vec{x}' \times \vec{n}|}{|\vec{x}|}.$$

Genom att multiplicera med $|\vec{x}|$ i både vänsterled och högerled och byta plats på dessa får vi i stället

$$|\vec{x}'| = \cos \theta |\vec{x}|$$

och

$$|\vec{x}' \times \vec{n}| = \sin \theta |\vec{x}|.$$

Eftersom vektorerna motsvarar uppdelningen av $\vec{x}'$ vet vi nu att skalären som ska multipliceras med $\vec{x}$ är $\cos \theta$ och skalären som ska multipliceras med $\vec{n} \times \vec{x}$ är $\sin \theta$. Följaktligen har vi att

$$\vec{x}' = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x})$$

och beviset står klart. $\square$

Sats 10. Vektorn $\vec{x}$ roteras moturs med vinkeln θ runt en normerad vektor $\vec{n}$. Om $\vec{x}'$ är den roterade vektorn ges den av nedanstående formel (Rodrigues rotationsformel).

$$\vec{x}' = (1 - \cos \theta)(\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + (\cos \theta)\vec{x} + \sin \theta(\vec{n} \times \vec{x}).$$

Bevis. Vi vet att $\vec{x}$ är den ursprungliga vektorn och $\vec{x}'$ är den roterade vektorn. Det är givet att en vektor kan skrivas som en kombination av sin parallella del och sin vinkelräta del mot en annan vektor. Alltså i detta fall när $\vec{n}$ är vektorn vi vill rotera runt kan vi skriva att

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$$

där $\vec{x}_{\parallel}$ är en projektion av $\vec{x}$ på $\vec{n}$ och $\vec{x}_{\perp}$ är en projektion av $\vec{x}$ på planet som är vinkelrätt mot $\vec{n}$. På samma vis, av samma anledning som ovan, kan vi även skriva att

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\parallel}' + \vec{x}_{\perp}'.$$

Eftersom en vektor som roteras runt en vektor parallell med sig själv inte förändras noterar vi att

$$\vec{x}_{\parallel}' = \vec{x}_{\parallel}.$$

Man kan alltså se det som att när man roterar en vektor så förändras den inte på något sätt i riktningen för den axel vi roterar vektorn runt. Det som förändras är den vinkelräta delen mot rotationsaxeln. Vi skriver därför

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}'.$$

Vi betraktar sedan $\vec{x}_\perp'$. Eftersom den är vinkelrät mot $\vec{n}$ kan man projicera $\vec{x}_\perp'$ på det plan som är vinkelrätt mot $\vec{n}$ i origo. Nu använder vi oss av lemmat ovan och konstaterar att

$$\vec{x}_\perp' = (\cos \theta) \vec{x}_\perp + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}_\perp).$$

Om vi nu går tillbaka till det ursprungliga uttrycket kan vi nu i stället skriva

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp' = \vec{x}_\parallel + (\cos \theta) \vec{x}_\perp + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}_\perp).$$

Man kan omstrukturera $\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp \iff \vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel$. Vi ersätter sedan $\vec{x}_\perp$ med detta och får

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel + \cos \theta (\vec{x} - \vec{x}_\parallel) + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}_\perp).$$

Vidare kan man konstatera att

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{x} &= \vec{n} \times (\vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp) \\ &= \vec{n} \times \vec{x}_\parallel + \vec{n} \times \vec{x}_\perp \end{aligned}$$

samt att

$$\vec{n} \times \vec{x}_\parallel = 0$$

eftersom de är parallella. Nu har vi kvar att

$$\vec{n} \times \vec{x}_\perp = \vec{n} \times \vec{x}.$$

Genom att göra det bytet i vårt uttryck har vi nu att

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel + \cos \theta (\vec{x} - \vec{x}_\parallel) + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}).$$

Om vi delar upp parentesen som multipliceras med $\cos \theta$ kan vi skriva det som

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel - (\cos \theta) \vec{x}_\parallel + (\cos \theta) \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x})$$

eller

$$\vec{x}' = (1 - \cos \theta) \vec{x}_\parallel + (\cos \theta) \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}).$$

Slutligen vill försöka ersätta $\vec{x}_\parallel$. Eftersom $\vec{x}_\parallel$ är parallell med $\vec{n}$ kan vi skriva det som $\vec{n}$ multiplicerat med någon skalär. Den skalären kan man få genom att använda sig av projektionsformeln

$$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{1^2} \vec{n} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Det vi fått fram är alltså att

$$\vec{x}_\parallel = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Genom att använda oss av detta i vårt uttryck får vi nu

$$\vec{x}' = (1 - \cos \theta) (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\cos \theta) \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x})$$

vilket är formeln vi skulle bevisa. $\square$

Vi har alltså sett hur Rodrigues rotationsformel kommer att rotera en vektor i rummet $\mathbf{R}^3$. Vi kommer nu att koppla den till hur kvaternioner kan utföra samma operation.

