



---

KLASSISKA KROKLINJER

---

Av Andrea Sandgren, handledare Torbjörn Tambour



VT17

STOCKHOLMS UNIVERSITET  
Matematiska institutionen



## Sammanfattning

Det här arbetet handlar om några klassiska kurvor, deras ekvationer och egenskaper. Det tar också upp något om matematikerna bakom dem samt om hur de kan användas för att tredela vinklar, fördubbla kuber och kvadrera cirklar. Arbetet är inspirerat av "*Lärobok i analytisk geometri*" av Dr L. Lindelöf.



## Abstract

This essay presents some classical curves, their properties and equations. It also present the mathematicians behind them and show how the curves are used to trisect an angle, double a cube and square a circle. This work is inspired by the book "*Lärobok i analytisk geometri*" by D:r L. Lindelöf.

## Innehåll

Inledning.....	1
Cissoiden .....	3
Pascals snäcka .....	8
Cykloiden .....	24
Arkimedes spiral.....	31
Avslutning .....	40
Referenser.....	41

## Inledning

Det här arbetet är skrivet med syfte att lyfta fram ett kanske helt bortglömt fenomen; klassiska kroklinjer. I arbetet så får läsaren i huvudsak lära känna fyra stycken; cissoiden, Pascals snäcka, cykloiden och Arkimedes spiral. I samband med presentationerna av kurvorna presenteras även matematikerna bakom kurvan, samt görs olika beräkningar om kurvorna såsom area eller beräkningar med hjälp av kurvorna.

Inspirationen till arbetet kommer från en lärobok i analytisk geometri utgiven i Stockholm år 1909 av D:r Lorenz Lindelöf (1827–1908). Lindelöf var en finländsk matematiker och astronom, i boken titulerar han sig som ”överstedirektör av skolväsendet i Finland”. Boken är av femte upplagan men förordet är detsamma som i första upplagan. Förordet inleds väldigt vackert:

*Den så kallade analytiska geometrin är en del av matematiken, för vars område det är svårt att ur vetenskaplig synpunkt utstaka några bestämda gränser. Ty det gives knappast någon del av analysen, som icke har sin tillämpning i geometrin, och en fullständig framställning av alla dessa tillämpningar skulle därför i det närmaste omfatta hela matematiken. [1]*

Han fortsätter förordet med att berätta om att syftet med boken är att den ska vara ett enklare studiemedel och belyser därför den lägre analysens användning. Tyvärr så berättar han inte mer konkret om för vilken nivå boken är till för.

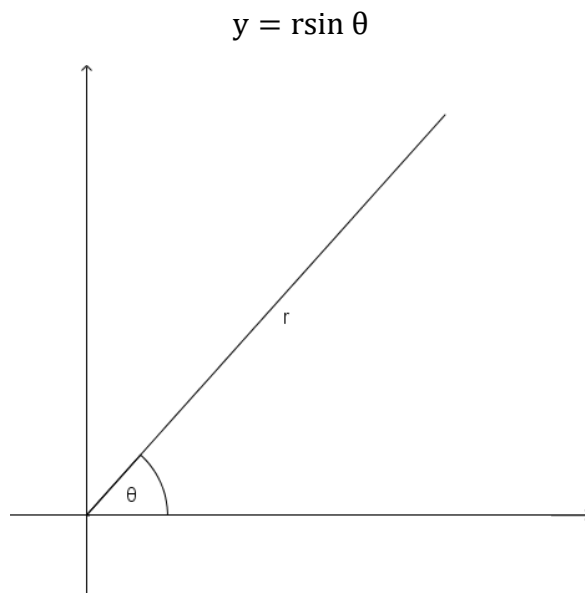
Språket som brukades under tidigt 1900-tal är inte detsamma som vi använder idag. Jag har därför valt att ibland använda lite omoderna matematiska termer. För att undvika förvirring presenteras de här. Det första begreppet är ”kroklinje”. Kroklinje definieras som ett samlingsnamn för alla icke räta linjer, alltså ett gammalt ord för kurva. Det andra begreppet som kommer att användas är ”orten”, kan även vara ”den geometriska orten”. Orten är ett samlingsnamn för alla de punkter som uppfyller ett visst villkor, idag brukar vi säga punktmängd.

Jag stötte även på några andra trevliga bortglömda matematiska termer när jag läste i Lindelöf. Dess begrepp vill jag endast belysa men som jag för enkelhetens skull valt att inte använda. Lindelöf skriver ibland abskissa istället för x-axel och ordinata istället för y-axel. Han blandar dessa hej vilt och jag har tyvärr inte hittat ett mönster eller någon definition om vad han tycker det är för skillnad på dem. Jag gissar att det har med tiden att göra, abskissa och ordinata kanske redan var på väg att dö ut. De polära koordinaterna är däremot desamma som vi använder idag, däremot så kallar han rätvinkliga koordinater ibland för parallella koordinater. Även här har jag inget svar på varför han blandar begreppen.

När vi ändå är inne på definitioner så vill jag passa på att definiera polära koordinater, i och med att jag i arbetet skriver ut kroklinjernas ekvationer, oftast i både rätvinkliga och polära koordinater.

Polära koordinater definieras genom att låta  $r$  vara radie och  $\theta$  vara den polära vinkeln. Då definieras de polära koordinaterna genom de rätvinkliga som

$$x = r \cos \theta$$



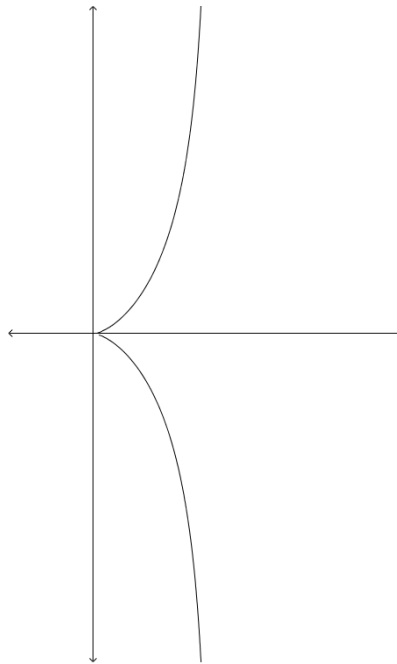
Figur 1.

Här är  $r$  avståndet från origo till en given punkt och  $\theta$  är vinkeln som går moturs från x-axeln.

Alla figurer i arbetet har jag till mestadels gjort själv i Geogebra och Microsoft Paint. Vissa bilder har jag till en början laddat ned som mall från färdiga animeringar i Geogebra och sedan har jag förändrat dem som jag velat ha dem. Trots att inspirationen till uppsatsen kommer från Lindelöfs bok så har jag fått mest material från MacTutor History of mathematics archive. Referenserna presenteras på sista sidan i arbetet.



## Cissoiden



Figur 2.

Cissoiden upptäcktes av Diokles av Karystos (ca 180 f.v.t) när han försökte lösa det deliska problemet [2]. Det deliska problemet är ett av de tre klassiska konstruktionsproblemen och går ut på att fördubbla en kub exakt med enbart passare och linjal. Det sägs att problemet uppstod när pesten härjade i Aten. Befolkningen rådfrågade oraklet på ön Delos och fick till svar att de skulle fördubbla Apollons kubformade altare. Befolkningen vände sig då till Platon för att få veta längden av sidan till det större altaret. Platon sägs ha svarat att det oraklet egentligen ville var inte att altaret skulle fördubblas utan att grekerna skulle ägna mer tid åt att studera geometri [3].

Det visar sig dock att problemet inte är lösbart med endast passare och linjal, vilket vi enkelt ser genom att först anta att kubens sida är av längd 1, och kalla den önskade längden av den fördubblade kuben  $x$ . Då visar det sig att

$$x^3 = 2$$

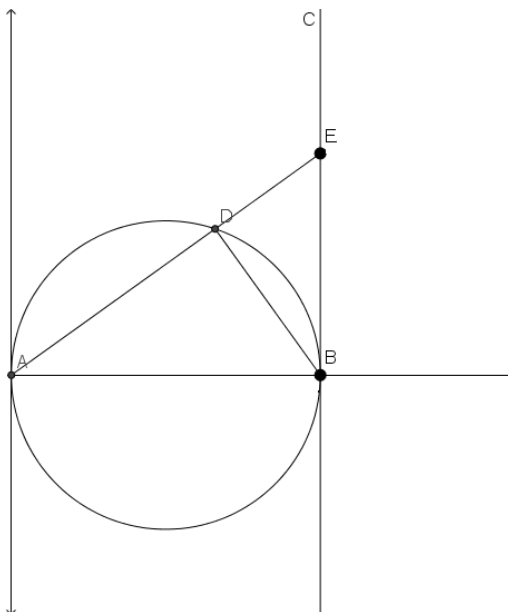
$$x = \sqrt[3]{2}$$

Att konstruera sträckan  $\sqrt[3]{2}$  med enbart passare och linjal är omöjligt, vilket den franska matematikern Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) bevisade år 1837. Diokles lyckades med att fördubbla en kub, men eftersom cissoiden inte räknas som ett tillåtet hjälpmedel så löste han inte det deliska problemet.

Diokles är inte bara känd för cissoiden utan även för att han var den första som bevisade fokalegenskapen hos en parabel, vilket han skrev om i sitt verk 'Om brinnande speglar'. Verket blev ignorerat av efterlevande greker men hade stort inflytande på arabiska matematiker såsom den islamska matematikern al-Haytham (965–1039).

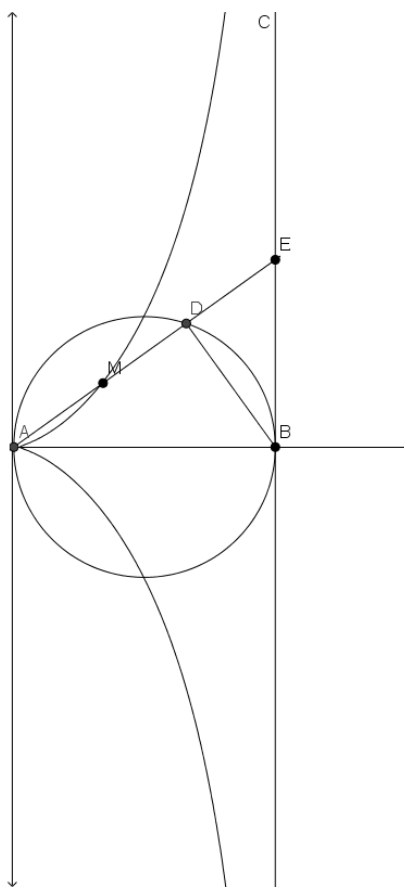
För att konstruera cissoiden och kurvans ekvation, så som Diokles konstruerade sin [4], ritar vi först upp en cirkel med diameter AB, där A ligger i origo. Sedan dras en tangent C till

cirkeln från punkten B. Därefter ritas en rät linje AE, där E förflyttar sig längs tangenten C. Låt D vara skärningspunkten mellan linjen och cirkeln. Sträckan DB ritas för att förtydliga en triangel ABD som vi kommer använda för att få fram ekvationen. Se figur 3.



Figur 3.

Låt M vara en punkt på linjen AE sådan att  $AM = DE$ . När linjen AE förflyttar sig förflyttar sig även M och orten för M bildar kroklinjen cissoiden. Se figur 4.



Figur 4.

För att hitta ekvationen för cissoiden i polära koordinater använder vi oss av de rätvinkliga trianglarna ABE och ABD. Vi sätter koordinaterna till  $r$  och  $\theta$ , och vi kallar diametern AB för  $a$ . Innan vi går vidare så påminner vi oss om den givna likheten  $AM = DE$

Vi börjar med att uttrycka

$$\frac{AB}{AE} = \cos \theta \Leftrightarrow AE = \frac{a}{\cos \theta}$$

Därefter kan vi även se att

$$\frac{AD}{AB} = \cos \theta \Leftrightarrow AD = a \cos \theta$$

Vi ser nu att

$$AM = DE = AE - AD = \frac{a}{\cos \theta} - a \cos \theta$$

som sedan förenklas

$$\begin{aligned} \frac{a}{\cos \theta} - a \cos \theta &= a \left( \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) = \\ a \left( \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) &= \frac{a \sin^2 \theta}{\cos \theta} = a \sin \theta \tan \theta \end{aligned}$$

Därför finner vi att ekvationen till cissoiden i polära koordinater är

$$r = a \sin \theta \tan \theta$$

För att gå från polära koordinater till rätvinkliga så ser vi att

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \sin \theta = \frac{y}{r} \text{ och } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vi börjar med att kvadrera ekvationen med polära koordinater

$$r = a \sin \theta \tan \theta \Rightarrow r^2 = a^2 \sin^2 \theta \tan^2 \theta$$

Sedan gör vi variabelbytet

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \frac{y^2}{x^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 \frac{y^4}{x^2}$$

$$x^2 + y^2 = a \frac{y^2}{x}$$

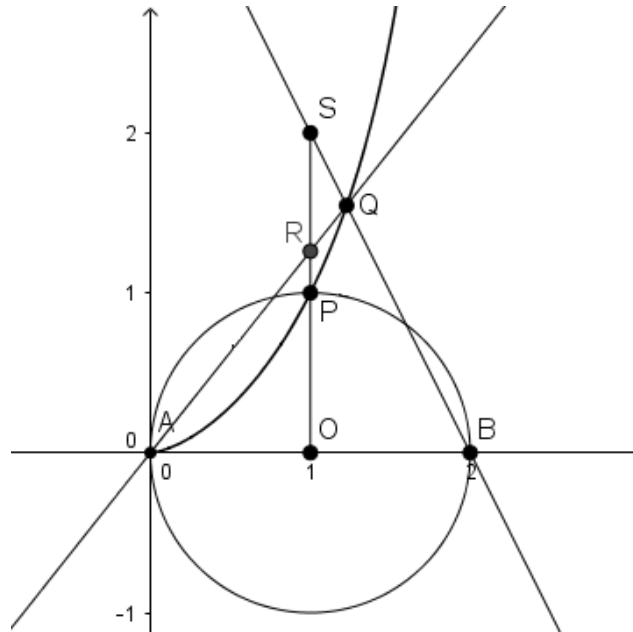
$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$$

Och där har vi fått ut ekvationen i rätvinkliga koordinater. För att undersöka kurvans form så börjar vi med att uttrycka  $y$  som en funktion av  $x$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

Vi ser nu att  $y$  är reell när  $0 \leq x < a$ , och att  $y$  varierar mellan 0 och  $\pm\infty$  när  $0 \leq x < a$ . Cissoiden startar i A och rör sig alltså uppåt och nedåt mot oändligheten, vilket även visar att tangenten C till cirkeln i figuren är en asymptot till kroklinjen.

