



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Från positiva heltal till reella tal

av

Sara Olsson

2017 - No 13

Från positiva heltal till reella tal

Sara Olsson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2017

Abstract

In this essay, we study the Dedekind cut, which is a way to construct the real numbers based on the rational. We begin, however, by discussing the positive integers and their numeracy and order laws and then we construct the rational numbers. At the end of this paper, we give a proof set of upper limits, farmed taken as an axiom of fundamental analysis courses.

Sammanfattning

I den här uppsatsen ska vi studera Dedekindsnitt, som är ett sätt att konstruera de reella talen utgående från de rationella. Vi börjar dock med att diskutera de positiva heltalen samt deras räkne- och ordningslagar och därefter konstruerar vi de rationella talen. I slutet av uppsatsen ger vi ett bevis för satsen om övre gräns, som brukas tas som ett axiom i grundläggande analyskurser.

Innehållsförteckning

INLEDNING	4
RICKARD DEDEKIND	5
POSITIVA HELLTAL	7
EKVIVALENSRELATIONER OCH EKVIVALENSKLASSER	10
POSITIVA RATIONELLA TAL	12
POSITIVA REELLA TAL	19
REELLA TAL AV GODTYCKLIGT TECKEN	31
SUMMERING OCH SLUTSATS	34

Inledning

Den här uppsatsen kommer att handla om reella tal. Reella tal kan ha oändligt många decimaler, till exempel $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$, π och e . Dessa tal kommer i den här uppsatsen att konstrueras med hjälp av Dedekinds snitt.

Uppsatsen är konstruerad på så vis att den kommer att ge läsaren en förståelse som bygger på att läsaren ska ha en insikt om vad som sker när jag konstruerar de reella talen. Jag kommer konstruera de reella talen med hjälp av Dedekinds snitt, jag kommer därför först att presentera Rickard Dedekind med ett avsnitt. Det är ett avsnitt om hans personliga och professionella historia. I nästa avsnitt kommer jag att redogöra för de positiva heltalen och deras räknelagar samt ordningslagar. Därefter kommer ett avsnitt om ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser. Jag redogör för ekvivalensrelationer och -klasser för att det är de, tillsammans med positiva heltal, som jag använder mig av när jag redogör för de positiva rationella talen. De positiva rationella talen kommer sedan att användas i konstruktionen av de reella talen. Först kommer jag att konstruera positiva reella tal och sedan för reella tal av godtyckligt tecken. Avslutningsvis kommer jag att kort summera och diskutera uppsatsen.

Det material som jag främst har använt är en bok av Carl Hyltén-Cavallius och Lennart Sandgren; Matematisk analys II (Hyltén-Cavallius & Sandgren, 1959). Hyltén-Cavallius och Sandgren skrev under mitten av 1900-talet flera välanvända läroböcker inom matematik. Hyltén-Cavallius var matematiker och Sandgren var matematiker, skolman och ämbetsman (Nationalencyklopedin, u.d.) (Nationalencyklopedin, u.d.).

Innan vi börjar gå in på hur tal konstrueras, vill jag uttrycka ett stort tack till min handledare, Torbjörn Tambour! Det är med hans kunskap, pedagogiska handledarskap och tålamod som jag har kunnat genomföra samt producera den här uppsatsen.

Rickard Dedekind

Rickard Dedekind kom ifrån en familj med tre syskon och båda föräldrarna var professorer vid Collegium Carolinum i Braunschweig, Tyskland. Dedekind valde att inte gifta sig, utan levde stora delar av sitt liv tillsammans med en syster. I sin uppväxt visade han inte någon större intresse för matematiken. Matematikintresset kom från ett tidigare intresse för kemi och fysik. År 1848, när Dedekind var 16 år, kom han in på en utbildningsinstitution som var ett mellanstadium mellan gymnasiet och universitet. På institutionen studerade Dedekind grundläggande matematik såsom analytisk geometri och integralkalkyl. År 1850 ansökte Dedekind och kom in på universitet i Göttingen.

På universitetet undervisade Carl Friedrich Gauss och Wilhelm Weber vilka tros ha varit stora inspiratörer för Dedekind. Under sina studier fanns både Gauss och Weber vid hans sida och Dedekind gjorde sitt doktorsarbete under handledning av Gauss. Dedekind var även Gauss' sista elev.

Under den här tiden var Berlin platsen för ny och utvecklad matematik, inte Göttingen. Dedekind, tillsammans med Bernhard Riemann, spenderade två år i Berlin och studerade. Vid avslutade studier år 1854 blev Dedekind behörig att undervisa på universitet. Dedekind återvände då till Göttingen för att undervisa.

När Gauss gick bort ett år efter att Dedekind återvänt, utsågs Dedekind till att ersätta Gauss. Dedekind fick då möjligheten att arbeta med Lejeune Dirichlet. Dedekind fann det väldigt givande att arbeta med Dirichlet och de två kollegorna blev nära vänner under tiden de arbetade tillsammans. Under de kommande åren studerade samt arbetade Dedekind med att undervisa om Galoisteori och abelska funktioner. Efter en tid blev en position ledig vid Zürichs tekniska högskola och Dedekind ansökte om positionen med stöd av Dirichlet. Efter ett möte mellan Dedekind och representanter från Zürich blev Dedekind skyndsamt antagen till att fylla platsen i Zürich vilket han gjorde år 1858.

Under tiden i Zürich var tanken att Dedekind skulle undervisa i differential- och integralkalkyl. Dock under samma år som han började, kom han på idén om konstruktion av reella tal med hjälp av snitt.

Medan Dedekind hade arbetat i Göttingen och i Zürich, hade hans föräldrars arbetsplats uppgraderats till ett tekniskt lärosäte och år 1862 började Dedekind i Braunschweig. Han stannade där under resterande tid som yrkesverksam. Dedekind gick i pension den 1 april år 1894 men han fortsatte att undervisa enstaka kurser efter pensionen. Dedekinds arbete under sin livstid gav flera viktiga bidrag till matematiken och hans arbete kom att bidra till vad matematiken är idag (O'Connor & Robertson, 1998).

Positiva heltal

De positiva heltalen är 1, 2, 3 och så vidare. I den här delen kommer vi att gå igenom de positiva heltalens räkne- och ordningslagar. Vi använder små bokstäver a , b , c , ... för att beteckna positiva heltal. De operationerna som vi kommer att använda för positiva heltal är addition och multiplikation. Vi gör detta för att mängden av de positiva heltalen är sluten under addition och multiplikation. Med detta menar vi att resultatet av någon av dessa operationer är också ett positivt heltal. Dessa kriterier uppfylls inte säkert för operationerna subtraktion och division. Exempelvis blir $3 - 5 = -2$, alltså negativt och $\frac{3}{5}$ är inte ett heltal. För addition och multiplikation finns det flera räknelagar; kommutativa lagen, associativa lagen, annuleringslagen och distributiva lagen, samt ordningslagar.

Den kommutativa lagen för addition

$$a + b = b + a$$

och för multiplikation

$$ab = ba$$

Den associativa lagen för addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

och för multiplikation

$$a(bc) = (ab)c$$

Annuleringslagen lyder för addition; om

$$a + c = b + c$$

så är $a = b$.

Annuleringslagen lyder för multiplikation: om

$$ac = bc$$

så är $a = b$.

Distributiva lagen kopplar samman addition med multiplikation och säger

$$a(b + c) = ab + ac$$

För positiva heltal finns det även ordningslagar. Den första ordningslagen lyder; $a < b$ om och endast om det finns ett positivt heltal d så att $b = a + d$.

Den andra ordningslagen säger att endast en av följande relationer gäller

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

Den tredje ordningslagen lyder; om

$$a < b \text{ och } b < c \text{ så } a < c$$

Ordningsrelationen sägs vara transitiv.

Den fjärde ordningslagen säger; om $a < b$ så är

$$a + c < b + c \text{ och } ac < bc$$

för alla c .

Avslutningsvis säger den sista ordningslagen; om a och b är positiva heltal, så finns det ett positivt heltal c så att

$$a < bc$$

vilket kallas den arkimediska egenskapen.

Vi kommer nu att gå igenom en del av ovanstående räknelagar samt ordningslagar och bevisa dem. Vissa av dem följer av definitionen av positiva heltal och vi kommer inte redogöra för bevisen. De räknelagar och ordningslagar som vi kommer att gå igenom är annulleringslagen för addition samt multiplikation, den tredje och den fjärde ordningslagen.

Vi ska nu bevisa annulleringslagen för addition. Antag $a < b$ så $a + c < b + c$ enligt den fjärde ordningslagen. Detta motsäger $a + c = b + c$ enligt den andra ordningslagen. På samma sätt kan vi visa att $b < a$ inte kan gälla. Vi har nu sett att varken $a < b$ eller $b < a$ gäller. Då måste $a = b$ gälla, vilket skulle visas.

