SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Hyperkomplexa algebror

av

Kenny Grönquist

2017 - No 18

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Hyperkomplexa algebror

Kenny Grönquist

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Qimh Xantcha

2017

Hyperkomplexa algebror

Kenny Grönquist

15 maj 2017

Sammanfattning

Att gå från tvådimensionella till åttadimensionella algebror, att utvidga de komplexa talen till oktonionerna. Det här arbetet bygger på den resan, till de hyperkomplexa algebrorna samt vilka regler som fortsätter att gälla och vilka som slutar att gälla när vi når högre dimensioner.

Innehåll

1 Inledning

På grundläggande nivå inom matematiken lär sig människor att räkna med de reella talen och under gymnasieutbildningen introduceras de komplexa talen som är en utvidgning av de reella talen, men att ytterligare utvidga de komplexa talen är det allt färre som får tillfälle att göra. De komplexa talen är en två-dimensionell algebra och vill vi utvidga dessa får vi fram kvaternionerna som är en fyra-dimensionell algebra. Med ytterligare en utvidgning finner vi oktonionerna och sedan sedenionerna, men i det här arbetet kommer vi som högst fokusera på den åtta-dimensionella algebran som är oktonionerna. I arbetet kommer jag behandla Eulers fyrkvadratsformel, vilken bygger vidare på tvåkvadratsformeln som säger att:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Inledningsvis kommer jag beskriva allmänna lagar som jag kallar för naturliga lagar, dessa lagar är vitala för en algebra. Vidare kommer tre räknelagar som inte är en förutsättning för en algebra men om de gäller så blir det enklare att räkna inom algebran, dessa tre lagar kommer successivt försvinna när vi når algebror i högre dimensioner. Det här arbetet fokuserar alltså på de räknelagar och andra egenskaper en algebra innefattar.

Arbetet är i huvudsak baserad på boken [2] kapitel 3 och 6, men inspiration, information och detaljkunskap har även hämtats från övriga referenser som nämns i slutet.

2 Algebra

Algebra är läran om matematiska symboler och de regler som finns för att arbeta med dessa symboler. Den grundläggande delen av algebran kallas för *elementär algebra* och den mer djupgående kallas för *abstrakt algebra*. Ordet algebra kan syfta på olika saker, som det nämndes ovan kan algebran syftas till en gren inom matematiken eller så kan det syftas på en matematisk struktur. När jag nu framöver kommer att prata om en algebra kommer jag syfta på ett algebraiskt system i *n dimensioner* som på ett matematiskt sätt kan skrivas som:

$$(a_1, ..., a_n) = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n$$

där $a_1, a_2, ...a_n$ är reella tal ($\mathbf{R}$) och $i_1, i_2, ...i_n$ är basvektorer i $\mathbf{R}^n$ som följer de *naturliga lagarna*:

- Skalärmultiplikation

$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n) = k a_1 i_1 + k a_2 i_2 + k a_3 i_3 + \cdots + k a_n i_n$$

samt

$$(ki_1)i_2 = i_1(ki_2) = k(i_1 i_2)$$

där $a, b, k \in \mathbf{R}$ och i är det imaginära elementet som bestäms av $\mathbf{R}^n$.

- Addition

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n) + (b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + \cdots + b_n i_n) =$$

$$= (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 + (a_3 + b_3)i_3 + ... + (a_n + b_n)i_n$$

där $a, b \in \mathbf{R}$ och i är det imaginära elementet som bestäms av $\mathbf{R}^n$.

- Distributivitet

$$x(y + z) = xy + xz$$

samt

$$(y + z)x = yx + zx$$

där $x, y, z \in A$.

Definition 1. En n-dimensionell reell algebra är ett reellt vektorrum $\mathbf{R}^n$ som följer de naturliga lagarna för addition, skalärmultiplikation, distributivitet samt har en specifik multiplikationstabell för baselementen:

$$i_1, i_2, i_3, ..., i_n.$$

2.1 Räknelagar

Räknelagarna är inte samma för alla algebror utan vilka lagar som gäller kan skilja sig mellan algebrorna. En algebra A är:

1. *Associativ* om för alla $x, y, z \in A$

$$(xy)z = x(yz)$$

2. *Kommutativ* om för alla $x, y \in A$

$$xy = yx$$

3. En *divisionsalgebra* om:
   - Det finns ett element e, där $e \in A$ så att $xe = x = ex$ för alla $x \in A$. Vi betecknar $e = 1$ och kallar den för enhetselementet.
   - För varje $x \neq 0$ så finns det en x^{-1} så att $xx^{-1} = e = x^{-1}x$ där e är enhetselementet.

     Denna definition gäller för associativa algebror.

Exempel 1. Vilka räknelagar gäller för algebran $\mathbf{R}^{2\times 2}$? Algebran består av alla 2×2-matriser.

Vi börjar med att kontrollera om algebran är associativ. Det sker med vanlig matrisberäkning vid multiplikation.

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

Vi vill alltså undersöka om $(xy)z = x(yz)$, vilket vi gör genom att förlänga vänsterledet och se om vi får ut högerledet:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} aem+bgm+afo+bho & aen+bgn+afp+bhp \\ cem+dgm+cfo+dho & cen+dgn+cfp+dhp \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} aem+afo+bgm+bho & aen+afp+bgn+bhp \\ cem+cfo+dgm+dho & cen+cfp+dgn+dhp \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} em+fo & en+fp \\ gm+ho & gn+hp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix} \right).$$

Det visar sig att $(xy)z = x(yz)$ och algebran är då associativ. Vi går vidare och undersöker om mängden är kommutativ och vi börjar med vänsterledet:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Vi fortsätter sedan med högerledet:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}.$$

Vi jämför vänsterledet med högerledet och ser att VL $\neq$ HL, så $xy \neq yx$ vilket visar att algebran inte är kommutativ.

För att algebran ska vara en divisionsalgebra så gäller att det för varje $x \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ och $x \neq 0$ skall finnas en invers x^{-1}. Algebran är inte en divisionsalgebra. Om determinanten av en matris x är 0, $\det(x) = 0$, så finns det ingen invers. Vi utelämnar beviset för det men ett exempel på en sådan matris är

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En algebra som består av mängden av alla 2×2-matriser är alltså associativ men inte kommutativ och division är inte möjligt.

Exempel 2. Vilka räknelagar gäller för de *komplexa talen*?

Vi börjar med den associativa lagen och kontrollerar om $(xy)z = x(yz)$ där $x, y, z \in \mathbf{C}$.

$$x = (a + bi), y = (c + di), z = (e + fi),$$

där $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ och i har egenskapen att $i^2 = -1$. Vi börjar utveckla vänsterledet:

$$((a + bi)(c + di))(e + fi) = ((ac - bd) + (ad + bc)i)(e + fi) =$$

$$(ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i.$$

Vi fortsätter med att utveckla högerledet:

$$(a + bi)((c + di)(e + fi)) = (a + bi)((ce - df) + (cf + de)i) =$$

$$(ace - adf - bcf - bde) + (acf + ade + bce - bdf)i.$$

Vi ser då att de komplexa talen är en associativ algebra.
Vi går vidare med att undersöka om $xy = yx$ och börjar återigen med att utveckla vänsterledet:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Sedan utvecklar vi högerledet enligt de naturliga lagarna:

$$(c + di)(a + bi) = ca + cbi + dai + dbi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Det visar sig att VL=HL och de komplexa talen är kommutativ.
Vi fortsätter med att kontrollera om det finns en invers x^{-1} för varje $x \neq 0$ i $\mathbf{C}$.
Vi påstår att $x^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ och vi kontrollerar det genom att räkna ut xx^{-1}.

$$xx^{-1} = (a + bi)\frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - abi + abi + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

De komplexa talen är alltså en divisionsalgebra där både associativitet och kommutativitet gäller.