Med hjälp av cissoiden kunde Diokles dubblera en kub. Jag kommer nedan att visa en metod för det, men kan inte garantera att det var så Diokles gjorde.



Figur 5.

Låt AB beteckna diametern av en cirkel med mittpunkten O och radien 1. Låt följande bokstäver beteckna punkterna

$$B = (2,0), P = (1,1), O = (1,0) \text{ och } S = (1,2)$$

I bilden är diametern  $a = 2$ , vilket ger oss ekvationen för kroklinjen nu till

$$y = x \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

Lägg märke till att vi enbart använder den positiva delen av kurvan för att lösa problemet.

Dra en linje mellan punkten B och S, sträckan BS skär cissoiden i en punkt, kalla den  $Q = (x_Q, y_Q)$ . Linjen BS har ekvationen  $y = 4 - 2x$ .

Vi får

$$4 - 2x_Q = x_Q \sqrt{\frac{x_Q}{2-x_Q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2-x_Q)}{x_Q} = \sqrt{\frac{x_Q}{2-x_Q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(2-x_Q)^2}{x_Q^2} = \frac{x_Q}{(2-x_Q)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-x_Q}{x_Q}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

Linjen OQ har ekvationen

$$y = \frac{y_Q}{x_Q}x$$

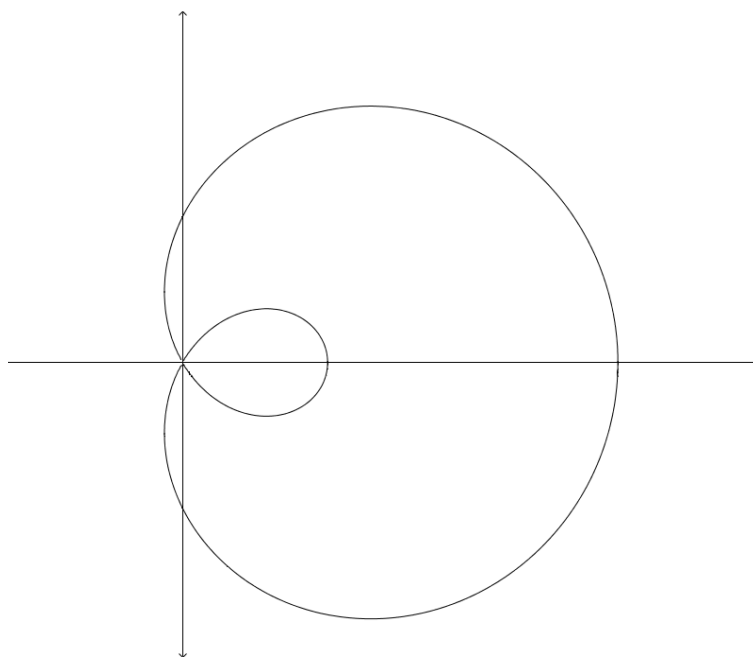
Punkten  $R = (x_R, y_R)$  är skärningspunkten mellan linjerna AQ och OS och alltså är  $x_R = 1$ .

Vi har nu att

$$|OR|^3 = y_R^3 = \left(\frac{y_Q}{x_Q}\right)^3 = \left(\frac{4-2x_Q}{x_Q}\right)^3 = 2^3 \left(\frac{2-x_Q}{x_Q}\right)^3 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

Längden OR är alltså  $\sqrt[3]{2}$ , vilket är den sökta sidlängden på den dubblerade kuben.

## Pascals snäcka

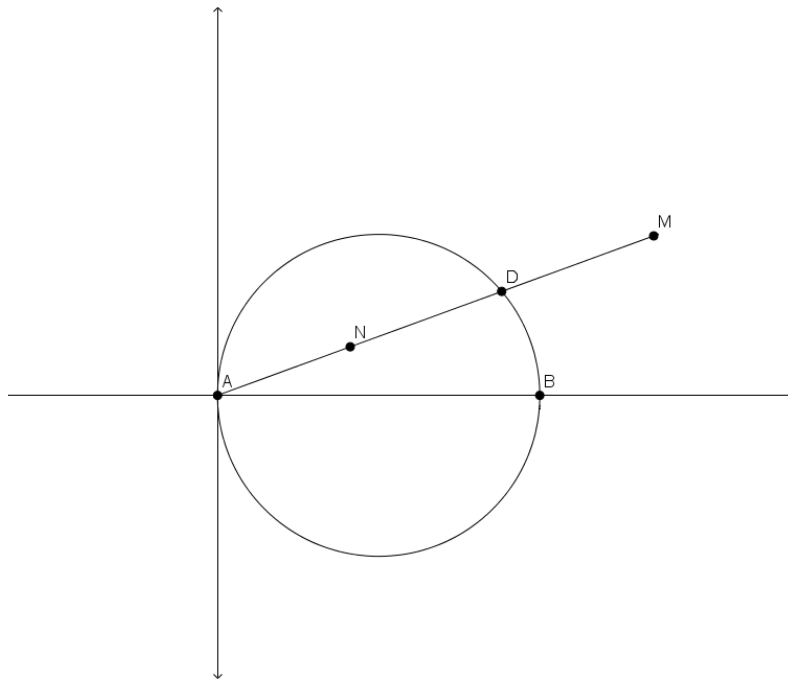


Figur 6.

När vi hör Pascal så tänker vi antagligen på Blaise Pascal (1623–1662), men mannen bakom Pascals snäcka är faktiskt Blaise Pascals far Etienne Pascal (1588–1651). Etienne kom från en välbärgad familj och behövde egentligen inte arbeta för att försörja sig. Trots det så utbildade han sig i juridik och tog examen år 1610. Etienne var mycket angelägen om att nå höga positioner i Frankrike och sökte sig därför till inflytelserika jobb. Hans intressen låg framförallt i naturvetenskap och matematik men han var även intresserad av antika språk, grekisk litteratur och poesi.

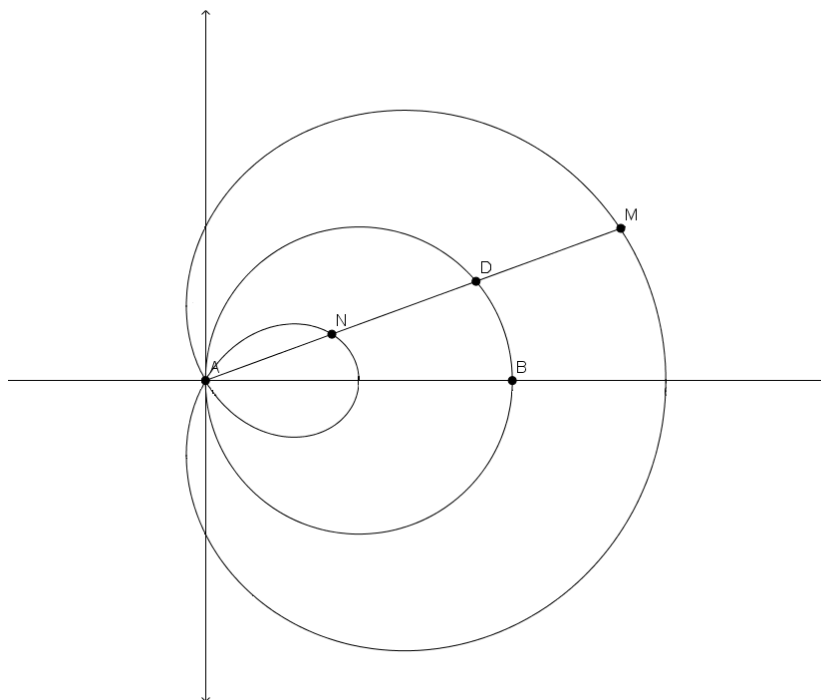
Etienne Pascal är känd för upptäckten av kurvan Pascals snäcka som kan användas till att tredela en vinkel. Kurvan är döpt av den franska vetenskapsmannen Gilles-Personne Roberval (1602–1675) när han använde den i ett exempel till sina metoder att dra tangenter. Etienne upptäckte kurvan kring år 1637 och presenterade sitt arbete för René Descartes (fransk filosof, 1596–1650,) som tyvärr blev föga imponerad. [5] Etiennes son lyckades bättre, han blev inflytelserik inom både matematiken och filosofin. Han arbetade mycket med kägelsnitt och tillsammans med Pierre de Fermat (fransk matematiker, advokat och regeringstjänsteman, 1601–1665) lade han grund för sannolikhete teorin. [6]

För att konstruera Pascals snäcka så börjar vi med att rita upp en cirkel med diametern AB där A är origo. Från A drar vi en stråle som skär cirkeln i D, strålen roterar sedan kring A varvid D rör sig längs cirkelns periferi. På strålen AD låter vi M och N vara punkter sådana att  $DN=DM$ , se figur 7.



Figur 7.

När linjen AD kretsar kring A så bildar orten för punkterna M och N Pascals snäcka.



Figur 8.

För att få ekvationen för Pascals snäcka i polära koordinater  $r$  och  $\theta$  nyttjar vi här den rätvinkliga triangeln ABD (om man tänker sig att vi drar en sträcka i figur 8 mellan B och D så bildas där en rät vinkel). Men anta först  $DN = DM = a$ ,  $|AB| = b$  samt att  $a < b$ . Då får vi

$$\frac{AD}{AB} = \cos \theta \Leftrightarrow AD = b \cos \theta$$

Vi vet att  $DM = DN = a$  vilket hjälper oss att lösa ut längden  $AM$  respektive längden  $AN$

$$AM = AD + a \Leftrightarrow AM = b \cos \theta + a$$

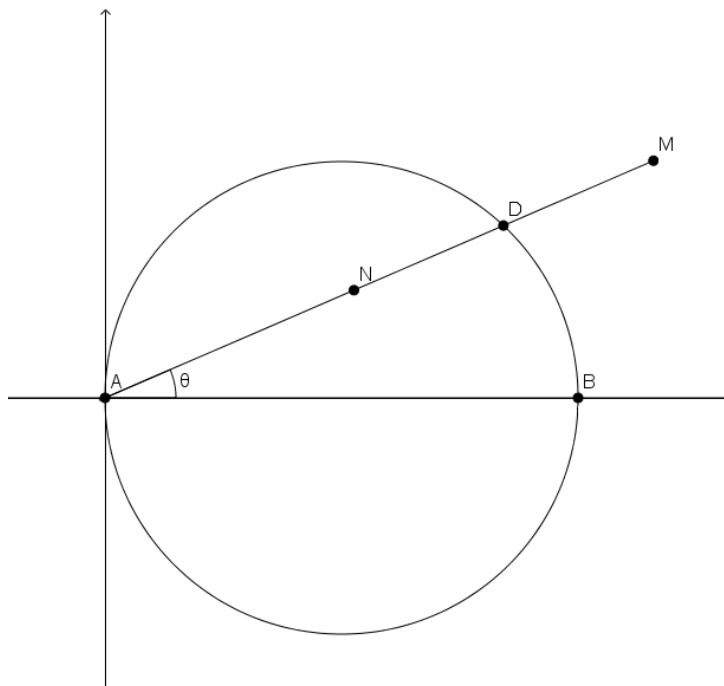
$$AN = AD - a \Leftrightarrow AN = b \cos \theta - a$$

Vilket ger att ekvationen för Pascals snäcka är

$$r = b \cos \theta \pm a$$

Anledningen till att det blir både plus och minus  $a$  är helt enkelt för att  $a$  beskriver den sträckan på bilden som antingen är  $DN$  eller  $DM$ . Eftersom  $b \cos \theta$  beskriver längden  $AD$  så innebär ekvationen att vi antingen sträcker oss ut till punkten  $M$  eller minskar ner till punkten  $N$ .

Lindelöf skriver ” [...] man finner utan svårighet, att hela kroklinjen kan föreställas genom ekvationen  $r = b \cos v + a$  då man iakttagert att avsätta de negativa värdena för  $r$  på radius vectors förlängning i motsatt riktning mot den, som bestämmes genom vinkeln  $v$ .” [1, sida 155] Han menar alltså att det går att se direkt. Jag tror att vi behöver undersöka det här ingående för att förstå. Vi undersöker därför hur ekvationen förändras vid olika positioner av strålen som bildar snäckan. Vi börjar med ursprungsläget:



Figur 9.

För att förtydliga nu så vill jag påpeka att om inget annat sägs så är vi nu i fallet när  $a < b$ . Vi kommer nu att se till olika  $r$  och  $\theta$  beroende på vilken punkt i figuren vi talar om, jag kommer därför att använda index som följande

$$r_D \text{ och } \theta_D, r_N \text{ och } \theta_N, r_M \text{ och } \theta_M$$

I figur 9 har vi att



$$r_D = b \cos \theta_D$$

$$r_N = b \cos \theta_N - a$$

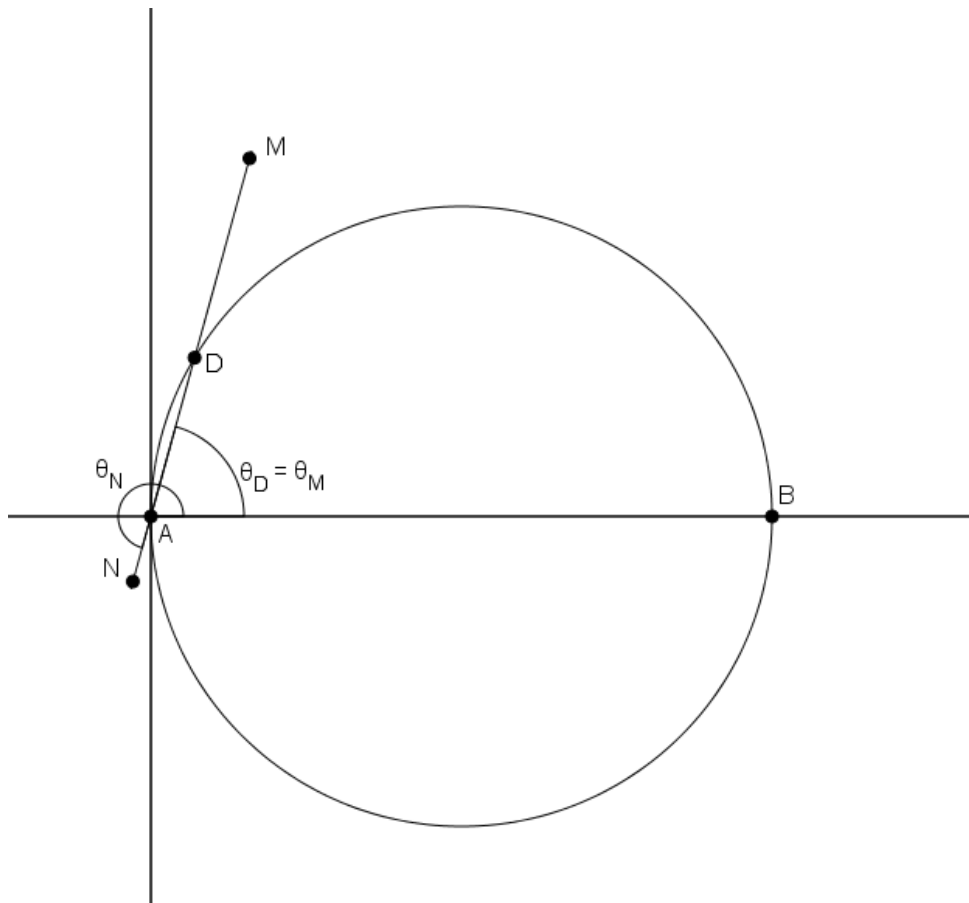
$$r_M = b \cos \theta_M + a$$

När strålen rör sig moturs så kommer N hamna i origo, vilket sker precis då  $r_N = 0$ , det vill säga när

$$b \cos \theta_N - a = 0$$

$$\cos \theta_N = \frac{a}{b}$$

Vi ska nu undersöka ekvationerna när N har passerat origo.