För att bevisa annulleringslagen för multiplikation gör vi som för annulleringslagen för addition. Antag $a < b$ så $ac < bc$ enligt den fjärde ordningslagen. Detta går emot $ac = bc$ vilket vi redan vet. På samma sätt ska vi visa att $b < a$ inte kan gälla. Ur andra ordningslagen följer därför att $a = b$ vilket skulle visas.

Vi ska nu bevisa den tredje ordningslagen. Vi antar att $a < b$ och $b < c$. Då finns det enligt den första ordningslagen två tal d och e , så $b = a + d$ och $c = b + e$. Vi kan då skriva

$$c = b + e = (a + d) + e = a + (d + e)$$

och ger att $a < c$ vilket skulle visas.

Vi ska nu bevisa den fjärde ordningslagen. Om vi antar att $a < b$ gäller så finns enligt den första ordningslagen ett tal d så $b = a + d$. Då får vi från kommutativa och associativa lagarna för addition

$$b + c = (a + d) + c = a + (d + c) = a + (c + d) = (a + c) + d$$

och därför ger den sista ordningslagen att $a + c < b + c$ gäller.

På liknande sätt gör vi nu för att bevisa $ac < bc$. Om vi antar att om $a < b$ gäller, så finns det enligt den första ordningslagen tal d så $b = a + d$. Vi får då enligt distributiva lagen

$$bc = (a + d)c = ac + dc$$

och den första ordningslagen ger att $ac < bc$ gäller.

Ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser

Vi vill i nästa avsnitt använda ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser för att konstruera positiva rationella tal. I det här avsnittet går vi därför först igenom ekvivalensrelationer och deras egenskaper med olika tillhörande exempel. Därefter går vi igenom ekvivalensklasser.

För att definiera ekvivalensrelationer låter vi M beteckna en mängd. En relation på M är en delmängd R av $M \times M$ och att paret $(x, y) \in R$ skrivs ofta som xRy . Ett exempel på en relation är likhet: xRy om och endast om $x = y$. Delmängden R består av alla par (x, x) för $x \in M$. En relation R kallas för ekvivalensrelation om den har egenskaperna

- Reflexivitet: xRx för alla $x \in M$
- Symmetri: om xRy , så gäller yRx
- Transitivitet: om xRy och yRz , så gäller xRz

Vi byter R mot $\sim$ för att beteckna ekvivalensrelation.

Likhet är en ekvivalensrelation, liksom kongruens modulo n .

Vi definiera delarrelationen R genom aRb om $a|b$. Relationen är reflexiv och transitiv men inte symmetrisk och därför inte en ekvivalensrelation. Att R är reflexiv följer av att $a|a$ så aRa för alla a . Därefter undersöker vi transitivitet. Antag att aRb och bRc det vill säga $a|b$ och $b|c$. Om vi har $b = ax$ och $c = by$, så

$$c = by = (ax)y = a(xy)$$

vilket ger $a|c$. Ett exempel är om $3|24$ och $24|48$, så $3|48$. Delarrelationen är inte symmetrisk. Exempelvis gäller att 3 delar 24, men 24 delar inte 3.

En annan relation som inte är en ekvivalensrelation är strikt olikhet. Om vi har $a < b$ så är inte $b < a$. Alltså är strikt olikhet inte symmetrisk. Därefter undersöker vi om strikt olikhet är reflexiv. I och med att a inte kan vara mindre än sig själv är inte strikt olikhet reflexiv. Till sist undersöker vi om strikt olikhet är transitiv. Om $a < b$ och $b < c$ gäller, så $a < c$. Vi får då att relationen transitiv.

Definition

Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på M . För $x \in M$ definieras $E(x)$ som delmängden av alla $y \in M$ sådana att $y \sim x$. Detta kan skrivas

$$E(x) = \{y \in M; y \sim x\}$$

Delmängden $E(x)$ kallas en ekvivalensklass. En representant för en ekvivalensklass är ett element i klassen.

Vi vill visa att M är unionen av alla ekvivalensklasser och att dessa är parvis disjunkta, det vill säga

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

om E_1 och E_2 är olika klasser. Att $\sim$ är reflexiv betyder att $x \sim x$ för alla x vilket ger

$$x \in E(x)$$

för alla x . Alltså är M unionen av klasserna. För att visa att unionen är disjunkt, antar vi att $E(x)$ och $E(y)$ är två klasser sådana att

$$E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$$

vilket är det motsatta. Vi tar $z \in E(x) \cap E(y)$ för att mängden inte är tom och därför finns det ett element. Då är $z \sim x$ och i och med symmetrin är $x \sim z$. Men vi får också att $z \sim y$ och då är $x \sim y$ på grund av transitiviteten. Alltså är $x \in E(y)$. Om vi sedan tar ett till element, $u \in E(x)$, så får vi $u \sim x$ och i och med att $x \in E(y)$ så $u \sim y$, $u \in E(y)$. Vi har nu fått fram att $E(x) \subseteq E(y)$. På samma sätt får vi $E(y) \subseteq E(x)$. Vi har nu visat att $E(x) = E(y)$ gäller. Vi har visat att unionen är disjunkt.

Positiva rationella tal

En utvidgning av de positiva heltalen är de positiva rationella talen. Vi kommer att utgå ifrån de positiva heltalen och sedan, med hjälp av ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser, konstruera de positiva rationella talen. När vi endast har positiva heltal, har vi ett problem när vi vill lösa ekvationen $a = bx$ där a och b är givna positiva heltal och x är okänt positiv heltal. Ekvationen har inte i allmänhet någon heltalslösning. För att ekvationen ska vara lösbar, krävs det att vi introducerar de positiva rationella talen.

Idén i konstruktionen av de rationella talen är att identifiera x i ekvationen $a = bx$ med paret (a, b) , men problemet är att x kan vara en lösning till olika sådana ekvationer. Om vi låter $8 = 4x$ så är $x = 2$ och om $12 = 6x$ så är också $x = 2$, det vill säga x kan vara detsamma men ekvationen kan alltså se olika ut. Två olika par kan alltså betyda samma tal.

Vi ska nu visa vilket samband som finns mellan ekvationerna $a = bx$ och $c = dx$ om de har samma lösning. Antag att $a = bx$ och $c = dx$. Då får vi $ad = bdx$ om båda leden i $a = bx$ multipliceras med d , och vi får $bc = bdx$ om b multipliceras in i $c = dx$. Vi har nu två ekvationer där högerleden är lika med varandra och vilket ger $ad = bc$.

Vi vill nu visa det omvända och utgår från att $ad = bc$ gäller. Vi har ekvationerna $a = bx$ samt $c = dy$. Om vi multiplicerar båda leden i $a = bx$ med d , och båda leden i $c = dy$ med b får vi

$$ad = bdx \quad \text{och} \quad bc = bdy$$

Om $ad = bc$ så $bdx = bdy$. Annuleringslagen ger $x = y$. Sammanfattningsvis så har $a = bx$ och $c = dx$ samma lösning om och endast om $ad = bc$.

Definition

Låt $a, b, \dots$ vara positiva heltal och $(a, b), (c, d), \dots$ vara par av positiva heltal. Vi säger att paret (a, b) är ekvivalent med paret (c, d) om och endast om $ad = bc$. Vi kan skriva detta som

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ om och endast om } ad = bc$$

Vi vill nu visa $(a, b) \sim (c, d)$ är en ekvivalensrelation. Vi kommer därför att utgå från ovannämnda egenskaper hos ekvivalensrelationer. Det vi då behöver visa är att $(a, b) \sim (c, d)$

är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Relationen är reflexiv, det vill säga $(a, b) \sim (a, b)$ för alla (a, b) . För $(a, b) \sim (a, b)$ betyder $ab = ba$, vilket är sant. Att relationen är symmetrisk ser vi då $ad = bc \Leftrightarrow da = cb$. Avslutningsvis ska vi visa att relationen är transitiv. Om $(a, b) \sim (c, d)$ och $(c, d) \sim (e, f)$ gäller så är $ad = bc$ samt $cf = de$. Därefter multiplicerar vi in b till $cf = de$ och får $cfb = bde$. Eftersom $ad = bc$ skriver vi om $cfb = bde$ till $adf = bde$. Med hjälp av annuleringslagen får vi $adf = bde$ till $af = be$. Vi kan nu uttrycka $af = be$ som $(a, b) \sim (e, f)$ och vi har bevisat att relationen är transitiv.

Nu går det att införa de positiva rationella talen.

Definition

Med ett positivt rationellt tal menas en ekvivalensklass av ordnade par av positiva heltal.