2.2 Isomorfi

Definition 2. Att två algebror, A och B, är isomorfa med varandra innebär för det första att det finns en *bijektion*:

$$f : A \to B.$$

För det andra gäller att addition, subtraktion och multiplikation i den ena algebran svarar mot addition, subtraktion och multiplikation i den andra algebran:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

där $x, y \in A$ och $\alpha \in \mathbf{R}$.

Detta betyder att för att två algebror ska vara isomorfa med varandra ska elementen från den ena algebran paras ihop med elementen från den andra algebran samt att räkning inom den ena algebran svarar mot räkning i den andra algebran.

Ett annat sätt att se på isomorfi kan vara att om två algebror har olika bas men delar samma multiplikationstabell så är de isomorfa, det här säger samma sak som definitionen ovan.

Sats 1. *Två algebror är isomorfa med varandra då de har olika baser men delar samma multiplikationstabell.*

3 Tvådimensionella algebror

En reell algebra på $\mathbf{R}^2$ med basen $1, \xi$ där det existerar ett enhetselement kan skrivas på formen $a+b\xi$. Räkningen för addition sker enligt de naturliga lagarna och ser ut som följer:

$$(a + b\xi) + (c + d\xi) = (a + c) + (b + d)\xi$$

samt för multiplikation:

$$(a + b\xi)(c + d\xi) = (ac - bd) + (ad + bc)\xi$$

där vi förutsätter att $\xi^2 = -1$, vilket är de komplexa talen. Men vad skulle hända om vi bortser från det och ser ξ^2 som ett godtyckligt tal i $\mathbf{R}^2$, nämligen

$$\xi^2 = p + q\xi.$$

Ett snabbt antagande skulle vara att vi skulle kunna framställa ett oändligt antal av algebror i $\mathbf{R}^2$ men vi ska visa att så inte är fallet. Varje algebra vi kan konstruera är isomorf med någon av följande:

1. Komplexa tal **C**
$$i^2 = -1$$

2. Duala tal **D**
$$\omega^2 = 0$$

3. Dubbla tal **E**
$$\epsilon^2 = 1$$

De här tre algebrorna delar samma multiplikationstabell med undantaget i den fjärde kvadranten:

$*$	1	ξ
1	1	ξ
ξ	ξ	?

Sats 2. *Varje algebra i* $\mathbf{R}^2$ *med ett enhetselement är isomorf med antingen de komplexa, duala eller de dubbla talen.*

Bevis. Hur kan vi då se vilken algebra som är isomorf med någon av dessa tre algebror. Det sker genom en process som ser ut på följande sätt:
Vi har en algebra $A = \{a + b\xi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ där $\xi \in \mathbf{R}^2$, algebran A har ett enhetselement samt följer de naturliga lagarna. Vi börjar med att samla ξ i vänsterledet:

$$\xi^2 = p + q\xi$$

$$\xi^2 - q\xi = p.$$

Vi kvadratkompletterar sedan och samlar de reella elementen i högerledet.

$$(\xi - \frac{q}{2})^2 = p + \frac{q^2}{4}$$

Det här leder till tre olika möjligheter:

- Antag först att $p + \frac{q^2}{4}$ är ett negativt tal

  $$p + \frac{q^2}{4} < 0,$$

  då kan vi ansätta $p + \frac{q^2}{4}$ som $-k^2$ där $k \neq 0$ och $k \in \mathbf{R}$ eftersom k^2 alltid är ett positivt tal,

  $$p + \frac{q^2}{4} = -k^2.$$

  Vi har då att:

  $$(\xi - \frac{q}{2})^2 = -k^2.$$

  Vi delar båda leden med k^2

  $$(-\frac{q}{2k} + \frac{1}{k}\xi)^2 = -1$$

  där vi kan beteckna parentesen i vänsterledet som I alltså $I^2 = -1$.

  Utifrån det här kan vi lösa ut ξ och skriva varje tal $a + b\xi$ som ett tal $a^{'} + b^{'}I$ där $I^2 = -1$:

  $$I = -\frac{q}{2k} + \frac{1}{k}\xi.$$

  Vi multiplicerar med k i båda leden och ser till att ξ är ensam i högerledet

  $$kI = -\frac{q}{2} + \xi \quad \rightarrow$$

  $$\frac{q}{2} + kI = \xi.$$

  Nu kan vi skriva om det till vår nya bas $a^{'} + b^{'}I$:

  $$a + b\xi = a + b(\frac{q}{2} + kI) = (a + b\frac{q}{2}) + bkI = a^{'} + b^{'}I$$

där $a + b\frac{q}{2} = a^{'}$ och $bk = b^{'}$. Det visar att även 1 och I är en bas i $\mathbf{R}^2$: Ser vi till multiplikationstabellen och minns sats 1 så ser vi att algebran A är isomorf med $\mathbf{C}$.

$*$	1	I
1	1	I
I	I	-1

$*$	1	i
1	1	i
i	i	-1

- Antag nu i stället att $p + \frac{q^2}{4}$ är ett positivt tal:

$$p + \frac{q^2}{4} > 0,$$

då kan vi ansätta $p + \frac{q^2}{4}$ som k^2 där $k \neq 0$ och $k \in \mathbf{R}$

$$p + \frac{q^2}{4} = k^2.$$

Då har vi att:

$$(\xi - \frac{q}{2})^2 = k^2.$$

Återigen delar vi båda leden med k^2

$$(-\frac{q}{2k} + \frac{1}{k}\xi)^2 = 1$$

där vi kan beteckna parentesen i vänsterledet som ε alltså

$$\varepsilon^2 = 1.$$

På samma sätt som innan kan vi se den nya basen $1, \varepsilon$ samt med hjälp av multiplikationstabellerna att A är isomorf med $\mathbf{E}$.

$*$	1	ε
1	1	ε
ε	ε	1

$*$	1	ϵ
1	1	ϵ
ϵ	ϵ	1

- Slutligen antar vi att $p + \frac{q^2}{4} = 0$

$$(\xi - \frac{q}{2})^2 = 0,$$

där vi kan beteckna parentesen i vänsterledet som Ω alltså

$$\Omega^2 = 0.$$

Återigen har vi en ny bas $1, \Omega$ och med hjälp av multiplikationstabellerna ser vi att A är isomorf med $\mathbf{D}$.

