SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Beräkning av π

av

Jonas Hallin

2017 - No 12

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Beräkning av π

Jonas Hallin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2017

Sammanfattning:

Den matematiska konstanten π har en lång historia där många framstående historiska matematiker dyker upp. Dess oändliga decimalutveckling har och fascinerar än idag väldigt många människor. Det här arbetet kommer bland annat att ta upp ett antal beräkningar av pi och hur de bevisas.

Abstract:

The mathematical constant π has a long history in which many prominent historical mathematicians appear. It's endless decimal expansion has fascinated and fascinates many people even today. This work will focus on a number of calculations of pi and how they are proved.

Innehållsförteckning

1. Inledning

Pi är en matematisk konstant som definieras som förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter. Talet pi har studerats i över 4000 år och har haft en stor betydelse för matematiken. För cirka 4000 år sedan önskade babylonierna beräkna en cirkels omkrets utan att behöva mäta den rent fysiskt. De utgick därför från cirkelns diameter, som de enkelt kunde mäta och de uppskattade sedan att diametern multiplicerat med talet 3 gav cirkelns omkrets. Efter en tid så ändrade de sin uppskattning från att multiplicera med 3 till att multiplicera med ett tal som de approximerade med $3\frac{1}{8}$. Idag vet vi att denna uppskattning av pi inte är helt fullständig, utan det har efter denna tid kommit bättre och bättre beräkningar av talet och idag vet vi cirka 13,3 triljoner decimaler i talet pi.

Talets benämning pi, och dess symbol π, kommer från den grekiska bokstaven pi. Symbolen π användes för första gången i början av 1700-talet av matematikern William Jones. År 1737 använde Leonhard Euler samma symbol för talet och detta har lett till att talet betecknas med denna symbol världen över. [1]

Går man tillbaka i historien så finns det mängder av olika sätt att beräkna decimaler i pi. Jag kommer i detta arbete att gå igenom några av dessa beräkningar. Uppsatsen kommer att ta upp Gregory-Leibniz formel, Machins formel och Eulers beräkning av $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ och $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$. Jag kommer bland annat att ta upp kort historik om upptäckterna och bevisa att de stämmer.

2. Gregory-Leibniz formel:

Gregory − Leibniz formel är serien $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

2.1 Historik:

Serien sägs ha tre stycken upptäckare. Den första upptäckaren anges, enligt en artikel ur Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 5, december 1990[2], vara en matematiker från Indien som levde på 1400- eller 1500-talet. Hans identitet säges dock inte vara helt känd. Serien har sedan återupptäckts av både James Gregory och Gottfried Wilhelm Leibniz. De är dessa två som sedan gett namn till serien.

James Gregory levde mellan 1638 till 1675 och var upptäckaren av serien för arctan x. Gregory formulerade dock aldrig formeln för $\frac{\pi}{4}$. Det var istället Gottfried Wilhelm Leibniz som gjorde det. Han levde mellan 1646 till 1716 och hade innan sin upptäckt av serien tagit en doktorsexamen i juridik och samtidigt studerat matematik själv på sidan om. Vid 26 års ålder var han fortfarande en amatör inom matematiken men en resa till Paris, och ett möte med matematikern och fysikern Christiaan Huygens, förändrade detta. Leibniz skrev, år 1679, ett brev till matematikern Tschirnhaus om mötet. I brevet berättar Leibniz att han vid den tiden inte visste den korrekta definitionen av tyngdpunkt och när han sedan, under mötet med Huygens, berättade om sin definition fick han ett skratt tillbaka. Huygens hänvisade då Leibniz till att studera Pascals brev och Leibniz följde rådet. Det utvecklade hans matematiska kunskaper enormt. Han lärde sig bland annat idéerna om derivata och integraler vilket senare ledde till att Leibniz upptäckte serien för pi. [3]

2.2 Bevis:

Bevis:

Ett välkänt bevis för Gregory-Leibniz formel är följande. Man utgår från Maclaurinutvecklingen av arctan x

Sats: $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$+ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Bevis: Vi använder oss av formeln för geometrisk summa

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$$

Vi adderar $\frac{z^{n+1}}{1-z}$ till båda sidor och får

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

Vi sätter $z = -t^2$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

Då $\frac{1}{1+t^2}$ är derivatan av arctan t kan vi integrera båda sidor på intervallet 0 till x

$$\arctan \mathrm{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Vi återgår till beviset för Gregory-Leibniz formel och tittar på den sista integralen i utvecklingen. Vi ska visa att den kommer att gå mot 0 om $|x| \leq 1$. Vi kommer dock endast titta på positiva x.