5.2 Kvaternionrotation

Först påminner vi om att konjugatet till en kvaternion $q = (a, \vec{v})$ är $\bar{q} = (a, -\vec{v})$ samt att en vektor $\vec{x}$ i $\mathbf{R}^3$ skriven som en kvaternion får utseendet $(0, \vec{x})$.

Lemma 2. *Låt q vara en godtycklig kvaternion uppdelad i skalärdel och vektordel, $q = (a, \vec{v})$, med längden 1, d.v.s. $|q| = 1$. Tag sedan en godtycklig vektor $\vec{x}$ och betrakta den som kvaternionen x . Oavsett hur vi väljer q eller x kommer vi få att*

$$qx\bar{q} = \left(0, 2(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} + a^2\vec{x} + 2a(\vec{v} \times \vec{x}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x}\right)$$

Bevis. Vi vill i slutändan räkna ut vad $qx\bar{q}$ är. Eftersom multiplikation av kvaternioner är associativ påverkar inte turordningen av hur faktorerna multipliceras (så länge de står i samma ordning). Med hjälp av sats 9 kan vi nu först beräkna

$$\begin{aligned} qx &= (a, \vec{v})(0, \vec{x}) \\ &= (0a - \vec{v} \cdot \vec{x}, a\vec{x} + 0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{x}) \\ &= (-\vec{v} \cdot \vec{x}, a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x}). \end{aligned}$$

Med hjälp av samma sats beräknar vi nu

$$\begin{aligned} qx\bar{q} &= (a, \vec{v})(0, \vec{x})(a, -\vec{v}) \\ &= (-\vec{v} \cdot \vec{x}, a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x})(a, -\vec{v}) \\ &= \left(-a(\vec{v} \cdot \vec{x}) - (a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x}) \cdot (-\vec{v}), \right. \\ &\quad \left. (-\vec{v} \cdot \vec{x})(-\vec{v}) + a(a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x}) + (a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x}) \times (-\vec{v})\right) \end{aligned}$$

Skalärdelen (den övre delen av svaret) kan skrivas om som

$$-a(\vec{v} \cdot \vec{x}) + a(\vec{x} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{x}) \cdot \vec{v},$$

eftersom $\vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{v}$. Sedan, eftersom vektorprodukten $\vec{v} \times \vec{x}$ är vinkelrät mot $\vec{v}$, blir

$$(\vec{v} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Skalärdelen för $qx\bar{q}$ blir med andra ord 0. Alltså kommer $qx\bar{q}$, precis som x , fortfarande bara vara en vektor, en kvaternion på formen $(0, \vec{x}')$. Den vektordelen (den undre delen av $qx\bar{q}$) är

$$(-\vec{v} \cdot \vec{x})(-\vec{v}) + a(a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x}) + (a\vec{x} + \vec{v} \times \vec{x}) \times (-\vec{v}).$$

Genom att faktorisera in och ut ur parenteser kan det även skrivas om som

$$(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} + a^2\vec{x} + a(\vec{v} \times \vec{x}) - a(\vec{x} \times \vec{v}) - (\vec{v} \times \vec{x}) \times \vec{v}.$$

Räknerregeln $-(\vec{x} \times \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{x}$ gör att det kan skrivas som

$$(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} + a^2\vec{x} + 2a(\vec{v} \times \vec{x}) - (\vec{v} \times \vec{x}) \times \vec{v}.$$

Räknerregeln $(\vec{v} \times \vec{x}) \times \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}$ gör att det kan skrivas som

$$(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} + a^2\vec{x} + 2a(\vec{v} \times \vec{x}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}.$$

Eftersom $\vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{v}$ kan vi slutligen skriva om det som

$$2(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} + a^2\vec{x} + 2a(\vec{v} \times \vec{x}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x}.$$

Sammanfattningsvis har vi nu att

$$qx\bar{q} = \left(0, 2(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} + a^2\vec{x} + 2a(\vec{v} \times \vec{x}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x}\right).$$

och beviset står klart. $\square$

Ovanstående är alltså det godtyckliga svaret man får ut oavsett vilken kvaternion q (så länge den har längden 1) och vilken vektor $\vec{x}$ man använder sig av. Vi vill nu få fram ett sätt att rotera vektorn $\vec{x}$ genom att strategiskt välja q .