$*$	1	Ω
1	1	Ω
Ω	Ω	0

$*$	1	ω
1	1	ω
ω	ω	0

Vi har då bevisat att de här tre utfallen ger oss antingen de komplexa, duala eller dubbla talen. $\square$

Exempel 3. Vilken tvådimensionell algebra är A isomorf med,

$$A = \{a + bj \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

där $j^2 = 1 + j$?
Vi börjar med att samla alla j i vänsterledet:

$$j^2 = 1 + j$$

$$j^2 - j = 1.$$

Återigen kvadratkompletterar vi och samlar de reella elementen i högerledet:

$$(j - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}.$$

Nu dividerar vi med $\frac{5}{4}$ i båda leden och får

$$(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1.$$

A är isomorft med de dubbla talen. För att det ska vara sant ser vi tillbaka till definition 2. Bijektionen är:

$$g : \mathbf{E} \to A,\ g : 1 \mapsto 1,\ g : \epsilon \mapsto (\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Sedan ska räkningarna svara mot varandra:

- $$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

  där $x, y \in \mathbf{E}$, och då börjar vi med att utveckla vänsterledet enligt de naturliga lagarna:

  $$g((a+b\epsilon)+(c+d\epsilon)) =$$
  $$g((a+c)+(b+d)\epsilon) =$$
  $$(a+c)+(b+d)(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

  Sedan utvecklar vi högerledet enligt de naturliga lagarna:

  $$g(a+b\epsilon)+g(c+d\epsilon) =$$
  $$(a+b(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})) + (c+d(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}) =$$
  $$(a+c)+(b+d)(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

- $$g(\alpha x) = \alpha g(x)$$

  där $x \in \mathbf{E}$ och $\alpha \in \mathbf{R}$. Enligt de naturliga lagarna utvecklar vi först vänsterledet:

  $$g(\alpha(a+b\epsilon) =$$
  $$\alpha(a+b(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})) =$$
  $$\alpha a + \alpha b(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

  Sedan utvecklar vi högerledet enligt de naturliga lagarna:

  $$\alpha g(a+b\epsilon) =$$
  $$\alpha(a+b(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}) =$$
  $$\alpha a + \alpha b(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

- $$g(xy) = g(x)g(y)$$

  där $x, y \in \mathbf{E}$. Återigen utvecklar vi vänsterledet enligt de naturliga lagarna:

  $$g((a+b\epsilon)(c+d\epsilon)) =$$
  $$g(ac+ad\epsilon+bc\epsilon+bd\epsilon^2),$$

då $\epsilon^2 = 1$ så får vi att

$$g((ac + bd) + (ad + bc)\epsilon) =$$

$$(ac + bd) + (ad + bc)(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Nu utvecklar vi högerledet enligt de naturliga lagarna:

$$g(a + b\epsilon)g(c + d\epsilon) =$$

$$(a + b(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}))(c + d(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})) =$$

$$ac + ad(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}) + bc(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}) + bd(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})^2,$$

och då $(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1$ ger oss

$$(ac + bd) + (ad + bc)(\frac{2j}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Vi ser då att det finns en bijektion och att vänsterledet är lika med högerledet för alla räkningar, vi konstaterar då att algebran A är isomorf med $\mathbf{E}$.

4 Tredimensionella algebror

Flera försök till att utvidga de komplexa talen till en algebra i $\mathbf{R}^3$ har gjorts, bland annat av Hamilton. Vi ska nu visa att det inte är möjligt, om vi utvidgar de komplexa talen till $\mathbf{R}^3$ med ett nytt element j kommer vi att se att det nya elementet, j fortfarande är ett element i de komplexa talen.

Sats 3. *Det går inte att utvidga de komplexa talen till en tredimensionell associativ algebra på formen $a + bi + cj$ där $a + bi$ beter sig som de komplexa talen.*

Bevis. Vi skall visa att j faktiskt måste vara på formen $a + bi$. ij är på denna form

$$ij = a + bi + cj$$

där $a + bi$ beter sig som komplexa tal, $c \in \mathbf{R}$ och j är ett nytt imaginärt element. Vi börjar med att multiplicera in i från vänster och använder oss av den associativa lagen så att vi får $i^2 = -1$ i vänsterledet.

$$i^2 j = ai + bi^2 + cij$$

$$-j = -b + ai + cij$$

vi multiplicerar med -1 och ersätter ij i högerledet med $a+bi+cj$ som likheten i början

$$j = b - ai - cij$$

$$j = b - ai - c(a + bi + cj)$$
$$j = b - ca + cbi - ai - c^2 j$$

vi samlar alla element med j i vänsterledet och bryter ut j

$$(1 + c^2)j = (b - ca) + (cb - a)i$$

och nu dividerar vi båda leden med $(1 + c^2)$ som är ett reellt tal

$$j = \left(\frac{b - ca}{1 + c^2}\right) + \left(\frac{cb - a}{1 + c^2}\right)i$$

där $\frac{b-ca}{1+c^2}$ är den reella delen och $\frac{cb-a}{1+c^2}$ den imaginära delen. Vi ser då att det inte sker någon utvidgning från de komplexa talen. □

Det går givetvis att konstruera en algebra i tre dimensioner om vi utgår från de komplexa talen. Den första tabellen känner vi igen som de komplexa talen medan den andra tabellen är vår utvidgning.

$*$	1	i
1	1	i
i	i	-1

$*$	1	i	j
1	1	i	j
i	i	-1	0
j	j	0	0

Enligt sats 3 är vi ute efter en associativ reell algebra och det är just det som blir problemet. Den nya algebran vi konstruerat är inte associativ, vilket framkommer genom:

$$(ii)j = -j$$
$$i(ij) = 0$$

enligt multiplikationstabellen.
Intressant kan vara att nämna Frobenius sats som säger att en associativ reell divisionsalgebra är isomorft med antingen de reella talen, komplexa talen eller kvaternionerna. Lägger vi till räknelagen kommutativitet är algebran endast isomorft med antingen de reella eller komplexa talen.

5 Kvaternioner

Kvaternionerna är en fyradimensionell algebra som upptäcktes av William Rowan Hamilton år 1843. Hamilton hade sen en tid tillbaka sökt sätt att utvidga de komplexa talen till högre dimensioner men hade inte lyckats med en tredimensionell algebra och samtidigt behålla den associativa lagen, något som vi tidigare visade inte vara möjligt. Han lyckades däremot med en fyra-dimensionell algebra, något som sedan kom att kallas för Hamiltons kvaternioner. Kvaternionerna har en del likheter med de komplexa talen. Exempelvis är kvaternionerna associativ samt en divisionsalgebra. Där kvaternionerna framförallt skiljer sig vid räkning är att den kommutativa lagen inte gäller.

5.1 Kvaternionernas räknelagar

Kvaternionerna benämns med ett $\mathbf{H}$ och ser ut som följer:

$$\mathbf{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\} \text{ där } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Låt $q = a + bi + cj + dk$ vara en kvaternion. Vid räkning med kvaternioner vill vi återigen att de naturliga lagarna ska gälla:

- Skalärmultiplikation

  $$\alpha(a + bi + cj + dk) = \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk$$

  samt likheten

  $$(\alpha q_1)(\beta q_2) = (\alpha\beta)(q_1 q_2)$$

  ska gälla för varje $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

- Addition

  $$(a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk) = (a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k$$

- Distributivitet

  $$x(y + z) = xy + xz$$

  och

  $$(x + y)z = xz + yz$$

  ska gälla för alla $x, y, z \in \mathbf{H}$.

Utöver de naturliga lagarna är kvaternionerna en divisionsalgebra där associativitet gäller men inte kommutativitet, något vi kommer bevisa senare i avsnittet.

5.2 Hamiltons multiplikationstabell

För att underlätta räkningar med kvaternioner kan vi ställa upp en multiplikationstabell, Hamiltons multiplikationstabell. Vid uträkningarna kommer vi förutsätta att den associativa lagen gäller samt att det finns en invers för varje $x \in \mathbf{H}$ då $x \neq 0$. Till en början kan vi se att respektive invers till i, j, k är $i^{-1} = -i, j^{-1} = -j, k^{-1} = -k$. Sedan får vi ut $ij = k, jk = i, ik = -j, ji = -k, ki = j, kj = -i$ enligt räkningarna nedan.