Att den kommer gå mot 0 kan ses då

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2}\, dt$$

Vi utför sedan integrationen

$$\int_0^x t^{2n+2}\, dt = \left[\frac{(t^{2n+3})}{2n+3}\right]_0^x = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

När vi kommit till $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ är det enkelt att se att antagandet $|x| \leq 1$ ger att täljaren endast antar värden som är ≤ 1. När $n \to \infty$ kommer nämnaren att växa mot oändligheten, vilket ger

$$\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \to 0 \text{ } då \text{ } n \to \infty$$

Den går dock långsamt mot 0 vilket är ett informellt sätt att säga att man behöver ta med många termer för att få god noggrannhet. Vi kommer senare att undersöka hur detta påverkar beräkningen av pi.

Eftersom vi nu bevisat att sista integralen går mot 0, då n går mot oändligheten, så ser $\arctan x$, för $|x| \leq 1$, ut på följande sätt.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

För att sedan erhålla Gregory-Leibniz serie sätter vi in $x = 1$.

2.3 Konvergerar långsamt:

Gregory-Leibniz serie konvergerar väldigt långsamt. Att det går långsamt innebär att resttermen går långsamt mot 0 och att man därför måste ta med många termer för att få bra närmevärden. I detta fall är summan av serien lika med $\frac{\pi}{4}$, men det krävs ett stort antal termer för att få fram många korrekta decimaler.

Vi kommer nu att titta närmare på vad detta egentligen innebär och även se hur detta påverkar beräkningen av pi.

Vi måste se på resttermen i utvecklingen av $\arctan x$.

$$(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Genom att studera denna restterm kan vi ta reda på hur många decimaler som vi säkert vet kommer att stämma överens med talet pi.

Vi går tillbaka till Maclaurinutvecklingen av $\arctan x$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Vi sätter

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Alltså

$$\arctan x = S_n(x) + R_n(x)$$

Tidigare har vi gjort uppskattningen att

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

I Gregory-Leibniz formel är $x = 1$, och vi får då

$$\frac{\pi}{4} = S_n(1) + R_n(1)$$

$$\pi = 4S_n(1) + 4R_n(1) = 4\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} + 4R_n(1)$$

Vi tittar nu när $n = 1000$ och undersöker hur många decimaler i pi som vi kan vara säkra på är korrekta.

$$\pi \approx 4S_{1000}(1) = 4\sum_{k=0}^{1000} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

Användning av mathematica ger

$$\pi \approx 4S_{1000}(1) = 3.142591654339543$$

Vi måste se på uppskattningen av resttermen för att kunna avgöra hur många decimaler som vi säkert vet är korrekta.

$$|4R_{1000}(x)| \leq \frac{4}{2003} < \frac{4}{2000} = 0.002$$

När vi vet att resttermen är strikt mindre än 0.002 så kan vi vara säkra på de två första decimalerna då resttermen inte kommer att kunna påverka dessa. Detta ger alltså

$$\pi \approx 3.14$$

För att ytterligare förtydliga detta resonemang kommer vi titta på två exempel.
Säg att vi vill bestämma ett närmevärde till talet a och har beräknat fram

$$a \approx 4.3832610547$$

Säg också att resttermen, alltså felet, har uppskattats till högst 0.00000003. Detta ger alltså att felet först kan påverka decimal åtta i talet a. Vi kan alltså vara säkra på

$$a \approx 4.3832610$$

Säg att vi istället hade uppskattat felet till 0.0000006. Då hade vi inte kunnat vara säkra på decimal sju, som alltså är 0, men detta påverkar också decimal nummer sex, alltså 1. Vi hade då fått att decimal sex och sju kan vara 04, 05, … , 15, 16. Vi hade alltså endast kunnat varit säkra på

$$a \approx 4.38326$$

Det kan även vara så att ett väldigt litet fel som är uppskattat till exempelvis högst 0.0000003 kan ge att väldigt många decimaler är fel och ibland även att alla decimaler är felaktiga, exempelvis om vi beräknat fram

$$b \approx 2.0999998$$

Då kommer vårt fel, 0.0000003, att kunna påverka alla decimaler. Det räcker alltså inte bara att uppskatta resttermen och tro att ett väldigt litet fel, per automatik, innebär att många decimaler är korrekta.