Sats 11. *Betrakta kvaternionen*

$$q = (a, \vec{v}) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \vec{n}\right)$$

där

$$|\vec{n}| = 1.$$

Om $x = (0, \vec{x})$ så är $qx\bar{q} = (0, \vec{x}')$ där $\vec{x}'$ är vektorn $\vec{x}$ roterad med vinkeln θ moturs runt vektorn $\vec{n}$.

Bevis. Först vill vi visa att $|q| = 1$. Längden $|q|$ beräknas enligt

$$|q| = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot 1^2}.$$

1^2 kan försummas och via formeln för den trigonometriska ettan får vi då

$$|q| = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Vi vet nu att denna kvaternion q har längden 1 och vi kan därför använda oss av det nyligen visade lemma 2. Om vi har multiplikationen $x' = qx\bar{q}$ så ger insättning av $q = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \vec{n})$ att x' blir

$$\begin{aligned} x' = & \left(0, 2\left(\sin \frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{x}\right) \sin \frac{\theta}{2} \vec{n} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{x} \right. \\ & \left. + 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \vec{n} \times \vec{x}\right) - \left(\sin \frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \vec{n}\right) \vec{x}\right). \end{aligned}$$

Om vi sedan bryter ut och sätter ihop termer på ett praktiskt sätt kan vi skriva det som

$$x' = \left(0, 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{x} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\vec{n} \times \vec{x}) - \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{x}\right).$$

Eftersom $\vec{n}$ har längden 1 blir $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ och vi kan istället skriva det som

$$x' = \left(0, 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{x} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\vec{n} \times \vec{x}) - \sin^2 \frac{\theta}{2} \vec{x}\right).$$

De trigonometriska sambanden

$$2 \cos \eta \sin \eta = \sin 2\eta,$$

$$\sin^2 \frac{\eta}{2} = \frac{1 - \cos \eta}{2}$$

och

$$\cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{1 + \cos \eta}{2}$$

gör att uttrycket kan skrivas om så att

$$x' = \left(0, 2\left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right)(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right) \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x}) - \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right) \vec{x}\right)$$

eller förenklat

$$x' = \left(0, (1 - \cos \theta)(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + \cos \theta \vec{x} + \sin \theta (\vec{n} \times \vec{x})\right).$$

Vi ser alltså x' blivit en ny vektor som kan uttryckas på precis samma sätt som en roterad vektor enligt Rodrigues rotationsformel (sats 10). Vi kan då dra slutsatsen att den även har samma egenskaper och beviset står därför klart. $\square$

Vi såg ovan att det genom att sätta in en vektor skriven som en kvaternion x i kvaternionmultiplikationen $qx\bar{q}$ går att rotera vektorn. Hur den roteras beror på hur q ser ut. Man kan enkelt välja hur q ska se ut beroende på hur man vill att den ska roteras. Nedan visas hur en sådan multiplikation kan se ut, med den ursprungliga kvaternionmultiplikationen (det går förstås lika bra att använda sig av multiplikationen med skalär- och vektordel).

Exempel 8. Uppgiften är att rotera vektorn $\vec{x} = (2, 1, 0)$ med vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2}$ runt den normerade vektorn $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Den roterade vektorn är $x' = qx\bar{q}$ där

$$x = (0, (2, 1, 0)) = 2i + j,$$

$$q = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} (0, 1, 0)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \text{ och}$$

$$\bar{q} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

Först beräknar vi

$$\begin{aligned} qx &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)(2i + j) \\ &= \sqrt{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \sqrt{2}ji + \frac{\sqrt{2}}{2}j^2 \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j - \sqrt{2}k. \end{aligned}$$

Nu beräknar vi

$$\begin{aligned} qx\bar{q} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j - \sqrt{2}k\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j + i - ij + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}j^2 - k + kj \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j + i - k + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2} - k - i \\ &= j - 2k. \end{aligned}$$

Vi kan alltså se att även $x' = j - 2k$ är utan en reell del och motsvarar alltså en ny vektor, nämligen den med riktning $(0, 1, -2)$.