- $$ijk = -1$$

  vi multiplicerar in k^{-1} från höger och minns att $k^{-1} = -k$. Vi förutsätter att **H** är associativ och kan då räkna $ijkk^{-1}$ som $ij(kk^{-1})$:

  $$ijkk^{-1} = -1k^{-1}$$

  $$ij = (-1)(-k)$$

  $$ij = k.$$

- $$ijk = -1$$

  vi multiplicerar in i^{-1} från vänster och minns att $i^{-1} = -i$. Återigen använder vi oss av den associativa lagen:

  $$i^{-1}ijk = -1i^{-1}$$

  $$jk = (-1)(-i)$$

  $$jk = i.$$

  På samma sätt räknas resterande ut:

- $$ij = k$$
  $$kij = k^2$$
  $$kijj^{-1} = -1j^{-1}$$
  $$ki = j.$$

- $$ki = j$$
  $$kik = jk$$
  $$k^{-1}kik = k^{-1}i$$
  $$ik = -ki$$
  $$ik = -j.$$

- $$jk = i$$
  $$jkj = ij$$
  $$j^{-1}jkj = j^{-1}k$$
  $$kj = -jk$$
  $$kj = -i.$$

- $$\begin{aligned}
ij &= k \\
jij &= jk \\
jijj^{-1} &= ij^{-1} \\
ji &= -ij \\
ji &= -k.
\end{aligned}$$

Nu kan vi sätta ihop det till Hamiltons multiplikationstabell:

$*$	$\mathbf{1}$	i	j	k
$\mathbf{1}$	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Sats 4. *För att ge en fullständig formel för kvaternionmultiplikation räcker det med att ha Hamiltons multiplikationstabell samt de naturliga lagarna från avsnitt 5.1.*

Bevis. Med Hamiltons multiplikationstabell och de naturliga lagarna kan vi alltså ge en fullständig formel för multiplikation med kvaternioner. Låt $a + bi + dj + dk$ samt $e + fi + gj + hk$ vara två kvaternioner så ser formeln för multiplikation med kvaternioner ut som följande:

$$\begin{gathered}
(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) = \\
ae + afi + agj + ahk + bei + bfi^2 + bgij + bhik + \\
+ cej + cfji + cgj^2 + chjk + dek + dfki + dgkj + dhk^2 = \\
= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + \\
+ (ag + ce + df - bh)j + (ah + de + bg - cf)k
\end{gathered}$$

där vi använder oss av lagen för skalärmultiplikation och distributivitet samt ser enligt multiplikationstabellen att $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i$. □

5.3 Associativitet, kommutativitet och division

För att bevisa vilka räknelagar som gäller för kvaternionerna så behöver vi införa några nya begrepp.

Sats 5. *Det finns ett enhetselement,* $e = 1 + 0i + 0j + 0k$ *så att* $qe = q = eq$ *för varje* $q \in \mathbf{H}$.

Det är trivialt att se att $e = 1$ och utelämnar då beviset.

Definition 3. Med $\bar{q}$ menar vi konjugatet av q där de imaginära enheterna byter tecken. Om $q = a + bi + cj + dk$, så är $\bar{q} = a - (bi + cj + dk)$.

Sats 6. *Summan och produkten av en kvaternion med sitt konjugat är reella tal, det vill säga:*

$$q + \bar{q} = 2a$$

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Bevis. Låt $q = a + bi + cj + dk$. Vi räknar då ut $q + \bar{q}$ och $q\bar{q}$ i enlighet med de naturliga lagarna samt multiplikationstabellen. För $q + \bar{q}$ ser räkningarna ut som följer:

$$q + \bar{q} = (a + bi + cj + dk) + (a - bi - cj - dk) =$$

$$(a + a) + (bi - bi) + (cj - cj) + (dk - dk) = 2a.$$

För $q\bar{q}$ ser räkningarna ut som följande:

$$q\bar{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) =$$

$$(a^2 - abi - acj - adk)+$$

$$(abi + b^2 - bcij - bdik)+$$

$$(acj - bcji + c^2 - cdjk)+$$

$$(adk - bdki - cdkj + d^2) =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)+$$

$$(abi - abi - cdjk - cdkj)+$$

$$(acj - acj - bdik - bdki)+$$

$$(adk - adk - bcij - bcji) =$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)+(ab-ab-cd+cd)i+(ac-ac+bd-bd)j+(ad-ad-bc+bc)k =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

□

Sats 7. *För kvaternionerna gäller att konjugatet av en summa är summan av konjugaten av termerna. Det gäller även att konjugatet av en produkt är produkten av konjugaten av faktorerna fast i omvänd ordning, alltså att:*

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$$

och

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

Bevis. Sätt $q_1 = a + bi + cj + dk$ och $q_2 = e + fi + gj + hk$, vi börjar med att lösa $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q_1} + \bar{q_2}$. Först räknar vi ut vänsterledet:

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{(a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk)} =$$
$$\overline{(a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k} =$$
$$(a + e) - (b + f)i - (c + g)j - (d + h)k$$

och fortsätter sedan med högerledet:

$$\bar{q_1} + \bar{q_2} = (a - bi - cj - dk) + (e - fi - gj - hk) =$$
$$(a + e) - (b + f)i - (c + g)j - (d + h)k.$$

Vänsterledet är alltså lika med högerledet.
Vi löser nu $\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\bar{q_1}$. Återigen börjar vi räkna ut vänsterledet:

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk)} =$$
$$\overline{ae + afi + agj + ahk + bei - bf + bgij + bhik+}$$
$$\overline{cej + cfji - cg + chjk + dek + dfki + dgkj - dh} =$$
$$\overline{(ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i+}$$
$$\overline{(ag + ce + df - bh)j + (ah + de + bg - cf)k} =$$
$$(ae-bf-cg-dh)+(dg-af-be-ch)i+(bh-ag-ce-df)j+(cf-ah-de-bg)k$$

och fortsätter sedan med högerledet:

$$\bar{q_2}\bar{q_1} = (e - fi - gj - hk)(a - bi - cj - dk) =$$
$$ae - bei - cej - dek - afi - bf + cfij + dfik-$$
$$agj + bgji - cg + dgjk - ahk + bhki + chkj - dh =$$
$$(ae-bf-cg-dh)+(dg-af-be-ch)i+(bh-ag-ce-df)j+(cf-ah-de-bg)k,$$

och återigen ser vi att vänsterledet är lika med högerledet. Notera att vid multiplikationen byter kvaternionerna ordning, något som hänger ihop med att räknelagen kommutativitet inte existerar inom **H**. $\square$

Definition 4. Absolutbeloppet av en vektor $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n$ kan geometriskt ses som avståndet från origo till punkten x och är det icke-negativa reella talet som ges av

$$|x| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.$$

För **H** noterar vi enligt sats 6 att:

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)} = \sqrt{x\bar{x}}.$$

Sats 8. *A är en associativ algebra med enhetselement, om det existerar en multiplikativ invers för varje $x \in A$ så är denna invers unik.*

Bevis. Om $xy = 1 = yx$ och $xz = 1 = zx$ och tar talet yxz så kan vi med hjälp av den associativa lagen se att $z = y$, det följer som nedan:

$$z = 1z = (yx)z = y(xz) = y1 = y.$$

□

Sats 9. *För varje kvaternion $q = a + bi + cj + dk \neq 0$ så finns en multiplikativ invers q^{-1} sådan att*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{\bar{q}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Bevis. Vi behöver visa att följande likheter gäller:

$$\frac{\bar{q}}{|q|^2} q = 1 = q \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

Eftersom $\bar{q}q = q\bar{q} = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ är ett reellt tal har vi att

$$\frac{\bar{q}}{|q|^2} q = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(\bar{q}q) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$$

och

$$q \frac{\bar{q}}{|q|^2} = (q\bar{q}) \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1.$$

□

Enligt sats 8 är alltså denna invers entydig bestämd om vi har att göra med en associativ algebra med enhetselement.