Vi återgår nu till Gregory-Leibniz formel för att göra ytterligare beräkningar.
Vi sätter först $n = 100$

$$\pi \approx 4S_{100}(1) = 4\sum_{k=0}^{100}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = 3{,}15149340107099$$

Vi studerar resttermen för att uppskatta felet.

$$|4R_{100}(x)| \leq \frac{4}{203} < \frac{4}{200} = 0.02$$

Resttermen kommer att påverka den tredje decimalen, alltså 5. Då decimalen just är en femma så kommer inte felet att påverka några tidigare decimaler. Vi kan alltså vara säkra på att första decimalen är korrekt, alltså

$$\pi \approx 3.1$$

Vi sätter $n = 500\,000$

$$\pi \approx 4S_{500000}(1) = 3.14159465358579332445$$

Vi studerar resttermen för att uppskatta felet.

$$|4R_{500000}(x)| \leq \frac{4}{1000003} < \frac{4}{1000000} = 0.000004$$

Felet kommer alltså att påverka decimal sex, alltså 4. Då sjätte decimalen är en just fyra så kommer inte felet att påverka några tidigare decimaler. Vi kan alltså vara säkra på att fem decimaler är korrekta, alltså

$$\pi \approx 3.14159$$

Användning av Gregory-Leibniz formel för att beräkna pi kräver alltså 500 000 termer för att beräkna fem korrekta decimaler till talet. Denna egenskap hos serien innebär att den blir väldigt begränsad och inte så användbar. Dessa beräkningar blir till slut omöjliga att genomföra. Om istället Leibniz hade valt att exempelvis sätta $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, istället för $x = 1$, så hade han kunnat beräkna fler decimaler då den serien konvergerar mycket snabbare. Vi ger exempel.

2.4 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ istället för $x = 1$:

Vi sätter $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ vilket ger

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5}{5} - \cdots = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} \ldots\right)$$

Vi ser här att termerna går snabbare mot 0 än när $x = 1$ då

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n}$$

När n växer går $\frac{1}{3^n}$ snabbt mot 0 vilket gör att hela utrycket, $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n}$, går snabbt mot 0. Vi kommer dock att uppskatta resttermen för att på ett mer noggrant sätt visa att serien konvergerar snabbare mot pi än Gregory-Leibniz formel.

Vi gör på samma sätt som när vi tittade på $x = 1$.

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = S_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = S_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\pi = 6S_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 6R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\pi = 6\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}}{2k+1} + 6R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{3^k} + 6R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)} + 6R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)} + 6R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Vi uppskattar resttermen

$$\left|6R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \leq \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+3}}{2n+3} = \frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}(2n+3)}$$

Vi kommer att titta på två exempel. Vi sätter först $n = 4$

$$\pi \approx 6S_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Användning av mathematica ger

$$\pi \approx 3.142604745663085$$

Vi betraktar resttermen som ger

$$\left|6R_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3^5 \cdot 13} < 0.002$$

Resttermen kommer alltså kunna påverka den tredje decimalen vilket gör att vi endast kan vara säkra på att två decimaler är korrekta, alltså

$$\pi \approx 3.14$$

Vi sätter nu $n = 10$

$$\pi \approx 6S_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Användning av mathematica ger

$$\pi \approx 3.141593304503082$$

Vi tittar på resttermen

$$\left|6R_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3^{11} \cdot 23} < 0.0000009$$

Resttermen kommer alltså att kunna påverka decimal sex som i sin tur kommer kunna påverka decimal fem. Vi kan då endast vara säkra på fyra decimaler, alltså

$$\pi \approx 3.1415$$

Vi kan alltså efter endast 4 termer säkert beräkna 2 decimaler till talet pi, något som inte ens var möjligt i Gregory-Leibniz för 100 termer. Likaså kan vi beräkna 4 korrekta decimaler till pi efter endast 10 termer. Detta är alltså på grund av att serien konvergerar mycket snabbare när $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Det är dock viktigt att poängtera att det kräver en bra uppskattning av $\frac{1}{\sqrt{3}}$ för att göra dessa beräkningar.

Förutom att utgå från $\arctan x$ och sätta $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, så finns det många fler effektiva formler att beräkna fram pi än genom Gregory-Leibniz formel. En sådan serie är Machins formel, som vi kommer att se på senare. [4]

2.5 Fascinerande jämförelse mellan utvecklingar:

Något som är fascinerande med serien är att om vi exempelvis ser på serien utifrån 500 000 termer får vi:

$$4\sum_{k=0}^{500\,000}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 3{,}14159065358979324046264338326950288 4197.$$

Som vi sett i exempel innan så visade resttermen att vi skulle få en osäkerhet i den sjätte decimalen, vilket vi också fått, men det som är anmärkningsvärt är att de kommande tio decimalerna stämmer överens med pi och sedan återkommer detta fenomen. Se nedan.

3,14159**0**6535897932**40**46264338326**6**9502884197

De rödmarkerade decimalerna är alltså felaktiga men de övriga är korrekta.