Figur 10.

I figur 10 så har punkterna D och M samma vinkel,  $\theta_D = \theta_M$ . Däremot så har N nu en annan vinkel, vi lägger även märke till att efter att N har passerat origo så har N nu lämnat den inre öglan och hamnat på den yttre, även M är på den yttre öglan nu. Då N passerat origo är  $\cos \theta_D < \frac{a}{b}$ . Vi ser att

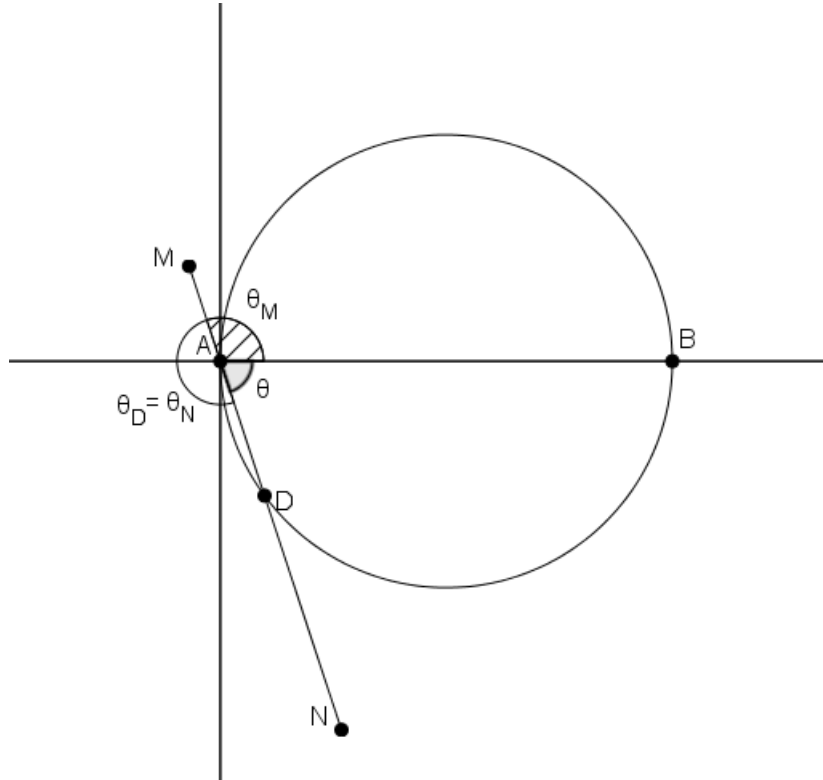
$$\theta_N = \theta_D + \pi$$

$$r_D = b \cos \theta_D$$

$$r_M = b \cos \theta_M + a$$

$$\begin{aligned}
r_N &= a - b \cos \theta_D = a - b \cos (\theta_N - \pi) = \\
&= a - b \cos (\pi - \theta_N) = b \cos \theta_N + a
\end{aligned}$$

Alltså har ekvationen för punkten N blivit till  $r_N = b \cos \theta_N + a$ . Detta visar att när någon av punkterna M och N ligger på den yttre öglan av snäckan så har vi ekvationen  $r = b \cos \theta + a$ . Vi tittar på ett ytterligare fall:



Figur 11.

I det här fallet närmar sig M origo och N har kommit en bra bit ut på den yttre delen av snäckan. Vi noterar också att D nu ligger på den undre delen av cirkeln. I figur 11 så kan vinklarna vara svåra att se, jag förtydligar därför att den streckade vinkeln är  $\theta_M$  och att vinkeln  $\theta_D = \theta_N$  är den vinkeln som nästan tar sig ett helt varv. Vi har även ytterligare en vinkel, den grå;  $\theta$ . Vi noterar att  $\theta + \theta_D = 2\pi$ .

Vi har att

$$\begin{aligned}
r_D &= b \cos \theta = b \cos (2\pi + \theta_D) = b \cos \theta_D \\
r_N &= r_D + a = b \cos \theta_D + a = b \cos \theta_N + a \\
r_M &= a - r_D = a - b \cos \theta = a - b \cos (\pi - \theta_M) = \\
&= b \cos \theta_M + a
\end{aligned}$$

Här kan vi nu dra slutsatsen att ekvationen för den yttre öglan är  $r = b \cos \theta + a$  och ekvationen för den inre  $r = b \cos \theta - a$ . Jag är därför inte riktigt säker på vad Lindelöf menar när han påstår att det räcker med att använda  $r = b \cos \theta + a$  för att framställa snäckan. Efter undersökningarna ovan verkar det som att båda krävs för att både få den inre och den yttre öglan.

När vi gör om de polära koordinaterna till rätvinkliga så ser vi att även här har vi  $\pm a$ . Vi sätter

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \text{ och } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Då får vi

$$\sqrt{x^2 + y^2} = b \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm a$$

$$x^2 + y^2 = bx \pm a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - bx = \pm a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Alltså får vi att Pascals snäcka i rätvinkliga koordinater har ekvationen

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Något som matematiker har studerat angående snäckan är hur man beräknar arean av den. Vi ska därför, med modern metod, beräkna arean av den yttre öglan på snäckan. Arean av den inre öglan lämnas läsaren till att lösa själv vid intresse.

Om vi låter  $r = r(\theta)$  vara ekvationen för en kurva på polär form så beräknas arean som innesluts av kurvan och de två strålarna  $\theta_1$  och  $\theta_2$  med formeln

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta$$

För att beräkna arean av den yttre öglan i Pascals snäcka behöver vi först lista ut våra integrationsgränser. Vi ser i figur 7 att i snäckans ekvation  $r = b \cos \theta + a$  så kommer  $r$  så småningom att bli noll, vi ser att om

$$r \geq 0$$

så

$$b \cos \theta + a \geq 0 \Leftrightarrow \cos \theta \geq -\frac{a}{b}$$

Låt därför  $\theta_0$  vara en vinkel med  $\cos \theta_0 = -\frac{a}{b}$  så att  $\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leq \pi$ . Nu har vi det vi behöver för att beräkna arean

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (b \cos \theta + a)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (b^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta + a^2) d\theta \end{aligned}$$

Vi har att

$$\int \cos^2 \theta = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

Så

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} b^2 \theta + \frac{1}{4} b^2 \sin 2\theta + 2ab \sin \theta + a^2 \theta \right]_{-\theta_0}^{\theta_0} \\ &= \left( \frac{1}{2} b^2 + a^2 \right) \theta_0 + \frac{1}{4} b^2 \sin 2\theta_0 + 2ab \sin \theta_0 \\ &= \left( \frac{b^2}{2} + a^2 \right) \theta_0 + \frac{b^2}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 + 2ab \sin \theta_0 \end{aligned}$$

Vi har  $\cos \theta_0 = -\frac{a}{b}$  så

$$\sin^2 \theta_0 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$$

Eftersom  $\theta_0$  ligger mellan  $\frac{\pi}{2}$  och  $\pi$  så är sinus av vinkeln alltid positiv och vi behöver därför enbart se till den positiva roten. Vi får

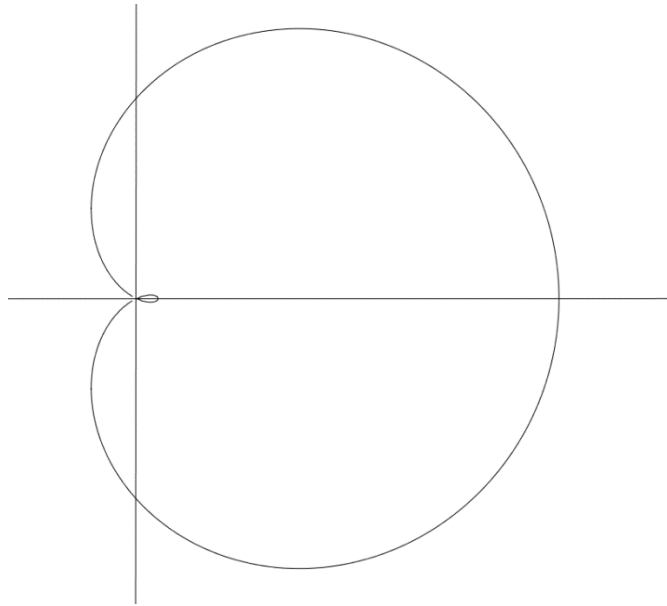
$$\sin \theta_0 = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - a^2}$$

Nu går vi tillbaka till det vi fick av integralen och stoppar in värdena vi fått ut och får då

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{b^2}{2} + a^2 \right) \theta_0 + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \left( -\frac{a}{b} \right) + 2ab \cdot \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \\ &= \left( \frac{b^2}{2} + a^2 \right) \theta_0 - \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - a^2} + 2a \sqrt{b^2 - a^2} = \left( \frac{b^2}{2} + a^2 \right) \arccos \left( \frac{a}{b} \right) + \frac{3a}{2} \sqrt{b^2 - a^2} \end{aligned}$$

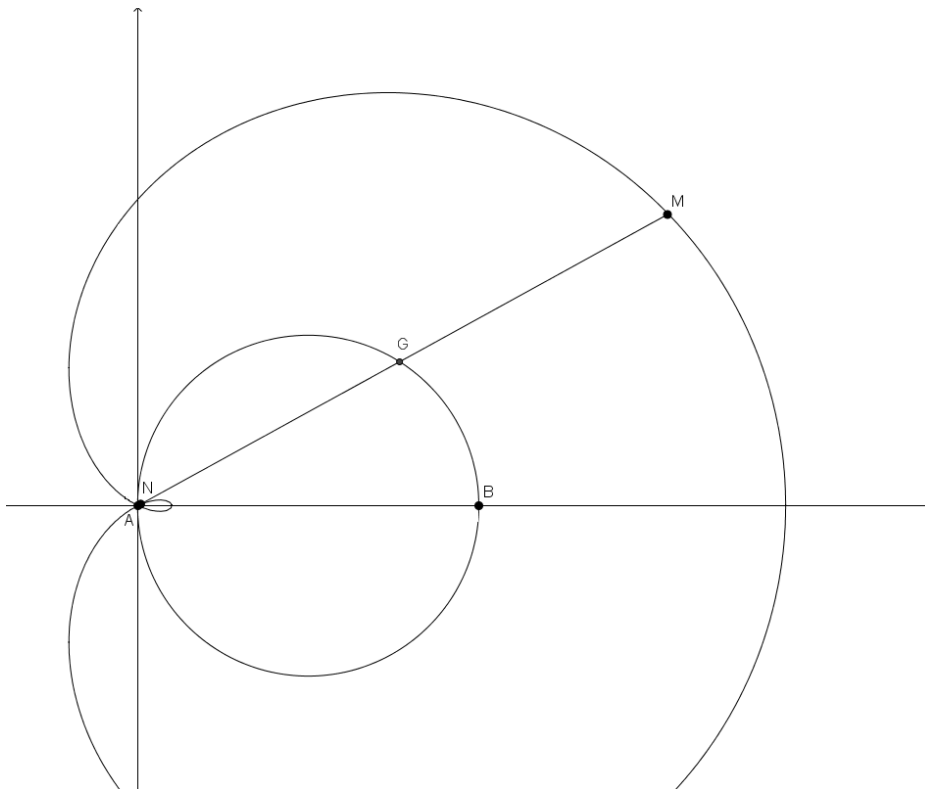
Detta är svaret på allmän form.

För att undersöka kroklinjen ytterligare så ska vi se på hur den förändras vid olika värden och förhållanden på a och b. Den första snäckan är när  $a = 9$  och  $b = 10$  se figur 12.



Figur 12.

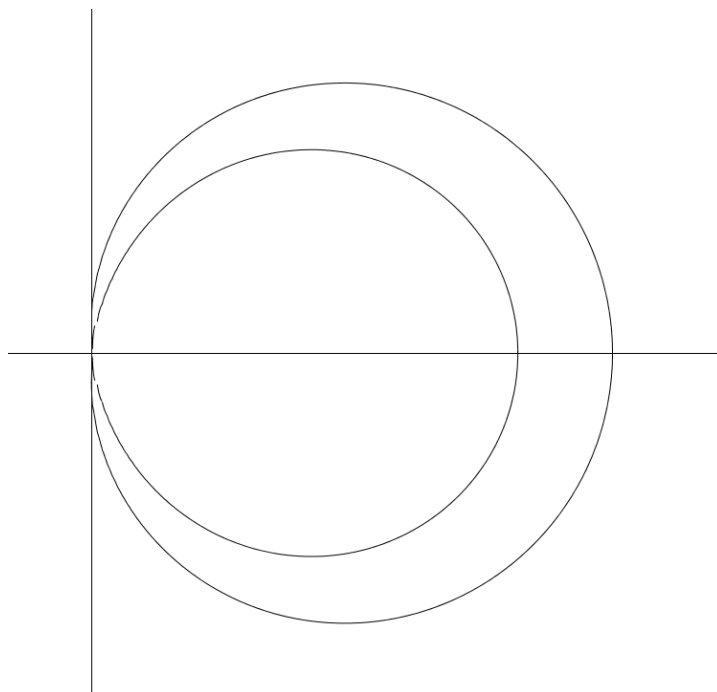
Undersökningen av bilden visar på en väldigt liten inre ögla, vilket tyder på att ju närmre värdena på  $a$  och  $b$  är desto mindre ögla. Detta kan förklaras genom att se på figur 13.



Figur 13.