Sats 10. *Kvaternionerna är en divisionsalgebra där associativitet gäller men inte kommutativitet.*

Bevis. Betrakta tre kvaternioner:

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$

$$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$$

$$q_3 = a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k.$$

För att kvaternionerna ska vara associativa ska följande likhet gälla:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

För att bevisa att vänsterledet är lika med högerledet så behövs det att visa att respektive 64 produkter i vänsterledet är lika med de 64 produkterna i högerledet. Det är inte omöjligt om än väldigt omständligt. I stället kan vi jämföra när q_1, q_2 och q_3 är någon av kvaternionerna $1, i, j$ eller k. Snabbt kan vi konstatera att om någon av q_1, q_2 eller q_3 är 1 så kommer likheten $(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$ att gälla. Det resterar i 27 fall och vi behöver då endast(!) kontrollera att de fallen stämmer överens för att bevisa att det är en associativ algebra. Vi går inte igenom alla fallen men ger här några exempel:

- $i(jk) = ii = -1 = kk = (ij)k$
- $k(ik) = k(-j) = i = jk = (ki)k$
- $j(ji) = j(-k) = -i = (-1)i = (jj)i$

För att kvaternionerna ska vara kommutativ ska likheten $xy = yx$ gälla för alla $x, y \in \mathbf{H}$. Utifrån multiplikationstabellen kan vi se att det inte gäller vid räkning med kvaternioner. Det ser vi exempelvis genom att $ik \neq ki$, $ij \neq ji$ samt $jk \neq kj$.

För att division ska gälla i en algebra ska följande punkter gälla:

1. Det ska finnas ett enhetselement e med egenskapen att $xe = x = ex$ för alla $x \in \mathbf{H}$, vilket vi gick igenom i sats 5.
2. För varje $x \neq 0$ där $x \in \mathbf{H}$ finns det en x^{-1} så att $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$, vilket vi bevisade i sats 9.

□

Intressant kan också vara hur vi kan räkna ut kvoten för en ekvation i $\mathbf{H}$ vilket inte är så självklart som vi skulle vilja tro. Eftersom kvaternionerna inte är kommutativ så finns det inte endast en kvot utan två som ser ut som följande:

$$q_2x_1 = q_1$$

denna kvot x_1 kallas för den vänstra kvoten av q_1 på q_2 och är entydigt bestämd om $q_2 \neq 0$

$$x_2q_2 = q_1$$

och denna kvot x_2 benämns som den högra kvoten av q_1 på q_2 och är även denna entydigt bestämd om $q_2 \neq 0$. För att få fram en formel för att lösa ut x_1 börjar vi med att multiplicera in q_2^{-1} från vänster håll

$$\begin{aligned} q_2x_1 &= q_1 \\ q_2^{-1}(q_2x_1) &= q_2^{-1}q_1. \end{aligned}$$

Kvaternionerna är associativa, vilket ger oss att $(q_2^{-1}q_2)x_1 = q_2^{-1}(q_2x_1)$ samt så vet vi enligt sats 9 att $q_2^{-1}q_2 = 1$ och $q_2^{-1} = \frac{\bar{q_2}}{|q_2|^2}$ så

$$q_2^{-1}q_2x_1 = q_2^{-1}q_1 \rightarrow$$
$$x_1 = \frac{1}{|q_2|^2}\bar{q_2}q_1.$$

Gör vi likadant med den högra kvoten men multiplicerar in q_2^{-1} från höger sida så får vi:

$$x_2q_2 = q_1$$
$$x_2q_2q_2^{-1} = q_1q_2^{-1} \rightarrow$$
$$x_2 = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\bar{q_2}.$$

Att lösningarna ska vara entydiga är inte självklart då det finns flera exempel på algebror som saknar eller har flera lösningar. Om vi ser till mängden av alla heltal så saknas det lösning till ekvationen $2x = 3$ och ser vi till $\mathbf{R}^{2\times 2}$ så kan det finnas flera lösningar. Låt $q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ så ska vi lösa ekvationen $qx = p$. Då ser vi att $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ samt $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ är lösningar till ekvationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exempel 4. Lös kvoterna ur ekvationen: $(1+i)x_1 = j+k$ samt $x_2(1+i) = j+k$. Vi använder oss av formlerna vi fick ut här ovan

$$x_1 = \frac{1}{|q_2|^2}\bar{q_2}q_1 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(1-i)(j+k) = \frac{1}{2}(j+k-ij-ik) = \frac{1}{2}2j = j.$$

$$x_2 = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\bar{q_2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(j+k)(1-i) = \frac{1}{2}(j-ji+k-ki) = \frac{1}{2}(2k) = k.$$

5.4 Kvaternionerna som ett ordnat par av komplexa tal

Sats 11. *Varje kvaternion kan skrivas på formen*

$$z_1 + z_2 j$$

där $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Bevis. Varje kvaternion kan skrivas på formen

$$q = a + bi + cj + dk.$$

Eftersom $ij = k$ så kan vi skriva om q enligt följande:

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dij \\ &= (a + bi) + (c + di)j \\ &= z_1 + z_2 j \end{aligned}$$

där $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$. □

Sats 12. *Kvaternionerna är isomorfa med algebran* $A = \{z_1 + z_2 J \mid z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}$ *där* J *är ett nytt imaginärt element som uppfyller* $zJ = J\bar{z}$ *och* $J^2 = -1$.

Bevis. För att två algebror ska vara isomorfa så ska två förutsättningar gälla:

- Det ska finnas en bijektion, vilket vi ser väldigt tydligt enligt sats 11:

$$\mathbf{H} = \{z_1 + z_2 j \mid z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}$$
$$A = \{z_1 + z_2 J \mid z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}$$
$$f : \mathbf{H} \to A$$
$$z_1 + z_2 j \mapsto z_1 + z_2 J.$$

- Sedan ska räkningarna i $\mathbf{H}$ svara mot räkningarna i A

1.

$$f(q_1 + q_2) = f(q_1) + f(q_2)$$

VL:

$$\begin{aligned} &f((a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk)) \\ &= f(((a + bi) + (c + di)j) + ((e + fi) + (g + hi)j)) \end{aligned}$$

vi ansätter $(a + bi) = p, (c + di) = q, (e + fi) = r, (g + hi) = s$.

$$\begin{aligned} &f((p + qj) + (r + sj)) \\ &= f((p + r) + (q + s)j) \\ &= (p + r) + (q + s)J. \end{aligned}$$

HL: På samma sätt som innan förenklar vi $q_1 = p + qj$ och $q_2 = r + sj$

$$\begin{aligned} &f(p + qj) + f(r + sj) \\ &= (p + qJ) + (r + sJ) \\ &= (p + r) + (q + s)J. \end{aligned}$$