Jonathan M Borwein, Peter B Borwein och Karl Dilcher ger en förklaring till detta mystiska fenomen, det är dock inget vi kommer att gå in på i den här uppsatsen. [5]

3. Machins formel:

Machins formel är följande

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

3.1 Historik:

Machins formel har fått sitt namn av John Machin som levde mellan 1686 till 1751. Han upptäckte denna formel som ger ett effektivt sätt att beräkna pi. Han lyckades redan 1706 att beräkna 100 decimaler i talet, något som i princip skulle vara omöjligt att göra med Gregory-Leibniz formel. Denna styrka som Machins formel har, har gjort att formeln har legat till grund för beräkning av pi från början av 1800- till 1970-talet. [6]

3.2 Sats och bevis:

För beviset av Machins formel kommer vi att använda subtraktionsformeln för tangens.

Sats: $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$

Bevis:

$$\tan(u-v) = \frac{\sin(u-v)}{\cos(u-v)} = \frac{\sin u \ \cdot \cos v - \sin v \cdot \cos u}{\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v}$$

Vi dividerar både täljaren och nämnaren med $\cos u \cdot \cos v$ och förenklar, här måste

$$u, v \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{\frac{\sin u \ \cdot \cos v - \sin v \cdot \cos xu}{\cos u \cdot \cos v}}{\frac{\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v}} = \frac{\frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v}}{1 + \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{\sin v}{\cos v}} = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$$

Vi är nu redo att utföra beviset för Machins formel:

Sats: $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

Bevis: Vi tar tangens av båda sidor och får då

$$\text{tangens}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{tangens}\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)$$

Då tangens $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ får vi

$$1 = \text{tangens}\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)$$

Vi tittar på högerled, använder tangens subtraktionsformel i täljaren och får

$$\frac{\tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \tan(\arctan\left(\frac{1}{239}\right))}{1 + \tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)} = \frac{\tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \frac{1}{239}}{1 + \tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) \cdot \frac{1}{239}}$$

Vi kommer nu att titta på $\tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ som vi finner i både täljaren och nämnaren.

Vi gör först en omskrivning för att vidare kunna använda additionsformeln för tangens

$$\tan\left(4\ \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \tan\left(2\cdot 2\ \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \tan\left(2(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5})\right)$$

$$= \tan(2\arctan\frac{1}{5} + 2\arctan\frac{1}{5})$$

Tillämpning av additionsformeln för tangens ger

$$\frac{\tan 2\arctan\frac{1}{5} + \tan 2\arctan\frac{1}{5}}{1 - \tan 2\arctan\frac{1}{5}\cdot \tan 2\arctan\frac{1}{5}}$$

Skriver om uttrycket igen för att kunna använda additionsformeln

$$\frac{\tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5}) + \tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5})}{1 - \tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5})\cdot \tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5})}$$

Tillämpning av additionsformeln ger

$$\frac{\dfrac{\tan\arctan\frac{1}{5} + \tan\arctan\frac{1}{5}}{1 - \tan\arctan\frac{1}{5}\cdot\tan\arctan\frac{1}{5}} + \dfrac{\tan\arctan\frac{1}{5} + \tan\arctan\frac{1}{5}}{1 - \tan\arctan\frac{1}{5}\cdot\tan\arctan\frac{1}{5}}}{1 - \dfrac{\tan\arctan\frac{1}{5} + \tan\arctan\frac{1}{5}}{1 - \tan\arctan\frac{1}{5}\cdot\tan\arctan\frac{1}{5}}\cdot\dfrac{\tan\arctan\frac{1}{5} + \tan\arctan\frac{1}{5}}{1 - \tan\arctan\frac{1}{5}\cdot\tan\arctan\frac{1}{5}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1 - 1/5\cdot 1/5} + \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1 - 1/5\cdot 1/5}}{1 - \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}\cdot\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}} = \frac{2\left(\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right)}{1 - \left(\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{50}{120}\right)}{1 - \left(\frac{50}{120}\right)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{2500}{14400}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{11900}{14400}}$$

$$= \frac{72000}{71400} = \frac{120}{119}$$

När vi fått fram värdet på $\tan\left(4\ \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ kan vi gå tillbaka och sätta in värdet

$$\frac{\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)-\frac{1}{239}}{1+\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)\cdot\frac{1}{239}}=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\frac{\frac{28561}{28441}}{\frac{28561}{28441}}=1$$

3.3 Serien konvergerar väldigt snabbt:

Machins formel konvergerar snabbt mot pi på grund av valet av mindre x, alltså, $x = 1/5$ och $x = 1/239$. Detta gör att termerna går mycket snabbare mot 0 än i exempelvis Gregory-Leibniz formel. Vi kommer att titta på exempel för att visa detta. Återigen kommer vi att studera resttermen, alltså felet.