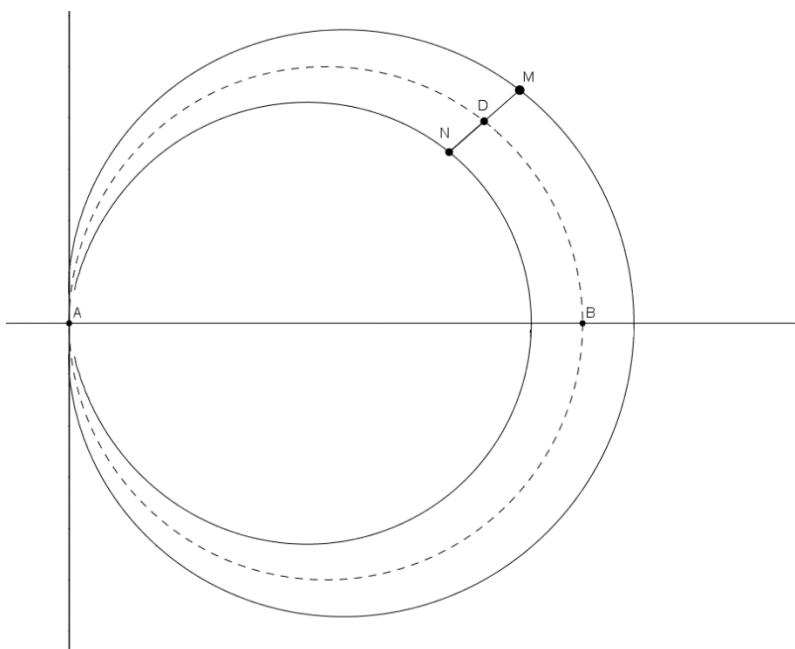
När vi lägger till strålen i figurens så kan vi enkelt se att om  $a \rightarrow b$  så innebär det att längden  $DN$  och  $DM$  är nästan lika lång som diametern  $AB$ , vilket gör att den inreöglan inte blir så stor. När  $D$  sammanfaller med  $B$  så ligger  $N$  på den inre öglans högra ändpunkt och kommer alltså under rotationen inte att bli större. Vi ska nu se på hur snäckans utseende förändras när

värdena på  $a$  och  $b$  tar ett större avstånd från varandra. Låt oss undersöka  $a = 1$  och  $b = 10$  i figur 14.



Figur 14.

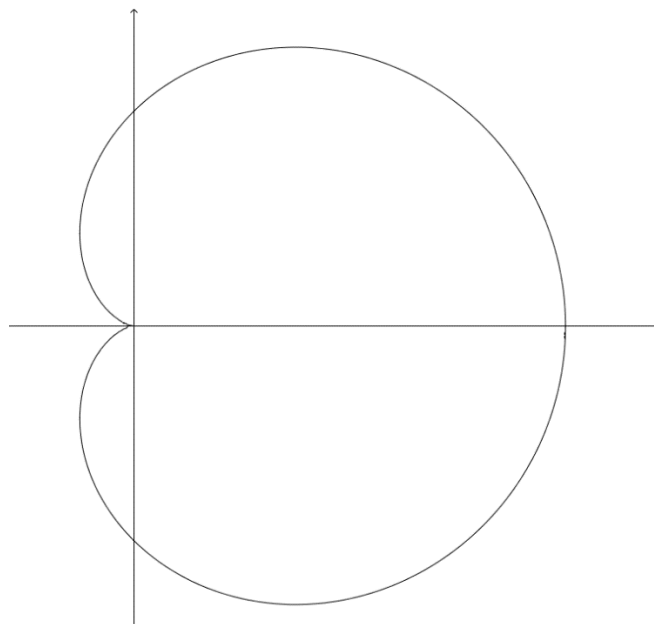
Det visar sig alltså att ju större skillnad det är på  $a$  och  $b$  desto större blir den inre öglan. I figur 15 ser vi strålen som förklarar utseendet ytterligare.



Figur 15.

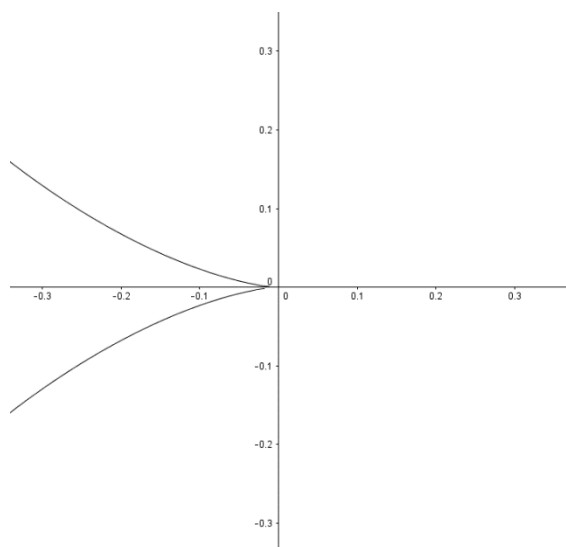
Här ser vi bland annat en streckad cirkel, jag gjorde den streckad för att det skulle bli tydligt vad som tillhör snäckan och vad som är cirkeln. Det blir tydligt i figur 15 att när avståndet mellan  $a$  och  $b$  ökar så minskar avståndet mellan inre och yttre öglan i kroklinjen.

När  $a = b$  så förvandlas snäckan till en annan kurva kallad cardioid. [7] Cardioidens namn användes första gången i ett verk av Johann Castillon (italiensk matematiker och astronom, 1704–1791) år 1741. Kurvan hade tidigare studerats av Philippe de la Hire (fransk matematiker, 1640–1718) redan år 1708. Cardioid betyder hjärtformad, vilket är helt försåtligt när man ser kurvan. Cardioiden ses som ett specialfall av Pascals snäcka och därför kan varken la Hire eller Castillon ta åt sig äran av upptäckten. [8] Se Cardioiden i figur 16 nedan.



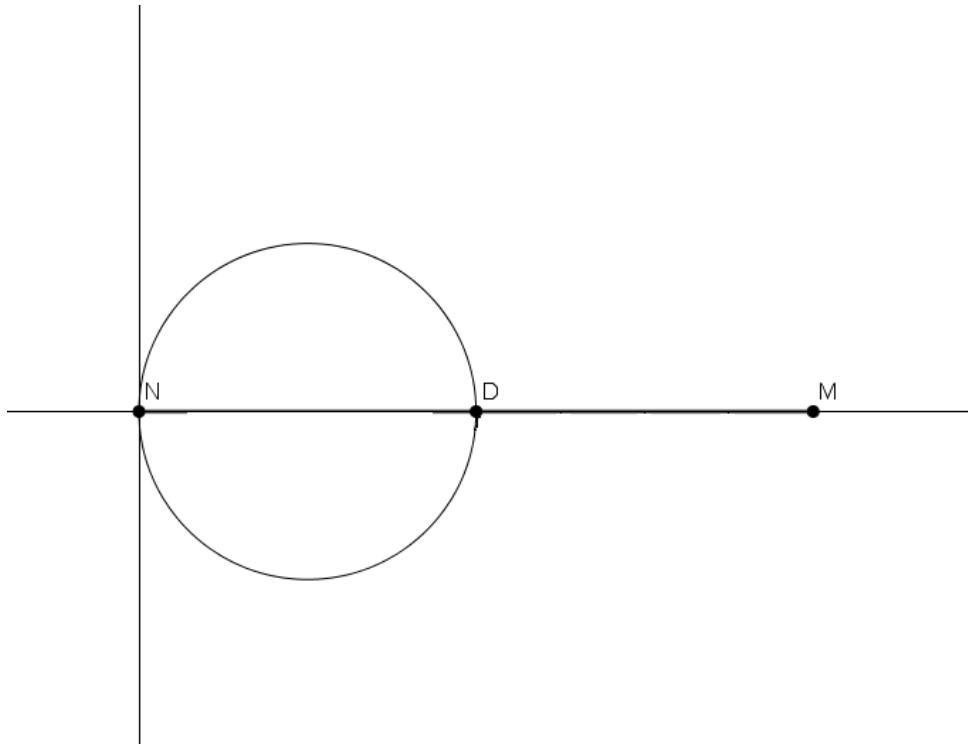
Figur 16.

Till den här bilden satte jag  $a = b = 4$ . Nu ser vi att den inre öglan försvann helt, vilket alltså visar oss att det nu blev till den hjärtformade kurvan cardioid istället. För att vara säker på att den inre öglan inte alls är där valde jag att zooma in i bilden. Lägg märke till värdena på x- respektive y-axel för att se hur in zoomad kurvan är.



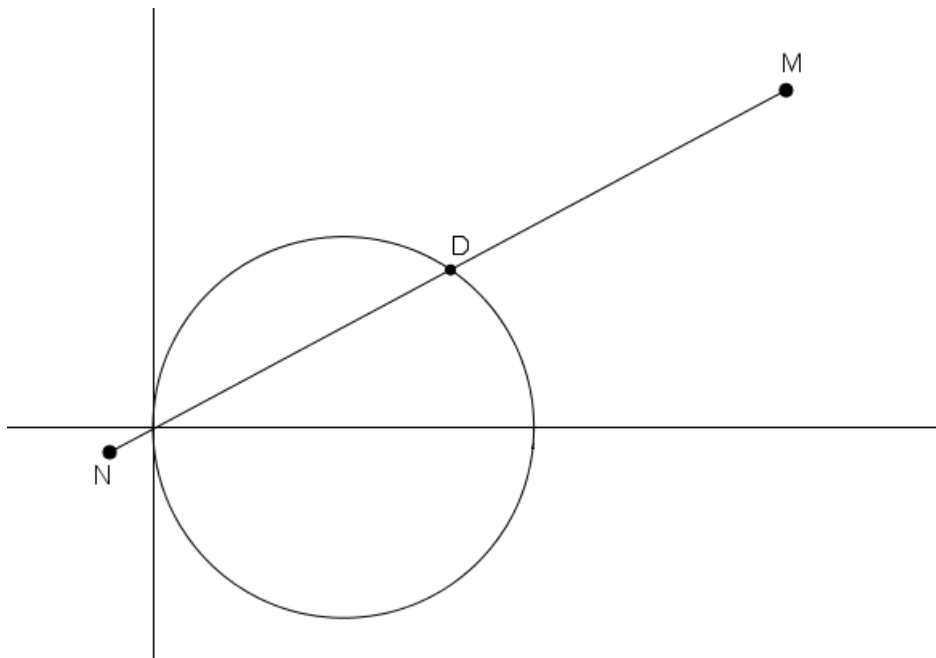
Figur 17.

Det visar sig alltså att öglan har försvunnit vilket kan förklaras med att titta på ytterligare en figur.



Figur 18.

I figuren så ser vi avstånden  $DN = DM = a = b$ . Nästa bild visar hur det ser ut när strålen roterat en bit moturs.



Figur 19.

Det visar sig alltså att den inre öglan aldrig bildas för när rotationen startar så lämnar N sitt ursprungsläge origo och tar sig nedåt och bildar den yttre öglan.



Vi kan förklara detta ytterligare genom att titta på ekvationen i polära koordinater för N. När  $r_N = 0$  så har vi

$$\cos \theta_0 = -\frac{a}{b}$$

när då  $a = b$  så

$$\cos \theta_0 = -\frac{a}{b} = -1$$

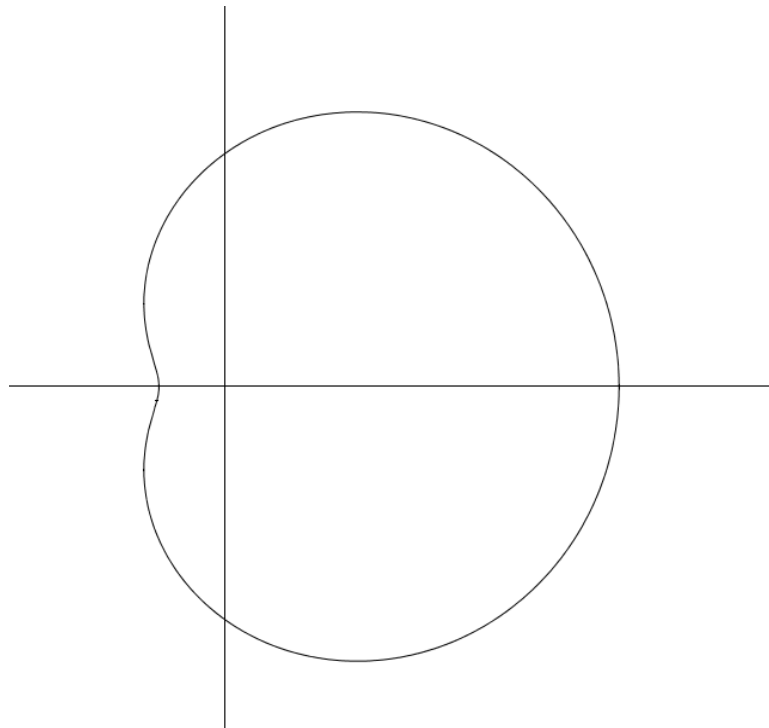
Alltså är

$$\theta_0 = \pi$$

För Pascals snäcka där  $a < b$  så har strålarna som bildar vinklarna  $\theta_0$  och  $-\theta_0$  med x-axeln agerat tangenter till kroklinjen, det visar sig alltså att när  $a = b$  så får kroklinjen den gemensamma tangenten x-axeln motsvarande vinkeln  $\pi$ .

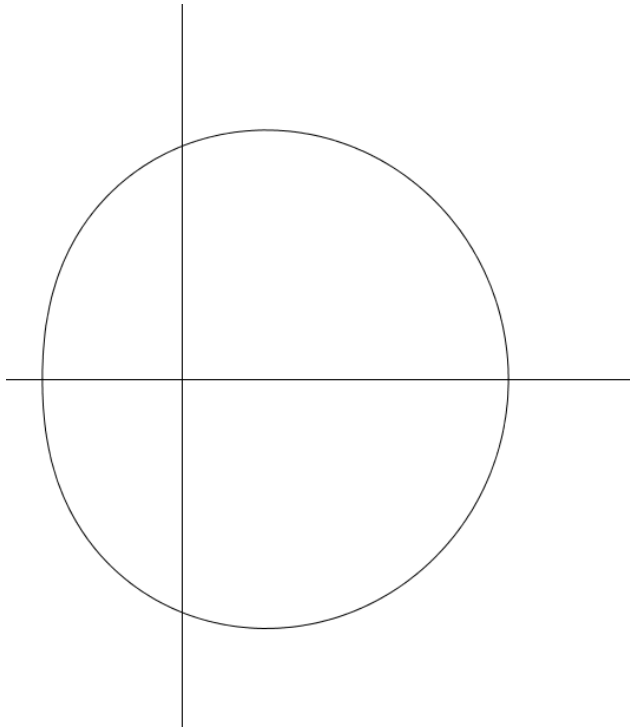
I förbigående kan vi notera att arean av cardioiden är  $\frac{3}{2}\pi b^2$  enligt formeln vi härledde ovan.