Låt x samt y vara positiva rationella tal och (a, b) respektive (c, d) representanter för klasserna x samt y . Då gäller således

- x är lika med y om och endast om $(a, b) \sim (c, d)$ som i sin tur är ekvivalent med $ad = bc$

Vi ska nu definiera addition och multiplikation. Om vi tänker lite i förväg, så vill vi komma fram till de vanliga räknelagarna för de positiva rationella talen, det vill säga $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ och $\frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{bd}$. Därför *definierar* vi

- Addition: $x + y = (ad + bc, bd)$
- Multiplikation: $xy = (ac, bd)$
- Ordning: $x < y$ om och endast om $ad < bc$.

Innan vi fortsätter måste vi visa att definitionen av addition och multiplikation av positiva rationella tal är oberoende av vilka talpar i ekvivalensklasserna vi väljer. Ett rationellt tal är alltså en ekvivalensklass, det vill säga en mängd av par av positiva heltal. När vi definierar addition och multiplikation, så *väljer* vi representanter för dessa klasser och vi måste visa att resultatet är oberoende av vilka representanter vi väljer.

Vi påstår nu att utfallet inte förändras vid addition mellan (a, b) respektive (c, d) om de ersätts med ekvivalenta talpar. För att bevisa detta ersätter vi (a, b) med ett ekvivalent talpar, (β, γ) . Detta talpar uppfyller $b\beta = a\gamma$. Med det nya uttrycket i additionsdefinitionen får vi

$$(\beta, \gamma) + (c, d) = (\beta d + c\gamma, d\gamma)$$

Villkoret för att detta senare talpar skall vara ekvivalent med $(ad + bc, bd)$ är att

$$(\beta d + c\gamma)bd = \gamma d(ad + bc)$$

$$\beta bd^2 + bcd\gamma = ad^2\gamma + bcd\gamma$$

Med hjälp av båda annuleringslagarna får vi nu $\beta b = a\gamma$ vilket är sant då $(a, b) \sim (\beta, \gamma)$.

Räknelagarna och ordningslagarna för de positiva heltalen gäller även för de positiva rationella talen.

Kommutativa lagen för addition och multiplikation

Låt $x = (a, b)$ och $y = (c, d)$ vara två positiva rationella tal. Med hjälp av additionsdefinitionen, multiplikationsdefinitionen samt kommutativa lagen för positiva heltal, går det att visa kommutativa lagen för addition;

$$x + y = (ad + bc, bd) = (da + cb, db) = y + x$$

och kommutativa lagen för multiplikation;

$$xy = (ad, bc) = (da, cb) = yx$$

Associativa lagen för addition och multiplikation

Låt $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ samt $z = (e, f)$ vara positiva rationella tal. Beviset för addition

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (a, b) + (cf + de, df) = (adf + bcf + bde, bdf) = (ad + bc, bd) + (e, f) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

och för multiplikation

$$x(yz) = (a, b)(cf, de) = (acf, bde) = (ac, bd)(e, f) = (xy)z$$

Annuleringslagen för addition

Låt $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ samt $z = (e, f)$ vara positiva rationella tal.

Antag att $x + z = y + z$, det vill säga

$$(a, b) + (e, f) = (c, d) + (e, f) \implies (af + be, bf) = (cf + de, df)$$

Vi skriver om $(af + be, bf) = (cf + de, df)$ enligt nedan

$$df(af + be) = bf(cf + de)$$

$$adf^2 + bdef = bcf^2 + bdef$$

Använder vi nu båda annuleringslagarna för positiva heltal får vi $ad = bc$ och därför $x = y$.

Annuleringslagen multiplikation

Låt $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ samt $z = (e, f)$ vara positiva rationella tal. Antag att $xz = yz$,
 $(a, b)(e, f) = (c, d)(e, f)$. Vi får då

$$(ae, bf) = (ce, df) \Leftrightarrow adef = bcef$$

Med hjälp av annuleringslagen för positiva heltal får vi $ad = bc$ och då är $x = y$

Distributiva lagen

Låt $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ och $z = (e, f)$ vara positiva rationella tal. Det vi ska visa är
 $x(y + z) = xy + xz$. Vi börjar med vänsterledet i uttrycket och får då

$$x(y + z) = (a, b)(cf + de, df) = (acf + ade, bdf)$$

Och högerledet blir

$$xy + xz = (ac, bd) + (ae, bf) = (abcf + abde, b^2df) = (acf + ade, bdf)$$

Uttrycken är lika och lagen gäller.

Vi har redogjort för räknelagarna och vidare ska vi redogöra för ordningslagarna.

Första ordningslagen lyder; $x < y$ om och endast om det finns ett positivt rationellt tal z sådant att $y = x + z$.

För att bevisa den här lagen låter vi $x = (a, b)$ och $y = (c, d)$ vara positiva rationella tal. Att $x < y$ betyder att $ad < bc$. Enligt den första ordningslagen för positiva heltal så finns det ett positivt heltal e sådant att $bc = ad + e$. Detta ger

$$y = (c, d) = (cb, bd) = (ad + e, bd) = (ad, bd) + (e, bd) = x + (e, bd)$$

Vi får nu att $y = x + (e, bd)$ och vi får då att vårt $z = (e, bd)$ vilket uppfyller kravet.

För att beviset ska vara fullständigt, behöver vi anta det omvända, det vill säga att om $y = x + z$ så $x < y$. Vi antar att $y = x + z$ samt låter $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ och $z = (e, f)$ vara positiva rationella tal. Vi kan då skriva $y = x + z$ som

$$(c, d) = (a, b) + (e, f) = (af + be, bf) \Leftrightarrow bcf = adf + bde$$

Vi vill ju visa $x < y$, det vill säga $ad < bc$. Uttrycket $bcf = adf + bde$ kan vi skriva som $bcf > adf$ och vidare $bc > ad$, vilket skulle visas.

Den andra ordningslagen lyder; låt $x = (a, b)$ och $y = (c, d)$ vara två positiva rationella tal. Endast en av följande relationer gäller

$$x < y \Leftrightarrow ad < cb, \quad x = y \Leftrightarrow ad = bc, \quad x > y \Leftrightarrow ad > bc$$

Detta beror på att $x < y$ är ekvivalent med $ad < cb$ och så vidare som följer av positiva heltal.

Den tredje ordningslagen säger; låt x och y vara positiva rationella tal. Om

$$x < y \text{ och } y < z \text{ så } x < z$$

Vi ska nu bevisa den tredje ordningslagen. Vi antar att $x < y$ och $y < z$. Enligt första ordningslagen finns det två tal m och n , så $y = x + m$ och $z = y + n$. Vi kan då skriva

$$z = y + n = (x + m) + n = x + (m + n)$$

vilket ger att $x < z$.

Den fjärde ordningslagen lyder; låt x och y vara positiva rationella tal. Om $x < y$ så gäller

$$x + z < y + z \text{ och } xz < yz$$

för alla positiva rationella tal z .

Vi ska nu bevisa den fjärde ordningslagen. Vi antar att $x < y$. Enligt första ordningslagen finns det ett tal m så $y = x + m$. Då får vi från kommutativa och associativa lagarna för addition

$$y + z = (x + m) + z = x + (m + z) = x + (z + m) = (x + z) + m$$

och att $x + z < y + z$.

På liknande sätt gör vi nu för att bevisa $xz < yz$. Om $x < y$ så finns det tal m så $y = x + m$.

Vi får då enligt distributiva lagen

$$yz = (x + m)z = xz + mz$$

och den första ordningslagen ger att $xz < yz$ gäller.

Den sista ordningslagen säger; om x och y är positiva rationella tal, så finns det ett positivt rationellt tal z så att

$$x < yz$$

Låt $x = (a, b)$ och $y = (c, d)$ vara positiva rationella tal. Om $x < y$, så kan vi ta $z = 1$. Vi antar nu att $x \geq y$, det vill säga $ad \geq bc$. Enligt den arkimediska egenskapen kan vi ansätta ett tal e , så att $ad < bce$. Vi sätter sedan att $z = (e, 1)$ och vi får då

$$x = (a, b) < (ec, d) = yz$$

vilket skulle visas.

Efter att ha visat att vi räknar likadant med de positiva rationella talen som de positiva heltalen behöver vi ta reda på om de rationella talen kan betraktas som en utvidgning av de positiva heltalen. Det vi menar med detta är att vi kan skriva alla positiva heltal som talpar. Låt c vara ett positivt heltal. Vi definierar en funktion f från de positiva heltalen till de positiva rationella talen genom formen $f(c) = (c, 1)$. Vi vill nu visa att vi kan identifiera talet c med klassen $(c, 1)$. Med identifikation menas att varje positivt heltal ska svara mot endast en klass samt att varje klass ska svara mot endast ett positivt heltal. Det som då ska gälla är att

$$c \neq d \Leftrightarrow (c, 1) \neq (d, 1)$$

För att bevisa att varje positivt heltal svarar mot endast en klass, antar vi det omvända. Vi vill visa att $c = d$. Vi antar att $(c, 1) = (d, 1)$ vilket kan skrivas som $c \cdot 1 = d \cdot 1$. Vi ser då att c och d är samma tal och tillhör därför samma klass. Om då $c \neq d$ så tillhör de inte samma klass vilket skulle visas.