Maclaurinutveckling av arctan ger

$$\frac{\pi}{4}=4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1}}{2k+1}+(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{5}}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\;-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}}{2k+1}$$
$$+(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{239}}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Här sätter vi

$$S_n=4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1}}{2k+1}-1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}}{2k+1}$$
$$=\frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{5^{2k}\cdot(2k+1)}-\frac{1}{239}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{239^{2k}\cdot(2k+1)}$$

$$R_n=4\cdot(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{5}}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt-(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{239}}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Vi har alltså

$$\pi=4S_n+4R_n$$

$$\pi=\frac{16}{5}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{5^{2k}\cdot(2k+1)}-\frac{4}{239}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{239^{2k}\cdot(2k+1)}+4R_n$$

Vi uppskattar nu resttermen på samma sätt som tidigare

$$|4R_n| \leq \frac{16 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+3}}{2n+3} = \frac{16}{5^{2n+3} \cdot (2n+3)} + \frac{4}{239^{2n+3} \cdot (2n+3)}$$

Vi kommer nu att se på två exempel. Vi börjar med att sätta $n = 4$

$$\pi \approx 4S_4$$

Enligt mathematica

$$\pi \approx 3.1415926824044$$

Vi undersöker nu resttermen

$$|4R_4| \leq \frac{16}{5^{11} \cdot 11} + \frac{4}{239^{11} \cdot 11} < 0.00000003$$

Då resttermen är, 0.00000003, och den åttonde decimalen är en åtta så kan vi endast vara säkra på att vi har sex korrekta decimaler, alltså

$$\pi \approx 3.141592$$

Vi sätter nu $n = 8$

$$\pi \approx 4S_8$$

Enligt mathematica

$$\pi \approx 3.141592653589835$$

Resttermen är

$$|4R_8| \leq \frac{16}{5^{19} \cdot 19} + \frac{4}{239^{19} \cdot 19} < 0.00000000000005$$

Då den fjortonde decimalen är en trea och resttermen är 0.00000000000005 så kommer resttermen att kunna påverka även den trettonde decimalen. Vi kan alltså endast vara säkra på att vi har tolv korrekta decimaler, alltså

$$\pi \approx 3.141592653589$$

Vi har genom dessa exempel sett att resttermen går mycket snabbare mot 0 i Machins formel än i Gregory-Leibniz, vilket alltså innebär att Machins formel konvergerar mycket snabbare och därmed blir mycket mer användbar till att beräkna pi. Det behövs alltså endast 8 termer för att få 12 korrekta decimaler, något som med Gregory-Leibniz troligen aldrig skulle gå att beräkna.

4. Riemanns zetafunktion:

Riemanns zetafunktion är följande

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

4.1 Historik:

Leonhard Euler var en matematiker som levde mellan åren 1707 till 1783. När Euler var 13 år började han studera teologi och antika språk på universitet i Basel och 4 år senare tog han magisterexamen. Euler fick dock, under studietiden, privatlektioner i matematik av sin farbror och det började visa sig att han hade stor talang. [7]

År 1735 lyckades Euler lösa Baselproblemet, ett problem som formulerades i mitten av 1600-talet och som bestod av att hitta vad summan av serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar mot. Det var många framstående matematiker som försökte lösa problemet, men den förste som lyckades var Euler, något som ledde till att han också blev berömd. [8]. Euler bestämde även summan av många andra liknande serier. [9]

Matematikern Bernhard Riemann som levde mellan 1826 till 1866 undersökte även han zetafunktionen, men till skillnad från Euler så såg han det som en komplex funktion. Funktionen har därefter fått namnet Riemanns zetafunktion. [10]

4.2 Sats och bevis av $\boldsymbol{\zeta(2)}$

Sats: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Vi kommer först se på ett modernt bevis för detta för att sedan titta på Eulers eget.