Vi undersöker även det fall då  $2b > a > b$ , låt  $b = 5$  och  $a = 7$ , se figur 20.



Figur 20.

Vi ser nu att även här har den inre öglan försvunnit och i stället har vi fått en cirkelliknande figur med en "buckla". Det blir nu intressant att även undersöka vad som händer med kurvan när  $a > 2b$ , låt  $a = 5$  och  $b = 2$ , se figur 21.

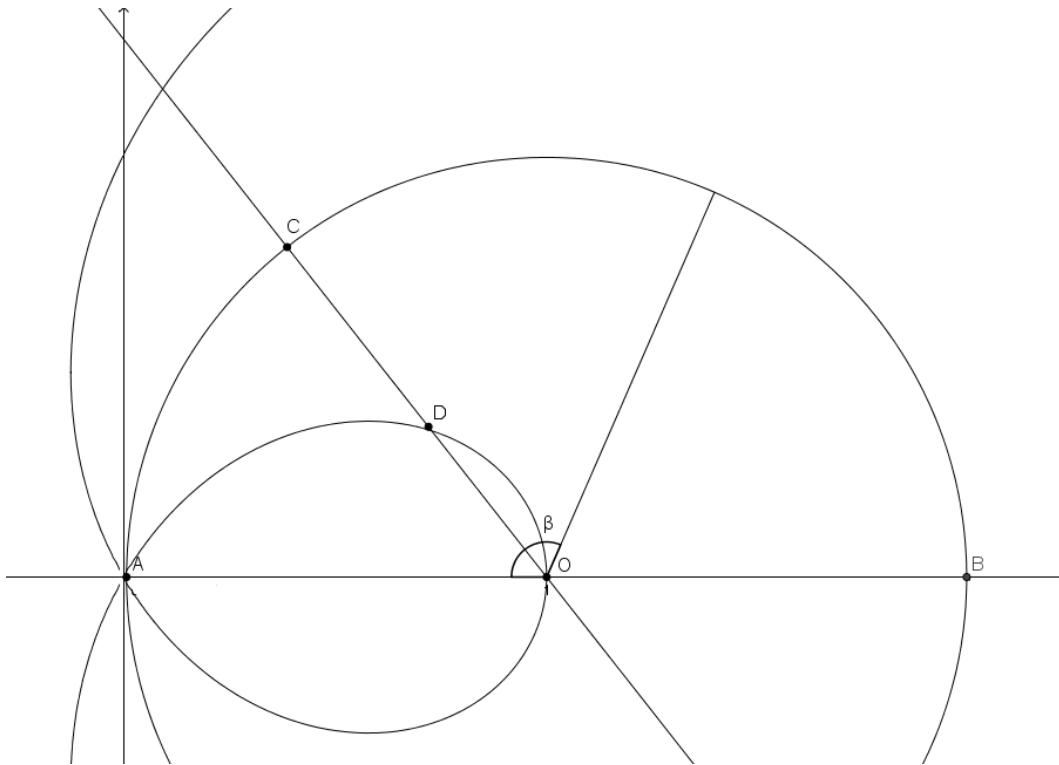


Figur 21.

Även här ser det ut som en cirkelliknande figur med en buckla, dock inte lika tydligt som i den tidigare bilden. Vi kan alltså komma till slutsatsen att vi får andra kurvor när  $a \geq b$  vilket verifierar kriteriet att  $a < b$  för att konstruera Pascals snäcka.

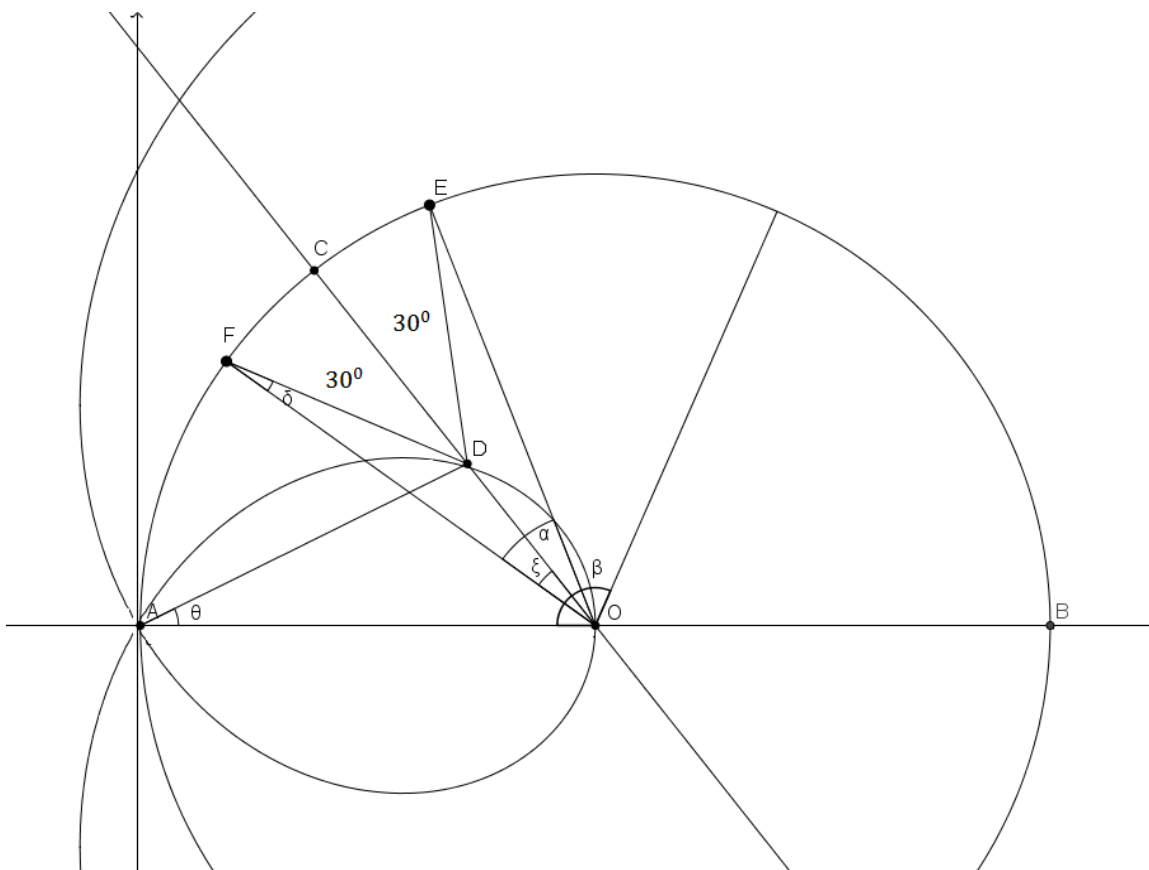
Pascals snäcka kan, som tidigare nämnts, användas till att tredela en vinkel. Jag tänker därför nedan presentera hur man går tillväga för att göra detta.

Vi börjar med att rita upp snäckan där den inre öglan har ekvationen  $r = 2 \cos \theta - 1$ . Vi ritar sedan en cirkel med diametern  $AB$  där  $A$  är origo, och låt cirkelns mittpunkt vara  $O$ , där  $O$  även skär snäckans inre ögla. Låt sedan  $\beta$  vara en godtycklig vinkel i cirkeln, som ska tredelas. Rita sedan en rät linje  $OC$  som halverar  $\beta$ .  $OC$  skär snäckans inre ögla i en punkt, kalla den  $D$ . Se figur 22.



Figur 22.

Vi låter nu E och F vara två punkter på cirkeln sådana att vinklarna EDC och CDF båda är  $30^\circ$ . Se figur 23.



Figur 23.

Låt vinkeln OFD =  $\delta$  och vinkeln OAD =  $\theta$  samt FOD =  $\xi$ . Från definitionen av punkten C följer att vinkeln AOC =  $\frac{\beta}{2}$ . Jag påstår nu att vinkeln  $\alpha$  är precis en tredjedel av  $\beta$ . För att visa detta räcker dock att visa  $\xi = \frac{\beta}{6}$ .

Vi börjar med cosinussatsen på  $\Delta AOD$

$$\begin{aligned} OD^2 &= AO^2 + AD^2 - 2AO \cdot AD \cdot \cos \theta = 1 + r^2 - 2r \cos \theta = \\ &= 1 + (-1 + 2 \cos \theta)^2 - 2(-1 + 2 \cos \theta) \cos \theta \\ &= 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Så

$$OD = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Vi fortsätter nu med sinussatsen på  $\Delta ODF$

$$\frac{OD}{\sin \delta} = \frac{OF}{\sin(\angle ODF)} = \frac{1}{\sin \left( \frac{5\pi}{6} \right)} = 2$$

Så

$$OD = 2 \sin \delta, \text{ alltså } \delta = \frac{\theta}{2}$$

Vi får

$$\xi = \pi - \frac{5\pi}{6} - \delta = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2}$$

Vi fortsätter med sinussatsen fast nu för  $\Delta AOD$

$$\frac{OD}{\sin \theta} = \frac{AD}{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)} = \frac{r}{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)}$$

Alltså

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) &= r \cdot \frac{\sin \theta}{OD} = r \cdot \frac{\sin \theta}{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)} = \\ &= r \cdot \frac{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)} = r \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = (-1 + 2 \cos \theta) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Vi vet att

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

Så

$$2 \cos \theta \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos \left(\theta + \frac{\theta}{2}\right) + \cos \left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos \left(\frac{3\theta}{2}\right) + \cos \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Alltså

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\beta}{2}\right) &= (-1 + 2 \cos \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= -\cos \left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos \left(\frac{3\theta}{2}\right) + \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \cos \left(\frac{3\theta}{2}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

varför

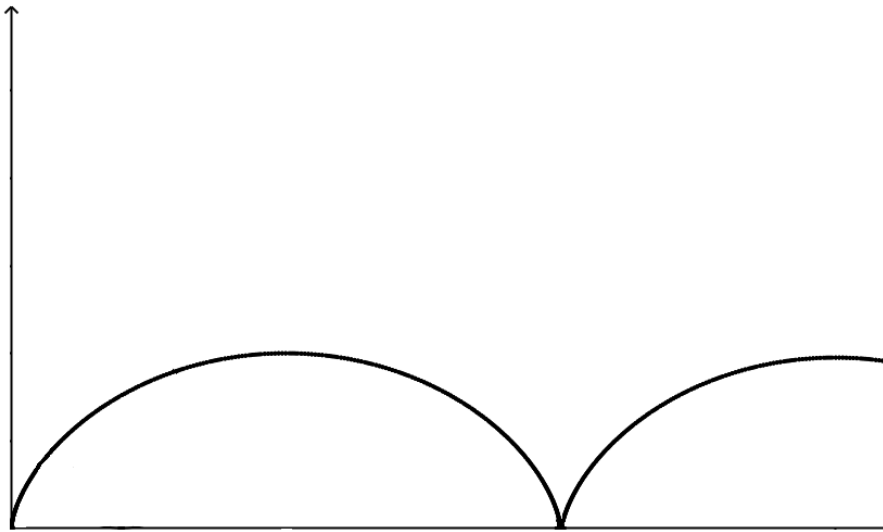
$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - 3 \left(\frac{\pi}{6} - \xi\right) = 3\xi$$

Och slutligen får vi att

$$\xi = \frac{\beta}{6}$$

vilket skulle visas.

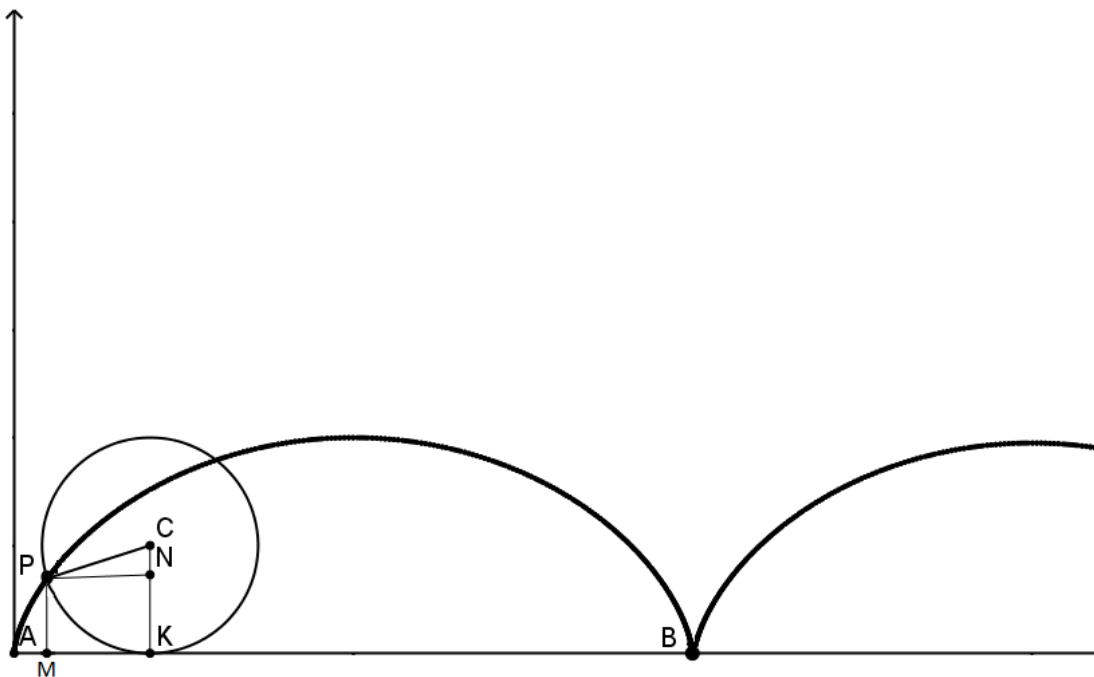
# Cykloiden



Figur 24.

Cykloiden definieras som kroklinjen som en punkt på en cirkel beskriver när cirkeln rullar på en linje, till exempel x-axeln.

För att finna ekvationen för cykloiden så ser vi till figuren och definierar A som origo, P som punkten som bildar kroklinjen, C som cirkelns mittpunkt och låter punkterna M, N och K agera hjälppunkter. Se figur 25 nedan.



Figur 25.

Vi börjar med att anta att P startar i A, när sedan cirkeln rullat så att P antagit positionen den har i bilden så har hela bågen PK varit i kontakt med sträckan AK. Därför kan vi dra slutsatsen att längden av bågen PK är lika med längden av sträckan AK. Låt nu  $a$  vara cirkelns radie och kalla den föränderliga vinkeln PCK för  $\omega$ . Om  $\omega$  är spetsig följer

$$|PK| = a\omega, |PN| = a\sin \omega \text{ och } |CN| = a\cos \omega$$

Då finner vi koordinaterna för P på parameterform

$$\begin{cases} x = AM = AK - MK = a\omega - a\sin \omega \\ y = PM = CK - CN = a - a\cos \omega \end{cases} = \begin{cases} x = a(\omega - \sin \omega) \\ y = a(1 - \cos \omega) \end{cases}$$

Samma uttryck får vi för alla värden på  $\omega$ .