Vi ska nu bevisa att addition och multiplikation av tal av formen $(c, 1)$ ger samma resultat som addition och multiplikation med positiva heltalet c . Med addition vill vi visa att $f(c) + f(d) = f(c + d)$ och multiplikation vill vi visa att $f(c)f(d) = f(cd)$. De positiva heltalen c och d svarar mot klasserna med representanterna $(c, 1)$ och $(d, 1)$. Vi visar addition

$$f(c) + f(d) = (c, 1) + (d, 1) = (c + d, 1) = f(c + d)$$

och multiplikation

$$f(c)f(d) = (c, 1)(d, 1) = (cd, 1) = f(cd)$$

Vi har nu visat att det går att skriva de positiva heltalen som par och därför är de positiva rationella talen en utvidgning av de positiva heltalen.

Vi kan nu lösa ekvationen $x = yz$ för positiva rationella tal. Låt $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ och $z = (ad, bc)$ vara positiva rationella tal. Då är

$$yz = (c, d)(ad, bc) = (acd, bcd)$$

Paren (acd, bcd) och (a, b) representerar samma tal, x , enligt definitionen. Lösningen till $x = yz$ är då $z = (ad, bc)$. Ekvationen $x = yz$ är alltså alltid lösbar för talet z .

Exempel

Visa att ekvationen $x = yz$ där vi låter $x = (3, 7)$, $y = (5, 6)$ och $z = (3 \cdot 6, 5 \cdot 7)$ är lösbar. För att lösa ekvationen sätter vi in värdena för x , y och z i $yz = (c, d)(ad, bc) = (acd, bcd) = (a, b) = x$ och får då

$$yz = (5, 6)(3 \cdot 6, 5 \cdot 7) = (3 \cdot 5 \cdot 6, 5 \cdot 6 \cdot 7) = (90, 210) = (3, 7) = x$$

Vi ser nu att ekvationen är lösbar.

Vi ska nu visa att vi inte kommer att få något annan typ av tal om vi upprepar konstruktionen ovan med par av rationella tal. Om vi låter $x = (a, b)$ och $y = (c, d)$ vara talpar samt låter vi talet z vara ett talpar som inom sig är talpar, likt $z = (x, y)$. Om vi skriver ut talet z får vi

$$z = (x, y) = ((a, b), (c, d)) = ((a, b)(d, c), (c, d)(d, c)) = ((ad, bc), 1) = (ad, bc)$$

Vi får då det rationella talet (ad, bc) . Vi kan då dra slutsatsen att även om vi sätter talpar inom talpar inom talpar och så vidare, ända till oändligheten, kommer vi att få ett nytt positivt rationellt tal.

Positiva reella tal

De positiva rationella talen kan vi skriva som talpar av positiva heltal. När vi endast har de positiva rationella talen, har vi ett problem om vi vill uttrycka alla punkter på en tallinje. Problemet med tallinjen kan vi lösa genom att införa en talmängd som kallas för positiva reella tal. Positiva reella tal kommer vi att konstruera med snitt, kallade Dedekinds snitt, och med hjälp av de positiva rationella talen.

Vi har i tidigare avsnitt redogjort att de olika typer av talen har olika räkne- och ordningslagar. I detta avsnitt kommer vi att särskilt förhålla oss till lagen att varje uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns bland de reella talen. Den här lagen kommer att bli en sats längre ner. Den här lagen gäller inte för de positiva rationella talen. Vi kan nämligen ange en uppåt begränsad mängd av rationella tal, som inte har någon minsta övre gräns bland de rationella talen. Till exempel om vi har X och X :s mängd är alla positiva rationella tal, vars kvadrat är < 2 . Vi får då att mängden är uppåt begränsad. Om denna mängd hade varit det rationella talet Y till minsta övre gräns skulle följa att $Y^2 = 2$ vilket är omöjligt om Y är rationellt.

Definition

Låt $a, b, \dots$ beteckna positiva rationella tal. En mängd X av positiva rationella tal kallas ett snitt om

1. X inte är tom,
2. X är uppåt begränsad,
3. $a \in X$ och $b < a$ medför att $b \in X$,
4. det finns inte något största element i X .

Exempel

Mängden X av alla positiva rationella tal x så att $x^2 < 2$, är ett snitt.

För att bevisa påståendet ovan, kommer vi att utgå från definitionen för snitt. Vi börjar med punkt 1 och då talet $1 \in X$ är inte X tom. Punkt 2 säger att X är uppåt begränsad, det vill säga att det finns högre tal som inte tillhör X . Talet 4 är ett sådant tal och därmed är mängden uppåt begränsad. Vi kan även bevisa att punkt 3 gäller. För om $a^2 < 2$ och $b < a$, så gäller även $b^2 < a^2$ och därför $b \in X$. Avslutningsvis vill vi visa att punkt 4 också gäller. Vi vet att om

$x^2 < 2$ och att så finns det ett tal a , sådan att $x^2 + a = 2$. Om vi då låter ε vara ett rationellt tal som är mindre än a och 1 så kan vi skriva

$$(x + \varepsilon)^2 = x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 < x^2 + 4\varepsilon + \varepsilon = x^2 + 5\varepsilon$$

vilket är mindre än $x^2 + a = 2$ om $\varepsilon < \frac{a}{5}$. Vi har nu bevisat punkt fyra.

Exempel

Låt r vara ett positivt rationellt tal. Mängden X av positiva rationella tal, x , sådana att $x < r$, är ett snitt.

Likt ovan utgår vi från definitionen för att bevisa påståendet. Talet $\frac{r}{2}$ tillhör X eftersom det är rationellt och mindre än r . Alltså är punkt 1 uppfylld. För att visa punkt 2, det vill säga att X är uppåt begränsad, räcker det med att vi konstaterar att alla element i X är mindre än r . Vi fortsätter nu med punkt 3. För om $a < r$ och $b < a$, så gäller även $b < r$ och därför $b \in X$. Slutligen undersöker vi punkt 4. Av relationen $x < r$ kan vi konstruera ett tal som ligger mellan r och x , nämligen $\frac{1}{2}(x + r)$. Vi kan fortsätta konstruera liknande tal och komma närmre och närmre men det kommer aldrig att bli talet r för då krävs $\frac{1}{2}(r + r)$. Vi får alltså $x < \frac{1}{2}(x + r) < r$ vilket medför att det inte finns något största element i mängden. Här kan vi se att det inträffar ett snitt består av alla positiva rationella tal som är mindre än ett godtyckligt rationellt tal r . Vi *definierar* nu detta som ett *rationellt snitt*. Vi skriver rationella snitt som r^* .

För att definiera addition och multiplikation för snitt, kommer det ett par satser.

Satsen om addition av snitt

Den mängd Z som består av alla tal $a + b$ där $a \in X$ och $b \in Y$, är ett snitt. Detta skrivs som $X + Y$.

Bevis

Vi ska verifiera att punkterna 1, 2, 3 och 4 i definitionen av snitt är uppfyllda för $X + Y$. Vi börjar med punkt 1. Låt $a \in X$ samt $b \in Y$, likt satsen. Då har vi $a + b \in X + Y$, så $X + Y$ är inte tom. Vi går nu vidare med att visa punkt 2. Eftersom X och Y är snitt, så är de uppåt begränsade. Vidare tar vi c och d så att $a < c$ samt $b < d$ för alla $a \in X$ samt $b \in Y$. Då är $a + b < c + d$ för alla $a \in X$ samt $b \in Y$, vilket betyder att $X + Y$ är uppåt begränsad. För att

bevisa punkt 3 låter vi $a + b \in X + Y$ och låter $w < a + b$ vara godtyckligt. Vi måste visa att w tillhör $X + Y$. Därför skriver vi

$$w = \frac{w}{a+b} (a+b) = pa + pb$$

där $p = \frac{w}{a+b}$. Eftersom $w < a + b$, så har vi $p < 1$ och $pa < a$ samt $pb < b$. Enligt punkt 2 gäller att $pa \in X$, $pb \in Y$ och det följer att $w \in X + Y$. För att bevisa punkt 4, tar vi ett godtyckligt tal $z \in X + Y$. Vi måste visa att det finns minst ett tal $w \in X + Y$ sådant att $z < w$. Vi skriver $z = a + b$, där $a \in X$ och $b \in Y$. Eftersom X inte har något största element, så finns ett tal $c \in X$ sådant att $a < c$. Men då har vi att $z = a + b < c + b \in X + Y$ och vi har visat att $X + Y$ inte har något största element.