Bevis:

Vi börjar med att sätta

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

och

$$E_n = \int_0^{\pi} x\, f_n(x) dx.$$

Om $k \neq 0$ så ger partialintegration

$$\int_0^{\pi} x \cos kx\, dx = \frac{1}{k}[x \sin kx]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin kx\, dx$$

Eftersom $\sin 0 = 0$ och $\sin k\pi = 0$ försvinner $\frac{1}{k}[x \sin kx]_0^{\pi}$ och vi får kvar

$$-\frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin kx\, dx = \frac{1}{k^2}[\cos kx]_0^{\pi} = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Detta ger

$$E_n = \int_0^{\pi} \frac{x}{2} dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Nedan ska vi visa att $E_n \to 0$ då $n \to \infty$. Vi tittar först på högerledet när $n \to \infty$.

$$E_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^2}$$

Då $1 - (-1)^k = 0$ när k är ett jämnt tal och $1 - (-1)^k = 2$ när k är ett udda tal får vi, om vi endast tittar på när k är udda

$$\sum_{k\ udda} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Men vi kan även uttrycka summan över alla udda tal som summan över alla tal minus summan över de jämna talen. Detta ger

$$\sum_{k\ udda} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Vi har nu alltså

$$\sum_{k\ udda} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Om vi dividerar med $\frac{4}{3}$ så får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}\sum_{k\ udda} \frac{1}{k^2}$$

Om vi nu utför insättningen får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{4\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$$

Vi ska nu visa att $E_n \to 0$ då $n \to \infty$. Vi måste först utrycka $f_n(x)$ på en annan form vilket vi kan göra genom att använda Eulers formler för sinus och cosinus samt formeln för geometrisk summa.

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{kix} + e^{-kix}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{kix} = \frac{e^{-nix}\left(e^{(2n+1)ix} - 1\right)}{2(e^{ix} - 1)}$$

$$= \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-nix}}{2(e^{ix} - 1)} = \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)ix} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)ix}}{2\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Omskrivningen gäller då $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ det vill säga när $x \neq 2n\pi$.

Vi har

$$f_n(2n\pi) = n + \frac{1}{2}$$

vilket också är gränsvärdet av

$$\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ då x } \to 0.$$

För att bevisa detta använder vi oss av Maclaurinutveckling av sinus. I fortsättningen är B flera olika begränsade funktioner i en omgivning av 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)x - x^3B(x)}{2\left(\frac{x}{2}-x^3B(x)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-x^2B(x)\right)}{x\left(1-2x^2B(x)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)-x^2B(x)}{\left(1-x^2B(x)\right)}$$

$$= \frac{n+\frac{1}{2}}{1} = n+\frac{1}{2}$$

Vi har nu

$$E_n = \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^\pi \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

Omskrivningen är endast giltig då $x > 0$. Men vi kan också definiera

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ som n} + \frac{1}{2} \text{ då x} = 0,$$

och

$$\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{som 1 då x} = 0.$$

Dessa definitioner ger att båda integranderna i de båda integralerna är 0 då x $= 0$.

Då vi sedan ska partialintegrera $\int_0^\pi \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$ så definierar vi nu en

funktion g som $g(x) = \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ för x $\neq 0$ och $g(0) = 1$.

Genom att definiera $g(0) = 1$ så är g kontinuerlig för $\mathrm{x} = 0$. Vi vill nu även bevisa att funktionen är deriverbar för $x = 0$, då vi vill derivera $g(x)$ när vi utför partialintegrationen.

Vi använder definitionen för derivata och får

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{x\sin\frac{x}{2}}$$

Vi sätter nu $t = \frac{x}{2}$

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t\sin t}$$

Nu använder vi Maclaurinutvecklingen av $\sin t$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^5\, B(t)$$

Insättning ger

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{t}-\sin \mathrm{t}}{t\sin t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{6}+t^5B(t)\right)}{t\left(t-\frac{t^3}{6}+t^5B(t)\right)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{6}-t^5B(t)}{t\left(t-\frac{t^3}{6}+t^5B(t)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2\left(\frac{t}{6}-t^3B(t)\right)}{t^2\left(1-\frac{t^2}{6}+t^4B(t)\right)}$$

Vi förkortar bort t^2 vilket ger

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{t}{6}-t^3B(t)\right)}{\left(1-\frac{t^2}{6}+t^4B(t)\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1} = 0$$

Alltså är $g'(0) = 0$

Vi återgår till $E_n = \int_0^{\pi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$, där vi satt $\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = g(x)$

Partialintegration ger

$$E_n = \int_0^{\pi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot g(x)dx$$

$$= -\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\ g(x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\ g'(x)\,dx$$

Vi tittar på första termen och vi har

$$\left|\left[\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\ g(x)\right]_0^{\pi}\right| = \left|g(\pi)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{2} - g(0)\right|$$

Då cosinus värdemängd är mellan -1 och 1, vet vi följande

$$\left|g(\pi)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{2} - g(0)\right| \leq |g(\pi)| + |g(0)|$$

Då denna funktion är begränsad och $-\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \to 0$ då n $\to \infty$ så går hela termen mot 0.