Den första som studerade cykloiden var Nicolaus Cusanus (tysk filosof och biskop, 1401–1464) i hopp om att finna arean av en cirkel. En fransk munk vid namn Marin Mersenne (1588–1648) var den första som definierade de självklara bitarna såsom att längden av basen är lika med omkretsen hos den rullande cirkeln. Han försökte också hitta arean under kurvan men misslyckades. Vetenskapsmannen Galileo Galilei (1564–1642) spenderade hela 40 år till att studera cykloiden, det var han som namngav den men även Galileo misslyckades med att finna arean. År 1628 presenterade Mersenne problemet för Roberval som tillslut fann lösningen år 1634, arean under en båge är  $3\pi a^2$ . Mersenne skrev om resultatet, stolt som han var, och skickade det till Descartes som sägs ha svarat ”Ett fint bevis som jag inte upptäckt tidigare, men som inte borde vara så svårt att hitta för en någorlunda skicklig matematiker”

Descartes utmanade Roberval och Fermat i att hitta en metod för att rita en tangent till cykloiden, vilket han själv redan hade hittat såklart. Fermat lyckades!

Blaise Pascal hade under en period ägnat sig åt religion och ignorerat matematiken. År 1658 så började han ägna sina tankar åt matematiska problem igen. En kväll när han inte kunde sova på grund av smärta så löste han flera problem angående cykloiden såsom volymen och arean hos rotationskroppen som bildas när cykloiden roterar kring x-axeln. [9]

Som sagt så traggade matematikerna länge med att beräkna arean av en båge i kroklinjen. Idag kan vi med modern integration lösa problemet på mindre än en timme. Vi börjar med att ta fram integrationsgränserna.

När cirkeln börjar rulla är  $x = 0$  och efter att den rullat ett varv har den rullat sträckan  $2\pi a$ , där  $a$  är cirkelns radie. Därför får vi arean genom

$$\int_{x=0}^{2\pi a} y(x) dx$$

Här är  $y$  en funktion av  $x$  som vi inte kan uttrycka explicit varför vi gör en variabelsubstitution

$$x(\omega) = a(\omega - \sin \omega)$$

Variabelsubstitutionen förändrar även integrationsgränserna till

$$x = 0 \text{ blir } \omega = 0 \text{ och } x = 2\pi a \text{ blir } \omega = 2\pi$$

Nu skrivs  $y$  som en funktion av  $\omega$

$$y(\omega) = a(1 - \cos \omega)$$

Eftersom

$$\frac{dx}{d\omega} = a(1 - \cos \omega)$$

får vi istället integralen

$$\begin{aligned} \int_{\omega=0}^{2\pi} y(\omega) \frac{dx}{d\omega} d\omega &= a^2 \int_{\omega=0}^{2\pi} (1 - \cos \omega)^2 d\omega = \\ &a^2 \int_{\omega=0}^{2\pi} (1 - 2 \cos \omega + \cos^2 \omega) d\omega \end{aligned}$$

Vi kan nu stryka  $2\cos\omega$  eftersom cosinus integreras till sinus som i sin tur är 0 i 0 och  $\pi$ . Vi använder även satsen för halva vinkeln för att komma vidare. Vi får

$$a^2 \int_{\omega=0}^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega\right) d\omega$$

Vi kan nu med samma argument som förut även här stryka  $\cos 2\omega$ . Vi får slutligen

$$a^2 \int_{\omega=0}^{2\pi} \frac{3}{2} d\omega = a^2 3\pi$$

Så har vi löst problemet som de gamla matematikerna kämpade med att lösa i många år. Ett annat problem som enkelt går att lösa idag är att beräkna längden av en båge i cykloiden. Det görs med formeln [16, sida 334]

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

I vårt fall får vi med samma integrationsgränser som tidigare

$$L = \int_{\omega=0}^{2\pi} \sqrt{(x'(\omega))^2 + (y'(\omega))^2} d\omega$$

Vi har att

$$\begin{aligned} x(\omega) &= a(\omega - \sin \omega), & x'(\omega) &= a - a\cos \omega \\ y(\omega) &= a(1 - \cos \omega), & y'(\omega) &= a\sin \omega \end{aligned}$$

Därför får vi nu integralen

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos \omega)^2 + (a\sin \omega)^2} d\omega = \int_{\omega=0}^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos \omega)} d\omega$$

Det vi vill göra nu är att förändra  $1 - \cos \omega$  så att vi får en jämn kvadrat under rottecknet. Vi vet att



$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Kvadrerar vi båda leden får vi

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos \theta$$

Då skriver vi om integralen med hjälp av det vi funnit ovan

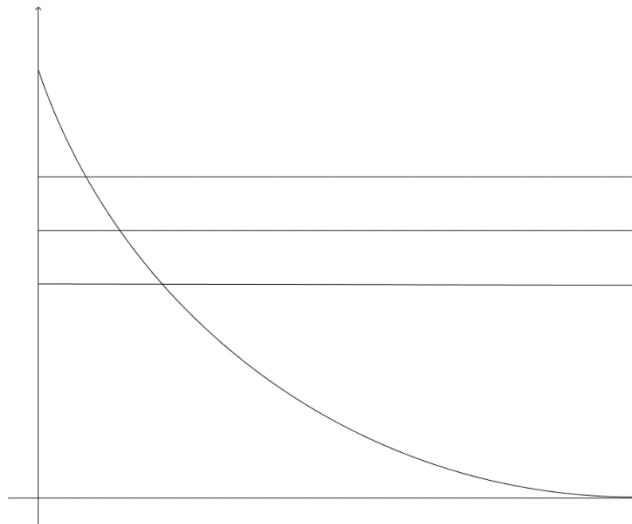
$$\int_{\omega=0}^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \int_{\omega=0}^{2\pi} |2a \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)| d\omega$$

Eftersom  $\frac{\omega}{2}$  går från 0 till  $\pi$  så är  $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$  alltid positiv så vi kan bortse från beloppstecknen och vi får nu

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} 2a \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = \left[-4a \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]_{\omega=0}^{2\pi} = 8a$$

Längden av en båge i cykloiden visar sig alltså vara  $8a$ .

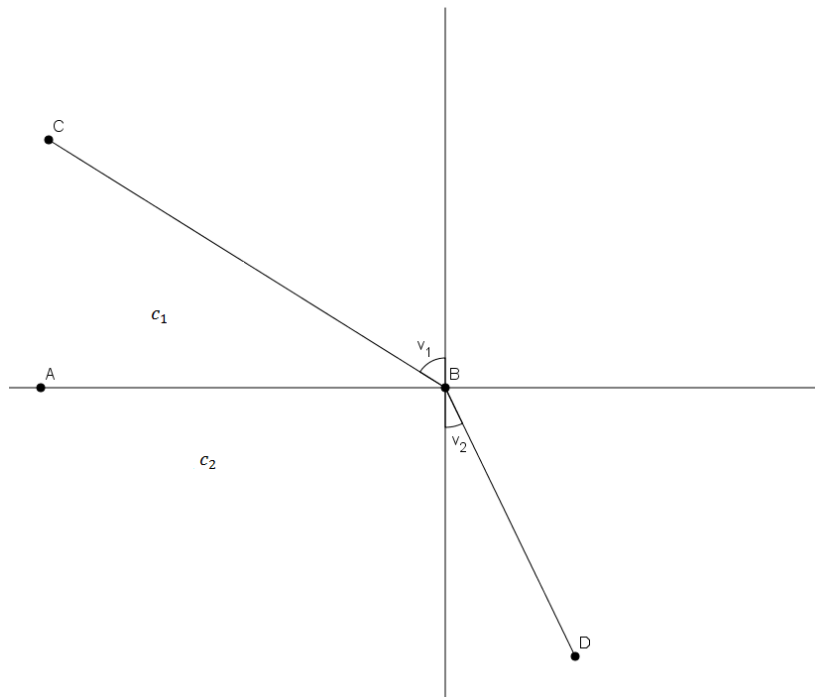
Ett känt problem där lösningen är just cykloiden är brachistochronproblemet. Problemet är att hitta en form på en glidbana i ett vertikallplan där ett föremål glider från en punkt till en annan på kortast möjliga tid. Det var i slutet på 1600-talet som flera matematiker arbetade med att lösa problemet, däribland bröderna Johann och Jacob Bernoulli, Newton och Leibniz. Jag tänker presentera Johann Bernoullis lösning, vi börjar med att titta på figuren nedan. Vi ser den tänkta glidbanan och vi tänker oss att vi delar in rummet i tunna horisontella skikt. Bernoulli tänkte sig att föremålet ändrar hastighet när det passerar från ett skikt till ett annat men är konstant inom skikten.



Figur 26.

Detta påminner oss om brytningen som sker när en ljusstråle passerar från ett medium till ett annat, till exempel från luft till vatten. Bakgrunden till brytningslagen är just att ljusstrålen

alltid rör sig längs den väg som tar kortast tid. I nästa figur ser vi AB som är gränsskiktet mellan två medier. En ljusstråle infaller längs CB och bryts i B och fortsätter sedan längs BD.



Figur 27.

Strålen bildar vinklarna  $v_1$  och  $v_2$  med lodlinjen. Ljusets hastighet i de två medierna är  $c_1$  och  $c_2$ , och brytningslagen i optiken säger att

$$\frac{\sin v_1}{c_1} = \frac{\sin v_2}{c_2}$$

Om ljusstrålen passerar fler medier med ljusets hastighet  $c_1, c_2, c_3, \dots$  och med vinklarna  $v_1, v_2, v_3, \dots$  så är

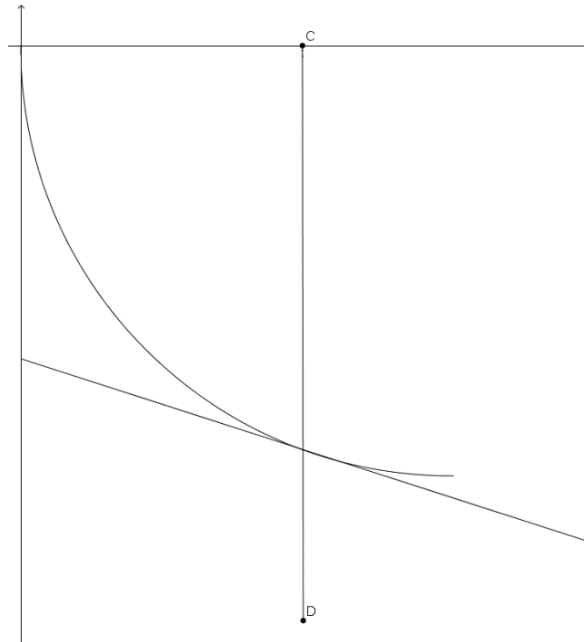
$$\frac{\sin v_1}{c_1} = \frac{\sin v_2}{c_2} = \frac{\sin v_3}{c_3} = \dots$$

Med andra ord är kvoten

$$\frac{\sin v_i}{c_i}$$

konstant under ljusstrålens passage genom de olika medierna.

Bernoullis idé var att i likhet med ljusstrålen så är förhållandet  $\frac{\sin v}{c}$  konstant under glidning längs banan. Här är  $v$  vinkeln mellan lodlinjen och kurvans tangent och  $c$  är hastigheten, båda ska ses som funktioner av tiden. I nästa figur är  $y$ -axeln riktad nedåt och  $v$  är vinkeln mellan linjen  $CD$  och kurvans tangent.



Figur 28.

Om  $u$  är vinkeln mellan  $x$ -axeln och tangenten i en punkt  $(x,y)$  så har vi att

$$\tan u = y'(x)$$

Vidare har vi att  $\tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cot v$  och

$$\cot^2 v = \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v} = \frac{1 - \sin^2 v}{\sin^2 v} = \frac{1}{\sin^2 v} - 1$$

så

$$\sin^2 v = \frac{1}{1 + \cot^2 v} = \frac{1}{1 + \tan^2 u} = \frac{1}{1 + (y'(x))^2}$$

Vi behöver nu ett uttryck för hastigheten  $c$  på en viss höjd. När ett ting faller en sträcka  $h$  så omvandlas lägesenergin  $mgh$  till rörelseenergin  $\frac{mc^2}{2}$ , där  $m$  är massan,  $c$  är hastigheten och  $g$  är tyngkraftsaccelerationen. Vi får nu ekvationen

$$\frac{c^2}{2} = gh \Leftrightarrow c = \sqrt{2gh}$$

Vårt föremål glider  $y$  i höjddled, varför hastigheten på vårt föremål är

$$c = \sqrt{2gy}$$

Insättning i  $\frac{\sin v}{c}$  ger

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy}}} = K$$

där  $K$  är en konstant. Vi får tillslut en differentialekvation:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot \sqrt{2gy}} = K$$

Eftersom uttrycket är lika med en konstant så kan vi enbart fokusera på vänsterledet som efter multiplikation, division och kvadrering ser ut som sådan

$$y(1 + (y'(x))^2) = K$$

Vi nöjer oss här med att verifiera att lösningen är

$$\begin{cases} x = a(\omega - \sin \omega) \\ y = a(1 - \cos \omega) \end{cases}$$

som alltså är cyklroidens ekvation.