5.3 Flera rotationer i en beräkning

Vi har sett att $qx\bar{q}$ genererar en rotation av en vektor om x är en rent imaginär kvaternion. Det går även att sätta samman flera rotationer i en beräkning. Vi utgår från samma princip som innan. Låt q_1 vara den första rotationskvaternionen och q_2 den andra. Först görs rotationen

$$x' = q_1 x \bar{q}_1.$$

Vill vi sedan rotera x' ges nästa rotation då av

$$x'' = q_2 x' \bar{q}_2 = q_2 (q_1 x \bar{q}_1) \bar{q}_2.$$

Eftersom kvaternioner är associativa kan vi skriva om det som

$$x'' = q_2 (q_1 x \bar{q}_1) \bar{q}_2 = (q_2 q_1) x (\bar{q}_1 \bar{q}_2).$$

Enligt sats 7 är $\bar{q}_1 \bar{q}_2 = \overline{q_2 q_1}$ och då får vi slutligen

$$x'' = (\overline{q_2 q_1}) x (q_2 q_1).$$

Man behöver alltså bara räkna ut $q_2 q_1$ och sedan sätta in dess konjugat. I stället för att beräkna en rotation i taget kan man på detta vis multiplicera två rotationskvaternioner och få den slutliga, dubbla rotationen. Detta gör att man kan rotera runt mer än en axel i en och samma rotation och beräkning.

Exempel 9. Uppgiften är att rotera vektorn $\vec{x} = (1, 1, 0)$ med vinkeln π runt den normerade vektorn $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ och sedan med vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2}$ runt den normerade vektorn $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$. Vi har då att

$$x = (0, (1, 1, 0)) = i + j,$$

$$q_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2} (0, 0, 1) \right) = (0, (0, 0, 1)) = k \text{ och}$$

$$q_2 = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} (0, 1, 0) \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, 0) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j.$$

Vi beräknar först

$$\begin{aligned} q_2 q_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j \right) k \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} k + \frac{\sqrt{2}}{2} j k \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} k. \end{aligned}$$

Vi kan redan nu avläsa vad $q_2 q_1$ är för rotation. För att beräkna rotationen konstaterar vi först att

$$\overline{q_2 q_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{\sqrt{2}}{2} k.$$

Nu kan vi via kvaternionmultiplikation genomföra rotationen. Först beräknar vi

$$\begin{aligned} (q_2 q_1) x &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} k \right) (i + j) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} i j + \frac{\sqrt{2}}{2} k i + \frac{\sqrt{2}}{2} k j \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\sqrt{2}}{2} k. \end{aligned}$$

Och slutligen beräknas

$$\begin{aligned} (q_2 q_1) x (\overline{q_2 q_1}) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\sqrt{2}}{2} k \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{\sqrt{2}}{2} k \right) \\ &= \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2} i k - \frac{1}{2} j i - \frac{1}{2} j k - \frac{1}{2} k i - \frac{1}{2} k^2 \\ &= \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} \\ &= -j + k = (0, (0, -1, 1)). \end{aligned}$$

Vi har fått fram att den roterade vektorn blir $\vec{x}' = (0, -1, 1)$.

Denna metod är dock inte begränsad till två rotationer. Vill vi lägga till en tredje rotation q_3 får vi

$$q_3(q_2q_1)x(\overline{q_2q_1})\bar{q}_3.$$

I och med associativiteten på vänster sida om x och att åter använda oss av sats 7 för konjugatmultiplikationen till höger kan vi i stället skriva

$$(q_3q_2q_1)x(\overline{q_3q_2q_1}).$$

På det här viset kan man sedan lägga till hur många rotationer som helst. Oavsett hur många behöver man bara räkna ut den vänstra sidan och sedan använda dess konjugat på höger sida om den vektor x man vill rotera.

Ytterligare en användbar funktion är att den rotation som $\bar{q}xq$ utför är den raka motsatsen till vad $qx\bar{q}$ gör. Man kan alltså återställa en rotation genom att genomföra denna multiplikation efteråt. Att den återställs är likvärdigt med att den roteras runt samma axlar med samma vinklar fast åt motsatt håll, d.v.s. medurs.

Sats 12. Om $x = (0, \vec{x})$ roteras genom $x' = qx\bar{q}$ återställs den genom kvaternionrotationen $x'' = \bar{q}x'q$.