2.
$$f(\alpha q) = \alpha f(q)$$

Återigen ansätter vi $q = p + qj$

VL:
$$f(\alpha(p + qj))$$
$$= f(\alpha p + \alpha qj)$$
$$= \alpha p + \alpha qJ.$$

HL:
$$\alpha f(p + qj)$$
$$= \alpha p + \alpha qJ.$$

3.
$$f(q_1 q_2) = f(q_1)f(q_2)$$

VL:
$$f((p + qj)(r + sj))$$
$$= f(pr + psj + qjr + qjsj)$$
$$= f(pr + psj + q\bar{r}j - q\bar{s})$$
$$= (pr - q\bar{s}) + (ps + q\bar{r})J.$$

HL:
$$f(p + qj)f(r + sj)$$
$$= pr + psJ + qJr + qJsJ$$
$$= (pr - q\bar{s}) + (ps + q\bar{r})J.$$

Att $Jz = \bar{z}J$ följer av de krav vi bestämde i sats 12 men det är inte för kvaternionerna givet att $jz = \bar{z}j$. Det är dock enkelt att bevisa och följer enligt nedan. Om $z = a + bi$ där $z \in \mathbf{C}$ så:

$$jz = \bar{z}j$$
$$j(a + bi) = (a - bi)j$$
$$aj + bji = aj - bij$$
$$aj - bk = aj - bk$$

där vi förenklar med hjälp av Hamiltons multiplikationstabell i avsnitt 5.2. □

Sats 13. *I de reella talen är produkten av två summor, där båda summor består utav fyra kvadrater, också en summa bestående av fyra kvadrater.*

Bevis. Beviset ligger i likheten

$$|q_1q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2$$

som följer av att kvaternioner är associativa och bevisas enligt nedan:

$$|q_1q_2|^2 = (q_1q_2)(\overline{q_1q_2}) = q_1q_2\bar{q_2}\bar{q_1} = q_1(q_2\bar{q_2})\bar{q_1} = |q_1|^2|q_2|^2,$$

vilket också leder till att

$$|q_1q_2| = |q_1||q_2|.$$

Sätt $q_1 = a + bi + cj + dk, q_2 = e + fi + gj + hk$ så vill vi sedan förlänga $|q_1q_2|$:

$|(ae-bf-cg-dh)+(af+be+ch-dg)i+(ag+ce+df-bh)j+(ah+de+bg-cf)k|.$

Om vi sedan kvadrerar båda sidorna så får vi att

$$|q_1q_2|^2 =$$

$|(ae-bf-cg-dh)+(af+be+ch-dg)i+(ag+ce+df-bh)j+(ah+de+bg-cf)k|^2,$

som enligt definitionen för absolutbeloppet är

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) =$$

$(ae-bf-cg-dh)^2+(af+be+ch-dg)^2+(ag+ce+df-bh)^2+(ah+de+bg-cf)^2$

Vi kan också utföra ett bevis genom att utveckla

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2)$$

och

$(ae-bf-cg-dh)^2+(af+be+ch-dg)^2+(ag+ce+df-bh)^2+(ah+de+bg-cf)^2$

för att sedan jämföra resultaten. Vi börjar med

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) :$$

$$\begin{gathered}(aa + bb + cc + dd)(ee + ff + gg + hh) = \\ aaee + aaff + aagg + aahh + bbee + bbff + bbgg + bbhh+ \\ ccee + ccff + ccgg + cchh + ddee + ddff + ddgg + ddhh.\end{gathered}$$

Vi fortsätter sedan med

$(ae-bf-cg-dh)^2+(af+be+ch-dg)^2+(ag+ce+df-bh)^2+(ah+de+bg-cf)^2$:

$$
\begin{gathered}
(ae-bf-cg-dh)^2+(af+be+ch-dg)^2+(ag+ce+df-bh)^2+(ah+de+bg-cf)^2 = \\
aaee+bbff+ccgg+ddhh+2bcfg+2bdfh+2cdgh-2abef-2aceg-2adeh+ \\
aaff+bbee+cchh+ddgg+2abef+2acfh+2bceh-2adfg-2bdeg-2cdgh+ \\
aagg+ccee+ddff+bbhh+2aceg+2adfg+2cdef-2abgh-2bceh-2bdfh+ \\
aahh+ddee+bbgg+ccff+2adeh+2abgh+2bdeg-2acfh-2cdef-2bcfg = \\
aaee+aaff+aagg+aahh+bbee+bbff+bbgg+bbhh+ \\
ccee+ccff+ccgg+cchh+ddee+ddff+ddgg+ddhh.
\end{gathered}
$$

$\square$

6 Oktonioner - Cayleytal

Oktonionerna $\mathbf{O}$ är en algebra i åtta dimensioner samt en utvidgning av kvaternionerna. Oktonionerna kallas ibland för Cayleytal efter Arthur Cayley som var först med att publicera en artikel om dem men annars är det John T. Graves som upptäckte oktonionerna under 1843.

6.1 Räknelagar och multiplikationstabell

Oktonionerna benämns med ett $\mathbf{O}$ och ser ut på följande sätt:

$$\mathbf{O} = \{a + bi + cj + dk + eE + fI + gJ + hK \mid a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbf{R}\}$$

där $i^2 = j^2 = k^2 = E^2 = I^2 = J^2 = K^2 = -1$.

Låt

$$u = a + bi + cj + dk + eE + fI + gJ + hK.$$

Återigen vill vi att de naturliga lagarna ska gälla:

- Skalärmultiplikation

$$
\begin{gathered}
\alpha(a + bi + cj + dk + eE + fI + gJ + hK) = \\
\alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk + \alpha eE + \alpha fI + \alpha gJ + \alpha hK
\end{gathered}
$$

  samt likheten

$$(\alpha u_1)(\beta u_2) = (\alpha\beta)(u_1 u_2)$$

  ska gälla för varje $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

- Addition

$$
\begin{gathered}
(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k + e_1 E + f_1 I + g_1 J + h_1 K)+ \\
(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k + e_2 E + f_2 I + g_2 J + h_2 K) = \\
(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k+ \\
(e_1 + e_2)E + (f_1 + f_2)I + (g_1 + g_2)J + (h_1 + h_2)K
\end{gathered}
$$

- Distributivitet

  $$u(v + w) = uv + uw$$

  och

  $$(u + v)w = uw + vw$$

  ska gälla för alla $u, v, w \in \mathbf{O}$.