Vi övergår till andra termen och har då

$$\left|\int_0^{\pi} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\ g'(x)\,dx\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\ |g'(x)|\,dx$$

Då cosinus värdemängd är mellan -1 och 1, vet vi följande

$$\int_0^{\pi} \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\ |g'(x)|\,dx \leq \int_0^{\pi} |g'(x)|\,dx$$

Denna funktion är begränsad och $\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \to 0$ då n $\to \infty$ så går hela termen mot 0.

Vi har med detta bevisat att $E_n \to 0$ då $n \to \infty$ och med det är beviset klart.

4.3 Eulers beräkning av $\zeta(2)$:

Euler beräknade $\zeta(2)$ på ett annat elegant sätt, men på ett sätt som inte är helt vattentätt.

Bevis:

Vi kommer att utgå från några samband mellan rötter och koefficienter till ett polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

Om nollställena är $x_1, x_2, \dots x_n$ så

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Om vi multiplicerar ihop och identifierar koefficienterna får vi

$$x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots$$

Vi har

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 = {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 + 2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$

så

$${x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = \frac{a^2{}_{n-1}}{a^2{}_n} - 2\frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{a^2{}_{n-1} - 2a_na_{n-2}}{a^2{}_n}$$

Vi antar nu att $a_0 \neq 0$. Då är alla $x_j \neq 0$, så nollställena till $x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$ är

$$\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$$

Men

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

så

$$\frac{1}{{x_1}^2} + \cdots + \frac{1}{{x_n}^2} = {a_1}^2 - \frac{2a_0a_2}{{a_0}^2}$$

Vi kommer nu att använda detta samband på funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Här är dock inte f ett polynom vilket gör att Eulers bevis egentligen inte är helt korrekt.

Nollställena till $f(x)$ är $x_k = k\pi$, för $k \neq 0$, så

$$\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{{x_k}^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Vi Maclaurinutvecklar $\frac{\sin x}{x}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}{x} = \frac{x(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots$$

Detta ger

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = -\frac{1}{6}.$$

Insättning ger

$$\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{{x_k}^2} = {a_1}^2 - \frac{2a_0 a_2}{{a_0}^2} = \frac{1}{3}$$

Då får vi

$$\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{{x_k}^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Vi multiplicerar med $\frac{\pi^2}{2}$ vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Som sagt ovan så bestämde Euler även summan av många andra liknande serier. Vi kommer att titta på en av dessa nu.

4.4 Sats och beräkning av $\boldsymbol{\zeta(4)}$:

Sats: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$

Bevis:

Vi börjar även i detta bevis att sätta

$$f_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$$

Vi sätter sedan

$$H_n=\int_0^{\pi}x^3 f_n(x)dx$$

Skillnaden mot beviset för zeta 2 är alltså att vi nu istället sätter x^3 istället för x.

Vi partialintegrerar H_n, $k\neq 0$.

$$H_n=\int_0^{\pi}x^3 f_n(x)dx=\int_0^{\pi}x^3\cos kx\ \ dx=\left[\frac{1}{k}\sin kx\ \ \cdot x^3\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}3x^2\cdot\sin kx\ \ dx$$

Eftersom $\sin 0=0$ och $\sin k\pi=0$, så försvinner $\left[\frac{1}{k}\sin kx\ \ \cdot x^3\right]_0^{\pi}$och vi har endast kvar

$$-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}3x^2\cdot\sin kx\ \ dx$$

Vi partialintegrerar igen

$$-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}3x^2\cdot\sin kx\ \ dx=-\frac{1}{k}\left(\left[-\frac{1}{k}\cos kx\cdot 3x^2\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}6x\cdot\cos kx\,dx\right)$$

$$=-\frac{1}{k}\left(\left(-\frac{1}{k}\cos k\pi\cdot 3\pi^2\right)\frac{1}{k}\int_0^{\pi}6x\cdot\cos kx\,dx\right)=\frac{1}{k^2}\cos k\pi\cdot 3\pi^2-\frac{1}{k^2}\int_0^{\pi}6x\cdot\cos kx\,dx$$

$$=\frac{\cos k\pi\cdot 3\pi^2}{k^2}-\frac{1}{k^2}\int_0^{\pi}6x\cdot\cos kx\,dx$$

$$= \frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} - \frac{1}{k^2}\left(\left[\frac{1}{k}\sin kx \cdot 6x\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi 6 \cdot \sin kx\, dx\right)$$

$$= \frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} + \frac{1}{k^3}\int_0^\pi 6 \cdot \sin kx\, dx$$

$$= \frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} + \frac{1}{k^3}\left(\left[-\frac{1}{k}\cos kx \cdot 6\right]_0^\pi\right)$$

$$= \frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} + \frac{1}{k^3}\left(-\frac{6 \cdot \cos k\pi}{k} - \left(-\frac{6}{k}\right)\right) = \frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} - \frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} + \frac{6}{k^4}$$