Satsen om multiplikation av snitt

Den mängd U som består av alla tal ab , där $a \in X$ och $b \in Y$, är ett snitt. Det här skrivs som XY .

Bevis

Endast punkt 3 behöver bevisas då punkterna 1, 2 och 4 bevisas som ovan dock med multiplikation istället för addition. Låt $a \in X$ och $b \in Y$. Vi tar då ett tal $u = ab$ där $u \in U$.

Därefter tar vi talet v där $v < u = ab$. Vi skriver då $\frac{v}{a} < b$ och därför $\frac{v}{a} \in Y$. Vi får då att $v = a \frac{v}{a} \in U$ vilket skulle visas.

Definition

Med ett positivt reellt tal menas ett snitt av positiva rationella tal.

Då vi redan har definierat addition och multiplikation av positiva reella tal ska vi definiera ordning för positiva reella tal.

Definition

Om X och Y är positiva reella tal och det finns ett element y i snittet Y , sådant att y inte är element i X , säger vi att $X < Y$.

Vi ska nu definiera övertal och undertal till snitt. Om det positiva rationella talet a tillhör snittet X , säger vi att a är ett undertal till snittet X . Om a inte tillhör snittet X är a ett övertal till X . Enligt egenskap 3 får vi att varje undertal är mindre än varje övertal. Låt oss anta att x

är ett undertal och y ett övertal. Om $x < y$, så skulle $y \in X$ enligt egenskap 3, vilket är omöjligt.

Nu kommer vi att redogöra för och bevisa räkne- och ordningslagarna för positiva reella tal. Vi kommer att endast stödja oss på räkne- och ordningslagarna för positiva rationella tal samt ovanstående definitioner.

Kommutativa lagen för addition;

Låt snittet $X + Y$ bestå av alla tal $a + b$ där $a \in X$ och $b \in Y$. Vi kan då skriva $Y + X$ eftersom

$$a + b = b + a$$

och därför utgörs av samma tal.

Kommutativa lagen för multiplikation;

Vi låter XY vara snittet av alla tal ab där $a \in X$ och $b \in Y$. Vi skriver YX eftersom

$$ab = ba$$

och snitten utgörs av samma tal.

Den associativa lagen för addition

Låt $X + (Y + Z)$ vara snittet av alla tal $a + (b + c)$ där $a \in X$, $b \in Y$ och $c \in Z$. Vi kan då skriva $(X + Y) + Z$ eftersom

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

då snitten utgörs av samma tal.

Den associativa lagen för multiplikation

Låt $X(YZ)$ vara snittet av alla tal $a(bc)$ där $a \in X$, $b \in Y$ och $c \in Z$. Vi kan då istället skriva $(XY)Z$ eftersom båda leden av

$$a(bc) = (ab)c$$

utgörs av samma tal.

Annuleringslagen för addition och multiplikation

Låt X och Y vara två snitt och antag att $X < Y$, det vill säga att $X \subsetneq Y$ om vi betraktar dem som mängder. Vi visar först att det finns minst två olika tal y_1 och y_2 , sådana att $y_1, y_2 \in Y$, men $y_1, y_2 \notin X$. Det måste finnas minst ett sådant tal, så antag att det finns exakt ett, säg y_0 .

Då gäller $Y = X \cup \{y_0\}$ och där unionen är disjunkt, det vill säga $y_0 \notin X$. Eftersom Y är ett snitt, så innehåller Y inget största element enligt egenskap 4. Därför finns det tal $y \in Y$ sådana att $y_0 < y$. Men då måste ju $y \in X$ och av egenskap 3 hos snitt följer $y_0 \in Y$, vilket är en motsägelse. Alltså finns det minst två tal i mängdskillnaden $Y \setminus X$.

Vi visar först annuleringslagen för addition. Låt X , Y och Z vara sådana snitt att $X + Z = Y + Z$. Vi ska visa att $X = Y$ och kommer att använda oss av ett motsägelseresonemang. Antag därför att $X < Y$ och tag två olika tal $y_1, y_2 \in Y \setminus X$. Vi antar att $y_1 < y_2$. Låt ε vara sådant att $y_1 + \varepsilon = y_2$.

Det finns ett tal $z \in Z$ sådan att $z + \varepsilon \notin Z$. Vi tar då ett godtyckligt tal $w \in Z$. Eftersom Z är uppåt begränsad, så finns det positiva heltal n sådana att $w + n\varepsilon \notin Z$. Här använder vi den arkimediska egenskapen hos de positiva rationella talen. Låt n vara det minsta positiva heltalet så att $w + n\varepsilon \in Z$, men $w + \varepsilon(n + 1) \notin Z$. Om vi sätter $z = w + n\varepsilon$, så har vi $z \in Z$, men $z + \varepsilon \notin Z$.

Vi tar ett tal $y \in Y$ så att $y_2 < y$. Av $X + Z = Y + Z$ följer att $y + z = x + z'$ för något $x \in X$ och $z' \in Z$. Eftersom $x < y$, så har vi $z < z'$. Skriv $z' = z + p$. Vi har $z' = z + p \in Z$, med $z + \varepsilon \notin Z$, varför $p < \varepsilon$. Insättning i $y + z = x + z'$ ger $y + z = x + z + p$, varav $y = x + p$ enligt annuleringslagen för positiva rationella tal. Nu får vi

$$y_2 < y = x + p < x + \varepsilon < y_1 + \varepsilon = y_2$$

vilket är en motsägelse. På samma sätt visar man att $Y < X$ är omöjligt, så vi måste ha $X = Y$.

Annuleringslagen för multiplikation visar vi på ett liknande sätt. Vi antar alltså att $XZ = YZ$ och att $X < Y$. Sätt $\delta = \frac{\varepsilon}{y_1}$, så att $y_2 = y_1(1 + \delta)$. Välj $z \in Z$ så att $z(1 + \delta) \notin Z$. Att det finns ett sådant z kan vi visa så här: Med induktion kan man lätt visa att $(1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta$ för alla positiva heltal n (strikt olikhet gäller för $n \geq 2$). Låt $w \in Z$ vara godtyckligt. Då är

$$w(1 + \delta)^n \geq w(1 + n\delta) = w + wn\delta$$

och av den arkimediska egenskapen följer att $w + wn\delta$ inte tillhör Z om n är stort nog. Låt n vara det minsta positiva heltalet sådant att $w(1 + \delta)^n \in Z$, men $w(1 + \delta)^{n+1} \notin Z$ och vi sätter $z = w(1 + \delta)^n$.

Vi tar $y \in Y$ så att $y_2 < y$. Då har vi så att $yz = xz'$ för något $x \in X$ och $z' \in Z$. Eftersom $x < y$, så har vi $z < z'$. Skriv $z' = z(1 + p)$. Då måste $p < \delta$ eftersom $z' = z(1 + p) \in Z$. Insättning i $yz = xz'$ ger $yz = xz' = xz(1 + p)$, varför $y = x(1 + p)$. Vi får nu

$$y_2 < y = x(1 + p) \leq x(1 + \delta) < y_1(1 + \delta) = y_2$$

vilket är en motsägelse. Som ovan följer nu $X = Y$.

Distributiva lagen

Beviset består av att vi först visar att $A \subseteq B$ och sedan visar vi att $B \subseteq A$. Vi låter $A = X(Y + Z)$ och $B = XY + XZ$. Om $z \in A$ är $z = a(b + c)$ där $a \in X$, $b \in Y$ och $c \in Z$. Av $z = ab + ac$ följer att $z \in B$ eftersom $ab \in XY$ och $ac \in XZ$.

För att beviset ska vara fullständigt behöver vi även bevisa det omvända. Låt $b \in Y$ samt $c \in Z$. Vi antar att $z \in B$ och att $z = ab + cd$. Både a samt d är två element i X som kan vara olika. Vi låter nu y vara det största av talen a och d . Vi får då $z \leq y(b + c)$. Eftersom $y \in X$ och $b + c \in Y + Z$ följer att $y(b + c) \in A$ och därmed också $z = X(Y + Z) \in A$.

För att formulera ordningslagarna för positiva reella tal kommer vi att använda oss av under- och övertal. Vi ska bevisa att för två snitt X och Y gäller exakt en av relationerna $X < Y$, $X = Y$ och $Y < X$. Vi antar att $X \neq Y$. Då finns det ett tal y så att det antingen gäller att y tillhör X men inte Y , eller att y tillhör Y men inte X . Låt oss anta det senare, det vill säga att y är ett övertal till X och ett undertal till Y . Om x tillhör X , dvs är ett undertal till X , så är $x < y$ och egenskap 3 ger att $x \in Y$. Alltså är $X < Y$.