Vi väljer att endast visa hur oktonionernas multiplikationstabell ser ut, vilket är följande:

$*$	$\mathbf{1}$	i	j	k	E	I	J	K
1	1	i	j	k	E	I	J	K
i	i	-1	k	$-j$	I	$-E$	$-K$	J
j	j	$-k$	-1	i	J	K	$-E$	$-I$
k	k	j	$-i$	-1	K	$-J$	I	$-E$
E	E	$-I$	$-J$	$-K$	-1	i	j	k
I	I	E	$-K$	J	$-i$	-1	$-k$	j
J	J	K	E	$-I$	$-j$	k	-1	$-i$
K	K	$-J$	I	E	$-k$	$-j$	i	-1

Med hjälp av de naturliga lagarna för distributivitet och skalärmultiplikation samt med multiplikationstabellen kan vi ge en fullständig formel för multiplikation med oktonioner. Låt $u_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k + e_1 E + f_1 I + g_1 J + h_1 K$ samt $u_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k + e_2 E + f_2 I + g_2 J + h_2 K$:

$$
\begin{gathered}
u_1u_2 = \\
(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k + e_1E + f_1I + g_1J + h_1K) \\
(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k + e_2E + f_2I + g_2J + h_2K) = \\
a_1a_2 + a_1b_2i + a_1c_2j + a_1d_2k + a_1e_2E + a_1f_2I + a_1g_2J + a_1h_2K+ \\
a_2b_1i + b_1b_2i^2 + b_1c_2ij + b_1d_2ik + b_1e_2iE + b_1f_2iI + b_1g_2iJ + b_1h_2iK+ \\
a_2c_1j + b_2c_1ji + c_1c_2j^2 + c_1d_2jk + c_1e_2jE + c_1f_2jI + c_1g_2jJ + c_1h_2jK+ \\
a_2d_1k + b_2d_1ki + c_2d_1kj + d_1d_2k^2 + d_1e_2kE + d_1f_2kI + d_1g_2kJ + d_1h_2kK+ \\
a_2e_1E + b_2e_1Ei + c_2e_1Ej + d_2e_1Ek + e_1e_2E^2 + e_1f_2EI + e_1g_2EJ + e_1h_2EK+ \\
a_2f_1I + b_2f_1Ii + c_2f_1Ij + d_2f_1Ik + e_2f_1IE + f_1f_2I^2 + f_1g_2IJ + f_1h_2IK+ \\
a_2g_1J + b_2g_1Ji + c_2g_1Jj + d_2g_1Jk + e_2g_1JE + f_2g_1JI + g_1g_2J^2 + g_1h_2JK+ \\
a_2h_1K+b_2h_1Ki+c_2h_1Kj+d_2h_1Kk+e_2h_1KE+f_2h_1KI+g_2h_1KJ+h_1h_2K^2 = \\
(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - e_1e_2 - f_1f_2 - g_1g_2 - h_1h_2)+ \\
(a_1b_2 + a_2b_2 + c_1d_2 + e_1f_2 + g_2h_1 - c_2d_1 - e_2f_1 - g_1h_2)i+ \\
(a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 + e_1g_2 + f_1h_2 - b_1d_2 - e_2g_1 - f_2h_1)j+ \\
(a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 + e_1h_2 + f_2g_1 - b_2c_1 - f_1g_2 - e_2h_1)k+ \\
(a_1e_2 + a_2e_1 + b_2f_1 + c_2g_1 + d_2h_1 - b_1f_2 - c_1g_2 - d_1h_2)E+ \\
(a_1f_2 + b_1e_2 + d_1g_2 + a_2f_1 + c_2h_1 - c_1h_2 - b_2e_1 - d_2g_1)I+ \\
(a_1g_2 + b_1h_2 + c_1e_2 + d_2f_1 + a_2g_1 - d_1f_2 - c_2e_1 - b_2h_1)J+ \\
(a_1h_2 + c_1f_2 + d_1e_2 + b_2g_1 + a_2h_1 - b_1g_2 - d_2e_1 - c_2f_1)K.
\end{gathered}
$$

Med hjälp av multiplikationstabellen ser vi att oktonionerna varken är kommutativ eller associativ. För kommutativitet skulle det gälla att $uv = vu$ där $u, v \in \mathbf{O}$, men vi ser att likt kvaternionerna så är $ij \neq ji$ för oktonioner. För associativitet skall vi undersöka om $(uv)w = u(vw)$ där $u, v, w \in \mathbf{O}$, men vi ser exempelvis att $(iJ)k \neq i(Jk)$

$$-E = -Kk = (iJ)k \neq i(Jk) = -iI = E.$$

Nytt för oktonionerna i jämförelse med kvaternionerna är alltså att den associativa lagen inte gäller, men oktonionerna följer en svagare form av associativitet nämligen alternativitet som vi kommer gå igenom längre ner.

6.2 Cayley-Dickson-konstruktion

Enligt Cayley-Dickson-konstruktionen kan vi konstruera en serie av algebror över de reella talen där varje ny algebra har den dubbla dimensionen av algebran innan. Det börjar med att de komplexa talen kan skrivas som ordnade par av reella tal $a + bi$ där de följer den additiva lagen:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

samt den multiplikativa lagen:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - db) + (bc + da)i,$$

där $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ och i är det nya imaginära elementet. Att det står $(ac - db) + (bc + da)i$ är vi inte vana att se, men eftersom $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ och då är kommutativa så kan vi skriva dem på det sätt vi är mer vana att se nämligen $(ac - bd) + (bc + ad)i$. Vidare kan kvaternionerna skrivas som ordnade par av komplexa tal med samma regel för addition men där det för multiplikation gäller:

$$(x + yj)(z + wj) = (xz - \bar{w}y) + (y\bar{z} + wx)j$$

där $x, y, z, w \in \mathbf{C}$ och j är det nya imaginära elementet. Det här är även samma algebra A vi i sats 12 visade är isomorf med kvaternionerna. Varför de ser något annorlunda ut har att göra med att vi arbetar med ordnade par av komplexa tal som är kommutativa.

Som nämnt innan kan en oktonion skrivas som följer:

$$u = a + bi + cj + dk + eE + fI + hJ + hK,$$

men vi kan även skriva dem som ordnade par av kvaternioner. Återigen är den additiva lagen densamma och även den multiplikativa lagen samma som ovan när vi konstruerade kvaternionerna:

$$(p + qE)(r + sE) = (pr - \bar{s}q) + (q\bar{r} + sp)E$$

där $p, q, r, s \in \mathbf{H}$ och E är det nya imaginära elementet.

6.3 Alternativ algebra

En alternativ algebra är en svagare form av associativ algebra. I en associativ algebra spelar det ingen roll i vilken ordning multiplikationen utförs med tre olika element medan i den alternativa algebran gäller det endast för två av elementen.

Definition 5. En algebra A sägs vara alternativ om följande likheter gäller:

$$(xy)y = x(yy)$$

$$y(yx) = (yy)x$$

$$(xy)x = x(yx).$$

för alla $x, y \in A$.

Om en algebra är associativ med tre av dess element måste det även gälla för två av dess element, vilket leder till nästa sats.

Sats 14. *Alla associativa algebror är alternativa.*

Sats 15. *Vilka två som helst av dessa likheter:*

$$A : (xy)y = x(yy)$$
$$B : y(yx) = (yy)x$$
$$C : (xy)x = x(yx)$$

medför den tredje.

Bevis. Fall ett. Vi visar att om A och B är sanna, så medför det att även C gäller: Vi börjar med att sätta in $x + y$ i stället för y i likheten A :

$$\begin{aligned}(x(x+y))(x+y) &= x((x+y)(x+y))\\ (xx+xy)(x+y) &= x(xx+xy+yx+yy)\\ (xx)x+(xx)y+(xy)x+(xy)y &= x(xx)+x(xy)+x(yx)+x(yy).\end{aligned}$$

Att $(xx)x = x(xx)$ följer direkt av att A och B är sanna. Att $(xx)y = x(xy)$ följer i enlighet med att B är sann. Att $(xy)y = x(yy)$ följer av att A är sann. Då gäller att $(xy)x = x(yx)$ är sann vilket är C.