Vi ska sedan bevisa att $H_n \to 0$ när $n \to \infty$. Vi tittar först på uttrycket när $H_n \to 0$

$$H_n = \int_0^\pi \frac{x^3}{2}dx + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} - \frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} + \frac{6}{k^4}\right)$$

$$0 = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} - \frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} + \frac{6}{k^4}\right)$$

$$0 = \frac{\pi^4}{8} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} - \frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} + \frac{6}{k^4}\right)$$

$$\frac{\pi^4}{8} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} - \frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} + \frac{6}{k^4}\right)$$

$$\frac{\pi^4}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos k\pi \cdot 3\pi^2}{k^2} + \frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} - \frac{6}{k^4}\right)$$

Vi delar upp summorna

$$\frac{\pi^4}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\cos k\pi)\, 3\pi^2}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6 \cdot \cos k\pi}{k^4} - \frac{6}{k^4} = -3\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - 6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^4}$$

Vi dividerar båda led med 6

$$\frac{\pi^4}{48} = \frac{-\pi^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^4}$$

Vi börjar med att uttrycka den första summan genom summan över alla jämna tal plus alla udda tal.

$$\frac{-\pi^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{2}\left(\sum_{k\ jämna}\frac{1^k}{k^2} + \left(-\sum_{k\ udda}\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

Vi uttrycker nu summan över alla k udda genom summan över alla tal minus summan över de jämna talen. Detta ger

$$\frac{-\pi^2}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} - \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k\ jämna}\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

Förenkling ger

$$\frac{-\pi^2}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{-\pi^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Vi använder $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

$$\frac{-\pi^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{24}$$

Vi har alltså

$$\frac{\pi^4}{48} = \frac{-\pi^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^4} = \frac{\pi^4}{24} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^4}$$

Genom att flytta över $\frac{\pi^4}{24}$ till vänsterledet får vi

$$\frac{-\pi^4}{48} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^4}$$

Då $1-(-1)^k = 0$ när k är ett jämnt tal och $1-(-1)^k = 2$ när k är ett udda tal får vi, om vi endast tittar på när k är udda, detta

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{k\ udda}\frac{1}{k^4}$$

Men vi kan även uttrycka summan över alla udda tal genom summan över alla tal minus summan över de jämna talen. Detta ger

$$\sum_{k\ udda} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{15}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

Vi multiplicerar båda sidor med $\frac{16}{15}$ och får

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \sum_{k\ udda} \frac{1}{k^4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

Beviset för att $H_n \to 0$ när $n \to \infty$ är analogt med det för $\zeta(2)$ och lämnas därför.

5. Avslutning:

I det här arbetet har vi fått bekanta oss med olika beräkningar av talet pi. Vi har beräknat pi med användning av Gregory-Leibniz formel, något som visade sig vara en ganska oanvändbar formel för att på ett effektivt sätt beräkna många decimaler. Vi har dock fått se något väldigt fascinerande med formeln, att dess decimaler stämmer överens med pi, fast med några få undantag. Vi har även visat att formeln konvergerar snabbare, och därmed blir mer användbar, om man sätter $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Likaså har vi beräknat pi med användning av Machins formel, en formel som har använts flitigt i världen för att beräkna decimaler i pi. Den snabba konvergensen gör den väldigt effektiv vid beräkning. Vi har också tittat på Riemanns zetafunktion. Vi har beräknat $\zeta(2)$ och $\zeta(4)$ och även sett Eulers egna eleganta beräkning av $\zeta(2)$.

Även fast vi idag känner till triljoner av decimaler i talet så fortsätter ändå beräkningen av pi.

6. Källförteckning:

[1] David H. Bailey och Jonathan M. Borwein, *Pi: the next generation*, förorden

[2] *The discovery of the series formula for pi by Leibniz*, s 291. Artikel ur Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 5, December 1990.

[3] *The discovery of the series formula for pi by Leibniz*, s 291ff. Artikel ur Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 5, December 1990.

[4] David H. Bailey och Jonathan M. Borwein, *Pi: the next generation*, s.170

[5] David H. Bailey och Jonathan M. Borwein, *Pi: the next generation*, s.199f

[6] David H. Bailey och Jonathan M. Borwein, *Pi: the next generation*, s.170f

[7] https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler, hämtat 24/3-17

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem, hämtat 24/3-17

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function, hämtat 24/3-17

[10] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann.html