Innan vi redovisar resterande ordningslagar kommer en sats om över- och undertal.

Sats om över- och undertal

Om X är ett positivt reellt tal och om p är ett positivt rationellt tal, så kan man till X finna ett undertal a och ett övertal b , sådana att $b = a + p$

Bevis

Låt a_0 vara ett godtyckligt undertal till X och betrakta talen a_0 , $a_0 + p$, $a_0 + 2p$, ... Av de här talen kan inte alla vara undertal till X på grund av den arkimediska egenskapen för positiva rationella tal. Alltså finns det ett första övertal i mängden vilket vi betecknar som b . Det

närmst föregående talet i mängden är då undertal till X vilket vi betecknar som a . Vi kan nu skriva $b = a + p$ och är satsen bevisad.

Andra ordningslagen lyder; om $X > Y$ så finns det ett positivt reellt tal Z sådant att $X = Y + Z$. För att bevisa ordningslagen definierar vi Z som mängden av alla positiva rationella tal p sådana att $y' + p = x$ för något $y' \notin Y$ och $x \in X$ och ska först visa att Z är ett snitt.

Vi kan finna ett positivt rationellt tal r_1 så att $r_1 \in X$ och $r_1 \notin Y$. På grund av egenskap 4 hos snitt kan vi då också finna ett positivt rationellt tal r_2 , så att $r_1 < r_2$ och $r_2 \in X$. Eftersom $r_2 \notin Y$ kan vi i ovanstående definition av Z välja $x = r_2$ och $y' = r_1$. Detta visar att Z inte är en tom mängd. Då p är differensen mellan y' och x , gäller $p < p + y' = x \in X$, varför Z är uppåt begränsad. För att bevisa att Z har egenskap 3 hos snitt tittar vi på ett $p \in Z$. Då gäller $x = p + y'$ där $x \in X$ och $y' \notin Y$. Om nu $p' < p$, definierar vi $x' = p' + y'$. Då blir $x' < x$ varför $x' \in X$ och $y' \notin Y$. Detta betyder att $p' \in Z$. Avslutningsvis ska vi bevisa egenskap 4 för snitt ser vi att om vi i likheten $x = p + y'$ ersätter vi x med ett större tal $x' \in X$ så blir $x' = p' + y'$, där $p < p'$. Detta bevisar egenskap 4.

Vi kan nu bevisa att Z uppfyller $X = Y + Z$ och börjar med att visa olikheten $Y + Z \leq X$. Låt u vara ett undertal till $Y + Z$, det vill säga ett element i $Y + Z$. Då kan vi skriva $u = p + y$, där $y \in Y$ och $p \in Z$. Eftersom $p \in Z$ så finns det $x \in X$ och $y' \notin Y$ så att $y' + p = x$. Att $y \in Y$ och $y' \notin Y$ medför att $y < y'$ och vi får $u = y + p < y' + p = x$. Av egenskap 2 hos snitt följer att $u \in X$ och vi har visat $Y + Z \leq X$.

Nu ska vi visa att om $x \in X$ så gäller också $x \in Y + Z$. Vi antar först att $x \notin Y$ och betraktar förutom x ett $x' \in X$ så att $x < x'$, låt oss säga $x' = x + p$. Vi väljer sedan, enligt satsen om över- och undertal, ett $y \in Y$ så att $y + p \notin Y$. Eftersom $x \notin Y$ är $y < x$ och vi kan skriva $x = y + q$. Detta ger

$$x' = x + p = (y + q) + p = (y + p) + q$$

Den sista likheten visar att $q \in Z$. Men ur $x = y + q$ följer då att $x \in Y + Z$. Ovan förutsatte vi att x förutom $x \in X$ uppfyllde $x \notin Y$. Om $x \in Y$ kan vi införa ett x_0 , så att $x_0 \in X$ och $x_0 \notin Y$. Då är $x < x_0$. Vi bevisar sedan som ovan att $x_0 \in Y + Z$. Då följer att $x \in Y + Z$.

Vi ska visa att $X < Y$ för två positiva reella tal om och endast om det finns ett positivt reellt tal Z sådant att $X + Z = Y$. Att $X < Y$ medför att $X + Z = Y$ för något positivt reellt tal Z är

andra ordningslagen. För att visa omvändningen antar vi att $X + Z = Y$. Vi ska visa att $X < Y$. Om detta inte gäller, så måste vi ha $X \geq Y$. Men då får vi $X + Z \leq X$, vilket är en motsägelse och påståendet är bevisat.

Den tredje ordningslagen säger; låt X , Y samt Z vara positiva reella tal. Om

$$X < Y \text{ och } Y < Z \text{ så } X < Z$$

Den här ordningslagen följer ur definitionen av olikhetsrelationen för snitt. Att $X < Y$ och $Y < Z$ betyder att $X \subset Y$ och $Y \subset Z$. Mängdinklusion är transitiv, så detsamma gäller ordning mellan snitt.

Den fjärde ordningslagen lyder; låt X , Y samt Z vara positiva reella tal. Om $Y < Z$ så gäller

$$X + Y < X + Z \text{ och } XY < XZ$$

för alla positiva reella tal X .

För att bevisa den fjärde ordningslagen för addition antar vi att $Y < Z$. Vi vill visa att $X + Y < X + Z$ det vill säga att $X + Y \leq X + Z$ och att $X + Y \neq X + Z$. Att $X + Y \leq X + Z$ är klart då vi vet att $Y < Z$. För att sedan visa att $X + Y \neq X + Z$, antar vi det omvända, $X + Y = X + Z$. Med hjälp av annuleringslagen får vi $Y = Z$ vilket motsäger $Y < Z$. Alltså gäller $X + Y \neq X + Z$ vilket skulle visas.

På liknande sätt går vi nu tillväga för att bevisa den fjärde ordningslagen för multiplikation.

Vi har $Y < Z$ och vill visa att $XY \leq XZ$ och $XY \neq XZ$ gäller. Eftersom $Y < Z$ vet vi att $XY \leq XZ$ gäller. Likt ovan antar vi $XY = XZ$ gäller. Med hjälp av annuleringslagen får vi att $Y = Z$ vilket motsäger vårt grundantagande, att $Y < Z$. Alltså måste $XY \neq XZ$ gälla.

Den sista ordningslagen säger; om a samt b vara positiva reella tal, så finns det ett positivt heltal c så att

$$a < bc$$

Först låter vi A vara ett övertal till a och vi tar ett godtyckligt tal B i b . Enligt den arkimediska egenskapen hos de rationella talen, så finns det ett positivt heltal n sådant att $A < nB$.

Därefter låter vi c vara snittet bestående av alla tal $r < n + 1$. Vi har $nB \in cb = bc$. Om $x \in a$, så gäller $x < A < nB$, varför $x \in bc$.

Efter detta ska vi identifiera de rationella talen med en viss typ av snitt, de så kallade rationella snitt. Låt a vara ett rationellt tal. Mängden av positiva rationella tal x , sådana

att $x < a$, är ett snitt som vi skriver a^* . Vi identifierar det rationella talet a med det rationella snittet a^* . Det följer omedelbart av definitionen a^* är ett snitt. Se exempel på sida 20.

Vi ska bevisa att $a * + b * = (a + b) *$. Lägg märke till att summan i vänsterledet är addition av snitt medan den i högerledet är addition av rationella tal. Låt a^* och b^* vara två stycken rationella snitt. Vi ska första visa att

$$a * + b * \leq (a + b) *$$

Tag $x \in a * + b *$. Då kan vi skriva $x = y + z$, där $y \in a *$ och $z \in b *$. Detta betyder $y < a$ och $z < b$, så $x = y + z < a + b$, vilket medför att x tillhör snittet $(a + b) *$.

För att visa det omvända tar vi ett tal $x \in (a + b) *$ och ska visa att det tillhör $a * + b *$. Att $x \in (a + b) *$ betyder att $x < a + b$. Därefter skriver vi x som

$$x = \frac{x}{a+b}a + \frac{x}{a+b}b = pa + pb$$

där $p = \frac{x}{a+b}$ är mindre än 1. Alltså får vi att $pa < a$ och $pb < b$ varför $pa \in a *$ och $pb \in b *$.

Detta ger $x = pa + pb \in a * + b *$ vilket skulle visas.

Vi ska nu gå vidare med att jämföra begreppet ordning för positiva rationella tal och positiva rationella snitt. Vi ska visa att om a och b är två positiva rationella tal och om $a < b$, så gäller också $a * < b *$ samt omvänt. Ur $a < b$ får vi att $c = \frac{1}{2}(a + b)$ uppfyller $a < c < b$. Detta ger att $c \notin a *$ och $c \in b *$ och att $a * < b *$. För att undersöka det omvända så utgår vi från $a * < b *$. Det finns då ett tal x , så att $x \in b *$ och $x \notin a *$. Detta betyder att $a \leq x$ och $x < b$, alltså får vi $a \leq x < b$.