Eftersom vi inte har  $y$  uttryckt som en funktion av  $x$ ,  $x$  och  $y$  är uttryckta som funktioner av  $\omega$ , så använder vi kedjeregeln.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\omega}}{\frac{dx}{d\omega}}$$

vilken ger oss

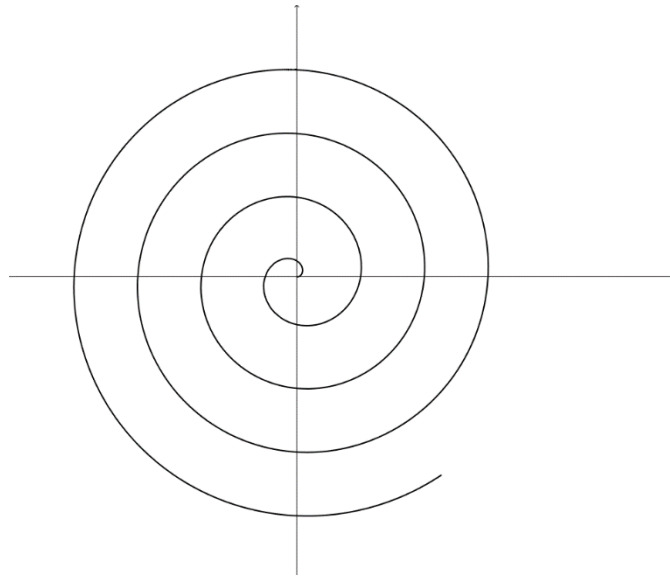
$$y'(x) = \frac{a \sin \omega}{a(1 - \cos \omega)} = \frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

Vi får nu

$$\begin{aligned} y(1 + (y'))^2 &= a(1 - \cos \omega) \left( 1 + \frac{\sin^2 \omega}{(1 - \cos \omega)^2} \right) = \\ &a(1 - \cos \omega) \left( \frac{(1 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}{(1 - \cos \omega)^2} \right) = \\ &a \left( \frac{1 - 2 \cos \omega + \cos^2 \omega + \sin^2 \omega}{1 - \cos \omega} \right) = a \left( \frac{2(1 - \cos \omega)}{1 - \cos \omega} \right) = 2a \end{aligned}$$

Vi har nu alltså att när  $a = \frac{K}{2}$  så är lösningen cyklroidens ekvation. Det skulle kunna finnas fler lösningar, man kan visa att det bara finns en vilket är cyklroiden. Men detta kommer inte att visas här.

## Arkimedes spiral



Figur 29.

Arkimedes (ca 287–212 f.v.t.) var den bästa matematikern under sin tid, hans geometri sägs ha varit revolutionerande! [10] Han studerade spiraler ca 225 f.v.t., han lyckades räkna ut längderna på olika tangenter till spiralen, och kunde med hjälp av spiralen tredela en vinkel och kvadrera en cirkel. Dock så studerades spiralen före Arkimedes av hans vän Konon från Samos (ca 280–220 f.v.t.). [11] Konon sägs ha arbetat som astronom vid Ptolemaios III Euergetes hov i Alexandria. Hans minne är bevarat i en dikt av Callimachus (poet och vetenskapsman) ”Berenikes hårlock”. I dikten får man läsa om hur drottning Berenike II, hustru till Ptolemaios III lovade att skänka en hårlock till templet om hennes man kom hem som segrare i det tredje syrianska kriget. Ptolemaios III stred i kriget för att hämnas sin systems död och år 245 f.v.t segrade han i kriget och Berenike höll vad hon lovade. Dagen efter så var hårlocken borta och Konon beskrev då hur han såg hennes lock i stjärnorna, därav stjärnbilden ”Berenikes hår” som är belägen mellan Jungfrun och Stora björnen.

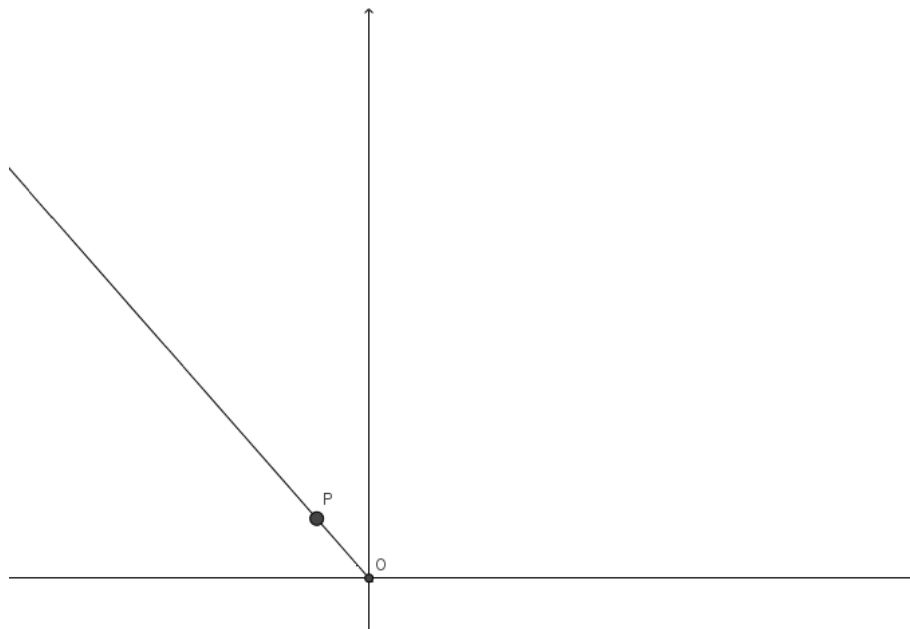
Konon var nära vän med Arkimedes och tillsammans delade de matematiska idéer, bland annat spiralen. Namnet på spiralen förklaras av att det var Arkimedes som arbetade med den mest, samt så att han skrev om den i sitt verk om spiraler. Konon är bland annat känd för sitt arbete om kägelsnitt och sina böcker om astrologi. [12]

Arkimedes föddes i Siracusa på Sicilien och det sägs att han som ung studerade med Euklides efterföljare i Alexandria. I förordet till sitt verk om spiraler berättar han en anekdot om sina vänner i Alexandria. Han berättar hur han delat med sig av delar av sina senaste satser men han inkluderade aldrig bevisen av dem. Vissa av matematikerna i Alexandria försökte då hävda Arkimedes satser som sina egna. Arkimedes inkluderade därför falska satser, så att de som försökte sno åt sig äran över hans satser skulle kunna påvisas ha upptäckt det omöjliga.

Arkimedes uppfann många maskiner och blev känd för dem, men han själv tyckte att matematiken var det enda som var värt att kämpa för. Det sägs till och med att hans betjänter fick tvinga honom till att bada, och väl i badet så ritade han geometriska figurer i oljan som smorts på hans kropp.

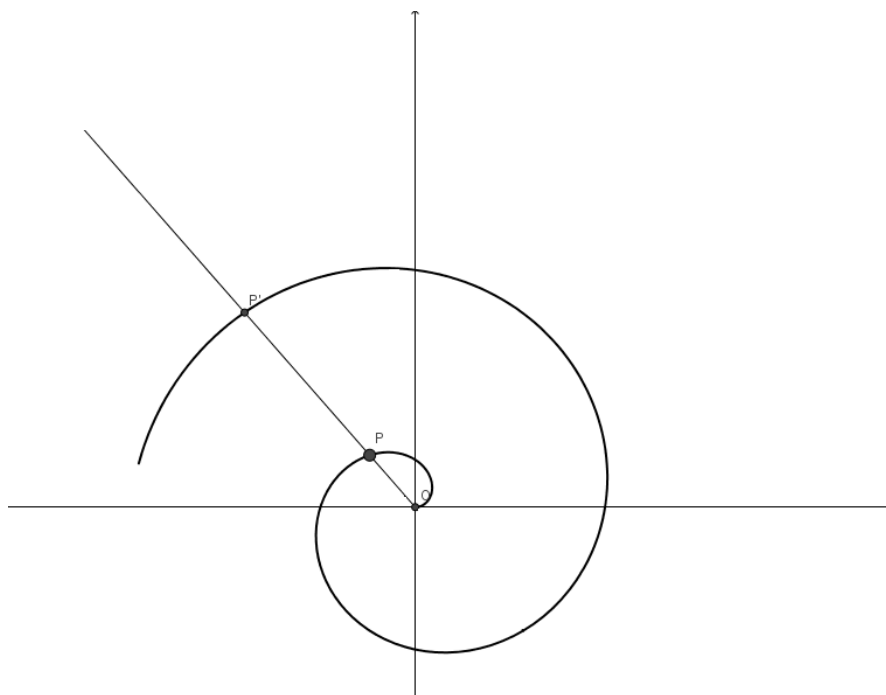
Bland allt det som Arkimedes lyckades med under sin livstid så fulländade han en metod för integration vilket gjorde att han kunde beräkna volym och area av diverse kroppar. Han gjorde också en noggrann approximation av  $\pi$ , och mycket, mycket mer. [13]

För att finna ekvationen till spiralen så ritas vi först upp en bild



Figur 30.

Låt O vara origo. Från origo dras en rät linje, på den räta linjen finns en punkt P som rör sig längs strålen och bildar en spiral samtidigt som strålen roterar kring O.



Figur 31.

Att P rör sig med konstant hastighet längs strålen betyder att dess avstånd  $r$  till origo uppfyller  $r = bt$ , där  $b$  är en konstant och  $t$  är tiden. Samtidigt vrider sig strålen men konstant hastighet så  $\theta = ct$ , där  $t$  är tiden och  $c$  är en konstant. Av  $r = bt$  och  $\theta = ct$  får vi

$$\frac{r}{\theta} = \frac{bt}{ct} = \frac{b}{c}$$

och alltså

$$r = \frac{b}{c}\theta = a\theta, \text{ där } a \text{ är en konstant.}$$

Därför är ekvationen för Arkimedes spiral i polära koordinater

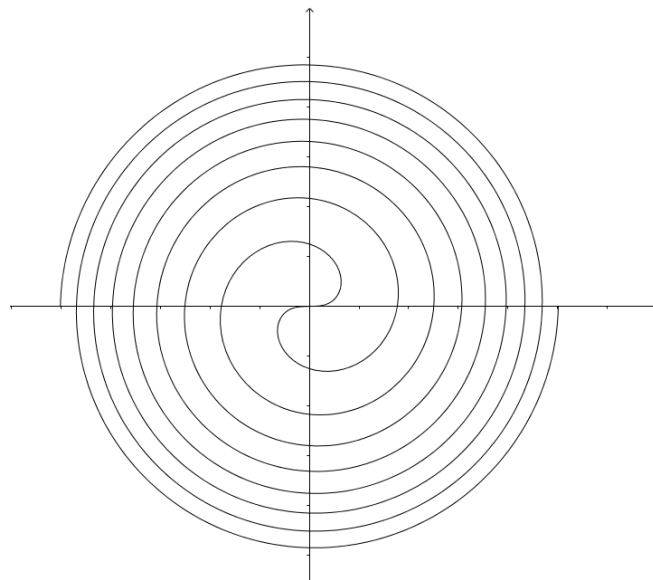
$$r = a\theta$$

En mer allmän ekvation som används för att få fram andra spiraler är

$$r = \theta^n$$

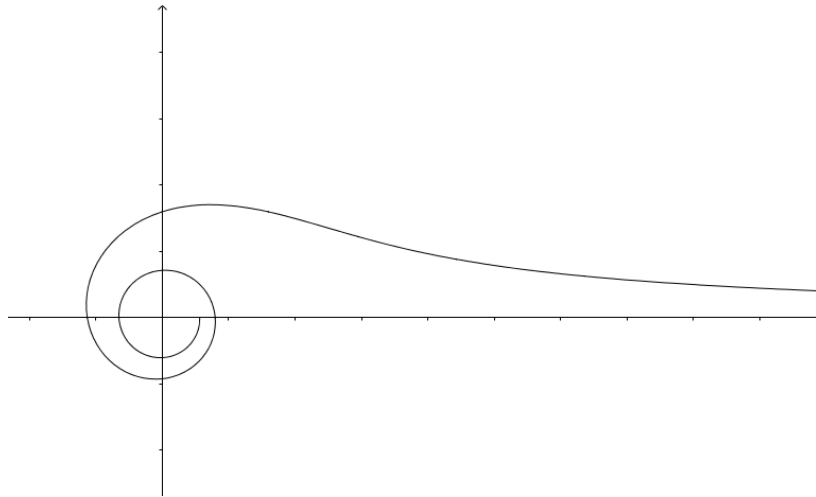
Där Arkimedes spiral fås fram genom  $n = 1$  och  $r = \theta$

För  $n = \frac{1}{2}$  och  $r = \sqrt{\theta}$  får vi istället Fermats spiral, som även kallas parabolisk spiral. Den kroklinjen är en spiral som Fermat studerade år 1636. I den här kurvans ekvation finns det för vilket  $\theta$  som helst två värden på  $r$ . Det ena värdet är det negativa av den andra (här måste vi alltså acceptera negativa  $r$ ) varför kurvan är symmetrisk med avseende på linjen  $y = -x$  vilket kan ses i bilden. [14]



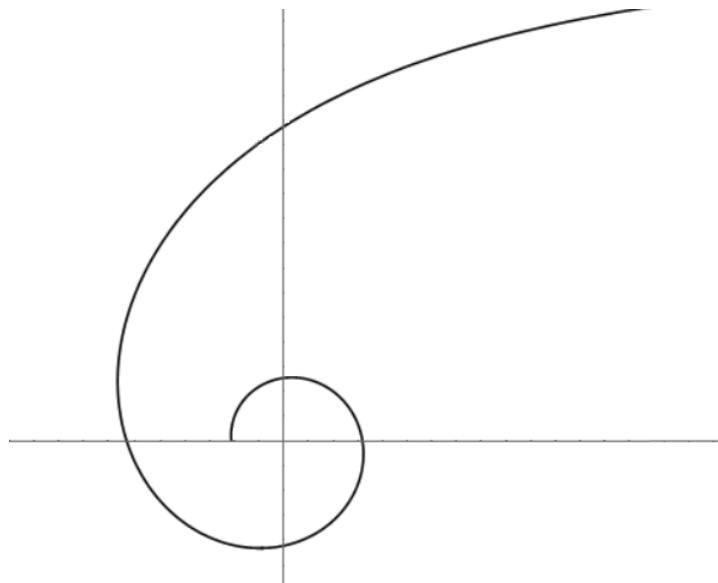
Figur 32.

För  $n = 0$  och  $r = 1$  så får vi istället en cirkel. Men av  $n = -\frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$  så får vi kurvan Lituus som studerades år 1722 av den engelske matematikern Roger Cotes (1682–1716). Namnet betyder krökt stav eller kräkla. Det är en symbolisk herdestav som bärs av biskopar. Tippa huvudet till vänster när du studerar figur 33 så ser du hur det ser ut som en kräkla. [15]



Figur 33.

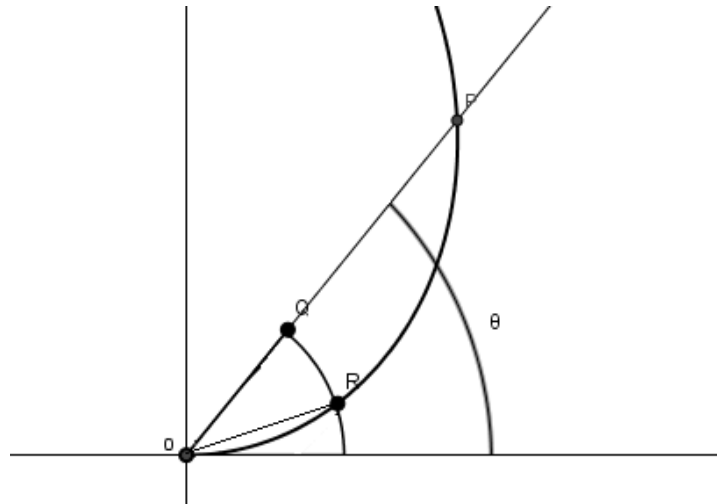
Av  $n = -1$  och  $r = \frac{1}{\theta}$  får vi den hyperboliska spiralen som ursprungligen studerades år 1704 av den franska matematikern Pierre Varignon (1654–1722). Spiralen studerades några år senare av både Johann Bernoulli och Cotes.