Fall två. Vi visar att om A och C är sanna, så medför det att även B är sann: Återigen börjar vi med att ersätta y med $x + y$ i likheten A :

$$\begin{aligned}(x(x+y))(x+y) &= x((x+y)(x+y))\\ (xx+xy)(x+y) &= x(xx+xy+yx+yy)\\ (xx)x+(xx)y+(xy)x+(xy)y &= x(xx)+x(xy)+x(yx)+x(yy).\end{aligned}$$

$(xx)x = x(xx)$ följer av att A och C är sanna. Att $(xy)x = x(yx)$ följer enligt att C är sann. Att $(xy)y = x(yy)$ följer enligt att A är sann. Då gäller att $(xx)y = x(xy)$ är sann, vilket är B.

Fall tre. Vi visar att om B och C är sanna, så medför det att även A är sann: Vi ersätter även här y med $x + y$ fast i likheten B :

$$\begin{aligned}(x+y)((x+y)x) &= ((x+y)(x+y))x\\ (x+y)(xx+yx) &= (xx+xy+yx+yy)x\\ x(xx)+x(yx)+y(xx)+y(yx) &= (xx)x+(xy)x+(yx)x+(yy)x.\end{aligned}$$

$x(xx) = (xx)x$ gäller eftersom B och C är sanna. Att $x(yx) = (xy)x$ gäller enligt C. Att $y(yx) = (yy)x$ gäller enligt B. Då är $y(xx) = (yx)x$, vilket är A. $\square$

Vi ska då bevisa att oktonionerna är en alternativ algebra, men innan vi gör det måste vi definiera konjugatet av en oktonion samt produkten av en oktonion med dennes konjugat. Vi har i åtanke att vi kan skriva oktonionerna som

$$u = (a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk)E = p + qE$$

enligt avsnitt 6.2 eller som

$$u = a + bi + cj + dk + eE + fI + gJ + hK$$

enligt avsnitt 6.1.

Definition 6. Med $\bar{u}$ menar vi konjugatet av u där de imaginära enheterna byter tecken. Om $u = p + qE$, så är $\bar{u} = \bar{p} - qE$ där $u \in \mathbf{O}$ och $p, q \in \mathbf{H}$ samt E är det nya imaginära elementet. Alltså att

$$\bar{u} = a - bi - cj - dk - eE - fI - gJ - hK.$$

Sats 16. *Låt $u = p+qE \in \mathbf{O}$ där $p = a+bi+cj+dk$ och $q = e+fi+gj+hk$ och E är det nya imaginära elementet. Produkten av en oktonion med sitt konjugat är ett reellt tal:*

$$u\bar{u} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2.$$

Bevis. Enligt multiplikationsregeln under avsnitt 6.2 gäller att:

$$u\bar{u} = (p + qE)(\bar{p} - qE) = (p\bar{p} + \bar{q}q) + (qp - qp)E = p\bar{p} + \bar{q}q$$

där $q, p \in \mathbf{H}$. Enligt sats 6 får vi då att

$$u\bar{u} = p\bar{p} + \bar{q}q = |p|^2 + |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2.$$

$\square$

Då har vi allt vi behöver för att bevisa att oktonionerna är en alternativ algebra.

Sats 17. *Oktonionerna är en alternativ algebra.*

Bevis. Vi ska bevisa att $(xy)y = x(yy)$ där $x = p + qE$, $y = r + sE$ och $p, q, r, s \in \mathbf{H}$. Vi börjar med att utveckla vänsterledet enligt multiplikationsformeln i avsnitt 6.2:

$$
\begin{gathered}
\big[(p+qE)(r+sE)\big](r+sE) = \\
\big[(pr-\bar{s}q)+(q\bar{r}+sp)E\big](r+sE) = \\
\big[(pr-\bar{s}q)r-\bar{s}(q\bar{r}+sp)\big]+\big[s(pr-\bar{s}q)+(q\bar{r}+sp)\bar{r}\big]E = \\
(pr)r-(\bar{s}q)r-\bar{s}(q\bar{r})-\bar{s}(sp)+s(pr)E-s(\bar{s}q)E+(q\bar{r})\bar{r}E+(sp)\bar{r}E.
\end{gathered}
$$

Sedan utvecklar vi högerledet:

$$
\begin{gathered}
(p+qE)\big[(r+sE)(r+sE)\big] = \\
(p+qE)\big[(rr-\bar{s}s)+(s\bar{r}+sr)E\big] \\
\big[p(rr-\bar{s}s)-(\overline{s\bar{r}+sr})q\big]+\big[q(\overline{rr+\bar{s}s})+(s\bar{r}+sr)p\big]E = \\
\big[p(rr-\bar{s}s)-(\bar{s}r+\bar{s}\bar{r})q\big]+\big[q(\bar{r}\bar{r}+s\bar{s})+(s\bar{r}+sr)p\big]E = \\
p(rr)-p(\bar{s}s)-(\bar{s}r)q-(\bar{s}\bar{r})q+q(\bar{r}\bar{r})E-q(s\bar{s})E+(s\bar{r})pE+(sr)pE
\end{gathered}
$$

För att vi ska bevisa att vänsterledet är lika med högerledet kommer vi gå tillbaka till sats 6 samt ha i åtanke att $p, q, r, s \in \mathbf{H}$, vilket betyder att den associativa lagen gäller. Enligt den associativa lagen kan vi skriva om vänsterledet som följer:

$$
p(rr)-(\bar{s}s)p-\bar{s}q(r+\bar{r})+q(\bar{r}\bar{r})E-(s\bar{s})qE+sp(r+\bar{r})E
$$

samt skriva om högerledet som följer:

$$
p(rr)-p(\bar{s}s)-\bar{s}(r+\bar{r})q+q(\bar{r}\bar{r})E-q(s\bar{s})E+s(\bar{r}+r)pE.
$$

Vi ser direkt att $p(rr)=p(rr)$ och att $q(\bar{r}\bar{r})E = q(\bar{r}\bar{r})E$, men de andra är inte lika självklara. Om vi ser till sats 6 som säger att $x\bar{x}$ samt $x+\bar{x}$ är ett reellt tal för alla $x \in \mathbf{H}$ så ser vi alltså att även det som är kvar i vänsterledet är lika med det som är kvar i högerledet. $\square$

7 Avslutning

På vägen från de komplexa talen till oktonionerna förlorade vi först den kommutativa lagen för att sedan förkasta den associativa lagen och ersatte den med en svagare form av associativitet, alltså den alternativa lagen. Vid nästa utvidgning hittar vi en 16-dimensionella algebra, de så kallade sedenionerna och här skulle vi förkasta den alternativa lagen mot en potensassociativ lag, men även det faktum att sedenionerna inte är en divisionsalgebra. Då kommer vi in på Frobenius generaliserade sats, att $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ och $\mathbf{O}$ är de enda alternativa divisionsalgebrorna, som jag utelämnar i det här arbetet men som ni kan läsa vidare om i [3] kapitel 19 eller i [2] kapitel 8. I avsnittet med kvaternionerna bevisade vi Eulers fyrkvadratssats och det fortsätter högre än så, från sida 259 i [2] kan du läsa om Degens åttakvadratssats som säger att för de reella talen är produkten av två summor, där båda summor består utav åtta kvadrater, också en summa bestående av åtta kvadrater.

Referenser

[1] Conway, John Horton. Smith, Derek Alan (2003). *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry.* Natick, Mass.: AK Peters

[2] Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al. (1990). *Numbers.* 2. ed. New York: Springer-Vlg

[3] Kantor, Isaj L'vovic. Solodovnikov, Aleksandr Samuilovic (1989). *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras.* New York: Springer-Vlg