Vi visar nu en sats som lyder;

Sats

Låt X vara ett positivt reellt tal. Då gäller att $a \in X$ om och endast om $a * < X$.

Bevis

Vi antar först att $a \in X$. Tag ett godtyckligt tal $x \in a *$. Då gäller enligt definitionen av rationellt snitt att $x < a$ och av egenskap 3 i definitionen av snitt följer att $x \in X$. Alltså har vi $a * \leq X$.

Men eftersom $a \in X$ och $a \notin a *$, så måste vi ha strikt olikhet, det vill säga $a * < X$.

Antag å andra sidan att $a \notin X$. Då är a ett övertal till X . Om $x \in X$, så gäller $x < a$ och alltså $x \in a^*$. Det följer att $X \leq a^*$. Men för två snitt Y och Z gäller exakt en av relationerna $Y < Z$, $Y = Z$ och $Y > Z$, så vi kan inte ha $a^* < X$.

I fortsättningen skriver vi a istället för a^* . Om $X < Y$ är två positiva reella tal finns det, enligt definitionen av olikhet, ett positivt rationellt tal a , så att $a \in Y$ och $a \notin X$. Enligt satsen får vi $X \leq a < Y$, eller med den nya beteckningen $X \leq a < Y$. Mellan två positiva reella tal X och Y sådana att $X < Y$ finns oändligt många rationella tal. För vi såg nyss att det finns minst ett rationellt tal a sådant att $X < a < Y$ och enligt egenskap 4 i definitionen av snitt finns det minst ett rationellt tal b sådant att $a < b < Y$. Så här kan vi förstås fortsätta. Vi kan nu också konstatera att det finns oändligt många positiva rationella tal mellan två olika positiva reella tal.

Tidigare har vi undersökt ekvationen $b = ax$ för positiva rationella tal. Nu kommer vi att undersöka ekvationen $X = YZ$ för positiva reella tal. Vi börjar med att studera ekvationen $YZ=1$, där Y är ett givet positivt reellt tal.

Ett positivt reellt tal Y kan ha ett minsta övertal, till exempel om $Y = a^*$ för något rationellt tal a . Då är a det minsta övertalet. Vi låter Z vara mängden av alla $1/y$ där y genomlöper alla övertal utom det minsta, om det finns ett sådant.

Sats om snitt

Mängden Z är ett snitt.

Bevis

Vi ska visa att Z har de fyra egenskaperna i definitionen av snitt.

1. Om u är ett övertal till Y , så är $u + 1$ inte det minsta övertalet. Eftersom $\frac{1}{u+1} \in Z$, så är Z inte tom.
2. Låt v vara ett fixt undertal och y ett godtyckligt övertal till Y . Då är $v < y$ och alltså $\frac{1}{y} < \frac{1}{v}$. Detta visar att Z är begränsad.

3. Låt $z \in Z$, så att $\frac{1}{z}$ är ett övertal till Y och antag att $w < z$. Vi måste visa att $w \in Z$. Vi har $\frac{1}{z} < \frac{1}{w}$, så $\frac{1}{w}$ är ett övertal till Y . Det kan inte vara det minsta eftersom det är större än $\frac{1}{z}$. Alltså har vi $w \in Z$.
4. Antag att Z hade ett största tal, säg z . Talet $u = \frac{1}{z}$ är ett övertal till Y och enligt definitionen av Z kan det inte vara det minsta. Låt $v < u$ vara ett mindre övertal, som inte heller är det minsta. Sätt $w = \frac{1}{v}$; då har vi å ena sidan $w \in Z$ och å den andra $w = \frac{1}{v} > \frac{1}{u} = z$. Detta motsäger att z är det största talet i Z . Alltså har Z inget största tal.

Sats om $YZ = 1$

För det ovan definierade positiva reella talet Z gäller $YZ = 1$.

Bevis

Om talet $t \in YZ$, är $t = y \frac{1}{y'}$, där y är undertal och y' är ett övertal till Y . Alltså är $y < y'$ och således $t < 1$, varför $t \in 1$. Antag nu omvänt, att $t \in 1$, det vill säga att $t < 1$. Eftersom $1 < \frac{1}{t}$ är $\left(\frac{1}{t}\right)^n = (1 + p)^n > 1 + pn$ där $p = \frac{1}{t} - 1$ och alltså $y_0 + y_0 pn < y_0 \left(\frac{1}{t}\right)^n$ där vi låter y_0 vara ett undertal till Y . Med hjälp av satsen om över- och undertal, kan vi finna ett tal $y \in Y$ medan $y \left(\frac{1}{t}\right) \notin Y$. Om talet $y \left(\frac{1}{t}\right)$ är det minsta övertalet till Y , ersätts y med ett större undertal i Y , där $y \left(\frac{1}{t}\right)$ är skilt från det minsta övertalet. Men nu är

$$t = y \frac{1}{y \frac{1}{t}}$$

vilket ger att $t \in YZ$. Därmed är satsen bevisad.

Det införda talet Z kan vi skriva som $\frac{1}{Y}$ eller Y^{-1} . Vi kan nu se att ekvationen, $X = YZ'$ har lösningen $Z' = ZX$ eftersom $YZ' = XYZ = X$. Lösningen är entydig, ty ur $X = YZ'$ och $X = YZ''$ följer att $YZ' = YZ''$ och med hjälp av annuleringslagen får vi då att $Z' = Z''$.

Sats om minsta övre gräns

Varje icke tom uppåt begränsad mängd M av positiva reella tal har en minsta övre gräns. Det vill säga det finns ett positivt reellt tal Z sådant att

- $X \leq Z$ för varje $X \in M$
- till varje tal $K < Z$ finns minst ett $X \in M$, sådant att $K < X$

Bevis

Vi definierar Z som mängden alla positiva rationella tal som är mindre än minst ett tal $X \in M$. Eftersom M inte är en tom mängd kommer inte Z heller vara tom. Eftersom M är begränsad är även Z begränsad. Talet Z har egenskap 3 hos snitt och Z kan, enligt definitionen för reella tal, inte innehålla något största element. Z är alltså ett snitt och vi ska nu visa att Z uppfyller de två punkterna ovan.

- Vi antar att för något $X \in M$ gäller $Z < X$. Då finns ett rationellt tal a , sådant att $Z < a < X$. Ur relationen $Z < a$ får vi att talet a är ett övertal till Z . Ur relationen $a < X$ följer enligt definitionen av snitt att a tillhör mängden Z . Alltså är antagandet omöjligt.
- Om det för relationen $K < Z$ finns ett positivt rationellt tal a , så att $K < a < Z$. Då är talet a ett undertal till Z . Då finns det, enligt definitionen ovan i beviset av Z , ett $X \in M$, så att $a < X$. Vi har nu visat att $K < X$ vilket ger att punkten är bevisad.

Enligt satsen om minsta övre gräns, finns alltid ett positivt reellt tal Z , så att mängden utgörs av talen $X < Z$. Snittbildning bland de positiva reella talen leder alltså inte utanför dessa.

I grundläggande analyskurser tas existensen av minsta övre gräns som ett axiom, men genom att definiera de reella talen som Dedekindsnitt, så har vi kunnat bevisa den. Vi kan också bevisa att det finns ett reellt tal G sådant att $G^2 = 2$. Låt nämligen G vara den minsta övre gränsen till mängden av positiva reella tal x sådana att $x^2 < 2$. Antag först att $G^2 < 2$, säg $G^2 + p = 2$. Om $0 < e < 1$ så får vi

$$(G + e)^2 = G^2 + Ge + e^2 < G^2 + 4e + e = G^2 + 5e$$

som är < 2 om $e < \frac{p}{5}$. Antag å andra sidan att $G^2 > 2$, säg $G^2 = p + 2$. Vi kan anta att $G < 2$. Om $0 < e < 1$ så får

$$(G - e)^2 = G^2 - Ge + e^2 > G^2 - 4e > G^2 - p$$

om $e < \frac{p}{4}$. Alltså måste vi ha $G^2 = 2$.

Reella tal av godtyckligt tecken

Vi har redogjort för de positiva heltalen, de positiva rationella talen och de positiva reella talen. Vi ska nu gå vidare med att redogöra för reella tal av godtyckligt tecken.

Låt X och Y vara positiva reella tal. Vi har tidigare visat att om $Y < X$ så finns det ett tal Z så att

$$X = Y + Z$$

Vi ska nu mängden av de positiva reella talen. Genom att lägga till talet 0 och de negativa reella talen. Då blir ekvationen $X = Y + Z$ alltid lösbar. Utvidgningen kommer att påminna om den utvidgningen av de positiva heltalen till de positiva rationella talen.