Figur 34.

Arkimedes använde spiralen för att tredela en vinkel samt för att kvadrera en cirkel. Jag kommer nu att visa hur man gör detta. Vi börjar med att tredela en vinkel.





Figur 35.

I figur 35 ser vi en in zoomning av spiralen. Låt O vara origo, och rita en stråle från O som skär spiralen i punkten P, kalla den OP. Kalla vinkeln mellan x-axeln och OP för  $\theta$ , vilket är den vinkeln vi vill tredela. Konstruera punkten Q på OP så att OQ är en tredjedel av OP.

Vi påminner oss om spiralens ekvation  $r = a\theta$ , i figur 35 ser vi att

$$|OP| = r$$

vi har då att

$$|OQ| = \frac{r}{3}$$

Vi ritar nu en del av en cirkelbåge med en passare från Q till x-axeln, och finner skärningspunkten R mellan cirkelbågen och spiralen. Eftersom sträckan OQ nu är en radie i vår cirkelbåge, så innebär det att även OR är en radie alltså att

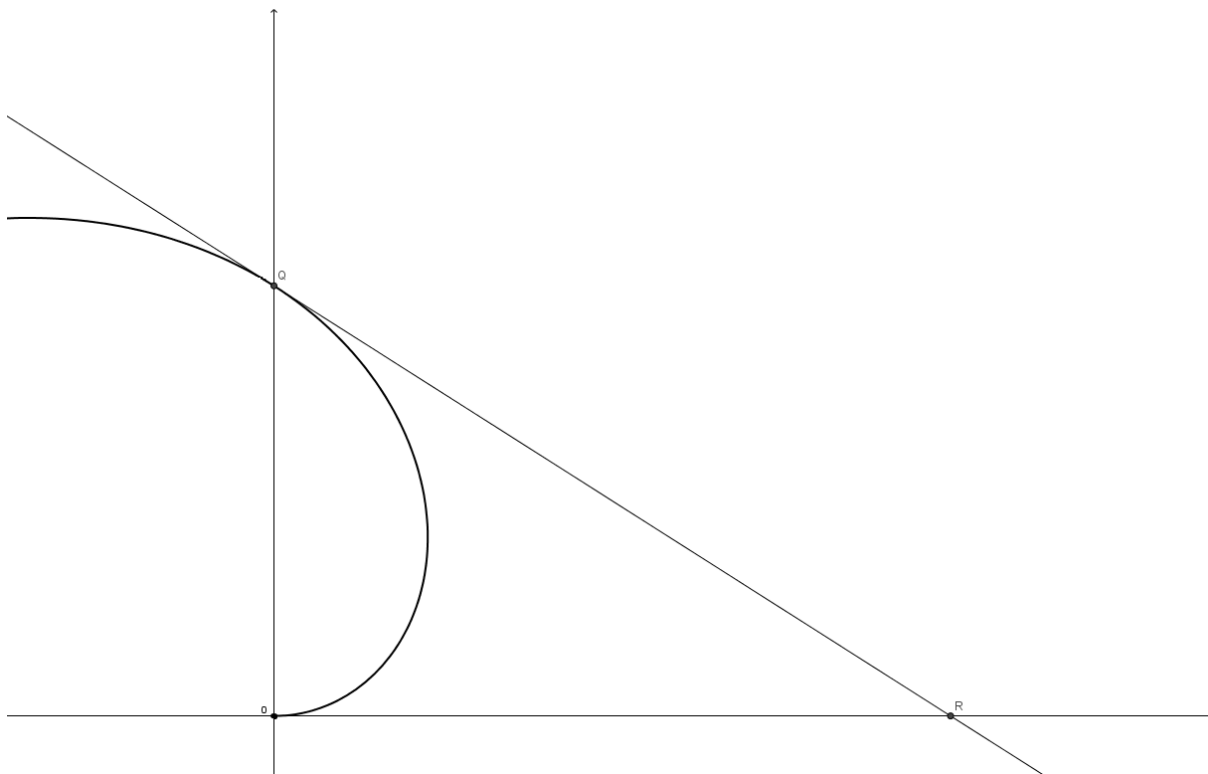
$$|OQ| = |OR| = \frac{r}{3}$$

Eftersom radien och vinkeln är proportionella så får vi att

$$\frac{r}{3} = a \frac{\theta}{3}$$

vilket visar på att vinkeln mellan x-axeln och OR är  $\frac{\theta}{3}$ .

Vi ska nu kvadrera en cirkel med hjälp av Arkimedes spiral. Jag vill förtydliga att det som menas med att kvadrera en cirkel är att hitta en kvadrat med samma area som cirkeln. Vi börjar med en ny bild.



Figur 36.

I figur 36 ser vi början av Arkimedes spiral. Vi ska kvadrera cirkeln med diametern OQ. I punkten där spiralen skär y-axeln dras en tangent. Skärningspunkten mellan spiralen och y-axeln kallas Q och där är  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , och koordinaterna för Q är således  $(0, a\frac{\pi}{2})$ . Vi vill nu ta reda på koordinaterna för R, vilket vi kan göra genom att bestämma ekvationen för tangenten. Vi börjar med att övergå till rätvinkliga koordinater. Vi har

$$r = a\theta$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = a\theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta = a\theta \sin \theta \end{cases}$$

Vi använder nu derivatan för att hitta lutningen till tangenten. Vi påminner oss först av kedjeregeln

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\text{Lutningen} = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a(\sin \theta + \theta \cos \theta)}{a(\cos \theta - \theta \sin \theta)}$$

När  $\theta = \frac{\pi}{2}$  får vi

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

Vi har nu att tangentens ekvation är

$$y - a\frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x - 0) = -\frac{2}{\pi}x$$

$$y = a\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x$$

För att få ut koordinaterna för R sätter vi  $y=0$

$$0 = a\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow x = \frac{a\pi^2}{4}$$

Alltså är koordinaterna för R är  $(\frac{a\pi^2}{4}, 0)$ .

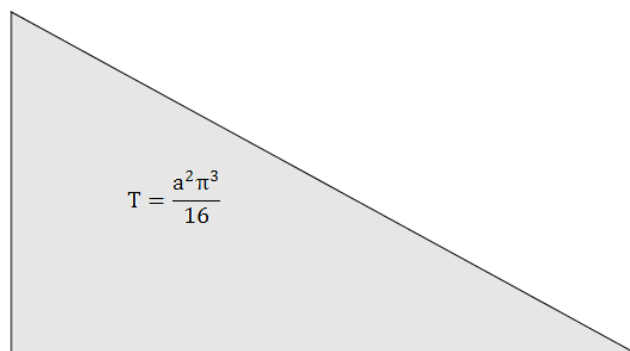
Cirkeln med diametern OQ har arean

$$A = \pi \cdot \left(\frac{a\pi^2}{4}\right) = \frac{a^2\pi^3}{16}$$

Arean av triangeln T som bildas med tangenten i figur 36 som hypotenusa är

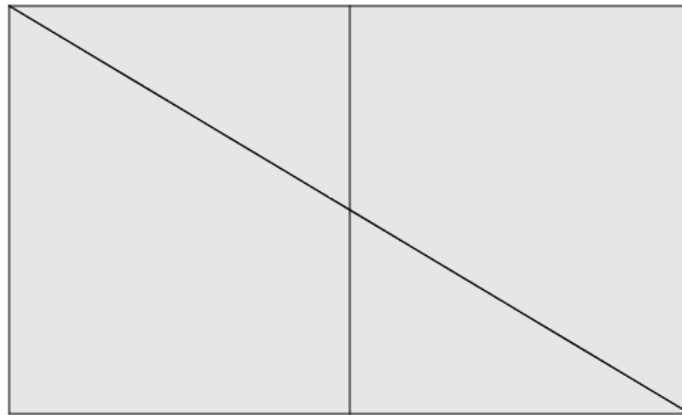
$$T = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi^2}{4} \cdot \frac{a\pi}{2} = \frac{a^2\pi^3}{16}$$

Nu har vi alltså fått fram en rätvinklig triangel med samma area som cirkeln. Nu återstår det endast att förvandla triangeln till en kvadrat. Vi nöjer oss här med att hitta sidan i den sökta kvadraten.



Figur 37.

I figur 37 ser vi den redan kända triangeln T och Ts area. Vi tänker oss nu att vi har två T triangler och lägger den ena över den andra, se nedan i figur 38.



Figur 38.

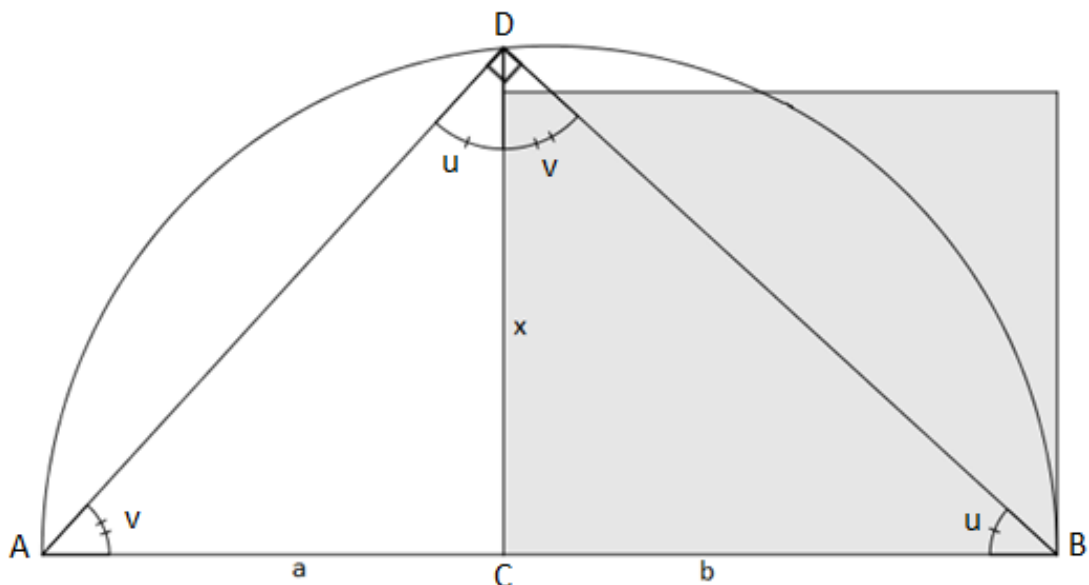
Två rätvinkliga trianglar T bildar nu tillsammans en rektangel. Jag har delat rektangeln på mitten, och har nu två rektanglar med samma area;  $\frac{a^2\pi^3}{16}$ .

Vi tittar nu enbart på den vänstra rektangeln, och lägger den ned på sidan. Jag tar nu kortsidan och "lägger ned" den till vänster om rektangeln, se figuren nedan.



Figur 39.

Vi ritar nu en halvcirkel med AB som diameter där D är skärningspunkten mellan halvcirkeln och förlängningen av rektangelns kortsida. I figuren bildas nu två rätvinkliga trianglar. Det är lättast att förklara med en till figur, se figur 40.



Figur 40.

I figuren är vinkeln ADB rät, och vi ser i figuren att

$$\angle ADC + \angle CDB = 90^\circ$$

men

$$\angle ADC + \angle DAC = 90^\circ$$

så

$$\angle DAC = \angle CDB = v \text{ i figuren}$$

Då får vi

$$\tan v = \frac{x}{a} \text{ och } \tan v = \frac{b}{x}$$

varför

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

och

$$x^2 = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$$

Alltså har vi hittat en längd  $x = \sqrt{ab}$  som visar sig vara en kvadrat med samma area som triangeln i figur 37 och en av rektanglarna i figur 38 och dessutom som cirkeln med diametern OQ.

## Avslutning

I den här uppsatsen har vi fått lära känna en hel del gamla matematiker, vi har fått reda på mer om deras liv och vi har fått lära oss om olika kroklinjer. Arbetet har belyst användningsområden för kurvorna och om hur man konstruerar dem. Något som förvånade mig var hur man med hjälp av kurvorna kunde lösa en hel del problem. Dessutom tycker jag att det var intressant att se hur stor skillnad det var på att tredela en vinkel med hjälp av Pascals snäcka gentemot Arkimedes spiral. Det som förvånade mig mest är hur intressant Pascals snäcka är, hur den förändras vid olika värden på konstanterna  $a$  och  $b$ , och att trots det som jag finner intressant att den blivit klassad som det motsatta av bland annat Descartes.

Jag hoppas att uppsatsen har varit lika intressant att läsa som den har varit rolig att komponera.

## Referenser

- [1] Lindelöf, L., Lärobok i analytisk geometri, 5. uppl. (Stockholm: Bonnier, 1909)
- [2] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Diocles.html> (hämtad 2017-02-15, kl. 12:45)
- [3] [https://sv.wikipedia.org/wiki/Deliska\\_problemet](https://sv.wikipedia.org/wiki/Deliska_problemet) (hämtad 2017-02-27, kl. 10:34)
- [4] [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/CissoidOfDiocles\\_dir/cissoidOfDiocles.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/CissoidOfDiocles_dir/cissoidOfDiocles.html) (hämtad 2017-02-21, kl. 13:72)
- [5] [http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pascal\\_Etienne.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pascal_Etienne.html) (hämtad 2017-02-14 kl 09:48)
- [6] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Pascal.html> (hämtad 2017-02-14, kl. 09:41)
- [7] <http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html> (hämtad 2017-02-22, kl. 08:59)
- [8] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Cardioid.html> (hämtad 2017-03-08, kl. 14:20)
- [9] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Cycloid.html> (hämtad 2017-02-14, kl. 14:09)
- [10] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Archimedes.html> (hämtad 2017-02-14, kl. 14:04)
- [11] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Spiral.html> (hämtad 2017-03-09, kl. 14:34)
- [12] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Conon.html> (hämtad 2017-02-23, kl. 14:53)
- [13] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Archimedes.html> (hämtad 2017-03-09, kl. 14:42)
- [14] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Fermats.html> (hämtad 2017-02-23, kl. 14:30)
- [15] [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/Lituus\\_dir/lituus.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/Lituus_dir/lituus.html) (hämtad 2017-02-23, kl. 14:24)
- [16] Persson, A. & Böiers, L. (2010). *Analys i en variabel*. (3., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.