Bevis. Detta går att visa på flera sätt men det kan ses som två efterföljande rotationer. Dessa sammansatta enligt tidigare princip blir

$$x' = qx\bar{q}.$$

och

$$x'' = \bar{q}x'q = \bar{q}(qx\bar{q})q.$$

I och med associativitet för kvaternioner gäller att

$$x'' = \bar{q}(qx\bar{q})q = (\bar{q}q)x(\bar{q}q).$$

Sats 8 innefattar att om $|q| = 1$ gäller att $\bar{q}q = 1$. Vi kan nu räkna ut att

$$x'' = (\bar{q}q)x(\bar{q}q) = 1 \cdot x \cdot 1 = x.$$

Efterom $x'' = x$ har vi nu fått tillbaka den ursprungliga kvaternionen och beviset står klart. $\square$

Man kan alltså även rotera en vektor x genom att sätta in den i relationen $x' = \bar{q}xq$ där q bestäms på samma sätt som vid den rotation vi visat. Enda skillnaden är att den nu roteras medurs för alla vinklar i stället för moturs.

6 Användningsområden och fördjupning

6.1 Varför är kvaternioner bra och vad används de till?

Man kan använda sig av rotationsmatriser och Eulervinklar för utföra det man utför med kvaternioner. Det som gör kvaternioner konkurrenskraftiga är att rotationsmatriser kräver mer data. Rotationsmatriser innehåller nio komponenter

medan en kvaternion som bekant bara består av fyra vilket gör att de är mer kompakta och kan därmed vara mer effektiva.

Det har funnits spekulationer om att när man använder sig av Eulervinklar för att rotera finns det en risk att man stöter på problemet gimbal lock. Det innebär att en av tre axlar låser sig vid en annan axel och därför försvinner en dimension. Enligt vissa spekulanter undviks detta problem vid rotation med kvaternioner. Men faktum är att detta inte är ett problem för Eulervinklar om de används på rätt sätt. Det är enbart ett mekaniskt problem som kan drabba bland annat flygplan. För mer läsning kring problemet gimbal lock hänvisar jag läsaren till referens [6], s. 180.

Kvaternioner används inom datorteknik av ingenjörer och programmerare. De används bl.a. till att animera rörelser i dator-/TV-spel och för att förbättra flygplans och flygsimulatorers orientering i tre dimensioner, se referens [7], s. 10.

6.2 Finns det mer om kvaternioner?

Ämnet kvaternioner är större än vad detta arbete behandlar. För den nyfikne läsaren finns det därför mer att fördjupa sig i. Några valda delar som inte finns med är hur man skriver kvaternioner på matrisform, att kvaternioner kan ses som par av komplexa tal och att man kan rotera i fyra dimensioner med hjälp av par av kvaternioner. Sedan finns det utvidgningar av kvaternioner till åtta dimensioner (oktonioner) och sexton dimensioner (sedenioner) där mer än bara den kommutativa lagen behöver offras.

Referenser

- [1] Bajd, Tadej, Milhelj, Matjaz & Munih, Marko. (2013). *Introduction to robotics*. Heidelberg: Springer.
- [2] Conway, John & Smith, Derek. (2003). *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. Natick, Mass.: AK Peters.
- [3] Ebbinghaus, Heinz-Dieter, (1990). *Numbers*. 2. ed. New York: Springer-Vlg.
- [4] Graf, Basile. (2007). *Quaternions And Dynamics*. Addison Wesley, Massachusetts.
- [5] Kantor, Isaj L'vovic & Solodovnikov, Aleksandr Samuilovic. (1989). *Hypercomplex numbers: An Elementary Introduction to Algebras*. New York: Springer-Vlg.
- [6] Koks, Don. (2006). *Explorations in mathematical physics: the concepts behind an elegant language*. New York: Springer
- [7] Krishnaswami, Govind S. & Sachdev, Sonakshi. (2016). *Algebra and geometry of Hamilton's quaternions*. Resonance-Journal of Science Education, Vol.21, Issue 6.
- [8] Shoemake, Ken. (1993). *Quaternions*. Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [9] Vicci, Leandra. (2011). *Quaternions and Rotations in 3-space: The Algebra and its Geometric Interpretation*. Microelectronic Systems Laboratory, Department of Computer science, University of Carolina at Chapel Hill.