Antag att vi har två samband $X = Y + Z$ och $M = N + Z$. Vilket samband måste då råda mellan X , Y , M och N ? Om vi adderar N respektive Y till de två ekvationerna, så får vi $X + N = N + Y + Z$ och $M + Y = N + Y + Z$, vilket ger $X + N = M + Y$. Om detta samband omvänt gäller, så kan man läsa räkningarna åt andra hållet och får med hjälp av annulleringslagen för addition att $X = Y + Z$ och $M = N + Z$. Det som vi nu har redogjort för kommer vi ha användning av i nedanstående definition.

Definition

Låt $X, Y, M, N, \dots$ vara positiva reella tal och $(X, Y), (M, N), \dots$ vara par av sådana tal, givna i en viss ordning. Man säger att talet (X, Y) är ekvivalent med paret (M, N) om och endast om $X + N = M + Y$. Detta går att skriva

$$(X, Y) \sim (M, N) \text{ om och endast om } X + N = M + Y$$

Vi vill nu visa att $(X, Y) \sim (M, N)$ är en ekvivalensrelation. Till att börja med är den reflexiv eftersom $(X, Y) \sim (X, Y)$ betyder att $X + Y = Y + X$, vilket ju är sant. För att visa symmetrin, så kan vi lägga märke till att $(X, Y) \sim (M, N)$ och $(M, N) \sim (X, Y)$ är ekvivalenta med $X + N = M + Y$ respektive $M + Y = X + N$, som ju också är ekvivalenta. För att visa transitivitet, så antar vi att $(X, Y) \sim (M, N)$ och $(M, N) \sim (P, Q)$. Detta betyder att $X + N = M + Y$ respektive $M + Q = N + P$. OM vi adderar dessa ledvis, så får vi $X + M + N + Q = Y + M + N + P$ och annulleringslagen för addition ger $X + Q = Y + P$, dvs $(X, Y) \sim (P, Q)$.

Utifrån det här kan vi konstruera en indelning av mängden av alla par (X, Y) i klasser. Om två par tillhör samma klass, är dessa ekvivalenta. Om de inte tillhör samma klass kan de aldrig vara ekvivalenta.

Vi kommer nu att införa reella tal av ett godtyckligt tecken.

Definition

Med ett reellt tal menas en ekvivalensklass av ordnade par av positiva reella tal med avseende på ekvivalensrelationen ovan.

Låt reella tal betecknas med $a, b, c, \dots$. Om paret (X, Y) är en representant för det reella talet a och om paret (M, N) är en representant för det reella talet b , gäller likhet mellan a och b om och endast om $X + N = M + Y$. Vi definierar nu;

- Addition: $a + b = (X + M, Y + N)$
- Multiplikation: $ab = (XM + YN, XN + MY)$
- Ordning: $a < b$ gäller om och endast om $X + N < M + Y$

Vi kommer nu inte att redogöra för räkne- och ordningslagarna för reella tal av godtyckligt tecken på grund av att dem visas analogt med dem för positiva rationella tal.

Vi ska nu lösa $a = b + x$. Vi låter $a = (X, Y)$ och $b = (M, N)$ vara givna reella tal och x är okänt. Ekvationen kan vi lösa och vi får då att $x = (X + N, Y + M)$ eftersom

$$b + x = (M, N) + (X + N, Y + M) = (X + M + N, Y + M + N) = (X, Y) = a$$

Enligt annulleringslagen för addition är lösningen entydig. Den skrivs $x = a - b$.

Vi ska nu definiera vad som menas med att reellt tal är noll, positivt eller negativt: Betrakta talet $\varepsilon = (Z, Z)$. En ekvivalent representant för talet är tydligen (Z', Z') , där Z' är godtyckliga positiva reella tal. För ett godtyckligt tal $\delta = (X, Y)$ gäller

$$\varepsilon + \delta = (Z, Z) + (X, Y) = (X + Z, Y + Z) = (X, Y) = \delta$$

det vill säga talet $\varepsilon = (Z, Z)$ är den entydigt bestämda lösningen till ekvationen

$$\varepsilon + \delta = \delta$$

Vi betecknar $\varepsilon = (Z, Z)$ med 0.

Låt nu $\delta = (X, Y)$ vara ett reellt tal. Enligt ovan gäller en och endast en av relationerna $(X, Y) > 0$, $(X, Y) = 0$ och $(X, Y) < 0$. Om vi skriver $(Z, Z) = 0$ blir dessa fall ekvivalenta med $X + Z > Y + Z$, $X + Z = Y + Z$ respektive $X + Z < Y + Z$, det vill säga med $X > Y$, $X = Y$ och $X < Y$. I det första fallet finns ett positivt tal P så att $X = P + Y$. I detta fall identifierar vi $\delta = (X, Y) = (Y + P, Y)$ med det positiva reella talet P , $(P + 1, 1)$. Om $X = Y$ har vi redan betecknat talet δ med 0 och om $X < Y$ kallar vi δ negativt.

Vi ska nu undersöka det motiverade i identifikation av $(P + 1, 1)$ med det positiva reella talet P . Vi börjar med definitionen av addition för reella tal med godtyckligt tecken. De positiva reella talen P och Q svara mot klasserna med representanterna $(P + 1, 1)$ respektive $(Q + 1, 1)$. När vi adderar P och Q med varandra ger klassen med representanterna $(P + Q + 2, 2)$, som svara mot det positiva talet $P + Q$. Vi fortsätter nu med multiplikationsdefinitionen. Vi har att de positiva reella talen P och Q svara mot klasserna med representanterna $(P + 1, 1)$ respektive $(Q + 1, 1)$. Vi multiplicerar nu P och Q med varandra får vi klassen med representanterna $(PQ + P + Q + 2, P + Q + 2)$. Klassen svarar mot det positiva talet PQ . Avslutningsvis går vi igenom ordningsdefinitionen. De positiva reella talen P och Q svara mot klasserna med representanterna $(P + 1, 1)$ respektive $(Q + 1, 1)$. Relationen $P < Q$ gäller om och endast om $P + 2 < Q + 2$ gäller.

Sats om minsta övre gräns för reella tal

Varje uppåt begränsad mängd M av reella tal har en minsta övre gräns.

Bevis

För att bevisa detta låter vi a vara ett element i M och öka samtliga elementen i mängden med $t = 1 - a$. Då får vi en mängd, M' , som har minst ett positivt element vilket är 1. Vi får en delmängd M'' av M' , som har alla positiva element i M' . Enligt sats om minsta övre gräns för positiva reella tal, kommer M'' att ha en minsta övre gräns G . Vi får då att talet $G - t$ är den minsta övre gränsen till den ursprungliga mängden M .

Genom att införa de reella talen har det gått att bevisa satsen om minsta övre gräns. Dessutom vet vi att mängden av alla positiva reella tal, vilkas kvadrater är < 2 , har en minsta övre gräns G och att $G^2 = 2$. Vidare kan vi lätt visa att $G = \sqrt{2}$ inte kan vara något rationellt tal. Det existerar alltså snitt som inte är rationella. Dessa kallas irrationella tal.

Summering och slutsats

I denna uppsats har vi gått igenom hur positiva heltal, positiva rationella tal, positiva reella tal samt reella tal av godtyckligt tecken. Dessutom har vi gått igenom Richard Dedekinds historia samt ekvivalensklasser och $\sim$ -relationer.

I uppsatsen finns nästan inga tal, utan hela uppsatsen är uppbyggd på bevis för godtyckliga tal. Det här är ett abstrakt arbete som har många gånger lett till att jag har kliat mig i huvudet en och två gånger för att kunna förstå och konstruera bevisen. Flera gånger har jag och min handledare diskuterat hur konstruktionen av tal är matematikens filosofi. Jag tycker verkligen att det stämmer in på det här arbetet. Den här resan, som ett uppsatsskrivande är, har varit helt utmattande, irriterande och förvirrande. Men nu i slutet av resan, uppskattar jag den och ångrar verkligen inte att jag har genomfört den.

Litteraturförteckning

Hyltén-Cavallius, C. & Sandgren, L., 1959. Matematisk analys. 2, För tvåbetygsstadiet vid universitet och högskolor.. Lund: Lunds studentkårs intressebyrå.

Nationalencyklopedin, u.d. ne.se. [Online]

Available at: <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/carl-hylden-cavallius>
[Använd 7 Februari 2017].

Nationalencyklopedin, u.d. ne.se. [Online]

Available at: <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/lennart-sandgren>
[Använd 7 Februari 2017].

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F., 1998. MacTutor History of Mathematics archive. [Online]

Available at: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Dedekind.html>
[Använd 7 Februari 2017].

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F., 2017. MacTutor History of Mathematics archive. [Online]

Available at: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Peano.html>
[Använd 9 Februari 2017].